BULLETIN DE LA S. M. F.

N. CIORANESCU

Sur la représentation des fonctions analytiques de plusieurs variables réelles

Bulletin de la S. M. F., tome 65 (1937), p. 41-52

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1937__65__41_0>

SUR LA REPRÉSENTATION DES FONCTIONS ANALYTIQUES DE PLUSIEURS VARIABLES RÉELLES;

PAR M. N. CIORANESCU.

Introduction.

Une fonction analytique $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, de plusieurs variables réelles $x_1, x_2, \ldots, x_r$, est la trace de la fonction analytique $f(z_1, z_2, \ldots, z_r)$ des variables complexes $z_k = x_k + iy_k$ ([1]). De ce fait, il résulte que l'on peut transposer certaines propriétés des fonctions analytiques des variables complexes à celles des variables réelles.

Mais, dans l'étude des équations aux dérivées partielles du type elliptique, dont les solutions sont analytiques, il y a intérêt à considérer certaines fonctions analytiques seulement dans le domaine réel.

Dans ce qui va suivre, je montre comment toute fonction analytique de variables réelles peut être représentée par une série simple qui contient linéairement une infinité des fonctions harmoniques, ce qui est de nature à faciliter l'étude directe des fonctions analytiques réelles.

1. Une fonction $f(x, y)$ de deux variables réelles sera dite analytique autour du point $x = y = 0$, si ses valeurs, dans le voisinage de ce point, coïncident avec celles de la série double

$$\sum_{m,n}^{\infty} A_{mn} x^m y^n \tag{1}$$

([1]) H. DULAC, *Sur les séries de Mac-Laurin à plusieurs variables* (*Acta Mathem.*, t. 31, p. 95). M. P. Montel a attiré mon attention sur la liaison entre les deux domaines complexe et réel, et m'a conduit à préciser sur plusieurs points la rédaction de cet article. Je lui adresse mes vifs remerciements.

convergente au moins en un point (x_0, y_0) tel que $x_0 y_0 \neq 0$. Il résulte de la définition même de la convergence d'une série multiple ([1]), que la série (1) et toutes les séries simples qu'on déduit de (1), sont absolument et uniformément convergentes pour $|x| < x_0$, $|y| < y_0$. Il en est en particulier ainsi de la série diagonale

$$(1') \qquad \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, y),$$

$P_n(x, y)$ étant des polynomes homogènes.

Réciproquement, on sait, d'après les travaux de Dulac ([2]) et de E. E. Lévi ([3]), que si une série telle que (1') est convergente sur un arc de courbe C passant par l'origine (et qui ne se réduit pas à une ligne droite), elle est la série de Taylor d'une certaine fonction analytique (définie aussi dans le domaine complexe), elle converge absolument et uniformément dans un certain domaine autour de l'origine et par conséquent, on peut faire sa somme, par lignes, colonnes ou l'ordonner en une série simple de n'importe quelle manière.

Si dans le développement (1') de la fonction analytique on pose

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

la série va prendre la forme suivante

$$(2) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\theta),$$

où

$$(3) \qquad P_n(\theta) = \sum_{k=0}^{\leq \frac{n}{2}} [a_{n-2k}^{(n)} \cos(n-2k)\theta + b_{n-2k}^{(n)} \sin(n-2k)\theta],$$

et c'est plutôt sous cette forme (2) que nous considérons les développements des fonctions analytiques régulières autour de l'ori-

---

([1]) W. F. Osgood, *Lehrbuch der Funktionen theorie*, II, 1929, p. 31.

([2]) Dulac, *loc. cit.*, p. 41.

([3]) E. E. Levi, *Serie di Taylor e funzuni analitiche di piu variabili* (*Atti della Reale Acc. Naz. dei Lincei*, vol., 21, 1912, p. 816).

gine. Si l'on désigne par $\| P_n \|$ la somme

$$(3') \qquad \| P_n \| = \sum_{k=0}^{\leq \frac{n}{2}} (| a_{n-2k}^{(n)} | + | b_{n-2k}^{(n)} |),$$

on sait que la série

$$(2') \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \| P_n \| r^n$$

a le même rayon de convergence que la série (2).

