

# BULLETIN DE LA S. M. F.

PAUL VINCENSINI

**Sur une transformation des corps convexes, et  
son application à la construction de l'ensemble  
des corps convexes de l'espace à  $n$  dimensions, à  
partir de certains sous-ensembles bases**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 65 (1937), p. 175-189

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1937\\_\\_65\\_\\_175\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1937__65__175_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1937, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR UNE TRANSFORMATION DES CORPS CONVEXES, ET SON  
APPLICATION A LA CONSTRUCTION DE L'ENSEMBLE DES  
CORPS CONVEXES DE L'ESPACE A  $n$  DIMENSIONS, A PARTIR  
DE CERTAINS SOUS-ENSEMBLES BASES;**

PAR M. PAUL VINCENSINI.

I. — Introduction.

Les corps convexes que nous envisagerons seront des corps de l'espace euclidien à  $n$  dimensions de volume positif [non situés dans une variété linéaire à  $n - h$  dimensions]. Leurs surfaces frontières [à  $(n - 1)$  dimensions] seront supposées douées, en chaque point, d'un plan tangent continu [à  $n - 1$  dimensions] et de  $n - 1$  rayons de courbure principaux, finis et non nuls.

Nous désignerons par  $(\mathcal{E})$  l'ensemble de ces corps. Nous nous proposons de développer ici une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* <sup>(1)</sup>, et de montrer comment on peut construire l'ensemble total des corps convexes  $(\mathcal{E})$  de l'espace, à partir de certains sous-ensembles bases  $(\mathcal{E}_1)$  convenablement choisis.

Soient,  $C$  un corps quelconque de  $(\mathcal{E})$  de frontière  $S$ ,  $O$  un point fixe de l'espace,  $\Sigma$  la sphère unitaire de centre  $O$ . Établissons entre  $S$  et  $\Sigma$  une correspondance par plans tangents parallèles, de telle sorte que les plans tangents en deux points correspondants  $M$  et  $\omega$  de  $S$  et  $\Sigma$  soient parallèles et également situés. cette dernière expression signifiant, comme l'on sait, qu'après la translation amenant  $M$  en  $\omega$ ,  $S$  et  $\Sigma$  sont situés d'un même côté par rapport au plan tangent commun en  $\omega$ . Chaque point  $\omega$  de  $\Sigma$  est l'image sphérique du point correspondant  $M$  de  $S$ .

La distance algébrique  $H$  (comptée suivant  $\vec{O\omega}$ ) du point  $O$  au

---

<sup>(1)</sup> *Comptes rendus*, 204, 1937, p. 1609.

plan tangent à  $S$  au point  $M$  d'image  $\omega$ , est une fonction  $H(\omega)$  du point  $\omega$ , continue sur  $\Sigma$ .  $H(\omega)$  est la fonction d'appui du corps  $C$ .

Si  $M'$  est le point *opposé* à  $M$  sur  $S$  [si les plans tangents à  $S$  en  $M$  et  $M'$  sont parallèles], la distance  $\Delta$  des plans tangents à  $S$  en  $M$  et  $M'$  est une *largeur du corps*  $C$ ; nous dirons que c'est la largeur relative à la direction  $\overrightarrow{O\omega}$ . L'expression de  $\Delta$  est évidemment

$$\Delta(\omega) = H(\omega) + H(\omega').$$

$\omega'$  étant le point opposé à  $\omega$  sur  $S$ .

Il existe une infinité de corps convexes admettant même largeur, dans toute direction, qu'un corps convexe quelconque  $C$ . Ces corps sont ceux qui admettent pour domaine vectoriel <sup>(1)</sup> le corps centré  $D$ , dont la fonction d'appui est  $\Delta(\omega)$ ,  $\Delta(\omega)$  étant la largeur de  $C$ .

Je rappelle que le domaine vectoriel d'un corps convexe quelconque  $C$  de l'espace, est le corps  $D$ , formé par les extrémités des vecteurs, issus d'un point fixe  $O$ , et équipollents aux différents vecteurs ayant pour origine et pour extrémité deux points quelconques de  $C$ .  $D$  est convexe et admet  $O$  pour centre de symétrie. Les corps convexes  $C$  ayant pour domaine vectoriel  $D$  sont ceux qui, dans une direction quelconque, admettent une largeur *moitié de celle de  $D$*  dans la même direction.

Dans le Mémoire cité du *Journal de Mathématiques*, et dans un travail « *Sur le prolongement des séries linéaires de corps convexes* », qui paraîtra prochainement aux *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, j'ai montré comment on peut construire les corps convexes de l'ensemble  $(\mathcal{E})$ , du plan ou de l'espace à trois dimensions, admettant pour domaine vectoriel un corps centré donné a priori.

La méthode employée repose sur la considération d'une *série prolongeable de corps convexes*.

