Bulletin de la S. M. F.

Ervin Feldheim

Sur l'orthogonalité des fonctions fondamentales, et sur la forte convergence en moyenne des polynômes d'interpolation de Lagrange dans le cas des abscisses de Tchebychef

Bulletin de la S. M. F., tome 65 (1937), p. 1-40

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1937__65__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SUR L'ORTHOGONALITÉ DES FONCTIONS FONDAMENTALES, ET SUR LA FORTE CONVERGENCE EN MOYENNE DES POLYNOMES D'INTERPOLATION DE LAGRANGE DANS LE CAS DES ABSCISSES DE TCHEBYCHEF (1);

PAR M. ERVIN FELDHEIM

(Budapest).

Introduction.

1. Notions et notations. — Désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des valeurs réelles, différentes entre elles. Soit $l_k(x)$ la fonction entière, rationnelle, de degré $n-1$, qui est égale à 1, pour $x = x_k$, et à 0 pour les autres points $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$. La formule d'interpolation de Lagrange

$$L(x) = y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + \ldots + y_n l_n(x) \tag{1}$$

représente la fonction entière unique, de degré au plus égal à $n-1$, qui prend les valeurs données $y_1, y_2, \ldots, y_n$ respectivement pour $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$. Les abscisses d'interpolation $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont encore appelées *points fondamentaux* de l'interpolation; de même que les polynomes

$$l_1(x), \quad l_2(x), \quad \ldots, \quad l_n(x) \tag{2}$$

sont dits *fonctions fondamentales* de l'interpolation de Lagrange (2).

(1) Les principaux résultats établis dans le présent travail ont été énoncés dans deux Notes présentées à l'Académie des Sciences de Paris, le 12 octobre et le 9 novembre 1936.

(2) Ces dénominations, de même que celles analogues de l'interpolation d'Hermite, ont été introduites par M. L. Fejér.

Formons le polynome $\omega_n(x)$, de degré n, dont les zéros sont les points fondamentaux donnés :

(3) $$\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

(à un facteur constant près). Alors

(4) $$l_k(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega'_n(x_k)(x - x_k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

On vérifie facilement que ce polynome satisfait aux conditions imposées ci-dessus. On verra aussi que l'on a identiquement

(5) $$\sum_{k=1}^{n} l_k(x) = 1.$$

Si l'on considère le système de points

(6) $$\left\{\begin{array}{llll} x_1^{(1)}, & & & \\ x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & & \\ \ldots & \ldots & & \\ x_1^{(n)}, & x_2^{(n)}, & \ldots & x_n^{(n)}, \\ \ldots, & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right.$$

où la $n^{\text{ième}}$ ligne représente les n racines différentes de l'équation

$$\omega_n(x) = 0,$$

à chacune de ces valeurs correspond une fonction fondamentale $l_k^{n}(x)$.

Si $\omega_n(x)$ est le polynome de Tchebychef

(7) $$\omega_n(x) = T_n(x) = \cos n\theta \quad \text{avec} \quad x = \cos\theta \quad (-1 \leqq x \leqq 1),$$

les points fondamentaux sont

(8) $$x_k^{(n)} = \cos\theta_k^{(n)} = \cos(2k - 1)\frac{\pi}{2n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

La fonction fondamentale correspondante a l'expression suivante :

(9) $$\begin{aligned} l_k^{(n)}(x) &= l_k^{(n)}(\cos\theta) \\ &= (-1)^{k-1}\frac{\sin\theta_k^{(n)}}{n}\,\frac{\cos n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_k^{n}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

Dans le présent Mémoire nous considérerons seulement ce dernier système de points, défini par (8), que nous appellerons *le système* T. Nous négligerons l'indice supérieur, s'il n'y a aucune ambiguïté à craindre, et $x_k = \cos\theta_k$ désignera ainsi dans tout ce qui va suivre la valeur (8), de même que $l_k(x)$ signifiera l'expression (9).

Soit $y = f(x)$ une fonction définie dans l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$. Si tous les points fondamentaux sont dans cet intervalle, $L_n(x)$ ou $L_n(f)$ désignera le polynome d'interpolation de Lagrange, de degré $\leqq n-1$, qui prend aux points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les valeurs $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \ldots, y_n = f(x_n)$:

$$L_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, l_k(x). \tag{10}$$

Si la suite

$$A_0(x, n) = \sum_{k=1}^{n} |\, l_k(x)\,| \tag{11}$$

reste bornée pour $n \to \infty$, et pour une valeur fixe x_0 de $x\,(-1 \leqq x_0 \leqq 1)$, on aura, d'après le théorème de Hahn,

$$\lim_{n \to \infty} L_n(f)_{x=x_0} = f(x_0), \tag{12}$$

où $f(x)$ est une fonction continue quelconque ([1]).

Pour les abscisses de Tchebychef, (11) augmente indéfiniment, et l'on peut trouver une fonction continue $f(x)$, dont les paraboles de Lagrange formées sur le système T augmentent indéfiniment, sauf peut-être sur un ensemble de mesure nulle ([2]).

2. Convergence de la quadrature. — Si $f(x)$ est une fonction bornée, et intégrable au sens de Riemann de l'intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$, l'intégrale

$$I_n^{(1)} = \int_{-1}^{+1} [L_n(f) - f(x)]\, dx \tag{13}$$

converge vers zéro, pour les abscisses de Tchebychef (et d'autres encore, par exemple les abscisses de Legendre ([3]).

([1]) H. Hahn, *Über das Interpolationsproblem* (*Mathem. Zeitschrift*, t. 1, 1918, p. 115-142).

([2]) G. Grünwald, *Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome* (*Acta Szeged*, t. 7, 1935, p. 207-221).

([3]) *a*. T.-J. Stieltjes, *Quelques recherches sur les quadratures dites mécaniques* (*Ann. Scient. de l'École Norm. Sup.*, Paris, 1884, 3e série, p. 409-426).

b. L. Fejér, *Mechanische Quadraturen mit positiven Coteschen Zahlen* (*Math. Zeitschrift*, t. 37, 1933, p. 287-309).

M. G. Pólya a démontré que la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de quadrature

$$\lim_{n \to \infty} I_n^{(1)} = 0,$$

est que la suite

$$(14) \qquad \Lambda_1(n) = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{-1}^{+1} l_k^{(n)}(x)\, dx \right| = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k^{(n)}|$$

reste bornée pour $n \to \infty$ (¹). Les nombres $\lambda_k^{(n)}$ sont nommés *nombres de Cotes* du système de points considéré. Rappelons le résultat de M. Fejér (²), d'après lequel il suffit pour la convergence de quadrature que tous les nombres de Cotes $\lambda_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ soient non négatifs. Il en est ainsi, par exemple, pour les abscisses de Tchebychef (8).

3. **Convergence en moyenne.** — MM. Erdös et Turán (³) ont poussé plus loin l'étude de la convergence de quadrature, en démontrant l'existence, pour une classe de système de points très générale, de la convergence en moyenne

$$(15) \qquad \lim_{n \to \infty} I_n^{(2)} = \lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{+1} [L_n(f) - f(x)]^2\, dx = 0,$$

où $f(x)$ est une fonction bornée, et intégrable au sens de Riemann. Disons seulement que le système T jouit de cette propriété.

Il suffit (mais il n'est pas nécessaire) pour la convergence en moyenne que la somme

$$(16) \qquad \Lambda_2(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{-1}^{+1} l_i(x)\, l_k(x)\, dx \right|$$

soit bornée pour $n \to \infty$.

Nous ne démontrerons ce théorème que pour une fonction $f(x)$ continue. Pour le cas général, voir des indications dans le mémoire cité sous (³).

(¹) G. Pólya, *Über die convergenz von Qudraturverfahren* (*Math. Zeitschrift* t. 37, 1933, p. 294-286).

(²) Mémoire cité note (³) *b*, p. 3.

(³) P. Erdös-P. Turán, *Quadrature and Mean-Convergence in the Lagrange-Interpolation* (*Annals of Math.*, t. 38, 1937, p. 142-155).

D'après le théorème de Weierstrass, à chaque $\varepsilon > 0$, aussi petit qu'on le veut, on peut adjoindre un polynome $\varphi(x)$, de degré $\leqq n-1$, de sorte que

$$\max |f(x) - \varphi(x)| \leqq \varepsilon \qquad \text{pour} \quad |x| \leqq 1.$$

Posons

$$f(x) - \varphi(x) = \psi(x).$$

Alors

$$|\psi(x)| \leqq \varepsilon.$$

L'opération $L_n(f)$ est linéaire, et la parabole d'interpolation de Lagrange d'un polynome est égale à ce polynome lui-même. Donc

$$L_n(f) - f(x) = L_n(f-\varphi) - (f-\varphi) = L_n(\psi) - \psi(x).$$

Or, en tenant compte de ce que

$$(a-b)^2 \leqq 2(a^2+b^2),$$

il vient

$$I_n^{(2)} = \int_{-1}^{+1} [L_n(f) - f(x)]^2 \, dx = \int_{-1}^{+1} [L_n(\psi) - \psi(x)]^2 \, dx,$$

$$I_n^{(2)} \leqq 2\int_{-1}^{+1} \psi^2(x)\, dx + 2\int_{-1}^{+1} L_n(\psi)^2 \, dx.$$

Mais,

$$2\int_{-1}^{+1} \psi^2(x)\, dx \leqq 4\varepsilon^2,$$

$$2\int_{-1}^{+1} L_n(\psi)^2 \, dx = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \psi(x_i)\,\psi(x_k)\int_{-1}^{+1} l_i(x)\, l_k(x)\, dx;$$

d'où

$$I_n^{(2)} \leqq 4\varepsilon^2 + 2\varepsilon^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \left| \int_{-1}^{+1} l_i(x) l_k(x)\, dx \right| = 4\varepsilon^2 + 2\varepsilon^2 A_2(n).$$

Il en résulte que si la condition précédente est vérifiée, on a, pour une fonction $f(x)$ continue,

$$\lim_{n\to\infty} I_n^{(2)} = 0. \tag{17}$$

MM. Erdös et Turán ont montré aussi que si la suite

$$S_2(n) = \sum_{i=1}^{n} \int_{-1}^{+1} l_i^2(x)\, dx \tag{18}$$

augmente indéfiniment pour $n \to \infty$, il existe une fonction continue $g(x)$ telle que

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{-1}^{+1}[L_n(g)-g(x)]^2\,dx = +\infty. \tag{19}$$

Nous avons tenu à rappeler tous ces résultats pour bien montrer l'importance de l'étude des sommes (11), (14), (16) et (18) pour la convergence de l'interpolation, de la quadrature et pour la convergence en moyenne. Ces quantités jouent ici le même rôle que les *constantes de Lebesgue* des séries orthogonales. Mais pour les puissances plus élevées que la seconde, ces sommes cessent d'avoir cette importance, comme nous allons le voir au cours de nos recherches.