Réciproquement, une série de la forme (2) telle que la série (2') soit convergente pour $r < R$, représente une fonction analytique de x et y au moins dans le domaine

$$|x| < \frac{R}{2}, \qquad |y| < \frac{R}{2}.$$

La fonction croissante de r, $N(r)$ définie par la série (2') ou, ce qui revient au même, par la série

$$(2'') \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (| a_n^{n+2k} | + | b_n^{(n+2k)} |) r^{n+2k},$$

est ce que M. Bernstein (¹) appelle la *norme* de la fonction analytique définie par (2).

Après ces généralités sur les développements en séries des fonctions analytiques de deux variables réelles, montrons comment on peut obtenir un développement en série simple, valable pour toute fonction analytique régulière autour de l'origine

2. Soit

$$(2) \qquad f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\leq \frac{n}{2}} r^{2k} Q_{n-2k}^{(n)}(r, \theta)$$

où

$$Q_{n-2k}^{(n)}(r, \theta) = r^{n-2k} [a_{n-2k}^{(n)} \cos(n-2k)\theta + b_{n-2k}^{(n)} \sin(n-2k)\theta]$$

est un polynome harmonique homogène de degré $n - 2k$.

(¹) S. Bernstein, *Mathematische Annalen*, B. 59, p. 26.

Il est facile de voir que l'on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\leq \frac{n}{2}} r^{2k} Q_{n-2k}^{(n)}(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k} \sum_{n=2k}^{\infty} Q_{n-2k}^{(n)}(r, \theta).$$

Comme, d'autre part, on a

$$(4) \quad \sum_{n=2k}^{\infty} Q_{n-2k}^{(n)}(r, \theta) = \sum_{p=0}^{\infty} (a_p^{(p+2k)} \cos p\theta + b_p^{(p+2k)} \sin p\theta) r^p = u_k(r, \theta),$$

ce qui montre que $u_k(r, \theta)$ est une fonction harmonique, régulière pour $r < \mathrm{R}$, si la série (2) est convergente pour $r = \mathrm{R}$. En effet, si $\mathrm{N}(\mathrm{R})$ est la norme de $f(r, \theta)$ pour $r = \mathrm{R}$, il en résulte que l'on a

$$\| \mathrm{P}_n \| \leq \frac{\mathrm{N}(\mathrm{R})}{\mathrm{R}^n},$$

et comme

$$| a_{n-2k}^{(n)} \cos(n - 2k)\theta | + | b_{n-2k}^{(n)} \sin (n - 2k) | < \frac{1}{r^{2k}} \left(\frac{r}{\mathrm{R}}\right)^n \mathrm{N}(\mathrm{R}).$$

il en résulte bien la convergence absolue et uniforme de la série (4) pour $r < \mathrm{R}$. Par conséquent, on peut écrire

$$(\mathrm{H}) \qquad f(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(r, \theta) r^{2k},$$

et la série du second membre converge absolument et uniformément pour $r < \mathrm{R}$.

C'est ce développement des fonctions analytiques que nous voulons signaler.

Si l'on pose

$$\mathrm{N}_k(r) = \sum_{p=0}^{\infty} (| a_p^{(p+2k)} | + | b_p^{(p+2k)} |) r^p,$$

par la même transformation de l'expression (2′) de $\mathrm{N}(r)$, on voit que l'on peut aussi écrire

$$(5) \qquad \mathrm{N}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{N}_k(r) . r^{2k},$$

et comme, d'autre part, on a évidemment

$$|u_k(r,\theta)| < N_k(r),$$

il en résulte que la série (H) converge absolument et uniformément dans le même cercle C_R que la série (2).