J'indique, dans le Mémoire actuel, une construction de tous les corps convexes de l'ensemble  $(\mathcal{E})$  d'un espace euclidien à  $n$  dimensions admettant un domaine vectoriel donné, différente de celle

<sup>(1)</sup> Voir, par exemple P. VINCENSINI. *Sur les domaines vectoriels des corps convexes* (*Journ. de Math.*, t. XV, 1936, p. 373).

exposée dans les travaux cités, et présentant l'avantage de permettre une limitation précise des éléments arbitraires mis en jeu.

Dans la construction donnée dans les Mémoires indiqués plus haut, figure *un corps convexe arbitraire C*. Ce corps étant choisi, on en fait dériver une infinité de corps convexes admettant *un domaine vectoriel donné* ou, ce qui revient au même, une *largeur donnée dans toute direction*.

En faisant varier arbitrairement *C* dans le champ des corps convexes, on obtient tous les corps admettant le domaine vectoriel voulu.

Mais, l'ensemble des corps convexes admettant un domaine vectoriel donné étant un sous-ensemble de l'ensemble des corps convexes de l'espace, on doit pouvoir obtenir tous les corps admettant un domaine vectoriel donné, en choisissant le corps arbitraire *C*, qui est à l'origine de la construction, dans un sous-ensemble convenable de l'ensemble total des corps convexes, présentant le même degré de généralité que l'ensemble des corps à construire.

Je montre ici que l'on peut déduire géométriquement *tous* les corps convexes admettant un domaine vectoriel donné quelconque de l'ensemble des corps admettant un domaine vectoriel déterminé *distinct* du premier (j'entends par là *non homothétique* au premier) et fixé une fois pour toutes : par exemple de *l'ensemble des corps de largeur constante de l'espace*.

Le résultat que je viens d'énoncer peut être envisagé comme fournissant une méthode géométrique de transformation, les uns dans les autres, des ensembles de corps convexes admettant même domaine vectoriel. Mais, on en appréciera mieux la portée, si l'on observe que, tout corps convexe de l'espace appartenant à l'un des ensembles précédents [défini par son domaine vectoriel, qui est un corps convexe fermé et doué d'un centre de symétrie], *on pourra construire tous les corps convexes de l'espace à partir des seuls corps appartenant aux deux ensembles suivants :*

a. l'ensemble des domaines vectoriels [ensemble des corps convexes centrés];

b. l'ensemble des corps convexes admettant un domaine vectoriel déterminé [des corps de largeur constante par exemple].

II. — Prolongement des séries linéaires de corps convexes.

Soient  $C$  et  $C'$  deux corps convexes quelconques limités respectivement par les surfaces  $S$  et  $S'$ ,  $T$  et  $T'$  deux plans tangents à  $S$  et  $S'$  parallèles et également situés. Si  $H(\omega)$  et  $H'(\omega)$  sont les fonctions d'appui de  $C$  et  $C'$ , tout plan parallèle à  $T$  et  $T'$  dont le rapport algébrique des distances à  $T$  et  $T'$  est un nombre donné  $\lambda$ , enveloppe une certaine surface  $S_\lambda$ .

Si  $\lambda < 0$ ,  $S_\lambda$  est convexe, et limite l'un des corps  $C_\lambda$  de la série linéaire déterminée par  $C$  et  $C'$ , série que nous représentons par  $[C, C']$ .

Si  $\lambda > 0$ ,  $S_\lambda$  peut être convexe ou non. Si  $S_\lambda$  est convexe pour toutes les valeurs de  $\lambda$  supérieures ou égales à un nombre  $\lambda_1$  supérieur à  $un$ , les corps convexes  $C_\lambda$  correspondant à ces valeurs *prolongent* la série  $[C, C']$ , dans le sens  $C \rightarrow C'$ , jusqu'au corps  $C_{\lambda_1}$ , et la série sera dite *prolongeable jusqu'à ce corps*.

De même, si  $S_\lambda$  est convexe pour toutes les valeurs de  $\lambda$  inférieures ou égales à un nombre positif  $\lambda_2$  inférieur à  $un$ , la série  $[C, C']$  est prolongeable, dans le sens  $C' \rightarrow C$ , jusqu'au corps  $C_{\lambda_2}$ .

Dans le *Mémoire du Circolo Mathematico di Palermo* cité plus haut, j'ai étudié les conditions précises de prolongement, dans un sens ou dans l'autre, d'une série linéaire de corps convexes de l'espace à trois dimensions et, en particulier, les conditions de prolongeabilité indéfinie dans un sens. Le procédé s'étend de lui-même aux séries de l'espace euclidien à  $n$  dimensions. Je me borne ici à indiquer les résultats essentiels.

Si les frontières des corps  $C, C'$  admettent, en chaque point,  $n - 1$  rayons de courbure principaux finis et non nuls, la série  $[C, C']$  est *toujours* prolongeable dans les deux sens. Le prolongement indéfini n'est possible que dans un sens au plus (à moins que  $C$  et  $C'$  ne soient congruents par translation).