4. Forte convergence en moyenne. — Nous nous proposons de rechercher si la propriété de la convergence en moyenne (15) peut être remplacée par une condition plus forte : notamment si, pour une fonction $f(x)$, bornée et intégrable, on a encore

$$\lim_{n\to\infty} I_n^{(4)} = \lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{+1}[L_n(f)-f(x)]^4\,dx = 0. \tag{20}$$

Nous pouvons démontrer que la forte convergence en moyenne aura lieu pour toute fonction continue si, pour le système d'abscisses considéré, la somme

$$A_4(n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\left|\int_{-1}^{+1} l_i(x)\,l_k(x)\,l_p(x)\,l_q(x)\,dx\right| \tag{21}$$

reste bornée, lorsque n augmente indéfiniment. Mais ce n'est qu'une condition suffisante, et non nécessaire. Nous trouverons effectivement que, pour le système T, cette condition est en défaut, parce qu'une des sommes (21) augmente indéfiniment avec n :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{\substack{q=1\\ i\neq p\neq q}}^{n}\left|\int_{-1}^{+1} l_i^2(x)\,l_p(x)\,l_q(x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right| > O[(\log n)^2],$$

et la forte convergence en moyenne a lieu, tout de même, pour le système T. On peut naturellement poser une condition analogue à (18) :

Si la somme

$$S_4(n) = \sum_{i=1}^{n} \int_{-1}^{+1} l_i^4(x)\,dx + 6 \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^{n} \int_{-1}^{+1} l_i^2(x) l_k^2(x)\,dx$$

augmente indéfiniment, pour $n \to \infty$, on peut trouver une fonction continue $g(x)$ telle que

$$\limsup_{n \to \infty} \int_{-1}^{+1} [L_n(g) - g(x)]^4\,dx = +\infty.$$

L'étude de l'expression (21) nous a amené à la découverte d'une propriété très intéressante des fonctions fondamentales relatives au système T. Nous avons trouvé, en effet, que

$$(22) \qquad \int_{-1}^{+1} l_{i_1}(x) l_{i_2}(x) \ldots l_{i_{2k}}(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

où i_1, i_2, ..., i_{2k} représentent un nombre pair d'indices, *tous différents*, choisis parmi 1, 2, ..., n. Nous appellerons cette propriété l'*orthogonalité d'ordre pair* des fonctions fondamentales.

Nous donnerons, dans les paragraphes suivants, un développement du produit $l_i(x)\ l_k(x)$ des fonctions fondamentales appartenant au système T en série de polynomes de Tchebychef qui nous permettra de calculer les quantités

$$\int_{-1}^{+1} l_p(x) l_q(x) l_r(x) l_s(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

(p, q, r, s différents ou non). Nous appellerons ces quantités *nombres de Stieltjes d'ordre supérieur* rapportés au poids $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. On trouvera que, contrairement aux nombres de Stieltjes (et aussi aux nombres de Cotes) simples, qui sont tous positifs, ces nombres de Stieltjes d'ordre supérieur peuvent prendre des valeurs négatives.

La méthode employée pour la démonstration de (20) permet de démontrer qu'on a, en général,

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{I}_n^{(2r)} = \lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{+1} [\mathrm{L}_n(f) - f(x)]^{2r}\, dx = 0$$

pour toute fonction continue $f(x)$, si les points fondamentaux de l'interpolation sont encore ceux de Tchebychef ([1]).

Nous donnerons, dans le paragraphe 7, la démonstration de ce théorème.

Un dernier paragraphe contient enfin quelques développements relatifs à l'interpolation d'Hermite.

I. — Développement du produit $l_i(x)\, l_k(x)$.

1. La fonction fondamentale relative aux abscisses de Tchebychef (8) admet le développement suivant ([2]) :

$$(23) \qquad l_k(\cos\theta) = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \sum_{r=1}^{n-1} \cos r\theta_k \cos r\theta \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Cette formule n'est qu'un cas particulier du développement plus général que nous allons esquisser en quelques mots.

Soit donnée une fonction $p(x) \geqq \mathrm{M} > 0$, intégrable dans l'intervalle $(-1, +1)$, par exemple. On sait, d'après E. Schmidt, qu'il existe alors une suite de polynomes $\omega_n(x)$, de degré marqué par l'indice, orthogonaux à cette fonction-poids $p(x)$:

$$\int_{-1}^{+1} \omega_m(x)\, \omega_n(x)\, p(x)\, dx \begin{cases} = 0 & \text{pour } m \neq n, \\ \neq 0 & \text{pour } m = n. \end{cases}$$

Le polynome $\omega_n(x)$ admet dans l'intervalle $(-1, +1)$, n zéros réels et distincts. Supposons encore que ces polynomes sont normalisés, c'est-à-dire que

$$\int_{-1}^{+1} \omega_n^2(x)\, p(x)\, dx = 1.$$

([1]) P. Erdös-E. Feldheim, Note des *Comptes rendus*, t. 203, 1936, p. 913-915.
([2]) L. Fejér, *voir* note ([3]) *b*, p. 3.

Il est facile de voir qu'il existe une relation de récurrence entre trois polynomes $\omega(x)$ successifs

(24) $$x\omega_n(x) = A_n\omega_{n+1}(x) + B_n\omega_n(x) + A_{n-1}\omega_{n-1}(x).$$

Proposons-nous de calculer la somme

(25) $$S_n(x, \xi) = \sum_{i=0}^{n} \omega_i(\xi)\,\omega_i(x).$$

Multiplions les deux membres par $x - \xi$. La relation de réccurrence (24) donnera

$$\begin{aligned}(x-\xi)\,S_n(x, \xi) = & \sum_{i=0}^{n}[A_i\omega_{i+1}(x) + B_i\omega_i(x) + A_{i-1}\omega_{i-1}(x)]\omega_i(\xi) \\ & -\sum_{i=0}^{n}[A_i\omega_{i+1}(\xi) + B_i\omega_i(\xi) + A_{i-1}\omega_{i-1}(\xi)]\omega_i(x) \\ & = A_n[\omega_{n+1}(x)\omega_n(\xi) - \omega_n(x)\omega_{n+1}(\xi)],\end{aligned}$$

c'est-à-dire

(26) $$S_n(x, \xi) = \sum_{i=0}^{n}\omega_i(x)\,\omega_i(\xi) = A_n\frac{\omega_{n+1}(x)\omega_n(\xi) - \omega_{n+1}(\xi)\omega_n(x)}{x-\xi}.$$

C'est la formule de Christoffel-Darboux.

Or, si l'on prend pour ξ un zéro du polynome $\omega_n(x)$

$$\xi = x_k^{(n)},$$

il vient

$$S_n(x, x_k) = -A_n\frac{\omega_{n+1}(x_k)\,\omega_n(x)}{x - x_k} = -A_n\omega_{n+1}(x_k)\omega'_n(x_k)\,l_k(x);$$

d'où

(27) $$l_k(x) = -\frac{1}{A_n\omega_{n+1}(x_k)\omega'_n(x_k)}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(x_k)\,\omega_i(x).$$

On peut donner une autre expression au coefficient du second membre, qui montre que ce facteur est positif.

Faisons tendre, dans (26), la variable ξ vers x. Nous obtenons la formule de Darboux [1]

$$R_n(x) = S_n(x, x) = \sum_{i=0}^{n}\omega_i^2(x) = A_n[\omega'_{n+1}(x)\omega_n(x) - \omega'_n(x)\omega_{n+1}(x)];$$

---

[1] G. DARBOUX, *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands*

d'où

$$R_n(x_k) = -A_n\,\omega_{n+1}(x_k)\,\omega'_n(x_k).$$

de sorte que

(27 a) $$l_k(x) = \frac{1}{R_n(x_k)} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(x_k)\,\omega_i(x).$$

Cette formule donne le développement de la fonction fondamentale appartenant aux racines de tout polynome orthogonal à un poids positif, et intégrable.

Ce développement a été employé, sinon sous cette forme explicite, par plusieurs auteurs.

Si l'on veut appliquer la formule (27) au système T, il faut prendre

$$\omega_i(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos i\theta \qquad \text{avec} \quad x = \cos\theta \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\omega_0(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}.$$

Alors $A_n = \frac{1}{2}$, $x_k = (2k-1)\frac{\pi}{2n}$, et l'on retrouve (23).

2. Écrivons l'expression (23) pour deux indices i et k (différents

---

nombres (*Journal de Math. pures et appl.*, 4ᵉ série, t. 4, 1878, p. 5-57 et 377-416).

On peut donner une démonstration directe de cette formule de la façon suivante : écrivons la relation de récurrence (24) sous la forme

$$x - B_r = A_r \frac{\omega_{r+1}(x)}{\omega_r(x)} + A_{r-1}\frac{\omega_{r-1}(x)}{\omega_r(x)}$$

et dérivons les deux membres. Il vient

$$1 = A_r \frac{\omega'_{r+1}\omega_r - \omega'_r\omega_{r+1}}{\omega_r^2} + A_{r-1}\frac{\omega'_{r-1}\omega_r - \omega'_r\omega_{r-1}}{\omega_r^2};$$

d'où

$$\omega_r^2(x) = A_r[\omega'_{r+1}\omega_r - \omega'_r\omega_{r+1}] - A_{r-1}[\omega'_r\omega_{r-1} - \omega'_{r-1}\omega_r]$$

et

$$\sum_{r=0}^{n} \omega_r^2(x) = A_n[\omega'_{n+1}(x)\,\omega_n(x) - \omega'_n(x)\,\omega_{n+1}(x)]$$

$$+ \sum_{r=0}^{n-1} A_r[\omega'_{r+1}\omega_r - \omega'_r\omega_{r+1}] - \sum_{r=1}^{n} A_{r-1}[\omega'_r\omega_{r-1} - \omega'_{r-1}\omega_r].$$

Ces deux sommes se détruisent, et il reste la formule de Darboux.

ou non) et faisons leur produit. En tenant compte de la relation

$$\cos r\theta \cos s\theta = \frac{1}{2}\left[\cos(r+s)\theta + \cos(r-s)\theta\right],$$

on pourra écrire

$$l_i(x)l_k(x) = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2}\sum_{r=1}^{n-1}(\cos r\theta_i + \cos r\theta_k)\cos r\theta$$
$$+ \frac{2}{n^2}\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{s=1}^{n-1}\cos r\theta_i \cos s\theta_k[\cos(r+s)\theta + \cos(r-s)\theta].$$

Groupons ensemble les termes où l'argument est le même multiple de θ. On obtient, après quelques transformations,

$$(28)\quad l_i(\cos\theta)l_k(\cos\theta) = l_i(\cos\theta_k)l_k(\cos\theta)$$
$$+ \frac{1}{n^2}(-1)^{i+k}\left\{\sum_{r=2}^{n-1} c_r^{(i,k)}\cos r\theta + \sum_{r=n}^{2n-2} c_{2n-r}^{(i,k)}\cos r\theta\right\}$$

avec

$$(29)\qquad c_r^{(i,k)} = 2\sum_{s=1}^{r-1}\sin s\theta_i \sin(r-s)\theta_k.$$

Le coefficient $c_r^{(i,k)}$ peut se mettre sous la forme

$$c_r^{(i,k)} = \sum_{s=1}^{r-1}\left\{\cos[r\theta_k - s(\theta_i+\theta_k)] - \cos[r\theta_k + s(\theta_i - \theta_k)]\right\}.$$

Cette somme se calcule très facilement, et l'on trouve finalement

$$(30)\qquad c_r^{(i,k)} = \frac{\sin r\theta_k \sin\theta_i - \sin r\theta_i \sin\theta_k}{\cos\theta_k - \cos\theta_i}.$$

Si $i \neq k$, on aura

$$c_{2n-r}^{(i,k)} = c_r^{(i,k)}$$

et, comme dans ce cas,

$$l_i(\cos\theta_k) = 0,$$

on aura le développement

$$(31)\quad l_i(\cos\theta)l_k(\cos\theta) = \frac{1}{n^2}(-1)^{i+k}\sum_{r=2}^{2n-2} c_r^{(i,k)}\cos r\theta \qquad (i \neq k)$$

avec la valeur (30) des coefficients.

