

# BULLETIN DE LA S. M. F.

BERTRAND GAMBIER

**Triangles homologiques, tétraèdres homologiques,  
tétraèdres en situation hyperboloïdale**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 66 (1938), p. 8-47

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1938\\_\\_66\\_\\_8\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1938__66__8_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1938, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TRIANGLES HOMOLOGIQUES, TÉTRAÈDRES HOMOLOGIQUES,  
TÉTRAÈDRES EN SITUATION HYPERBOLOÏDALE;

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

1. Deux triangles  $ABC$ ,  $A_1B_1C_1$  d'un même plan sont dits *homologiques* si les droites  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  concourent au point  $S$ ; dans ce cas les côtés  $(BC, B_1C_1)$ ,  $(CA, C_1A_1)$ ,  $(AB, B_1A_1)$  se coupent en trois points  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  situés sur une même droite  $\Delta$ . Ces deux propositions sont réciproques : une polarité par rapport à une conique quelconque échange en effet les deux propositions.

Le choix du nom résulte de ce fait qu'il existe effectivement une homologie, et une seule, de pôle  $S$ , d'axe  $\Delta$  transformant  $ABC$  en  $A_1B_1C_1$ . Inutile de revenir sur les démonstrations; il est bon toutefois de signaler que c'est sans doute ce résultat qui a enseigné aux géomètres l'art de simplifier certaines démonstrations par l'immersion de l'espace linéaire étudié dans un autre espace linéaire ayant un plus grand nombre de dimensions : la figure plane en jeu peut, ici, être regardée comme la projection de la figure formée par une pyramide  $SABC$  et une section plane  $A_1B_1C_1$ .

2. Supposons deux triangles marqués au hasard dans un même plan : on peut joindre chaque sommet du premier à un sommet du second de six façons différentes: *il est intéressant de chercher combien d'homologies on peut ainsi obtenir*. Dans le cas général, il y en a *zéro* bien entendu; nous allons montrer que l'on en peut obtenir :

*zéro, une, deux, trois, quatre (de deux façons différentes), ou six; cinq n'est jamais obtenu* : bien entendu, on compte le nombre exact d'homologies, sans en oublier.

C'est encore un exemple très simple, où il y a désaccord entre les résultats fournis par un décompte d'inconnues et d'équations.

Deux triangles marqués au hasard donnent une figure à douze

paramètres (deux arbitraires pour chaque sommet). Dans le cas où l'on veut obtenir une homologie, on marque A, B, C, S arbitraires, on choisit  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  respectivement sur SA, SB, SC arbitrairement; cela fait un total de onze arbitraires, manifestement indépendantes, la variation de l'une d'elles changeant le résultat; d'autre part, comme le point S est *unique* pour deux triangles où A et  $A_1$ , B et  $B_1$ , C et  $C_1$  se correspondent dans une homologie, le système (A, B, C;  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ) dépend du même nombre de paramètres que le système (A, B, C;  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ , S), c'est-à-dire de onze paramètres; *une homologie entraîne donc une condition unique*; on ne saurait en déduire que  $p$  homologies ( $1 \leq p \leq 6$ ) doivent entraîner  $p$  conditions, et la suite nous apprendra qu'il y a souvent réduction du nombre de conditions.

Un raisonnement, d'ailleurs bien simple, suffit à nous mettre en garde, sans nous montrer quel est le résultat exact : *si* deux triangles peuvent être homologues de *six façons différentes*, leur ensemble dépend de *huit paramètres au moins*, et non pas de  $12 - 6$ , soit six paramètres, de sorte qu'il y a nécessairement réduction : en effet, on voit tout de suite que les trois sommets du second ne peuvent être tous les trois sur un même côté du premier; ni deux sur un côté du premier, le dernier étant sur un autre côté du premier; ni chacun sur un côté différent du premier. Il existe donc un sommet  $A_1$  du second non situé sur un côté du premier; or, par une homographie du plan, on peut amener A, B, C,  $A_1$  à coïncider avec quatre points choisis arbitrairement : il y a donc bien au moins huit paramètres.