Pour que la série  $[C, C']$  soit indéfiniment prolongeable dans le sens  $C \rightarrow C'$ , il faut et il suffit que, pour tout couple de sections de  $S$  et  $S'$  par deux variétés planes parallèles à deux dimensions issues de deux points de même image sphérique quelconques, le rayon

de courbure de la section de  $S$ , en l'un des deux points de même image sphérique, soit inférieur à celui de la section de  $S'$  au point correspondant.

Cette condition est d'ailleurs la condition nécessaire et suffisante pour que,  $M$  et  $M'$  étant deux points homologues *quelconques* (même image sphérique) de  $S$  et  $S'$ , après la translation  $\overrightarrow{MM'}$  tous les points de  $C$  appartiennent à  $C'$ .

La condition précédente est évidemment remplie si la valeur maximum, sur  $S$ , du plus grand rayon de courbure principal en chaque point, valeur que nous appellerons le rayon de courbure maximum de  $S$ , est inférieure au rayon de courbure minimum de  $S'$  : c'est le cas où  $S$  peut rouler librement à l'intérieur de  $S'$ .

Nous aurons, dans la suite, à utiliser certaines séries indéfiniment prolongeables dans un sens, dont nous allons indiquer la construction.

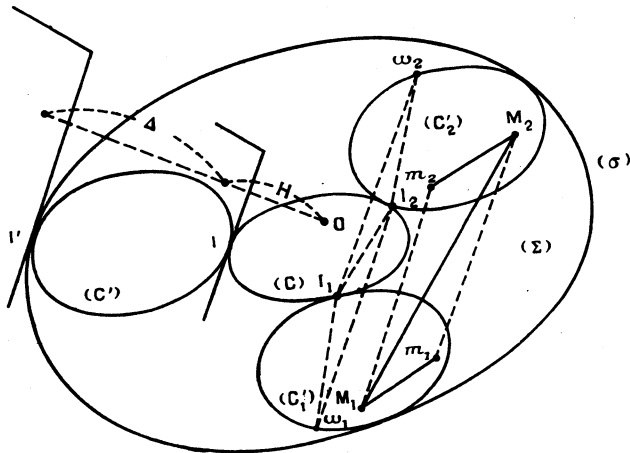
Nous commencerons, à cet effet, par définir un corps convexe  $\Sigma$ , attaché à deux corps convexes quelconques  $C$  et  $C'$  (dont les positions dans l'espace à  $n$  dimensions sont définies chacune à une translation près), ce corps  $\Sigma$  déterminant avec l'un,  $C'$ , des deux corps du couple  $(C, C')$ , une série linéaire indéfiniment prolongeable dans le sens  $C' \rightarrow \Sigma$ .

Laissant  $C$  fixe, amenons, par translation, la frontière  $S'$  de  $C'$  à être tangente extérieurement à la frontière  $S$  de  $C$ . Si nous imprimons à  $C'$  une translation à  $n - 1$  paramètres, au cours de laquelle  $S'$  ne cesse d'être tangente à  $S$  le point de contact décrivant  $S$  en entier,  $S'$  enveloppe une certaine surface  $\sigma$  (à  $n - 1$  dimensions).  $\sigma$  limite le corps  $\Sigma$  *réunion* de  $C$  et des  $\infty^{n-1}$  positions de  $C'$ . Montrons que  $\Sigma$  est convexe.

Chacune des  $\infty^{n-1}$  positions de  $C'$ , qui est tangente à la frontière  $S$  de  $C$  en un point  $I$ , est aussi tangente à la frontière  $\sigma$  de  $\Sigma$  au point  $I'$  opposé à  $I$  sur  $C'$ . D'autre part il est clair, et d'ailleurs bien facile à établir en toute rigueur, que tout corps congruent à  $C'$  par translation et *coupant*  $C$  (au lieu de lui être tangent), a tous ses points à l'intérieur de  $\Sigma$ .

Soient dès lors  $M_1$  et  $M_2$  deux points quelconques de  $\Sigma$  (que l'on peut supposer extérieurs à  $C$ ),  $C'_1$  et  $C'_2$  deux des  $\infty^{n-1}$  positions de  $C'$  touchant  $C$  et contenant, la première le point  $M_1$ , la deuxième le point  $M_2$  (*fig.*).

$I_1$  et  $I_2$  étant les points où  $C'_1$  et  $C'_2$  touchent  $C$ , désignons par  $m_1$  et  $\omega_1$  les points de  $C'_1$  homologues de  $M_2$  et  $I_2$  dans la translation  $\mathfrak{T}$  qui amène  $C'_2$  en coïncidence avec  $C'_1$ , et par  $m_2, \omega_2$  les points de  $C'_2$  homologues de  $M_1, I_1$  dans la translation inverse. Au cours de la translation rectiligne  $\mathfrak{T}$ , la corde  $I_2\omega_2$  de  $C'_2$  ne cesse de couper la corde  $I_2I_1$  de  $C$ ;  $C'_2$  ne cesse donc de couper  $C$ , et reste par suite à l'intérieur de  $\Sigma$ . Le segment  $m_2M_2$  (intérieur



à  $C_2$ ) reste alors constamment intérieur à  $\Sigma$  et décrit un parallélogramme  $m_2M_2m_1M_1$  intérieur à  $\Sigma$ . Tous les points de la diagonale  $M_1M_2$  de ce parallélogramme sont intérieurs à  $\Sigma$ . Il est établi que si  $M_1, M_2$  sont deux points quelconques de  $\Sigma$ , tous les points du segment  $M_1M_2$  appartiennent au corps  $\Sigma$ , qui est par suite convexe.