Si $k = i$, il vient

$$(32)\qquad c_r^{i,i} = 2\sum_{s=1}^{r-1} \sin s\theta_i \sin(r-s)\theta_i = \frac{\sin r\theta_i \cos\theta_i - r\cos r\theta_i \sin\theta_i}{\sin\theta_i}.$$

Alors

$$c_{2n-r}^{i,i} = c_r^{i,i} + n\cos r\theta_i,$$

et, comme

$$l_i(\cos\theta_i) = 1,$$

la relation (28) donne

$$(33)\qquad l_i^2(\cos\theta) = \frac{1}{n} + \frac{2}{n}\sum_{r=1}^{2n-2} \cos r\theta_i \cos r\theta + \frac{1}{n^2}\sum_{r=2}^{2n-2} c_r^{i,i}\cos r\theta$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

avec l'expression (32) des coefficients $c_r^{i,i}$.

3. Le développement (33) permet de retrouver, par une simple sommation, une formule de M. Fejér (¹), qu'il a obtenue au moyen de matrices orthogonales. En tenant compte de ce que

$$\sum_{i=1}^{n} \cos r\theta_i = 0 \qquad \text{pour} \quad r \neq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sin(r+1)\theta_i}{\sin\theta_i} = \sum_{i=1}^{n}\left\{1 + 2\sum_{s=1}^{\frac{r}{2}} \cos 2s\theta_i\right\} = n \qquad \text{pour} \quad r \text{ pair},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sin(r+1)\theta_i}{\sin\theta_i} = \sum_{i=1}^{n}\left\{2\sum_{s=1}^{\frac{r+1}{2}} \cos(2s-1)\theta_i\right\} = 0 \qquad \text{pour} \quad r \text{ impair},$$

il vient

$$\sum_{i=1}^{n} l_i^2(\cos\theta) = 1 + \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n-1} \cos 2r\theta = 1 + \frac{1}{2n}\,\frac{\sin(2n-1)\theta - \sin\theta}{\sin\theta}$$

et

$$(34)\qquad \sum_{i=1}^{n} l_i^2(x) = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\,\frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin\theta}.$$

C'est le résultat de M. Fejér.

(¹) L. Fejér, *Bestimmung derjenigen Abszissen eines Intervalles, etc.* (*Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa*, 2ᵉ série, Vol. I, 1932, p. 263-276).

En employant l'identité (5), on peut tirer de (34) la relation suivante :

$$(35)\qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i+1}^{n} l_i(x)\,l_k(x) = \frac{1}{4n}\left[1 - \frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin\theta}\right],$$

et l'on en déduit que

$$(36)\qquad \left|\sum\sum_{k>i} l_i(x)\,l_k(x)\right| < \frac{1}{2}.$$

II. — Orthogonalité des fonctions fondamentales.

1. La relation (31) montre que

$$\int_0^{\pi} l_i(\cos\theta)\,l_k(\cos\theta)\,d\theta = 0 \qquad \text{pour} \quad i \neq k,$$

c'est-à-dire

$$(37)\qquad \int_{-1}^{+1} l_i(x)\,l_k(x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \qquad (i \neq k).$$

C'est encore une propriété générale, qui est vraie pour toutes les fonctions fondamentales appartenant aux zéros d'un polynome orthogonal.

En effet, si $\omega_n(x)$ est un polynome orthogonal par rapport au poids $p(x)$, positif et intégrable dans l'intervalle (a, b), l'expression (4) des fonctions fondamentales donne

$$\begin{aligned} l_i(x)\,l_k(x) &= \frac{\omega_n(x)}{\omega'_n(x_i)\,\omega'_n(x_k)\,(x-x_i)\,(x-x_k)}\,\omega_n(x) \\ &= C(x-x_1)\,(x-x_2)\ldots(x-x_{i-1})\,(x-x_{i+1})\ldots \\ &\quad \times (x-x_{k-1})\,(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)\,\omega_n(x). \end{aligned}$$

Le facteur de $\omega_n(x)$ est un polynome de degré $n-2$, qu'on désigne par $Q_{n-2}(x)$: alors

$$(38)\qquad \int_a^b l_i(x)\,l_k(x)\,p(x)\,dx = \int_a^b Q_{n-2}(x)\,\omega_n(x)\,p(x)\,dx = 0,$$

d'après l'hypothèse de l'orthogonalité.

Cette relation (38) n'est vraie que pour des indices i et k différents. Par exemple, pour les abscisses de Tchebychef,

$$\int_{-1}^{+1} l_i^2(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n},$$

qu'on peut trouver de différentes manières, et qui se déduit immédiatement du développement (33).

La relation (38) résulte d'ailleurs directement du développement (27) ou (27 a). Cette dernière formule donne aussi, en général, que

$$\int_a^b l_i^2(x)\,p(x)\,dx = \int_a^b l_i(x)\,p(x)\,dx = \frac{1}{R_n(x_i)} = \frac{1}{\sum\limits_{r=0}^{n-1} \omega_r^2(x_i)},$$

les $\omega_r(x)$ étant orthonormés à $p(x)$.

2. Le développement (31) permet encore d'établir d'autres propriétés intéressantes de ces fonctions fondamentales.

Considérons quatre points fondamentaux *différents entre eux*, x_i, x_k, x_p, x_q. Il est très facile à déduire de (31) que

$$(39) \qquad \int_0^{\pi} l_i l_k l_p l_q(\cos\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{2n^4}(-1)^{i+k+p+q} \sum_{r=2}^{2n-2} c_r^{(i,k)} c_r^{(p,q)}$$
$$(i \neq k \neq p \neq q).$$

En remplaçant les coefficients $c_r^{(i,k)}$ et $c_r^{(p,q)}$ par leurs expressions (30), un calcul simple donnera que

$$\sum_{r=2}^{2n-2} c_r^{(i,k)} c_r^{(p,q)} \equiv 0,$$

de sorte que, *pour le système* T, *on aura encore orthogonalité d'ordre quatre :*

$$(40) \quad \int_{-1}^{+1} l_i(x)\,l_k(x)\,l_p(x)\,l_q(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \qquad (i \neq k \neq p \neq q).$$

Il en sera de même pour le produit de six fonctions fondamentales, d'indices différents. Un calcul facile donne que

$$\int_0^{\pi} l_{i_1} l_{i_2} l_{i_3} l_{i_4} l_{i_5} l_{i_6}\,d\theta = \frac{3\pi}{4n^6}(-1)^{i_1+i_2+i_3+i_4+i_5+i_6} \sum_{r=4}^{2n-2} \sum_{s=2}^{r-2} c_r^{(i_1,i_2)} c_s^{(i_3,i_4)} c_{r-s}^{(i_5,i_6)}.$$

Les résultats précédents permettent d'établir que l'on a

$$(41) \qquad \int_{-1}^{+1} l_{i_1}(x) l_{i_2}(x) l_{i_3}(x) l_{i_4}(x) l_{i_5}(x) l_{i_6}(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

pour $n \geqq 6$, et $i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_4 \neq i_5 \neq i_6$.

III. — Orthogonalité d'ordre pair.

1. Les résultats du paragraphe précédent suggèrent l'idée de rechercher si cette propriété d'orthogonalité n'ait lieu pour tous les produits d'un nombre *pair* de fonctions fondamentales appartenant à des abscisses de Tchebychef différentes entre elles. Nous avons trouvé le

Théorème I. — *Les fonctions fondamentales relatives aux abscisses de Tchebychef toutes différentes*

$$x_{i_1}, \quad x_{i_2}, \quad \ldots, \quad x_{i_{2k}}$$

vérifient la relation

$$\int_{-1}^{+1} l_{i_1}(x) l_{i_2}(x) \ldots l_{i_{2k}}(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

On peut écrire, en effet, en tenant compte de (4), que

$$\begin{aligned} l_{i_1} l_{i_2} \ldots l_{i_{2k}} &= C \frac{[\omega_n(x)]^{2k}}{(x - x_{i_1})(x - x_{i_2}) \ldots (x - x_{i_{2k}})} \\ &= C_1 (x - x_{r_1})(x - x_{r_2}) \ldots (x - x_{r_{n-2k}}) \omega_n^{2k-1}(x), \end{aligned}$$

où $x_{r_1}; x_{r_2}; \ldots, x_{r_{n-2k}}$ désignent les $n - 2k$ points fondamentaux restants, C et C_1 sont des constantes.

Dans le cas qui nous occupe

$$\omega_n(x) = \cos n\theta \qquad \text{avec} \quad x = \cos\theta,$$

et nous pouvons écrire les développements suivants :

$$\begin{aligned} (42) \quad \omega_n^{2k-1}(x) &= \cos^{2k-1}(x) \\ &= a_1 \cos(2k-1)n\theta + a_3 \cos(2k-3)n\theta + \ldots + a_{2k-1} \cos n\theta \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (43) \quad & (\cos\theta - \cos\theta_{r_1})(\cos\theta - \cos\theta_{r_2}) \ldots (\cos\theta - \cos\theta_{r_{n-2k}}) \\ &= \cos^{n-2k}\theta + \beta_1 \cos^{n-2k-1}\theta + \ldots + \beta_{n-2k-1} \cos\theta + \beta_{n-2k} \\ &= b_0 \cos(n-2k)\theta + b_1 \cos(n-2k-1)\theta + \ldots \\ &\quad + b_{n-2k-1} \cos\theta + b_{n-2k}. \end{aligned}$$

Alors

$$\int_0^\pi l_{i_1} l_{i_2} \ldots l_{i_{2k}}(\cos\theta)\, d\theta$$
$$= C_1 \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^{n-2k} a_{2r+1} b_s \int_0^\pi \cos(2k-2r-1)n\theta \cos(n-2k-s)\theta\, d\theta.$$

Les arguments des facteurs de la quantité à intégrer ne pouvant devenir égaux, il en résulte que le second membre est toujours nul, et l'on a bien

$$(44)\quad \int_{-1}^{+1} l_{i_1}(x) l_{i_2}(x) \ldots l_{i_{2k}}(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \qquad \left(k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

pour des points fondamentaux de Tchebychef *tous différents*. Ce résultat contient donc ceux du paragraphe précédent.