Ce raisonnement, qui vient d'être employé, nous met en garde contre une autre faute : nous pourrions être tentés de croire évidente la possibilité d'obtenir six homologies : la soustraction  $12 - 6 = 6$  est exacte, mais n'a rien à voir avec la question; nous nous sommes déjà servis de ce fait que le groupe des homographies respecte les rapports d'homologie éventuels qui peuvent exister entre deux triangles, de sorte que, en réalité, *ce n'est pas de douze paramètres dont nous disposons, mais simplement de quatre*; nous pouvons en effet marquer A, B, C,  $A_1$  où nous voulons et nous n'avons plus à notre disposition que les positions de  $B_1$ ,  $C_1$ ; mais alors nous risquons de tomber dans l'erreur inverse et de croire que nous ne pourrions réaliser que quatre

homologies au maximum, tandis qu'en réalité on peut en obtenir jusqu'à six.

Désormais nous ne regarderons plus comme distinctes deux configurations se transformant l'une en l'autre par une homographie et nous nous bornerons à compter les *invariants homographiques*, autrement dit le nombre de paramètres arbitraires qui s'ajoutent aux huit paramètres de l'homographie générale (celle qui restitue à A, B, C, A<sub>1</sub> la permission de se loger individuellement chacun où il voudra, en une résidence autre que celle que nous lui avons imposée *a priori*).

### 3. La clé est facile à trouver; supposons l'homologie

A	B	C
A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>

réalisée (ce schéma indique que A et A<sub>1</sub> se correspondent, B et B<sub>1</sub>, puis C et C<sub>1</sub>). Considérons l'hexagone

$$AB_1CA_1BC_1A$$

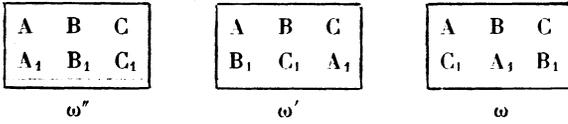
(les sommets des deux triangles se succèdent alternativement en lisant ce schéma; les sommets homologues sont à trois rangs d'intervalle; cette remarque est utile pour la suite). *D'après le théorème de Brianchon il est circonscrit à une conique  $\Gamma$ ; réciproquement, s'il est circonscrit à une conique  $\Gamma$ , l'homologie indiquée plus haut existe.*

[On sait d'ailleurs que deux triangles réciproques par rapport à une conique sont homologues, et que, inversement, si deux triangles sont homologues, ils sont polaires réciproques par rapport à une conique, d'ailleurs unique.]

*Les résultats subsistent si la conique  $\Gamma$  dégénère en deux points  $\omega, \omega'$ .* Nous traçons donc, arbitrairement, un triangle ABC; nous choisissons arbitrairement, deux points  $\omega, \omega'$  distincts, non situés sur les côtés (*fig. 1*). Nous joignons (en traits interrompus sur la figure), A $\omega$ , B $\omega$ , C $\omega$ , puis (en pointillé sur la figure), A $\omega'$ , B $\omega'$ , C $\omega'$ . Nous marquons les points d'intersection

$$A_1(B\omega, C\omega'), \quad B_1(C\omega, A\omega'), \quad C_1(A\omega, B\omega').$$

Nous avons les trois homologies



Les deux dernières ont lieu par construction; la première a lieu, comme conséquence de la réciproque du théorème de Brianchon (appliqué à la conique dégénérée  $\omega\omega'$ ). Nous avons indiqué les droites  $AA_1, BB_1, CC_1$  en traits mixtes;  $\omega, \omega', \omega''$  sont les pôles de ces homologies; deux quelconques d'entre elles entraînent la troisième; ce sont *deux homologies telles que chacun des sommets A, B, C du premier triangle ait deux homologues différents dans chacune des deux homologies en jeu, et alors existe automatiquement la troisième homologie où chaque sommet A, B, C a pour homologue le sommet du second triangle qui ne lui a pas encore été associé.*