Après chacune des  $\infty^{n-1}$  translations qui amènent la frontière  $S'$  de  $C'$  à être tangente extérieurement à la frontière  $S$  de  $C$ , le contact de  $S'$  et de  $\sigma$  (frontière de  $\Sigma$ ) a lieu en deux points de même image sphérique sur les deux surfaces, et tous les points de  $C'$  appartiennent à  $\Sigma$ . Il en résulte, comme on l'a fait observer dans l'Introduction, que la série linéaire  $[C', \Sigma]$  est indéfiniment prolongeable dans le sens  $C' \rightarrow \Sigma$ .

Dans le cas où  $C'$  est centré, le corps  $\Sigma$  que nous venons d'associer au couple de corps convexes  $C, C'$  n'est autre chose que

le corps *somme* des deux corps  $C$  et  ${}_2C'$  [nous désignerons dans la suite par  $kC$  l'homothétique d'un corps quelconque  $C$  dans une homothétie de rapport  $k$ ].

Le corps somme de deux corps convexes  $C$  et  $C'$ , de fonctions d'appui respectives  $H(\omega)$ ,  $H'(\omega)$ , est le corps *convexe* de fonction d'appui  $H(\omega) + H'(\omega)$ .

Si  $C'$  est centré, et si l'on suppose (ce qui est indifférent) que son centre est au centre  $O$  de la sphère image, la largeur  $\Delta$  de  $C'$  relative à la direction  $\overrightarrow{O\omega}$  est  ${}_2H'(\omega)$ . Or, la construction même de  $\Sigma$ , traduite par la figure 1, prouve que la fonction d'appui de  $\Sigma$  est  $H(\omega) + \Delta$ , soit  $H(\omega) + {}_2H'(\omega)$ , c'est-à-dire la fonction d'appui du corps somme des deux corps  $C$  et  ${}_2C'$ .  $\Sigma$  est bien, comme on l'avait annoncé, la somme des deux corps  $C$  et  ${}_2C'$ .

$C_\lambda$  ( $\lambda < 0$ ) désignant, conformément aux notations de l'Introduction, un corps quelconque de la série  $[C, C']$ , on a évidemment, en désignant par  $C + C'$  le corps somme de deux convexes quelconques,

$$C + C' = {}_2C_{-1};$$

de là résulte à nouveau, dans le cas où  $C'$  est centré [qui seul interviendra dans la suite], la convexité de  $\Sigma$ .

Faisons enfin la remarque suivante qui nous sera utile plus loin :

*Si les trois corps  $C_1, C_2, \Sigma$  déterminent deux séries  $[C_1, C_2]$ ,  $[C_2, \Sigma]$  indéfiniment prolongeables dans les sens respectifs  $C_1 \rightarrow C_2$  et  $C_2 \rightarrow \Sigma$ , la série  $[C_1, \Sigma]$  est indéfiniment prolongeable dans le sens  $C_1 \rightarrow \Sigma$ .*

Désignons en effet par  $M_1, M_2, M$  un système *quelconque* de trois points de même image sphérique sur les trois corps. La translation  $\overrightarrow{M_1M_2}$  amène  $C_1$  à l'intérieur de  $C_2$ , et la translation  $\overrightarrow{M_2M}$  amène  $C_2$ , et par suite  $C_1$ , à l'intérieur de  $\Sigma$ . La prolongeabilité indéfinie de la série  $[C_1, \Sigma]$  résulte alors d'une remarque antérieure.

Ajoutons aussi que si  $\Delta(\omega)$  et  $\Delta(\omega')$  sont les largeurs de deux corps convexes quelconques  $C$  et  $C'$  relatives à une même direction, la largeur du corps  $C_\lambda$  de la série  $[C, C']$  ou de l'un des



corps de la série prolongée est

$$\Delta_i = \frac{\Delta - \lambda \Delta}{1 - \lambda}.$$

**III. — Transformation des ensembles de corps convexes admettant mêmes domaines vectoriels les uns dans les autres.**

Envisageons l'ensemble des corps convexes ( $\mathcal{E}$ ) de l'espace. Cet ensemble peut être considéré comme la somme d'une infinité de sous-ensembles que nous allons définir.