Il serait intéressant de chercher s'il existe d'autres systèmes de points fondamentaux jouissant de la propriété que les fonctions fondamentales correspondantes vérifient l'orthogonalité d'ordre supérieur.

Condition suffisante pour l'orthogonalité d'ordre pair. — Il suffit pour l'orthogonalité d'ordre $2k$ que le développement de $\omega_n^{2k-1}(x)$ suivant les différents polynomes orthogonaux $\omega_i(x)$ ne commence que par $\omega_{n-2k+1}(x)$:

$$(45)\quad \omega_n^{2k-1}(x) = \alpha_1 \omega_{n-2k+1}(x) + \alpha_2 \omega_{n-2k+2}(x) + \ldots$$
$$+ \alpha_{2k(n+1)-2n}\, \omega_{n(2k-1)}(x).$$

Remarquons que le polynome de Tchebychef de seconde espèce

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \qquad \text{avec} \quad x = \cos\theta,$$

ainsi que le polynome de Legendre $P_n(x)$ ne vérifient pas cette condition (45) si $k > 1$.

2. Nous pouvons montrer que l'orthogonalité d'ordre *impair* ne se produit en général pas, même pour les abscisses de Tchebychef. Prenons, en effet, $2k+1$ points (8), tous différents :

$$x_{i_1}, \quad x_{i_2}, \quad \ldots, \quad x_{i_{2k+1}}.$$

Pour ces points, on a

$$l_{i_1} l_{i_2} \ldots l_{i_{2k+1}} = C \frac{\omega_n^{2k+1}(x)}{(x - x_{i_1})(x - x_{i_2}) \ldots (x - x_{i_{2k+1}})}$$
$$= C_1 (x - x_{r_1})(x - x_{r_2}) \ldots (x - x_{r_{n-2k-1}})\, \omega_n^{2k}(x),$$

où $x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots, x_{r_{n-2k-1}}$ désignent encore les points fondamentaux restants. Mais ici

$$\omega_n^{2k}(x) = \cos^{2k} n\theta = a_0 \cos 2kn\theta + a_2 \cos(2k-2)n\theta + \ldots$$
$$+ a_{2k-2}\cos 2n\theta + a_{2k},$$

avec

$$a_{2k} = \pi \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$$

et

$$(\cos\theta - \cos\theta_{r_1})(\cos\theta - \cos\theta_{r_2})\ldots(\cos\theta - \cos\theta_{r_{n-2k-1}})$$
$$= b_0\cos(n-2k-1)\theta + b_1\cos(n-2k-2)\theta + \ldots + b_{n-2k-2}\cos\theta + b_{n-2k-1},$$

de sorte que

$$\int_0^\pi l_{i_1} l_{i_2} \ldots l_{i_{2k+1}}(\cos\theta)\, d\theta = C_1 \pi a_{2k} b_{n-2k-1}, \tag{46}$$

a_{2k} étant toujours différent de o, cette intégrale ne peut s'annuler que si $b_{n-2k-1} = 0$ et, en général, cela ne se réalise pas.

3. Il faut encore considérer le cas où les points fondamentaux ne correspondent pas à une même valeur de n. Prenons, par exemple, les zéros $x_i^{(m)}$ et $x_k^{(n)}$ de $T_m(x)$ et $T_n(x)$ respectivement avec $m \neq n$. Le développement (23) permet de montrer très simplement que, dans ce cas, l'orthogonalité d'ordre deux n'est plus toujours vérifiée.

Si $m \geqq n$,

$$\int_0^\pi l_i^{(m)}(\cos\theta)\, l_k^{(n)}(\cos\theta)\, d\theta$$
$$= \frac{\pi}{mn} + \frac{\pi}{mn}\sum_{r=1}^{n-1}[\cos r(\theta_i^{(m)} + \theta_k^{(n)}) + \cos r(\theta_i^{(m)} - \theta_k^{(n)})].$$

En effectuant la sommation, on aura

$$\int_{-1}^{+1} l_i^{(m)}(x)\, l_k^{(n)}(x)\, \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{mn}(-1)^k \frac{\cos n\theta_i^{(m)} \sin\theta_k^{(n)}}{\cos\theta_k^{(n)} - \cos\theta_i^{(m)}}, \tag{47}$$

où $m \geqq n$, et

$$\theta_i^{(m)} = \frac{(2i-1)\pi}{2m}, \qquad \theta_k^{(n)} = \frac{(2k-1)\pi}{2n}.$$

On voit donc que le second membre n'est pas toujours nul, si

$m \neq n$, mais il existe des valeurs particulières de i, pour lesquelles

$$\cos n\,\theta_i^{(m)} = 0,$$

pourvu que m soit un multiple impair de n.

Si

$$m = (2s-1)\,n \qquad (\text{où } s \geqq 1)$$

et

$$i = p(2s-1)+s \qquad (p = 1, 2, \ldots, n-1),$$

on aura

$$\cos\theta_i^{(m)} = \cos\frac{2p+1}{2}\pi = 0,$$

et l'on a bien, pour ce cas,

$$\int_{-1}^{+1} l_i^{(m)}(x)\,l_k^{(n)}(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

IV. — Calcul des nombres de Stieltjes d'ordre supérieur.

Avant d'entreprendre la démonstration du théorème sur la forte convergence en moyenne, signalé dans l'introduction, nous effectuerons des calculs auxiliaires, nécessaires pour la suite.

1. Nous avons déjà indiqué que

$$\int_0^{\pi} l_i\,l_k\,l_p\,l_q(\cos\theta)\,d\theta = 0 \qquad (i \neq k \neq p \neq q).$$

Le développement (31) permet encore de trouver les résultats suivants :

$$\int_0^{\pi} l_i^2\,l_p\,l_q\,d\theta = \frac{\pi}{2n^4}(-1)^{p+q}\sum_{r=2}^{2n-2} c_r^{(i,i)}c_r^{(p,q)} \qquad (i \neq p \neq q),$$

$$\int_0^{\pi} l_i^3\,l_q\,d\theta = \frac{\pi}{2n^4}(-1)^{i+q}\sum_{r=2}^{2n-2} c_r^{(i,i)}c_r^{(i,q)} \qquad (i \neq q),$$

$$\int_0^{\pi} l_i^2\,l_p^2\,d\theta = \frac{\pi}{n^2}+\frac{2\pi}{n^2}\cos\theta_i\cos\theta_p+\frac{\pi}{2n^4}\sum_{r=2}^{2n-2} c_r^{(i,i)}c_r^{(p,p)} \qquad (i \neq p),$$

$$\int_0^{\pi} l_i^4\,d\theta = \frac{\pi}{n^2}+\frac{2\pi}{n^2}\sum_{r=1}^{2n-2}\cos^2 r\,\theta_i+\frac{2\pi}{n^3}\sum_{r=2}^{2n-2} c_r^{(i,i)}\cos r\,\theta_i+\frac{\pi}{2n^4}\sum_{r=2}^{2n-2}(c_r^{(i,i)})^2.$$

On peut encore signaler les formules suivantes, quoiqu'elles ne nous serviront pas :

$$\int_0^\pi l_i l_p l_q d\theta = \frac{\pi}{n^3}(-1)^{p+q}\sum_{r=2}^{n-1} c_r^{(p,q)}\cos r\theta_i \qquad (i \neq p \neq q),$$

$$\int_0^\pi l_i^3 d\theta = \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n^3}\sum_{r=2}^{n-1} c_r^{(i,i)}\cos r\theta_i.$$

Dans toutes ces relations, les coefficients c_r sont donnés par les expressions (30) et (32). En effectuant les sommations indiquées, nous trouverons

$$(48) \quad \int_0^\pi l_i^2 l_p l_q d\theta = \frac{\pi}{2n^3}(-1)^{p+q}\frac{\sin\theta_p \sin\theta_q}{(\cos\theta_i - \cos\theta_p)(\cos\theta_i - \cos\theta_q)}$$
$$(i \neq p \neq q),$$

$$(49) \quad \int_0^\pi l_i^3 l_q d\theta = \frac{\pi}{4n^3}(-1)^{i+q}\frac{\sin\theta_q}{\sin\theta_i}\,\frac{3(1-\cos\theta_i\cos\theta_q) - 5\sin^2\theta_i}{(\cos\theta_i - \cos\theta_q)^2}$$
$$(i \neq q),$$

$$(50) \quad \int_0^\pi l_i^2 l_p^2 d\theta = \frac{\pi}{2n^3}\,\frac{\sin^2\theta_i + \sin^2\theta_p}{(\cos\theta_i - \cos\theta_p)^2}$$
$$= \frac{\pi}{4n^3}\left\{\frac{1}{\sin^2\dfrac{\theta_i+\theta_p}{2}} + \frac{1}{\sin^2\dfrac{\theta_i-\theta_p}{2}}\right\} - \frac{\pi}{2n^3} \qquad (i \neq p),$$

$$(51) \quad \int_0^\pi l_i^4 d\theta = \frac{2\pi}{3n} + \frac{\pi}{4n^3}\left(\frac{5}{\sin^2\theta_i} - \frac{11}{3}\right).$$

On a encore

$$(52) \quad \int_0^\pi l_i l_p l_q d\theta = \frac{\pi}{2n^3}(-1)^{p+q}\frac{\sin\theta_p\sin\theta_q}{(\cos\theta_i - \cos\theta_p)(\cos\theta_i - \cos\theta_q)}$$
$$+ \frac{\pi}{2n^3}(-1)^{i+q}\frac{\sin\theta_i\sin\theta_q}{(\cos\theta_i - \cos\theta_p)(\cos\theta_q - \cos\theta_p)}$$
$$+ \frac{\pi}{2n^3}(-1)^{i+p}\frac{\sin\theta_i\sin\theta_p}{(\cos\theta_i - \cos\theta_q)(\cos\theta_p - \cos\theta_q)}$$
$$(i \neq p \neq q).$$

(Ceci prouve que l'orthogonalité d'ordre 3 n'existe pas entre les fonctions fondamentales relatives aux abscisses de Tchebychef.)