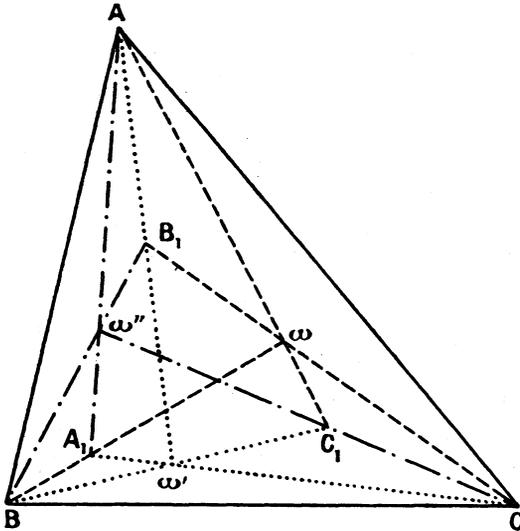
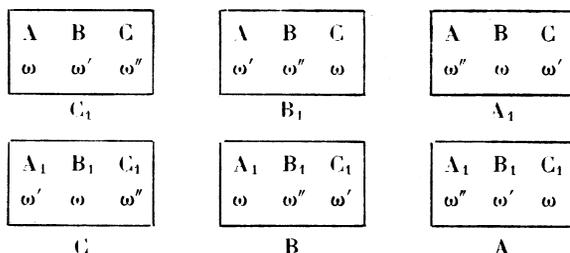


Fig. 1.

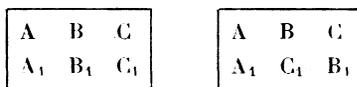
Cette configuration est extrêmement curieuse, elle comporte trois triangles,  $ABC, A_1B_1C_1, \omega\omega'\omega''$  qui jouent le même rôle,

car nous pouvons écrire les schémas d'homologie



La configuration, prise en elle-même, dépend des dix paramètres qui permettent de prendre A, B, C,  $\omega$ ,  $\omega'$  arbitrairement; elle ne contient que deux invariants homographiques. On n'a pas obtenu trois relations de conditions, mais deux seulement. *Nous avons réalisé ainsi le cas de trois homologies* (qui n'entraîne que deux conditions).

4. Supposons maintenant que nous cherchions à réaliser les deux homologies simultanées



caractérisées par ce fait qu'un sommet déterminé, A par exemple, se trouve avoir le même homologue dans chacune d'elles. La construction est immédiate, on prend arbitrairement (fig. 2), B, C,  $B_1$ ,  $C_1$ ; le point de concours O de  $BB_1$  et  $CC_1$  est le pôle de la première homologie; le point O' où  $BC_1$  et  $BC_1$  se coupent est le pôle de la seconde; A et  $A_1$  sont des points arbitraires de la droite  $OO'$ . La figure dépend de dix paramètres métriques; elle a deux invariants homographiques. *C'est le cas de deux homographies* (chacune a donné une condition indépendante de l'autre).

Nous allons chercher ce qu'il faut éviter ou réaliser, de façon à n'avoir pas ou avoir :

a. l'homologie complémentaire 

A	B	C
$B_1$	$C_1$	$A_1$

 et par suite aussi

A	B	C
$C_1$	$A_1$	$B_1$

, ce sera un cas de quatre homologies en cas de réussite;

b. l'homologie complémentaire  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline C_1 & B_1 & A_1 \\ \hline \end{array}$  et nous verrons

qu'alors on a automatiquement la nouvelle homologie  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline B_1 & A_1 & C_1 \\ \hline \end{array}$ ,

ce sera un autre cas de *quatre homologies*;

c. les deux homologies complémentaires

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline B_1 & C_1 & A_1 \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & B & C \\ \hline C_1 & B_1 & A_1 \\ \hline \end{array},$$

c'est la réunion de *a* et *b* et l'on a six homologies, puisque chacune des deux nouvelles homologies en entraîne une autre.

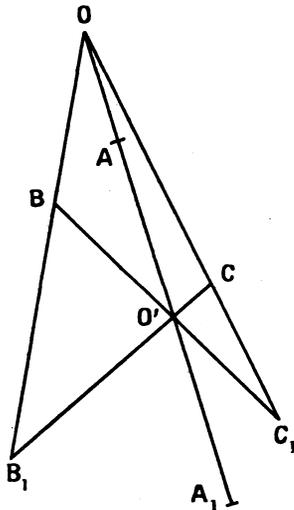


Fig. 2.