Désignons par ( $\gamma$ ) l'ensemble [sous-ensemble de ( $\mathcal{E}$ )] des corps convexes D possédant un centre de symétrie. L'ensemble ( $\gamma$ ) [aussi bien d'ailleurs que l'ensemble total ( $\mathcal{E}$ )] sera connu, lorsque chacun de ses éléments sera connu à une homothétie près, que nous négligerons toujours.

D étant un corps quelconque de ( $\gamma$ ) [défini à une homothétie près], associons à D tous les corps de ( $\mathcal{E}$ ) admettant D pour domaine vectoriel; nous obtenons ainsi un sous-ensemble de ( $\mathcal{E}$ ) que nous appellerons ( $e$ )<sub>D</sub>. Chaque élément D de ( $\gamma$ ) donne un sous-ensemble ( $e$ )<sub>D</sub>. Tout corps de ( $\mathcal{E}$ ) appartenant à un ( $e$ )<sub>D</sub> bien déterminé, on peut dire que ( $\mathcal{E}$ ) est la somme des différents ( $e$ )<sub>D</sub>.

Cela étant, nous allons indiquer une construction géométrique permettant, les corps d'un ensemble ( $e$ )<sub>D</sub> étant supposés connus, d'en déduire tous les corps d'un autre ensemble quelconque ( $e$ )<sub>D'</sub>.

La construction réalisera donc un procédé de transformation des différents ensembles ( $e$ )<sub>D</sub> les uns dans les autres.

Soient D et D' les deux corps centrés, *non homothétiques*, définissant les deux ensembles ( $e$ )<sub>D</sub>, ( $e$ )<sub>D'</sub>. Chacun de ces deux corps n'est défini qu'à une homothétie près, mais, pour simplifier l'exposition de la construction qui va suivre, il conviendra de fixer ces corps en fixant les paramètres d'homothétie. Les positions relatives de D et D' dans l'espace sont d'ailleurs quelconques.

Désignons par C un corps quelconque de ( $e$ )<sub>D</sub>. Il s'agit de transformer C en un corps de ( $e$ )<sub>D'</sub>. Le corps  $\frac{1}{2}$  D est évidemment un corps particulier de ( $e$ )<sub>D</sub> [c'est, avec des homothétiques, le seul corps centré de ( $e$ )<sub>D</sub>]. Envisageons les deux corps convexes  $\frac{k}{2}$  D

et  $k'D'$  [ $k$  et  $k'$  sont des nombres positifs]. Si nous effectuons, au moyen de ces deux corps, la construction exposée au n° 2.  $\frac{k}{2}D$  jouant le rôle du corps désigné par  $C$  au n° 2 et  $k'D'$  jouant le rôle du corps désigné par  $C'$  dans ce même numéro, nous associons aux deux corps  $\frac{k}{2}D$  et  $k'D'$  un corps *convexe*  $\Sigma$  définissant, avec le corps  $k'D'$ , une série linéaire  $[k'D', \Sigma]$  indéfiniment prolongeable dans le sens  $k'D' \rightarrow \Sigma$ .

Le corps  $k'D'$  étant centré, la remarque faite au n° 2 s'applique, et le corps  $\Sigma$  est la somme des deux corps  $\frac{k}{2}D$  et  $2k'D'$

$$\Sigma = 2k'D' + \frac{k}{2}D.$$

Le corps  $\Sigma$  qui vient d'être construit dépend des deux paramètres  $k$  et  $k'$ . Multiplier  $k$  et  $k'$  par le même nombre revient à soumettre  $\Sigma$  à une homothétie: le seul paramètre de forme de  $\Sigma$  est donc  $\frac{k}{k'}$ . Pour définir l'ensemble des  $\infty^2$  corps  $\Sigma$  à une homothétie près, il suffit de fixer l'un des deux paramètres,  $k$  par exemple, et de faire varier  $k'$ : on obtient ainsi  $\infty^1$  corps *distincts* donnant chacun, avec  $k'D'$ , une série linéaire  $[k'D', \Sigma]$  indéfiniment prolongeable dans le sens  $k'D' \rightarrow \Sigma$ .

Le procédé annoncé de transformation de l'ensemble  $(e)_b$  en l'ensemble  $(e)_{b'}$ , exige la construction préalable d'une série linéaire  $[C, \Sigma]$ , indéfiniment prolongeable dans le sens  $C \rightarrow \Sigma$ , dont les deux corps extrêmes sont, d'une part le corps  $C$  de  $(e)_b$  que l'on veut transformer, et de l'autre un corps *convenablement choisi* parmi les corps  $\Sigma$  qui viennent d'être définis.