Réciproquement toute série de la forme (H), absolument et uniformément convergente pour $r = R$, représente une fonction analytique $F(x, y)$, régulière au moins pour $|x| < \frac{R}{2}$, $|y| < \frac{R}{2}$. En effet, comme par hypothèse on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} |u_k(R,\theta)| R^{2k} \leqq S,$$

il en résulte que l'on a, quels que soient θ et $r \leqq R$,

$$|u_k(r,\theta)| \leqq \frac{S}{R^{2k}},$$

ce qui permet d'obtenir de l'expression (4) de $u(r, \theta)$ et des formules de Fourier, les inégalités suivantes :

$$|a_p^{(p+2k)}| \leqq \frac{2S}{R^{p+2k}}; \qquad |b_p^{(p+2k)}| \leqq \frac{2S}{R^{p+2k}}.$$

Par conséquent, si l'on passe du développement (H) à la série (2), cette série représente bien une fonction analytique, car la série (2') est convergente pour $r < R$, comme on le déduit de l'expression (3') de $\| P_n \|$ et des inégalités précédentes qui permettent d'écrire

$$\| P_n(\theta) \| < \frac{2(n+1)S}{R^n}.$$

3. On sait depuis longtemps que les fonctions harmoniques sont des fonctions analytiques. L'existence du développement (H), valable pour toute fonction analytique régulière autour d'un certain point, nous autorise à considérer les fonctions harmoniques comme des fonctions analytiques fondamentales à l'aide desquelles on peut représenter toute fonction analytique.

Le développement (H) attache à chaque fonction analytique $f(r, \theta)$ une suite infinie de fonctions harmoniques $u_k(r, \theta)$ qui seront appelées les *coefficients harmoniques de* $f(r, \theta)$.

4. Le développement de la fonction analytique $f(r, \theta)$, régulière pour $r \leqq \mathrm{R}$, en série (H), est *unique*, car si l'on a

$$f(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(r, \theta) r^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(r, \theta) r^{2k}$$

avec

$$u_k(r, \theta) = \sum_{p=0}^{\infty} (a_p^{(p+2k)} \cos p\theta + b_p^{(p+2k)} \sin p\theta) r^p$$

$$v_k(r, \theta) = \sum_{p=0}^{\infty} (a_p'^{(p+2k)} \cos p\theta + b_p'^{(p+2k)} \sin p\theta) r^p,$$

fonctions harmoniques régulières, telles que les séries (5) correspondantes soient convergentes, il en résulte

$$(6) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} w_k(r, \theta) r^{2k} \equiv 0,$$

quels que soient θ et $r \leqq \mathrm{R}$. Mais si l'on pose

$$w_k(r, \theta) = \sum_{p=0}^{\infty} (\alpha_p^{(p+2k)} \cos p\theta + \beta_p^{(p+2k)} \sin p\theta) r^p,$$

il en résulte que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| \pi_n \| r^n \qquad \text{où} \qquad \| \pi_n \| = \sum_{k=0}^{\leqq \frac{n}{2}} (|\alpha_{n-2k}^{(n)}| + |\beta_{n-2k}^{(n)}|)$$

est aussi convergente pour $r \leqq \mathrm{R}$, car on a

$$|\alpha_n^{(p+2k)}| \leqq |a_p^{(p+2k)}| + |a_p'^{(p+2k)}|; \qquad |\beta_n^{(p+2k)}| \leqq \dots$$

Mais, alors, on peut écrire la série (6) sous la forme (2), ou bien sous la forme

$$(6') \qquad \sum_{k=0}^{\infty} [\mathrm{A}_n(r) \cos n\theta + \mathrm{B}_n(r) \sin n\theta] \equiv 0,$$

où

$$\mathrm{A}_n(r) = r^n \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n^{(n+rk)} r^{2k}; \qquad \mathrm{B}_n(r) = r^n \sum_{k=0}^{\infty} \beta_n^{(n+2k)} r^{2k}.$$

De l'identité (6′) il résulte que l'on doit avoir

$$\mathrm{A}_n(r) \equiv 0; \qquad \mathrm{B}_n(r) \equiv 0.$$

pour tout $r \leq R$, ce qui entraîne

$$\alpha_n^{(n+2k)} = 0; \qquad \beta_n^{(n+2k)} = 0 \qquad (n, k = 0, 1, \ldots, \infty),$$

c'est-à-dire $w_k(r, \theta) \equiv 0$.

