Bulletin de la S. M. F.

E. Lucas

Sur les congruences des nombres eulériens et des coefficients différentiels des fonctions trigonométriques suivant un module premier

Bulletin de la S. M. F., tome 6 (1878), p. 49-54

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__49_1>

Sur les congruences des nombres eulériens et des coefficients différentiels des fonctions trigonométriques, suivant un module premier; par M. ÉDOUARD LUCAS.

1. On sait que, lorsque l'on remplace x par les nombres entiers consécutifs dans une fonction $f(x)$ entière et à coefficients entiers, ou dans une expression de la forme (A, B, C, ..., a, b, c, ..., entiers)

$$\varphi(x) = \mathrm{A}a^x + \mathrm{B}b^x + \mathrm{C}c^x + \mathrm{D}d^x + \ldots,$$

les résidus des résultats de la substitution pour tous les modules premiers ou composés se reproduisent périodiquement, et l'amplitude de la période est, en général, pour un module premier p, égale au module dans le cas de la fonction entière, et au module diminué de l'unité dans le cas de la fonction transcendante. Ces propriétés sont indiquées par les formules suivantes, pour k entier et positif :

$$f(x+kp) \equiv f(x) \pmod{p},$$
$$\varphi[x+k(p-1)] \equiv \varphi(x) \pmod{p}.$$

Nous avons indiqué les résultats analogues pour les fonctions symétriques des racines des équations algébriques à coefficients commensurables. Nous montrerons que, dans le cas général, les coefficients différentiels des fonctions rationnelles de l'exponentielle e^x possèdent les propriétés numériques de la fonction φ.

Soit d'abord

$$\operatorname{séc} x = 1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \ldots;$$

on obtient, en multipliant le premier membre par $\cos x$ et le second par le développement de $\cos x$ en série, la relation

$$a_{2n} - \frac{a_{2n-2}}{2!} + \frac{a_{2n-4}}{4!} - \frac{a_{2n-6}}{6!} + \ldots \pm \frac{a_2}{(2n-2)!} \mp \frac{1}{(2n)!} = 0.$$

On en déduit le déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre [1]

$$a_{2n} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{1}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \ldots \\ \frac{1}{8!} & \frac{1}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

2. M. Sylvester (*Comptes rendus*, t. LII, p. 161) a appelé *nombres d'Euler* les coefficients, pris en valeur absolue, déterminés par la relation

$$E_{2n} = (-1)^n 1.2.3\ldots(2n)\, a_{2n};$$

[1] J.-W.-L. Glaisher, *Expressions for Laplace's coefficients, Bernoullian and Eulerian Numbers*, etc. (*The Messenger of Mathematics*, n° 64, 1876).

on a donc, par le changement de x en $x\sqrt{-1}$, la formule symbolique

$$(1)\qquad u = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = e^{\mathrm{E}x}$$

et, en général,

$$\frac{d^n u_0}{dx_0^n} = \mathrm{E}_n,$$

et, par l'application du calcul des résidus,

$$\mathrm{E}_{2n} = \pm\, 2^{2n+2} \int_0^\infty \frac{t^{2n}\,dt}{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}.$$

En chassant les dénominateurs dans l'équation (1), et en identifiant les coefficients de $\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}$, on a, pour $n > 1$, la relation récurrente

$$(2)\qquad (\mathrm{E}+1)^n + (\mathrm{E}-1)^n = 0,$$

qui donne le déterminant

$$\mathrm{E}_{2n} = (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 15 & 15 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ . & .. & .. & . & . & \ldots & \ldots \\ 1 & C_{2n}^2 & C_{2n}^4 & C_{2n}^6 & . & \ldots & C_{2n}^2 \end{vmatrix},$$

formé par les lignes de rang pair et les colonnes de rang impair du triangle arithmétique.

Les nombres eulériens sont entiers et impairs; Sherk a démontré qu'ils étaient terminés alternativement par 1 et 5 [1]. Ces propriétés sont des cas particuliers des suivantes.

3. Dans le triangle arithmétique, tous les termes de la $p^{\text{ième}}$ ligne sont, pour p premier, divisibles par p, à l'exception des coefficients extrêmes, égaux à l'unité; ceux de la $(p+1)^{\text{ième}}$ ligne sont aussi divisibles par p, à l'exception des quatre coefficients extrêmes égaux à l'unité. Si l'on continue la formation du triangle arithmétique,

---

[1] *Voir* Stern, *Journal de Crelle*, t. 79, p. 67.