En vue de la construction de cette série, et nous basant sur une remarque faite à la fin du n° 2, commençons par déterminer le nombre  $k'$  de façon que la série linéaire  $[C, k'D']$  soit indéfiniment prolongeable dans le sens  $C \rightarrow k'D'$ . Si  $r'_m$  et  $r_m$  sont, respectivement, le rayon de courbure principal minimum sur la frontière de  $D'$  et le rayon de courbure principal maximum sur la frontière de  $C$ , il suffit de choisir, parmi les  $\infty^1$  corps  $\Sigma$ , l'un de ceux pour lesquels  $k' > \frac{r'_m}{r_m}$ , pour avoir une série  $[C, k'D']$  réalisant l'effet voulu. Le rayon de courbure principal minimum de la frontière

de  $k'D'$  est alors  $k'r'_m$ , et, comme il est supérieur au rayon de courbure principal maximum  $r_m$  de la frontière de C, la série  $[C, k'D']$  est, d'après le n° 2, indéfiniment prolongeable dans le sens  $C \rightarrow k'D'$ .

Il suffit maintenant d'associer C à un corps  $\Sigma$  correspondant à l'une quelconque des valeurs de  $k'$  qui viennent d'être déterminées ( $k' > \frac{r_m}{r'_m}$ ), pour avoir une série  $[C, \Sigma]$  indéfiniment prolongeable dans le sens  $C \rightarrow \Sigma$ . Pour le voir, il n'y a qu'à invoquer la remarque de la fin du n° 2 à laquelle il a été fait allusion plus haut :

La série  $[k'D', \Sigma]$  étant indéfiniment prolongeable dans le sens  $k'D' \rightarrow \Sigma$ , et la série  $[C, k'D']$  étant indéfiniment prolongeable dans le sens  $C \rightarrow k'D'$ , la série  $[C, \Sigma]$  est indéfiniment prolongeable dans le sens  $C \rightarrow \Sigma$ .

Nous sommes maintenant en mesure d'indiquer la construction annoncée, réalisant la transformation de l'ensemble  $(e)_n$  en l'ensemble  $(e)_{n'}$ . La série  $[C, \Sigma]$  dépend de deux paramètres :  $k'$  dont nous venons de déterminer une limite inférieure, et  $k$  que nous avons jusqu'à présent laissé fixe. Nous allons voir, qu'en fixant convenablement  $k$ , nous pouvons nous arranger pour que l'un des corps,  $C'$  de la série  $[C, \Sigma]$  prolongée admette  $D'$  pour domaine vectoriel, et appartienne par suite à l'ensemble  $(e)_{n'}$ . Nous aurons ainsi montré la possibilité de transformer géométriquement tout corps C de  $(e)_n$  en un corps  $C'$  de  $(e)_{n'}$ . Il restera ensuite, pour prouver que la construction fournit un procédé de transformation de  $(e)_n$  en  $(e)_{n'}$ , de montrer que tout corps de  $(e)_{n'}$  se déduit d'un certain corps de  $(e)_n$  par la construction en question.

Donnons à  $k$  une valeur quelconque inférieure à l'unité, et envisageons l'un quelconque des corps  $C_\lambda$  ( $\lambda > 1$ ) de la série  $[C, \Sigma]$  prolongée. Si l'on désigne par  $\Delta$  et  $\delta$  les largeurs respectives de D et de  $\Sigma$  dans une même direction quelconque, la largeur de C dans la même direction est  $\frac{\Delta}{2}$ , et celle du corps  $C_\lambda$  est (voir le n° 2)

$$\Delta_\lambda = \frac{\frac{\Delta}{2} - \lambda \delta}{1 - \lambda}.$$

Parmi les corps  $C_\lambda$  considérons, plus particulièrement, le

corps  $C_{\frac{1}{k}}$  correspondant à la valeur  $\frac{1}{k}$  du rapport  $\lambda$ ; ce corps appartient bien à la série prolongée puisque, d'après le choix fait pour  $k$ , on a  $\frac{1}{k} > 1$ . La largeur de  $C_{\frac{1}{k}}$  est

$$\Delta_{\frac{1}{k}} = \frac{\delta - \frac{k}{2} \Delta}{1 - k}.$$

Le corps  $\Sigma \equiv 2k'D' + \frac{k}{2}D$  a une largeur somme des largeurs des deux corps  $2k'D'$  et  $\frac{k}{2}D$ ; si  $\Delta'$  désigne la largeur de  $D'$  on a donc

$$\delta = 2k'\Delta' + \frac{k}{2}\Delta.$$

Si l'on tient compte de cette valeur de  $\delta$  dans l'expression de  $\Delta_{\frac{1}{k}}$  on obtient

$$\Delta_{\frac{1}{k}} = \frac{2k'\Delta'}{1 - k};$$

d'où

$$\frac{\Delta_{\frac{1}{k}}}{\Delta'} = \frac{2k'}{1 - k} = \text{const.}$$

Les largeurs des corps  $C_{\frac{1}{k}}$  et  $D'$  relatives à une même direction quelconque sont donc *proportionnelles*; il en résulte, qu'à une homothétie près (que nous négligeons), le corps  $C' \equiv C_{\frac{1}{k}}$  admet  $D'$  pour domaine vectoriel, et *appartient par suite à l'ensemble*  $(e)_{D'}$ .