5. On appelle fonction polyharmonique d'ordre m toute solution de l'équation

$$\Delta^m u = 0 \qquad \text{où} \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad \text{et} \qquad \Delta^p = \Delta(\Delta^{p-1}).$$

C'est M. E. Goursat qui a montré le premier que toute fonction biharmonique peut s'exprimer à l'aide de deux fonctions harmoniques. Ce résultat a été étendu ensuite par M. E. Almansi à toute fonction polyharmonique d'ordre m, en montrant qu'une telle fonction peut toujours se mettre sous la forme

$$\sum_{k=0}^{m-1} (x^2+y^2)^k u_k(x, y),$$

$u_k(x, y)$ étant des fonctions harmoniques ([1]).

L'existence du développement (H) pour toute fonction analytique, montre, une fois de plus, que les fonctions polyharmoniques jouent dans la classe des fonctions analytiques de plusieurs variables réelles le rôle que jouent les polynomes dans la classe des fonctions analytiques à une variable.

De plus, on déduit du développement (H) que l'on peut aussi écrire

$$(\mathrm{P}) \qquad f(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k^{(m)}(r, \theta) r^{2mk},$$

où

$$u_k^{(m)}(r, \theta) = \sum_{i=0}^{m-1} u_{km+i}(r, \theta) r^{2i}$$

est une fonction polyharmonique d'ordre m. Mais nous n'allons pas considérer ici ces développements, nous contentant de les signaler.

([1]) Pour les propriétés des fonctions polyharmoniques à un nombre quelconque de variables et pour la littérature respective *voir* MIRON NICOLESCO, *Les fonctions polyharmoniques* dans *Actualités Scientifiques*, fasc. 331, Paris, Hermann, 1936.

6. Considérons le développement (H) de la fonction analytique $f(r)$. Il est facile de voir que ses coefficients harmoniques peuvent être mis sous la forme

$$u_k(r, \theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} r^n \int_0^{2\pi} \frac{f_r^{(n+2k)}(o, \alpha)}{(n+2k)!} \cos n(\theta - \alpha)\, d\alpha$$
$$= \frac{1}{\pi}\sum_{0}^{\infty} r^n \int_0^{2\pi} P_{n+2k}(\alpha) \cos n(\theta - \alpha)\, d\alpha.$$

Si l'on tient compte de la formule de Pizzetti qui donne la valeur moyenne sur une circonférence d'une fonction analytique, savoir

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r, \theta)\, d\theta = f(o, o) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\Delta^k f)o}{2^k k!\, 2.\,4.\,\ldots,\, 2k} r^{2k},$$

il en résulte

$$u_k(o, o) = \frac{(\Delta^k f)o}{2^{2k}(k!)^2}.$$

Supposons que, sur le cercle C_r, on ait

$$|u_k(r, \theta)| \leqq M_k(r),$$

et considérons l'expression

$$(7) \qquad \mathfrak{M}(r; f) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n(r) r^{2n},$$

que nous appelons *le pseudo-module* ou *la majorante harmonique* de $f(r, \theta)$ sur le cercle C_r. Comme on a

$$M_k(r) \leqq N_r(r),$$

il en résulte que la série (7) a au moins le même rayon de convergence que la série (5) qui donne la norme $N(r)$ de $f(r, \theta)$. Par conséquent, si la série (2) qui définit $f(r, \theta)$ converge pour $r = R$, il en est de même de la série (7), donc $\mathfrak{M}(R; f)$ existe. Réciproquement, si $\mathfrak{M}(R; f)$ existe, le développement (H) de $f(r, \theta)$ est absolument et uniformément convergent pour $r \leqq R$.