Ajoutons enfin

$$(53) \quad \int_0^\pi l_i^3 d\theta = \frac{3\pi}{4n} + \frac{\pi}{2n^3}\left(\frac{3}{2\sin^2\theta_i} - 1\right).$$

2. Nous aurons besoin de la somme des modules de toutes ces intégrales, pour les différentes valeurs possibles des indices. Il est assez simple de donner des formules exactes pour les sommes positives (50), (51) et aussi pour (53), tandis que pour la somme du module de (48) et (49) nous ne ferons qu'une évaluation asymptotique. Ces derniers calculs seront développés dans le paragraphe suivant.

La formule (50) donne immédiatement que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}{}'\int_0^{\pi} l_i^2 l_p^2\,d\theta$$
$$= \frac{\pi}{4n^3}\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{p=1}^{i-1}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\pi(i+p-1)}{2n}}+\frac{1}{\sin^2\frac{\pi(i-p)}{2n}}\right)\right.$$
$$\left.+\sum_{p=i+1}^{n}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\pi(i+p-1)}{2n}}+\frac{1}{\sin^2\frac{\pi(p-i)}{2n}}\right)\right\}-\frac{\pi}{2n^3}n(n-1).$$

(Le signe $\sum\limits_{p=1}^{n}{}'$ désigne, comme partout dans la suite, que la sommation n'est étendue qu'aux valeurs de p différentes de i, indice de la sommation suivante.) Alors

$$(54)\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}{}'\int_0^{\pi} l_i^2 l_p^2\,d\theta = \frac{\pi}{4n^3}\sum_{i=1}^{2n-1}\frac{2n-i}{\sin^2\frac{\pi i}{2n}}$$
$$-\frac{\pi}{4n^3}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi(2i-1)}{2n}}-\frac{\pi(n-1)}{2n^2}$$
$$=\frac{\pi}{4n^3}(S_n-S'_n)-\frac{\pi(n-1)}{2n^2},$$

où

$$S_n=\sum_{i=1}^{2n-1}\frac{2n-i}{\sin^2\frac{\pi i}{2n}}$$

et

$$S'_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi(2i-1)}{2n}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\theta_i}.$$

La somme S'_n se calcule très aisément. En nous rappelant que $\cos\theta_i = x_i$, on a

$$S'_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i^2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{1 - x_i} - \frac{1}{-1 - x_i}\right].$$

Mais

$$\omega_n(x) = T_n(x) = 2^{n-1}\prod_{i=1}^{n}(x - x_i),$$

donc

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1 - x_i} = \frac{T'_n(1)}{T_n(1)} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{-1 - x_i} = \frac{T'_n(-1)}{T_n(-1)}.$$

Or,

$$T_n(1) = 1, \quad T_n(-1) = (-1)^n; \quad T'_n(1) = n^2, \quad T'_n(-1) = (-1)^{n-1} n^2$$

de sorte que

$$S'_n = \frac{1}{2}\left[\frac{T'_n(1)}{T_n(1)} - \frac{T'_n(-1)}{T_n(-1)}\right] = n^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\theta_i} = n^2. \tag{55}$$

Remarquons que

$$\frac{1}{\sin^2\theta_i} = v_i(0),$$

$v_i(x)$ étant le « *facteur linéaire caractéristique* » de l'interpolation d'Hermite ([1]). D'après le résultat de M. Fejér ([2]), on a

$$\sum_{i=1}^{n} v_i(x) \equiv n^2,$$

qui donne, sans calcul, la valeur de S'_n.

Passons maintenant au calcul de S_n. Il est immédiat que

$$S_n = \sum_{i=1}^{2n-1}\frac{2n - i}{\sin^2\frac{\pi i}{2n}} = \sum_{i=1}^{2n-1}\frac{i}{\sin^2\frac{\pi i}{2n}};$$

([1]) *Voir* le paragraphe 8, p. 36.

La relation (55) est d'ailleurs démontrée, par une méthode tout à fait différente dans M. Riesz, *Eine trigonometrische Interpolationsformel, etc.* (*Jahresbericht der d. Math. Vereinig*, t. 23, 1914, p. 354).

([2]) L. Fejér, *Über einige Identitäten der Interpolationstheorie, etc.* (*Acta Szeged*, t. 5, 1932, p. 145-153).

d'où

$$S_n = n \sum_{i=1}^{2n-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi i}{2n}} = \frac{n}{2} \sum_{i=1}^{2n-1} \left[\frac{1}{1 - \cos \frac{\pi i}{2n}} - \frac{1}{-1 - \cos \frac{\pi i}{2n}} \right].$$

Considérons alors le polynome

$$U_{2n-1}(\cos\theta) = \frac{\sin 2n\theta}{\sin\theta} = 2^{2n-1} \prod_{i=1}^{2n-1} \left(\cos\theta - \cos \frac{\pi i}{2n} \right);$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{2n-1} \frac{1}{1 - \cos \frac{\pi i}{2n}} = \frac{U'_{2n-1}(1)}{U_{2n-1}(1)} = \frac{4n^2 - 1}{3}$$

et

$$\sum_{i=1}^{2n-1} \frac{1}{-1 - \cos \frac{\pi i}{2n}} = \frac{U'_{2n-1}(-1)}{U_{2n-1}(-1)} = -\frac{4n^2 - 1}{3},$$

et ainsi

$$S_n = \sum_{i=1}^{2n-1} \frac{2n - i}{\sin^2 \frac{\pi i}{2n}} = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}. \tag{56}$$

La formule (54) donne enfin que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{p=1}^{n}{}' \int_0^\pi l_i^2 l_p^2 \, d\theta = \frac{\pi(n-1)(4n-5)}{12n^2}. \tag{57}$$

Cette somme reste bornée pour $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{p=1}^{n}{}' \int_0^\pi l_i^2 l_p^2 \, d\theta = \frac{\pi}{3}.$$

La connaissance de S'_n permet d'écrire simplement la somme de (51) et (53) :

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^\pi l_i^4 \, d\theta = \frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{4n} - \frac{11\pi}{12n^2}, \tag{58}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^\pi l_i^3 \, d\theta = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4n} - \frac{\pi}{2n^2}. \tag{59}$$

Ces deux sommes sont encore bornées lorsque n augmente indéfiniment.

Il est très facile de montrer que S'_n suffit aussi pour le calcul de (57). Effectuons la première sommation (par rapport à p) sous le signe $\int$. La relation (34) donne

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{p=1}^{n}{}' \int_0^\pi l_i^2 l_p^2 \, d\theta \tag{60}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_0^\pi l_i^2 \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin\theta} - l_i^2\right) d\theta$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \sum_{i=1}^{n} \int_0^\pi l_i^2 \, d\theta - \sum_{i=1}^{n} \int_0^\pi l_i^4 \, d\theta$$

$$+ \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \int_0^\pi l_i^2 \frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin\theta} \, d\theta.$$

On sait que

$$\int_0^\pi \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} \, d\theta = \begin{cases} 0 \text{ pour } m \text{ pair,} \\ \pi \text{ pour } m \text{ impair;} \end{cases} \tag{61}$$

donc, en tenant compte de (33), (32) et (55), on aura

$$\int_0^\pi l_i^2 \frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin\theta} \, d\theta = \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{n^2} \sum_{r=1}^{n-1} c_{2r}^{(i,i)} = \frac{3\pi}{n^2} \frac{1}{\sin^2\theta_i} - \frac{\pi(1+n)}{n^2}$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^\pi l_i^2 \frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin\theta} \, d\theta = 2\pi - \frac{\pi}{n}. \tag{62}$$

En remplaçant le second membre de (60) par les expressions que nous venons de calculer, nous retrouvons la valeur de (57).

La sommation sous le signe $\int$ donne aussi la valeur de la somme de (48) et (49), que nous indiquerons pour être complet, bien qu'elle ne nous servira pas dans la suite. En employant l'identité

(5), il vient

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}{}'\sum_{q=1}^{n}{}''\int_0^\pi l_i^2 l_p l_q\,d\theta$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}{}'\int_0^\pi l_i^2 l_p(1-l_i-l_p)\,d\theta$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\int_0^\pi l_i^2(1-l_i)d\theta-\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}{}'\int_0^\pi l_i^2 l_p^2\,d\theta-\sum_{i=1}^{n}\int_0^\pi l_i^3(1-l_i)\,d\theta$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\int_0^\pi l_i^2\,d\theta-2\int_0^\pi l_i^3\,d\theta+\int_0^\pi l_i^4\,d\theta\right]-\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}{}'\int_0^\pi l_i^2 l_p^2\,d\theta,$$

de sorte que, en nous reportant aux formules (57), (58) et (59), nous pouvons écrire

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}{}'\sum_{q=1}^{n}{}''\int_0^\pi l_i^2 l_p l_q\,d\theta=-\frac{\pi(n-1)(n-2)}{6n^2}. \tag{63}$$

De la même façon,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}{}'\int_0^\pi l_i^3 l_q\,d\theta=\sum_{i=1}^{n}\int_0^\pi l_i^3(1-l_i)\,d\theta=\sum_{i=1}^{n}\left[\int_0^\pi l_i^3\,d\theta-\int_0^\pi l_i^4\,d\theta\right];$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}{}'\int_0^\pi l_i^3 l_q\,d\theta=\frac{\pi(n-1)(n-5)}{12n^2}. \tag{64}$$

V. — Évaluation asymptotique de la somme du module de (48) et (49).

1. On verra facilement que la formule (48) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\int_0^\pi l_i^2 l_p l_q\,d\theta=\frac{\pi}{2n^3}\,l'_p(\theta_i)\,l'_q(\theta_i)\qquad(i\neq p\neq q), \tag{48 a}$$

où les dérivations sont faites par rapport à θ.

[Cette formule est équivalente à

$$(18\,b)\quad \int_{-1}^{+1} l_i^2(x)\,l_p(x)\,l_q(x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2n^3}(1-x_i^2)\,l'_p(x_i)\,l'_q(x_i)$$
$$(i \neq p \neq q),$$

où les dérivations se rapportent à x.]

Alors

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}{}'\sum_{q=1}^{n}{}''\left|\int_0^{\pi} l_i^2\,l_p\,l_q\,d\theta\right|$$
$$= \frac{\pi}{2n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}{}'\,|\,l'_p(\theta_i)\,|\left\{\sum_{q=1}^{n}|\,l'_q(\theta_i)\,| - |\,l'_p(\theta_i)\,| - |\,l'_i(\theta_i)\,|\right\}$$
$$= \frac{\pi}{2n^3}\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{p=1}^{n}{}'\,|\,l'_p(\theta_i)\,|\right\}^2 - \frac{\pi}{2n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}{}'\,l'^2_p(\theta_i).$$

Mais, d'après le développement (23), on a

$$l'_p(\theta_i) = -\frac{2}{n}\sum_{r=1}^{n-1} r\cos r\theta_p \sin r\theta_i;$$

d'où

$$\sum_{p=1}^{n} l'^2_p(\theta_i) = \frac{2}{n}\sum_{r=1}^{n-1} r^2\sin^2 r\theta_i$$

et

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} l'^2_p(\theta_i) = \sum_{r=1}^{n-1} r^2 = \frac{n(2n^2-3n+1)}{6}.$$

D'autre part,

$$l'_i(\theta_i) = \frac{1}{2}\cot\theta_i;$$

donc

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}{}'\,l'^2_p(\theta_i) = \frac{n(2n^2-3n+1)}{6} - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\cot^2\theta_i$$
$$= \frac{n(2n^2-3n+1)}{6} - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sin^2\theta_i} - 1\right).$$

On en déduit en tenant compte de (55) que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}{}' l_p'^2(\theta_i) = \frac{n(4n^2-9n+5)}{12} = \frac{n(n-1)(4n-5)}{12}.$$

[En comparant ce résultat avec (57), nous voyons que

$$(50\,a)\qquad \int_0^\pi l_i^2 l_p^2\,d\theta = \frac{\pi}{2n^3}\,[l_p'^2(\theta_i) + l_i'^2(\theta_p)],$$

relation assez remarquable.]