Il est clair que le corps  $C'$  que l'on vient d'obtenir est un corps de  $(e)_{D'}$  *distinct* du corps centré  $\frac{1}{2}D'$  qui a servi à la construction. Si en effet  $C'$  était centré,  $\Sigma$  l'étant aussi, la série  $[C, \Sigma]$  contiendrait deux corps centrés; tous ses corps seraient alors centrés, et il en serait de même de  $C$ , ce qui est contraire à l'hypothèse suivant laquelle  $C$  est un corps *quelconque* de  $(e)_{D'}$ .

Si l'on fait varier, dans les limites précisées  $\left[ k' > \frac{r_M}{r_m}, k < 1 \right]$ ,

les deux nombres  $k'$  et  $k$  qui interviennent dans la construction qui vient d'être exposée, on voit que la construction permet de déduire, d'un corps déterminé de l'ensemble  $(e)_n$ ,  $\infty^2$  corps de  $(e)_n$ , dont  $\infty^1$  seulement diffèrent par la *forme*.

Pour  $k'$  et  $k$  fixés (les homothéties étant négligées), à tout corps  $C$  de  $(e)_n$  correspond *un* corps  $C'$  de  $(e)_n$ ; mais pour pouvoir affirmer que la construction exposée réalise une transformation de l'ensemble  $(e)_n$  en l'ensemble  $(e)_n$ , il reste à montrer que tout corps de  $(e)_n$  est obtenu à partir d'un certain corps de  $(e)_n$ ; c'est ce que nous allons faire maintenant.

Soit  $C'$  un corps quelconque  $(e)_n$ , dont la largeur, dans une direction quelconque, est par suite la moitié  $\left(\frac{\Delta'}{2}\right)$  de la largeur  $\Delta'$  de  $D'$  dans la même direction. Adjoignons au corps  $C'$  le corps centré

$$\Sigma = k'D' + \frac{k}{2}D.$$

où  $k$  et  $k'$  sont des nombres positifs,  $k$  étant inférieur à l'unité.

Si l'on soumet l'ensemble des deux corps  $C'$  et  $D'$  à une homothétie de rapport  $m (> 0)$ , et si, en même temps, on remplace le coefficient  $k'$  qui figure dans la constitution de  $\Sigma$  par  $\frac{k'}{m}$ , on ne change pas  $\Sigma$  et l'on remplace  $C'$  par  $mC'$ . En choisissant convenablement  $m$  on peut donc faire en sorte que la série  $[\Sigma, C']$  soit indéfiniment prolongeable dans le sens  $\Sigma \rightarrow C'$ . Nous supposons qu'il en soit ainsi. Observons d'ailleurs que la division de  $k'$  par  $m$  n'a pas modifié le caractère arbitraire de  $k'$ , de sorte que, dans la constitution de la série linéaire indéfiniment prolongeable  $[\Sigma, C']$  la plus générale donnée par la construction précédente,  $k'$  et  $k$  conservent leur signification :  $k$  est un nombre positif quelconque inférieur à un et  $k'$  un nombre positif arbitraire.

Nous aurons établi la proposition que nous avons en vue lorsque nous aurons montré que, parmi les séries  $[\Sigma, C']$  dont nous venons d'indiquer la construction, et qui, comme nous l'avons dit au n° 2, sont toutes prolongeables dans le sens  $C' \rightarrow \Sigma$  (prolongement limité puisque le prolongement en sens inverse est illimité) il en existe, pour lesquelles l'un des corps  $C$  du prolongement *appartient à l'ensemble*  $(e)_n$ .

Envisageons une série  $[\Sigma, C']$  quelconque. Soit  $\lambda$  le rapport fixant, par rapport à deux plans tangents parallèles et également situés à  $\Sigma$  et  $C'$ , le plan qui enveloppe l'un des corps  $C_\lambda$  du prolongement précédent.  $C_\lambda$  aura une largeur  $\Delta_\lambda$  donnée, comme l'on sait, par l'expression

$$\Delta_\lambda = \frac{\delta - \lambda \frac{\Delta'}{2}}{1 - \lambda},$$

où  $\delta$  est la largeur de  $\Sigma$  dans une direction quelconque, et où  $\Delta'$  est celle de  $D'$  (et par conséquent  $\frac{\Delta'}{2}$  celle de  $C'$ ) dans la même direction.

On a d'ailleurs ici, puisqu'il s'agit du prolongement dans le sens  $C' \rightarrow \Sigma$ ,  $\lambda < 1$ ,  $\lambda = 0$  donne le corps  $\Sigma$ , et si (voir le n° 2)  $\lambda_2$  est le nombre (non nul et inférieur à un) qui fixe le corps  $C_{\lambda_2}$  au delà duquel le prolongement n'est plus possible,  $\lambda$  peut prendre toutes les valeurs comprises entre zéro et  $\lambda_2$ .