Cela montre que ce pseudo-module peut rendre les mêmes services que la norme $N(r)$ de $f(r, \theta)$, qui d'ailleurs est un pseudo-module particulier obtenu en prenant $M_k = N_k$, et, comme la limite $N_k(r)$ n'est atteinte que pour certains polynomes harmoniques, les limites fournies par $N(r)$ sont en général trop larges.

$\mathfrak{M}(r; f)$ est une fonction croissante de r, et il est évident que

$$|f(r, \theta)| \leqq \mathfrak{M}(r; f),$$

l'égalité pouvant avoir lieu pour toute valeur de r, comme par exemple pour la fonction $\frac{1}{1-r^2}$.

Si $f_1(r, \theta)$, $f_2(r, \theta)$ sont deux fonctions analytiques et c_1, c_2 des constantes, on vérifie facilement que l'on a

$$\mathfrak{M}(r; c_1 f_1 + c_2 f_2) \leqq |c_1| \mathfrak{M}(r; f_1) + |c_2| \mathfrak{M}(r; f_2).$$

Supposons que $\mathfrak{M}(R; f)$ soit fini; on déduit alors que l'on a

(9) $$|u_k(r, \theta)| \leqq \frac{\mathfrak{M}(R; f)}{R^{2k}},$$

quels que soient $r \leqq R$ et θ. Ces inégalités sont analogues aux inégalités de Cauchy pour les coefficients d'une fonction analytique d'une variable complexe.

Grâce aux inégalités précédentes, on peut obtenir un théorème *à la Liouville*, le rôle du module dans le domaine complexe étant joué par le pseudo-module. Ainsi, on peut montrer que :

Si l'expression $\mathfrak{M}(R; f) R^{-m}$ reste bornée quel que soit R, *la fonction $f(r, \theta)$ se réduit à un polynome de degré $\leqq m$.*

En effet, du développement (H) de $f(r, \theta)$, on déduit que si l'on a

$$\frac{\mathfrak{M}(R; f)}{R^m} < M,$$

alors on a, quel que soit R,

$$|u_k(r, \theta)| < \frac{M}{R^{2k-m}},$$

ce qui entraîne $u_k(r, \theta) \equiv 0$ pour tout $k > E\left(\frac{m}{2}\right)$.

Par conséquent, le développement (H) de $f(r, \theta)$ se réduit à

$$f(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\leqq \frac{m}{2}} u_k(r, \theta) r^{2k}.$$

Mais d'après un théorème de H. Poincaré [1], une fonction harmonique $u(M)$ qui satisfait pour $M \to \infty$ à une égalité de la forme suivante :

$$|u(M)| < k.\ \overline{OM}^{\alpha} \qquad (\alpha > 0),$$

O étant un point fixe, se réduit à un polynome de degré $\leqq \alpha$. Cela suffit pour achever la démonstration de la proposition annoncée. Une fonction $f(r, \theta)$ telle que $\mathfrak{M}(R; f)$ reste fini pour toute valeur finie de (R), sera dite *pseudo-entière* [2].

7. Une combinaison linéaire de plusieurs fonctions analytiques développées en séries (H), peut se mettre facilement sous la même forme. Il n'en est pas de même pour le produit des fonctions analytiques écrites sous la forme (H). Cela peut se voir facilement en remarquant que le produit de deux fonctions harmoniques, qui, par rapport au développement (H) est une fonction analytique très particulière, ne peut pas être mis d'une manière simple sous la forme (H). Seulement les produits de la forme $\varphi(r^2)\ f(r, \theta)$, où $\varphi(r^2)$ est une fonction analytique de r^2, peuvent se mettre facilement sous la forme (H), si $f(r, \theta)$ est sous cette forme

$$\text{(H)} \qquad f(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(r, \theta) r^{2k},$$

converge absolument et uniformément pour $r \leqq R$, il en résulte que l'on peut écrire