Et alors on a épuisé tous les cas possibles (0, 1, 2, 3, 4 de deux façons différentes; 6, jamais 5).

5. Nous nous plaçons dans le cas de la figure 2; d'après une remarque faite, on peut donner aux quatre points  $BCB_1C_1$  la position que l'on veut; nous dessinons donc un carré dont les sommets consécutifs sont  $BC, CB_1$  (*fig. 3*); le point  $O$  est à l'infini, le point  $O'$  aussi;  $A$  et  $A_1$  sont deux points à l'infini, que nous indiquons par la direction qui les porte.

Si l'homologie 

A	B	C
B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>

 existe, nous formons l'hexagone de

Brianchon obtenu par la règle donnée plus haut AC<sub>1</sub>, CB<sub>1</sub>, BA<sub>1</sub>; les trois côtés C<sub>1</sub>C, BB<sub>1</sub>, AA<sub>1</sub> (droite de l'infini) sont concourants; donc si nous pouvons trouver une conique inscrite, cette conique dégénère en deux points et les trois côtés AC<sub>1</sub>, CB<sub>1</sub>, BA<sub>1</sub> non

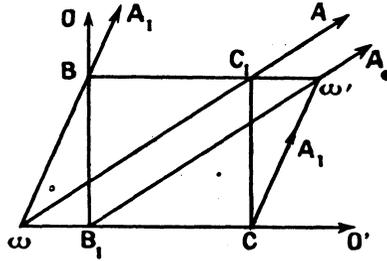


Fig. 3.

encore considérés doivent être concourants. Si donc nous avons choisi sur la droite OO' (droite de l'infini) le point A, la droite C<sub>1</sub>A coupe B<sub>1</sub>C en un point ω : *suivant que la droite BA<sub>1</sub> ne passe pas ou passe en ω nous évitons ou obtenons la troisième homologie annoncée*; si nous avons obtenu cette troisième homologie, nous savons que l'homologie

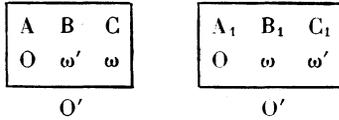
A	B	C
C <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>

 se présente

automatiquement comme conséquence de la première et troisième. On a ainsi un cas de quatre homologies, n'exigeant qu'un total de trois conditions, laissant subsister un invariant homographique (qui est par exemple le birapport des rayons BO, BO', BA, BA<sub>1</sub>). Le point ω', pôle de la quatrième homologie obtenue s'obtient (dans le cas précis de la figure 3, où BC<sub>1</sub>, CB<sub>1</sub> est un parallélogramme) en reportant  $\vec{C_1\omega'} = \vec{\omega B_1}$  sur le côté BC<sub>1</sub>.

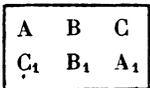
Les trois triangles qui, au n° 3, s'appelaient ABC, A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>, ωω'ω'' s'appellent ici ABC, A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>, ωω'O, et il est curieux de constater que deux quelconques de ces trois triangles sont homologues de quatre façons différentes. Cela résulte de ce que les

homologies



existent et s'ajoutent à celles qui ont été indiquées au n° 3; il est curieux de retrouver cette symétrie des trois triangles du n° 3.

6. Nous partons de nouveau de la figure 2; le choix arbitraire de B, C,  $B_1$ ,  $C_1$  a donné la droite  $OO'$ ; nous voulons maintenant choisir A et  $A_1$  sur la droite  $OO'$ , de sorte que l'homologie