L'expression de  $\delta$  étant, comme on l'a vu plus haut,

$$\delta = 2k' \Delta' + \frac{k}{2} \Delta \quad [\Delta = \text{largeur de } D],$$

on a pour la largeur  $\Delta_\lambda$  de  $C_\lambda$ ,

$$\Delta_\lambda = \frac{\left(2k' - \frac{\lambda}{2}\right) \Delta' + \frac{k}{2} \Delta}{1 - \lambda}.$$

Déterminons  $\lambda$  par la relation

$$2k' - \frac{\lambda}{2} = 0, \quad \text{d'où } \lambda = 4k';$$

si le corps  $C_\lambda$  ainsi défini appartient au prolongement de la série  $[\Sigma, C']$  envisagée, ce corps est le corps  $C$  de l'ensemble  $(e)_n$  que l'on cherche à mettre en évidence. On a, en effet, pour ce corps :

$$\Delta_\lambda = \frac{k}{2(1 - 4k')} \cdot \Delta.$$

d'où

$$\frac{\Delta_\lambda}{\Delta} = \text{const.};$$

C et D ayant, dans toute direction, des largeurs proportionnelles, C appartient bien à l'ensemble  $(e)_n$ .

Or, si l'on désigne par  $\lambda_{2m}$  ( $> 0$ ) le minimum des valeurs des rapports  $\lambda_2$  fixant, dans les différentes séries  $[\Sigma, C']$ , le corps  $C_{\lambda_2}$  au delà duquel le prolongement n'est plus possible, il suffira de choisir  $k'$  (qui est arbitraire) de façon que  $\lambda = 4k'$  soit inférieur à  $\lambda_{2m}$ , pour être assuré que le corps C correspondant à  $\lambda = 4k'$  appartient au prolongement, dans le sens  $C' \rightarrow \Sigma$ , de la série  $[\Sigma, C']$  <sup>(1)</sup>.

Il est établi, comme on l'avait annoncé, que tout corps  $C'$  de  $(e)_n$  provient, par la construction exposée au début de ce numéro, d'un certain corps C de  $(e)_n$ .

Cette construction [que nous désignerons par *construction (C)*] réalise donc une transformation de l'ensemble  $(e)_n$  en l'ensemble  $(e)_n$ .

Ainsi :

*Deux ensembles de corps convexes admettant, respectivement, pour domaines vectoriels, deux corps convexes centrés quelconques non homothétiques, peuvent toujours être transformés l'un dans l'autre par une construction (C).*

#### IV. — Construction de l'ensemble des corps convexes $(\mathcal{E})$ de l'espace.

Il est facile maintenant de voir comment on peut réaliser la reconstitution complète de l'ensemble des corps convexes  $(\mathcal{E})$  de l'espace annoncée dans l'Introduction.

Considérons, dans l'ensemble  $(\mathcal{E})$ , le sous-ensemble  $(\mathcal{E}_1)$  somme des deux ensembles  $(e)_n$  et  $(\gamma)$  suivants :

$(e)_n$  est un ensemble  $(e)_n$  particulier arbitrairement choisi, par exemple, l'ensemble des corps de largeur constante, pour lesquels  $D_0$  est une sphère.

$(\gamma)$  est l'ensemble des corps convexes centrés.

Au moyen des seuls corps de l'ensemble  $(\mathcal{E}_1) = (e)_n + (\gamma)$ , on peut construire tous les corps de l'ensemble total  $(\mathcal{E})$ . Soit en

(1) Pour réaliser la condition  $k' < \frac{\lambda_{2m}}{4}$  dont il est question dans la première partie du raisonnement, il suffit (voir l'expression de  $\lambda_2$ ) de choisir  $k$  suffisamment petit.

effet C un corps quelconque de  $(\mathcal{E})$ . Ce corps a un certain domaine vectoriel D, et appartient par suite à l'ensemble  $(e)_D$  défini par D. Le corps D est centré, et appartient par suite à l'ensemble  $(\gamma)$ . Or, la construction géométrique  $(\mathcal{C})$ , faite avec  $D_0$  et D, transforme l'ensemble des corps de  $(e)_{D_0}$  en l'ensemble des corps de  $(e)_D$ . Cette construction donnera donc, en particulier, le corps C envisagé.

Ainsi, conformément au résultat annoncé, chaque ensemble particulier  $(\mathcal{E}_i) = (e)_D + (\gamma)$ , obtenu en choisissant pour  $(e)_D$  l'ensemble des corps convexes admettant pour domaine vectoriel un corps quelconque D de  $(\gamma)$ , est la base d'une reconstitution complète de  $(\mathcal{E})$ .

L'étude actuelle montre l'intérêt que présente, eu égard à la construction de l'ensemble des corps convexes de l'espace, le problème de la détermination des corps convexes admettant un domaine vectoriel donné (des corps de largeur constante en particulier), sur lequel j'ai récemment attiré l'attention (1).

---

(1) *Comptes rendus de l'Ac. des Sc.*, t. 201, 1935, p. 761.