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial u_k}{\partial \theta} r^{2k}; \qquad r\frac{\partial f}{\partial r} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[2k u_k(r, \theta) + r\frac{\partial u_k}{\partial r}\right] r^{2k},$$

car les séries des seconds membres sont absolument et uniformément convergentes pour $r < R$, comme il résulte des inégalités (9) et de la proposition suivante : si la fonction harmonique $u(r, \theta)$ satisfait à l'inégalité

$$|u(R, \theta)| < M,$$

---

[1] H. Poincaré, *Théorie du potentiel newtonien*, Paris, 1889, § 95-96; *voir* aussi P. Noaillon, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 184, 1927, p. 360.

[2] *Voir* aussi sur ces questions notre article : *Sur les fonctions analytiques de deux variables réelles* dans : *Bulletin Mathématique de la Soc. Roumaine des Sciences*, t. 38 (1), 1936, p. 63.

on a

$$\left|\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial\theta}\right| < 2\mathrm{M}\frac{r}{\mathrm{R}}\frac{1+\frac{r}{\mathrm{R}}}{\left(1-\frac{r}{\mathrm{R}}\right)^3},$$

et une inégalité analogue pour $\left|r\frac{\partial u}{\partial r}\right|$, qui peuvent se déduire facilement de l'intégrale de Poisson.

Par conséquent, à l'intérieur du cercle C_R dans lequel le développement (H) définit la fonction $f(r, \theta)$, on peut dériver terme à terme. En particulier, pour le laplacien $\Delta f(r, \theta)$ on a le développement suivant :

$$\Delta f = 4\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+1)^2 u_{k+1} + (k+1)r\frac{\partial u_{k+1}}{\partial r}\right]r^{2k}.$$

8. Le développement en série simple de la forme (H) peut être facilement étendu, au moins formellement, à une fonction analytique d'un nombre quelconque de variables réelles. Soit $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ une telle fonction; considérons son développement de Taylor autour de l'origine

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{P}_n(x_1, x_2, \ldots, x_r),$$

$\mathrm{P}_n(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ étant un polynome homogène de degré n.

On peut démontrer facilement, de plusieurs manières ([1]), qu'un tel polynome peut être mis sous la forme

$$\mathrm{P}_n(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = \sum_{k=0}^{\leq\frac{n}{2}} v_{n-2k}^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)r^{2k}.$$

où $v_p^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ sont des polynomes harmoniques homogènes de degré p et $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_r^2$.

Alors, en effectuant dans l'expression de $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$

([1]) *Voir* une démonstration par induction complète dans B. L. VAN DER WAERDEN, *Die gruppen theoretische Methode in der Quanten-Mechanik*, Springer, Berlin, p. 13.

le même changement de sommation qu'au paragraphe **2**, on obtient

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\leq \frac{n}{2}} v_{n-2k}^{(n)}(x_1, x_2, \ldots, x_r) r^{2k}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x_1, x_2, \ldots, x_r) r^{2k},$$

les fonctions $u_k(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ ayant le développement suivant

$$u_k(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \sum_{n=2k}^{\infty} v_{(n)}^{n-2k}(x_1, x_2, \ldots, x_r)$$

en séries de polynomes harmoniques.

Nous n'insistons pas ici sur les autres conséquences qu'on peut tirer de l'existence du développement (H) pour les fonctions analytiques des variables réelles [1].

---

[1] Dans un travail inséré dans le *Bulletin Mathématique de la Soc. Roumaine des Sciences*, t. 38 (1), 1936, p. 3, je cherche à mettre sous la forme (H) les solutions des équations du type elliptique de la forme

$$\Delta^{(m)} u + \lambda u = 0.$$