en ne conservant que les résidus suivant le module p, on reforme deux fois le triangle arithmétique des $(p-1)$ premières lignes; puis, à partir de la $(2p)^{\text{ième}}$ ligne, on le reforme trois fois; mais chacun de ces triangles est pris respectivement 1, 2, 1 fois; à partir de la $(3p)^{\text{ième}}$ ligne, il est répété quatre fois avec les coefficients 1, 3, 3, 1 de la troisième ligne, et ainsi de suite. On a donc, en général, pour p premier,

$$C_m^n \equiv C_{m_1}^{n_1} \times C_\mu^\nu \quad (\text{mod. } p),$$

m_1 et n_1 désignant les entiers de $\frac{m}{p}$ et de $\frac{n}{p}$, et μ et ν les résidus de m et de n suivant le module p. On a de même

$$C_{m_1}^{n_1} \equiv C_{m_2}^{n_2} \times C_{\mu_1}^{\nu_1} \quad (\text{mod. } p),$$

et, en général,

$$C_m^n \equiv C_{\mu_1}^{\nu_1} C_{\mu_2}^{\nu_2} C_{\mu_3}^{\nu_3} \ldots \quad (\text{mod. } p),$$

$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ désignant les résidus de m et des entiers contenus dans les fractions $\frac{m}{p}, \frac{m}{p^2}, \frac{m}{p^3}, \ldots$, et de même pour $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$.

Quant à la $(p-1)^{\text{ième}}$ ligne du triangle arithmétique, elle est formée alternativement par les résidus $+1$ et -1. La formule (2) donne

$$(E+1)^{p-1} + (E-1)^{p-1} = 0,$$

et, en prenant les résidus,

$$E_{p-1} + E_{p-3} + E_{p-5} + \ldots + E_2 + E_0 \equiv 0 \quad (\text{mod. } p).$$

On a donc ce théorème :

Si p est un nombre premier, la somme des nombres eulériens, pris alternativement avec les signes $+$ et $-$, et dont l'indice est inférieur à p, est divisible par p.

Les premières valeurs de E sont données par les formules

$$\begin{aligned} E_2 + E_0 &= 0, \\ E_4 + 6E_2 + E_0 &= 0, \\ E_6 + 15E_4 + 15E_2 + E_0 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &; \end{aligned}$$

on a ensuite, à partir de $p+1$, par congruence,

$$\left.\begin{array}{r} E_{p+1}+E_0\equiv 0 \\ E_{p+2}+3E_{p+1}+\ \ 3E_2+E_0\equiv 0 \\ E_{p+5}+10E_{p+3}+5E_{p+1}+15E_4+10E_2+E_0\equiv 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \pmod{p}.$$

La comparaison des deux systèmes de formules donne successivement

$$\left.\begin{array}{l} E_{p+1}\equiv E_2 \\ E_{p+3}\equiv E_4 \\ E_{p+5}\equiv E_6 \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \pmod{p}.$$

On a donc, en général, quel que soit l'entier positif k,

$$E_{2n}\equiv E_{2n+k(p-1)} \pmod{p};$$

et, par suite :

Les résidus des nombres eulériens, suivant un module premier (ou composé), se reproduisent dans le même ordre, comme les résidus potentiels.

4. Si l'on pose

$$u^\alpha=\left(\frac{2}{e^x+e^{-x}}\right)^\alpha=E_{\alpha,0}+E_{\alpha,1}\frac{x}{1}+E_{\alpha,2}\frac{x^2}{1.2}+\ldots$$
$$+E_{\alpha,n}\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}+\ldots,$$

ou, sous la forme symbolique,

$$u^\alpha=\left(\frac{2}{e^x+e^{-x}}\right)^\alpha=e^{E_\alpha x},$$

les coefficients $E_{\alpha,n}$ sont déterminés par la relation symbolique

$$E_{\alpha,n}=[E+E'+E''+\ldots+E^{(\alpha)}]^n,$$

dans laquelle on remplace les exposants de $E, E', E'', \ldots$ par des indices, et supprimant ensuite les accents. Nous appellerons les nombres E_α les *nombres eulériens d'ordre* α; ces nombres sont entiers, et leurs résidus, suivant un module premier, se reproduisent périodiquement; on démontrera, comme précédemment, que l'on a

$$E_{\alpha,n} \equiv E_{\alpha,n+k(p-1)} \pmod{p}.$$

On a donc ce théorème :

Les résidus des coefficients différentiels d'une puissance entière et positive de séc x, *suivant un module premier, se reproduisent périodiquement.*

Ces considérations s'appliquent, en général, aux coefficients différentiels d'une fraction rationnelle de e^x, mais dans certaines conditions, et par exemple à ceux de

$$\frac{\varphi(1)}{\varphi(e^x)};$$

mais, dans le cas de la cosécante ou du développement de $\frac{1}{1-e^x}$, ce théorème n'a pas lieu, parce que $\varphi(1)$ est nul; les coefficients différentiels, qui sont ici les *nombres de Bernoulli* des divers ordres, ne sont plus entiers, et leurs dénominateurs contiennent la série indéfinie des nombres premiers.

Nous montrerons ultérieurement comment les réciproques de ces théorèmes conduisent à de nouveaux théorèmes analogues à la réciproque du théorème de Fermat, ou, avec des restrictions, à des théorèmes analogues au théorème de Wilson.