Alors

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}{}'\sum_{q=1}^{n}{}''\left|\int_0^\pi l_i^2 l_p l_q\,d\theta\right|$$
$$= \frac{\pi}{2n^3}\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{p=1}^{n}{}' |l_p'(\theta_i)|\right\}^2 - \frac{\pi(n-1)(4n-5)}{24n^2}.$$

Il nous reste encore à évaluer le premier terme du second membre, lorsque n augmente indéfiniment.

En faisant usage de l'inégalité de Cauchy

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \qquad (a_i > 0),$$

nous pouvons écrire que

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{p=1}^{n}{}' |l_p'(\theta_i)|\right\}^2 \geqq \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}{}' |l_p'(\theta_i)|\right\}^2.$$

Or,

$$l_p'(\theta_i) = \frac{\sin\theta_p}{\cos\theta_i - \cos\theta_p} \qquad (i \neq p).$$

En remarquant que

$$(\cos\theta_i - \cos\varphi)^2 \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\theta_i - \cos\varphi}\right) = \cos\theta_i\cos\varphi - 1 \leqq 0$$

et

$$(\cos\varphi - \cos\theta_i)^2 \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi - \cos\theta_i}\right) = 1 - \cos\theta_i\cos\varphi \geqq 0,$$

on voit que la fonction $|l_p'(\theta_i)|$ varie toujours dans le même sens.

Il est donc permis d'écrire l'évaluation suivante :

$$\sum_{p=1}^{n}{}' |l'_p(\theta_i)| = \sum_{p=1}^{i-1} \frac{\sin\theta_p}{\cos\theta_p - \cos\theta_i} + \sum_{p=i+1}^{n} \frac{\sin\theta_p}{\cos\theta_i - \cos\theta_p}$$

$$\geqq \frac{n}{\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_{i-1}} \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi - \cos\theta_i}\,d\varphi + \frac{n}{\pi}\int_{\theta_{i+1}}^{\theta_n} \frac{\sin\varphi}{\cos\theta_i - \cos\varphi}\,d\varphi$$

$$= \frac{n}{\pi}\Bigg[\operatorname{Log} 2\sin\frac{\pi i}{2n}\sin\frac{\pi(i-1)}{2n} - \operatorname{Log} 2\sin\frac{\pi(i-1)}{n}\sin\frac{\pi}{2n}$$

$$+ \operatorname{Log} 2\cos\frac{\pi i}{2n}\cos\frac{\pi(i-1)}{2n} - \operatorname{Log} 2\sin\frac{\pi i}{n}\sin\frac{\pi}{2n}\Bigg]$$

$$= \frac{n}{\pi}\left[\operatorname{Log}\sin\frac{\pi i}{n}\sin\frac{\pi(i-1)}{n} - \operatorname{Log} 4\sin\frac{\pi i}{n}\sin\frac{\pi(i-1)}{n}\sin\frac{2\pi}{2n}\right]$$

$$= -\frac{2n}{\pi}\operatorname{Log} 2\sin\frac{\pi}{2n} \cong \frac{2n}{\pi}\operatorname{Log}\frac{n}{\pi},$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{p=1}^{n}{}' |l'_p(\theta_i)|\right\}^2 \geqq \frac{1}{n}\,\frac{4n^4}{\pi^2}\left(\log\frac{n}{\pi}\right)^2 = \frac{4n^3}{\pi^2}\left(\log\frac{n}{\pi}\right)^2$$

et, enfin,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}{}'\sum_{q=1}^{n}{}''\left|\int_0^{\pi} l_i^2\, l_p\, l_q\, d\theta\right| \geqq \frac{2}{\pi}\left(\log\frac{n}{\pi}\right)^2 + O(1). \tag{65}$$

2. Nous démontrons maintenant que la somme du module de l'intégrale (49) tend, au contraire, vers une limite finie pour $n \to \infty$. Une simple transformation de la formule (49) donne

$$\int_0^{\pi} l_i^3\, l_q\, d\theta = \frac{\pi}{16n^3}(-1)^{i+q}\left\{3\frac{\sin\theta_q}{\sin\theta_i}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\theta_i+\theta_q}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{\theta_i-\theta_q}{2}}\right]\right.$$

$$\left. + 5\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\theta_i+\theta_q}{2}} - \frac{1}{\sin^2\frac{\theta_i-\theta_q}{2}}\right]\right\};$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}{}'\left|\int_0^{\pi} l_i^3\, l_q\, d\theta\right|$$

$$\leqq \frac{\pi}{16n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}{}'\left\{\frac{6\sin\theta_q}{\sin\theta_i\sin^2\frac{\theta_i-\theta_q}{2}} + 5\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta_i+\theta_q}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{\theta_i-\theta_q}{2}}\right)\right\}.$$

On tire alors de (55) et (56) que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\theta_i+\theta_q}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{\theta_i-\theta_q}{2}}\right)=S_n-S'_n=\frac{n(n-1)(4n+1)}{3}.$$

D'autre part,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}{}'\frac{\sin\theta_q}{\sin\theta_i\sin^2\frac{\theta_i-\theta_q}{2}}=\sum_{i=2}^{n}\sum_{q=1}^{i-1}\frac{\sin\left(\theta_i-\frac{\pi q}{n}\right)}{\sin\theta_i\sin^2\frac{\pi q}{2n}}+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{q=1}^{n-i}\frac{\sin\left(\theta_i+\frac{\pi q}{n}\right)}{\sin\theta_i\sin^2\frac{\pi q}{2n}}$$

$$=2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{q=1}^{i}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\pi q}{2n}}-2\right)$$

$$=2\sum_{q=1}^{n-1}\frac{n-q}{\sin^2\frac{\pi q}{2n}}-4\sum_{i=1}^{n-1}i$$

$$=2\sum_{q=1}^{n-1}\frac{q}{\cos^2\frac{\pi q}{2n}}-2n(n-1).$$

Or,

$$\sum_{q=1}^{n-1}\frac{q}{\cos^2\frac{\pi q}{2n}}<\frac{2n}{\pi}\,\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{2n}}+\frac{2n}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi(n-1)}{2n}}\frac{x\,dx}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{2n}{\pi}\,\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{2n}}+n\left(\cot\frac{\pi}{2n}-\frac{2}{n}\,\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}\right)$$

$$+\frac{2n}{\pi}\log\operatorname{tang}\frac{\pi}{2n}\cong\frac{2n^2}{\pi}-\frac{2n}{\pi}\log\frac{2n}{\pi}.$$

Il en résulte que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}{}'\left|\int_0^{\pi}l_i^2\,l_q\,d\theta\right|\leqq\frac{5\pi}{12}+O\left(\frac{1}{n}\right); \tag{66}$$

donc reste bornée lorsque n augmente indéfiniment.

VI. — La forte convergence en moyenne.

Considérons maintenant une fonction $f(x)$ continue, mais à part cela quelconque. D'après Weierstrass, à chaque $\varepsilon>0$ aussi petit qu'on le veut, on peut faire correspondre un polynome $\varphi(x)$, de degré au plus égal à $n-1$, tel que si l'on fait

$$f(x)-\varphi(x)=\Delta(x),$$

on ait

$$|\Delta| \leqq \varepsilon \quad \text{pour} \quad |x| \leqq 1.$$

Il résulte des propriétés élémentaires de la fonction $L_n(f)$, dont on a déjà fait usage dans le n° 3, de l'introduction, que

$$L_n(f)-f(x)=L_n(\Delta)-\Delta(x),$$

de sorte que

$$\int_{-1}^{+1}[L_n(f)-f(x)]^4 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{-1}^{+1}[L_n(\Delta)-\Delta(x)]^4 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En appliquant encore l'inégalité

$$(a-b)^4 \leqq 8(a^4+b^4),$$

on aura

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-1}^{+1}[L_n(f)-f(x)]^4 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &\leqq 8\int_{-1}^{+1} L_n(\Delta)^4 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+8\int_{-1}^{+1}\Delta^4(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Pour la démonstration de la convergence, il suffit d'établir que l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} L_n(\Delta)^4 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

est bornée lorsque $n \to \infty$. Or,

$$L_n(\Delta)=\sum_{i=1}^{n}\Delta(x_i)\,l_i(x)=\sum_{i=1}^{n}\Delta_i l_i;$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} L_n(\Delta)^4\,d\theta &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\Delta_i\Delta_k\Delta_p\Delta_q\int_0^{\pi} l_i l_k l_p l_q\,d\theta \\ &= 12\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}{}'\sum_{p=1}^{n}{}''\Delta_i^2\Delta_p\Delta_q\int_0^{\pi} l_i^2 l_p l_q\,d\theta+\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^4\int_0^{\pi} l_i^4\,d\theta \\ &\quad+6\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}{}'\Delta_i^2\Delta_k^2\int_0^{\pi} l_i^2 l_k^2\,d\theta+4\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}{}'\Delta_i^3\Delta_k\int_0^{\pi} l_i^3 l_k\,d\theta. \end{aligned}$$

C'est seul le premier terme du second membre qu'il importe d'étudier, les sommes des nombres de Stieltjes d'ordre supérieur figurant dans les autres termes étant toutes bornées, en module, comme nous l'avons montré dans les paragraphes **4** et **5**.

Alors

$$(69)\quad \int_0^\pi L_n(\Delta)^4\,d\theta \leqq 12\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}{}'\sum_{q=1}^{n}{}''\Delta_i^2\Delta_p\Delta_q\int_0^\pi l_i^2 l_p l_q\,d\theta\right| + C_1\varepsilon^4,$$

C_1 étant une constante indépendante de n.

Considérons, d'après une remarque de M. Erdös, la somme

$$K_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2\int_0^\pi l_i^2 L_n(\Delta)^2\,d\theta$$

qui peut s'écrire de la manière suivante :

$$K_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta_i^4\int_0^\pi l_i^4\,d\theta + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}{}'\Delta_i^2\Delta_p^2\int_0^\pi l_i^2 l_p^2\,d\theta$$
$$+ 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}{}'\Delta_i^3\Delta_p\int_0^\pi l_i^3 l_p\,d\theta + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}{}'\sum_{q=1}^{n}{}''\Delta_i^2\Delta_p\Delta_q\int_0^\pi l_i^2 l_p l_q\,d\theta;$$

d'où

$$(70)\qquad 12\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}{}'\sum_{q=1}^{n}{}''\Delta_i^2\Delta_p\Delta_q\int_0^\pi l_i^2 l_p l_q\,d\theta\right| \leqq 6K_n + C_2\varepsilon^4,$$

C_2 étant une autre constante.

Mais, pour les abscisses de Tchebychef,

$$\sum_{i=1}^{n} l_i^2(x) \leqq 2;$$

donc

$$K_n \leqq 2\varepsilon^2\int_0^\pi L_n(\Delta)^2\,d\theta = 2\varepsilon^2\,\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2,$$

et ainsi

$$K_n \leqq 2\pi\varepsilon^4.$$

(69) et (70) donnent alors que

$$\int_0^\pi L_n(\Delta)^4\,d\theta \leqq (C_1 + C_2 + 2\pi)\varepsilon^4$$

ou

(71)
$$\int_0^{\pi} \mathrm{L}_n(\Delta)^4 d\theta < \mathrm{C}\varepsilon^4,$$

où C est une constante indépendante de n,

$$\mathrm{I}_n \leqq 8\int_0^{\pi} \mathrm{L}_n(\Delta)^4 d\theta + 8\int_0^{\pi} \Delta^4 d\theta \leqq 8\mathrm{C}\varepsilon^4 + 8\pi\varepsilon^4 = 8(\mathrm{C}+\pi)\varepsilon^4,$$

de sorte que

(72)
$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{I}_n = 0.$$

Or,
$$0 < \int_{-1}^{+1} [\mathrm{L}_n(f) - f(x)]^4 dx \leqq \int_{-1}^{+1} [\mathrm{L}_n(f) - f(x)]^4 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

d'où le

Théorème II. — *La forte convergente en moyenne*

(73)
$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{I}_n^{(4)} = \lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{+1} [\mathrm{L}_n(f) - f(x)]^4 dx = 0$$

du polynome d'interpolation de Lagrange des fonctions continues sera vérifiée, si les points fondamentaux de l'interpolation appartiennent au système T.

Cette démonstration contient trois éléments essentiels :

1. La convergence en moyenne

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{I}_n^{(2)} = \lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{+1} [\mathrm{L}_n(f) - f(x)]^2 dx = 0,$$

qui est vraie pour les points fondamentaux formés par les zéros de tout polynome orthogonal par rapport à un poids $p(x) \geqq \mathrm{M} > 0$ (et encore pour des systèmes de points plus généraux);

2. L'évaluation

$$\sum_{i=1}^{n} l_i^2(x) \leqq 2,$$

des fonctions fondamentales provenant de M. Fejér;

3. L'orthogonalité d'ordre 4 des fonctions fondamentales.

Nous ne connaissons pas d'autres systèmes de points que celui de Tchebychef, pour lesquels la troisième de ces conditions soit vérifiée. Mais nous pouvons énoncer encore le

THÉORÈME III. — *On a, pour toute fonction continue $f(x)$*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{+1}[L_n(f)-f(x)]^4\,dx=0$$

si les points fondamentaux sont les n zéros du polynome $\omega_n(x)$ orthogonal par rapport au poids $p(x)\geq M>0$, intégrable dans l'intervalle $(-1, +1)$, et si l'on a

$$(a)\qquad \sum_{i=1}^{n} l_i^2(x) < C_1 \qquad \text{(constante indépendante de } n\text{)},$$

$$(b)\qquad \omega_n^3(x)=\sum_{k=n-3}^{3n}\alpha_k\omega_k(x).$$

Cette dernière condition (suffisante pour l'orthogonalité d'ordre 4) n'est pas nécessaire. Il suffit que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\ i\neq k\neq p\neq q}}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\left|\int_{-1}^{+1}l_i l_k l_p l_q p(x)\,dx\right|<C_2,$$

ou même que la quantité

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\ i\neq k\neq p\neq q}}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} y_i y_k y_p y_q\int_{-1}^{+1}l_i l_k l_p l_q p(x)\,dx\right|$$

soit bornée. On peut montrer qu'elle prend sa valeur maximum dans le cas où tous les y_i sont, en valeur absolue, égaux à l'unité [1]. Il faut donc que

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\ i\neq k\neq p\neq q}}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_k\varepsilon_p\varepsilon_q\int_{-1}^{+1}l_i l_k l_p l_q p(x)\,dx\right|<C_3$$

---

(1) Cette remarque est due M. Erdös.

(C_3 = constante absolue), pour $n \to \infty$, et pour $\varepsilon_i = \pm 1$, indifféremment pour tous les indices i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Pour les polynomes de Jacobi $J_n(\alpha, \beta, x)$, si $-1 \leqq \alpha < 0$; $-1 \leqq \beta < 0$, les conditions 1° et 2° sont vérifiées. Pour ce qui est de la condition 3°, nous espérons y revenir prochainement dans une autre publication [1]. Nous reviendrons également au cas où $f(x)$ est bornée et intégrable au sens de Riemann.

VII. — Convergence des intégrales $I_n^{(2r)} = \int_{-1}^{+1} [L_n(f) - f(x)]^{2r} dx$ [2].

Nous démontrons le

Théorème IV. — *On a*

$$(74) \qquad \lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{+1} [L_n(f) - f(x)]^{2r} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = 0,$$

pour toute fonction continue $f(x)$ et pour les abscisses de Tchebychef.

La convergence des intégrales $I_n^{(2r)}$ s'en déduit immédiatement.

Il suffit alors de prouver que

$$H_n = \int_{-1}^{+1} [L_n(f)]^{2r} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

reste bornée pour $n \to \infty$.

Or,

$$(75) \qquad H_n = \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_s = 2r} \frac{(2r)!}{\alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_s!} y_{i_1}^{\alpha_1} y_{i_2}^{\alpha_2} \ldots y_{i_s}^{\alpha_s} \int_0^{\pi} l_{i_1}^{\alpha_1} l_{i_2}^{\alpha_2} \ldots l_{i_s}^{\alpha_s} d\theta,$$

où Σ désigne une somme multiple : le nombre des sommations est indiqué par le nombre des indices i. $y_k = f(x_k)$, valeur de la fonction $f(x)$ pour le point fondamental x_k.

---

[1] Nous donnerons, dans un travail ultérieur, intitulé : *Quelques recherches sur l'interpolation de Lagrange et d'Hermite par la méthode du développement des fonctions fondamentales*, des développements analogues à ceux du présent Mémoire, pour le polynome de Tchebychef de second type $U_n(x)$ $\left(\text{qui est le polynome de Jacobi de paramètres } \alpha = \beta = \frac{1}{2}\right)$.

[2] Nous reproduirons ici la démonstration donnée dans la Note citée sous [1], p. 8.

Nous procéderons par une double induction. On sait, comme nous l'avons signalé dans l'introduction, que le théorème est vrai pour $r = 1$, et nous venons de démontrer qu'il en est ainsi pour $r = 2$. Supposons qu'il en est ainsi pour toute valeur de l'exposant $\leqq 2r - 2$, et démontrons qu'il reste encore vérifié pour $2r$ (r désigne une valeur fixe $\geqq 2$).

Le fait que

$$\lim_{n \to \infty} I_n^{(2)} = 0$$

permet de conclure que

$$(76) \qquad \int_0^\pi |L_n(f) - f(x)|\, d\theta \to 0 \qquad \text{pour} \quad n \to \infty \quad [1],$$

et l'on tire de l'hypothèse

$$\int_0^\pi L_n(f)^{2r-2}\, d\theta < c_1 \qquad \text{(constante indépendante de } n\text{)},$$

et de (76), que l'on a

$$(77) \qquad \int_0^\pi |L_n(f)|^k\, d\theta < c_2$$

pour toute valeur de k, comprise entre 1 et $2r - 2$.

Il reste alors à montrer que tous les termes de la somme (75) sont bornés. Nous le ferons encore par induction relativement au nombre s des exposants α_k. Si $s = 1$, on a le terme

$$H'_n = \sum_{k=1}^{n} y_k^{2r} \int_0^\pi l_k^{2r}\, d\theta.$$

Mais, d'après un résultat déjà employé,

$$l_k^2(x) \leqq 2,$$

et tous les y_k étant uniformément bornés, il en sera de même de H'_n. En désignant par s un nombre fixe > 1, supposons que les termes qui correspondent à des valeurs au plus égales à $s - 1$ sont tous bornés, et passons à la valeur suivante s.

---

[1] Consulter le Mémoire cité note [3], p. 4.

Considérons l'expression

$$(78)\quad \int_0^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^{i_1} l_k^{i_1}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^{i_2} l_k^{i_2}\right)\cdots\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^{i_s} l_k^{i_s}\right)d\theta$$
$$=\int_0^{\pi}[L_n(f)]^{\beta_1}\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^{2} l_k^{2}\right)^{\beta_2}\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^{3} l_k^{3}\right)^{\beta_3}\cdots\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^{2r} l_k^{2r}\right)^{\beta_{2r}}d\theta,$$

où β_1 est le nombre des i_k qui sont égaux à 1, β_2 le nombre de ceux qui sont égaux à 2, et ainsi de suite.

Cette expression est bornée, parce que $\int_0^{\pi}|L_n(f)|^{\beta_1}d\theta$ l'est à cause de (77) et les sommes qui y figurent sont aussi bornées [1]. Le premier membre contient, après avoir effectué les multiplications, le terme général de H_n, et d'autres termes, pour lesquels le nombre des exposants α_k est plus petit que s. Ces derniers, en vertu de l'induction, sont bornés, donc on aura ce même résultat pour le terme général de H_n. Le dernier terme de (75), où tous les α_k sont égaux à 1, est égal à

$$2r\,!\sum y_{i_1}y_{i_2}\ldots y_{i_{2r}}\int_0^{\pi} l_{i_1}l_{i_2}\ldots l_{i_{2r}}\,d\theta,$$

c'est-à-dire nul, d'après l'orthogonalité (44).

Nous avons donc démontré que

$$H_n=\int_0^{\pi}L_n(f)^{2r}\,d\theta$$

est borné si n augmente indéfiniment.

Un raisonnement connu, et employé à plusieurs reprises dans les paragraphes précédents, permet d'en déduire alors que

$$\int_{-1}^{+1}[L_n(f)-f(x)]^{2r}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\to 0,\qquad \text{pour}\quad n\to\infty,$$

---

[1] On a

$$\sum_{k=1}^{n} l_k^2(x)\leqq 2,\qquad \left|\sum_{k=1}^{n} l_k^3(x)\right|\leqq 2\sqrt{2},\qquad \ldots,$$
$$\left|\sum_{k=1}^{n} l_k^m(x)\right|\leqq C_m\quad \text{(constante indépendante de } n\text{)}.$$

et aussi que

$$\lim_{n \to \infty} J_n^{(2r)} = \lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{+1} [L_n(f) - f(x)]^{2r} dx = 0,$$

pour les points fondamentaux de Tchebychef donnés par (8).

VIII. — Quelques développements relatifs aux fonctions fondamentales de l'interpolation d'Hermite.

La formule d'interpolation d'Hermite définit un polynome de degré au plus égal à $2n-1$, qui prend les valeurs données y_1, $y_2, \ldots, y_n$, aux points d'abscisses distinctes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tandis que sa dérivée prend, aux mêmes points, les valeurs prescrites $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$:

$$X_n(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k h_k(x) + \sum_{\kappa=1}^{n} y'_\kappa \mathfrak{h}_k(x), \tag{79}$$

les polynomes $h_k(x)$ et $\mathfrak{h}_k(x)$ étant appelés respectivement les *fonctions fondamentales de première et de seconde espèce* de l'interpolation d'Hermite. Pour ces polynomes, on a

$$h_k(x_i) = 0, \quad \mathfrak{h}_k(x_i) = 0 \quad (\text{si } i = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n),$$
$$h_k(x_k) = 1, \quad \mathfrak{h}_k(x_k) = 0;$$
$$h'_k(x_i) = 0, \quad \mathfrak{h}'_k(x_i) = 0 \quad (\text{pour } i \neq k),$$
$$h'_k(x_k) = 0, \quad \mathfrak{h}'_k(x_k) = 1.$$

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les n racines distinctes de l'équation

$$\omega(x) = \omega_n(x) = 0,$$

et si $l_k(x)$ désigne la fonction fondamentale de l'interpolation de Lagrange, donnée par (4), on aura

$$h_k(x) = v_k(x)[l_k(x)]^2 = \left[1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)\right] l_k^2(x), \tag{80}$$

$v_k(x)$ étant appelé le *facteur linéaire caractéristique*, et

$$\mathfrak{h}_k(x) = (x - x_k) l_k^2(x). \tag{81}$$

La formule (33) permet de donner, pour les abscisses de Tchebychef, des développements pour $h_k(x)$ et $\mathfrak{h}_k(x)$.

Pour ces points, on a

$$v_k(x) = \frac{1 - xx_k}{1 - x_k^2} = \frac{1 - \cos\theta_k \cos\theta}{\sin^2\theta_k}$$

et

$$l_k^2(\cos\theta) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\sum_{r=1}^{2n-1}\left[\frac{\cos\theta_k}{\sin\theta_k}\sin r\theta_k + (2n - r)\cos r\theta_k\right]\cos r\theta.$$

Nous avons trouvé par un calcul facile

$$(82)\qquad h_k(x) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\sum_{r=1}^{2n-1}\sum_{s=1}^{r}\cos s\theta_k \cos s\theta$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\sum_{r=1}^{2n-1}(2n - r)\cos r\theta_k \cos r\theta.$$

On déduit de ce développement une propriété très intéressante des fonctions fondamentales de première espèce de l'interpolation d'Hermite.

Considérons, en effet, la série

$$S = \frac{2}{n}\left(\frac{1}{2} + \cos\theta_k\cos\theta + \cos 2\theta_k \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta_k \cos n\theta + \ldots\right),$$

et posons

$$s_0(\theta_k) = \frac{1}{n},$$

$$s_r(\theta_k) = \frac{2}{n}\left(\frac{1}{2} + \cos\theta_k\cos\theta + \ldots + \cos r\theta_k \cos r\theta\right) \qquad (r = 1, 2, \ldots).$$

Nous avons vu [relation (23)], que

$$l_k^{(n)}(\cos\theta) = s_{n-1}(\theta_k),$$

et la formule (82) montre que

$$(83)\qquad h_k^{(n)}(\cos\theta) = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{2n-1}}{2n}.$$

L'interpolation d'Hermite peut donc être considérée, en quelque sorte, comme la moyenne arithmétique de l'interpolation de Lagrange.

Remarquons encore [on le voit d'ailleurs sur la formule (83)], que, pour les abscisses de Tchebychef, tous les $h_k(x)$ sont positifs, tandis que les $l_k(x)$ présentent $n-1$ changements de signe.

Pour les fonctions fondamentales de seconde espèce, on a le développement

$$(84)\qquad \mathfrak{h}_k(x) = \frac{\sin\theta_k}{n^2}\sum_{r=1}^{2n-1}\sin r\theta_k \cos r\theta.$$

On déduit immédiatement de (82) la somme des fonctions $h_k(x)$. En remarquant que

$$\sum_{k=1}^{n}\cos r\theta_k = 0 \qquad \text{si} \quad r \neq 0,$$

on retrouve l'identité connue

$$(85)\qquad \sum_{k=1}^{n} h_k(x) \equiv 1.$$

On peut encore calculer aisément la somme des fonctions fondamentales $\mathfrak{h}_k(x)$. Étant donné que

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(r-1)\theta_k = \begin{cases} 0 & \text{si } r \neq 1, \\ n & \text{si } r = 1, \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(r+1)\theta_k = \begin{cases} 0 & \text{si } r \neq 2n-1, \\ -n & \text{si } r = 2n-1, \end{cases}$$

il vient

$$\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{h}_k(x) = \frac{1}{2n^2}\sum_{r=1}^{2n-1}\cos r\theta\sum_{k=1}^{n}[\cos(r-1)\theta_k + \cos(r+1)\theta_k],$$

et finalement

$$(86)\qquad \sum_{k=1}^{n}\mathfrak{h}_k(x) = \frac{1}{2n}[\cos\theta + \cos(2n-1)\theta] \quad (^1).$$

Les fonctions fondamentales $h_k(x)$ ne jouissent pas de la propriété d'orthogonalité, tandis que les $\mathfrak{h}_k(x)$ sont orthogonales. On

---

(1) L. Fejér, *Über Weierstrassche Approximation*, etc. (*Math. Annalen*, t. 102, 1930, p. 707-725). *Voir* le n° 17, formule II.

peut le montrer sur le développement (82) et (83), mais pour les $\mathfrak{h}_k(x)$ on peut aussi raisonner de la manière suivie dans le paragraphe 3.

En effet, si $i \neq k$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_i(x)\mathfrak{h}_k(x) &= (x-x_i)(x-x_k)\frac{\omega_n^4(x)}{\omega_n'^2(x_i)\omega_n'^2(x_k)(x-x_i)^2(x-x_k)^2}\\ &= C(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots\\ &\quad\times(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)\omega_n^3(x).\end{aligned}$$

Mais

$$\omega_n^3(x) = \cos^3 n\theta = \frac{1}{4}\cos 3n\theta + \frac{3}{4}\cos n\theta$$

et

$$\frac{\omega_n(x)}{(x-x_i)(x-x_k)} = b_0\cos(n-2)\theta + b_1\cos(n-3)\theta + \ldots + b_{n-3}\cos\theta + b_{n-2}.$$

On a donc bien

$$(87)\qquad \int_0^\pi \mathfrak{h}_i(\cos\theta)\mathfrak{h}_k(\cos\theta)\,d\theta = \int_{-1}^{+1}\mathfrak{h}_i(x)\mathfrak{h}_k(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \qquad (i \neq k).$$

Nous pouvons démontrer de la même façon le

THÉORÈME V. — *Les fonctions fondamentales de seconde espèce* $\mathfrak{h}_k(x)$ *vérifient l'orthogonalité d'ordre supérieur quelconque*

$$(88)\qquad \int_{-1}^{+1}\mathfrak{h}_{i_1}\mathfrak{h}_{i_2}\ldots\mathfrak{h}_{i_r}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

si les points fondamentaux sont encore ceux de Tchebychef.

Pour les fonctions fondamentales de première espèce, on a

$$\int_0^\pi h_i(x)h_k(x)\,d\theta = \frac{\pi}{n^2} + \frac{\pi}{2n^4}\sum_{r=1}^{2n-1} r^2\cos r\theta_i\cos r\theta_k.$$

Mais

$$\sum_{r=1}^{2n-1} r^2\cos r(\theta_i+\theta_k) = \frac{n}{\sin^2\dfrac{\theta_i+\theta_k}{2}} - 2n^2;$$

donc

$$(89)\qquad \int_{-1}^{+1} h_i(x)h_k(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n^3}\,\frac{1-\cos\theta_i\cos\theta_k}{(\cos\theta_i-\cos\theta_k)^2} \qquad (i \neq k).$$

Si $i = k$,

$$\int_0^\pi h^2\, d\theta = \frac{\pi}{n^2} + \frac{\pi}{4n^4} \sum_{r=1}^{2n-1} (r^2 + r^2 \cos 2r\theta_k)$$

et

$$\int_{-1}^{+1} h_k^2(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{12n^3}\left(\frac{3}{\sin^2\theta_k} + 8n^2 + 1\right) \tag{90}$$

Ensuite

$$\int_0^\pi h_i\, \mathfrak{h}_k\, d\theta = -\frac{\pi \sin\theta_k}{2n^4} \sum_{r=1}^{2n-1} r \sin r\theta_k \cos r\theta_i$$

$$= -\frac{\pi \sin\theta_k}{4n^4} \sum_{r=1}^{2n-1} [r \sin r(\theta_i + \theta_k) - r \sin r(\theta_i - \theta_k)].$$

On a

$$\sum_{r=1}^{2n-1} r \sin r(\theta_i + \theta_k) = -n \frac{\cos\dfrac{\theta_i+\theta_k}{2}}{\sin\dfrac{\theta_i+\theta_k}{2}};$$

donc

$$\int_{-1}^{+1} h_i(x)\, \mathfrak{h}_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2n^3} \frac{\sin^2\theta_k}{\cos\theta_i - \cos\theta_k} \qquad (i \neq k). \tag{91}$$

Si $i = k$,

$$\int_{-1}^{+1} h_k(x)\, \mathfrak{h}_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4n^3} \cos\theta_k \tag{92}$$

Enfin,

$$\int_{-1}^{+1} \mathfrak{h}_k^2(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2n^3} \sin^2\theta_k \quad (^1). \tag{93}$$

Les développements précédents nous permettraient d'établir la convergence de la quadrature, et de la convergence en moyenne de l'interpolation d'Hermite sur le système T, mais, étant donnée la convergence absolue,

$$\lim_{n\to\infty} X_n(x) = f(x)$$

des paraboles d'interpolation d'Hermite de toute fonction continue dans l'intervalle $(-1, +1)$, ces questions, dans le cas des abscisses de Tchebychef, n'ont aucun intérêt.

---

(1) Nous donnerons une application des relations (88) et (93) dans le travail signalé note (1), p. 33.