existe aussi,  $\Omega$  étant son pôle. Le point A est un

point de  $OO'$ ; supposons que nous le choisissons arbitrairement

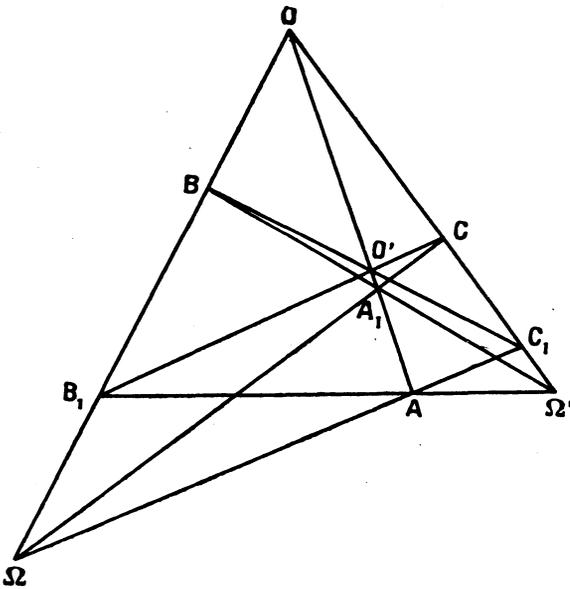


Fig. 4.

(fig. 4);  $\Omega$  est alors à l'intersection de  $AC_1$  et  $OB$ ;  $A_1$  à l'intersection de  $\Omega C$  et  $OO'$ ; la troisième homologie est obtenue; elle a donné une condition, puisque le choix des deux points A et  $A_1$

sur  $OO'$  n'est plus arbitraire, mais celui de  $A$  seul par exemple.

Nous allons montrer que la quatrième homologie 

$A$	$B$	$C$
$B_1$	$A_1$	$C_1$

 est

obtenue elle aussi; tout revient à démontrer que  $BA_1$  et  $B_1A$  se coupent en un point  $\Omega'$  de  $CC_1$ . Représentons par  $(\Omega)$  le birapport de quatre positions quelconques de  $\Omega$  prises sur  $BB_1$ ; on a, avec les symboles analogues  $(\Omega) = (A) = (A_1)$  quand  $B, B_1, C, C_1$  restent fixes et que  $\Omega$  varie sur  $BB_1$ ; donc les rayons  $BA_1$  et  $B_1A$  se correspondent homographiquement; or, si  $\Omega$  vient en  $O$ , les points  $A$  et  $A_1$  viennent tous deux en  $O$  aussi et les deux rayons  $BA_1, B_1A$  coïncident tous deux avec la droite  $BB_1O$ ; donc le point de rencontre  $\Omega'$  de  $BA_1$  et  $B_1A$  a pour lieu une droite; quand  $\Omega$  vient en  $B_1$ , le point  $A_1$  vient en  $O'$ , la droite  $\Omega AC_1$  devient  $B_1C_1$ , le point  $\Omega'$  vient en  $C_1$ ; de même si  $\Omega$  vient en  $B$ ,  $\Omega'$  vient en  $C$ ; le lieu de  $\Omega'$  est donc la droite  $CC_1$ , ce qui justifie la proposition.

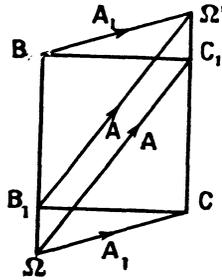


Fig. 5.

On sait donc, une fois  $A$  choisi sur  $OO'$ , trouver la position de  $A_1$  de façon à avoir les deux nouvelles homologies que nous venons d'indiquer; cette position est unique; donc si l'on choisit  $A_1$  au hasard, on n'a que les deux homologies du n° 4; si l'on choisit  $A_1$  convenablement, on a le cas nouveau annoncé des quatre homologies. On remarquera encore ici que les triangles  $ABC, A_1B_1C_1$ , et  $O\Omega\Omega'$  sont deux à deux homologiques de 4 façons différentes; même remarque pour  $ABC, A_1B_1C_1$  et  $O'\Omega\Omega'$ . Une forme réduite élégante consiste à choisir pour  $A, B, C$  les sommets d'un triangle équilatéral et pour  $O$  le centre de ce triangle :  $A_1B_1C_1$  est homothétique de  $ABC$  par rapport à  $O$ .

Le cas des quatre homologies (un seul invariant) comprend donc deux types : à partir d'une première homologie, chaque sommet ne retrouve jamais le même homologue, ou au contraire, chaque sommet retrouve successivement le même homologue dans l'une des trois nouvelles homologies. Nous n'avons finalement trouvé que trois relations pour obtenir ces quatre homologies.

On peut remarquer qu'il est avantageux d'utiliser pour la figure 4 la transformation de  $BC_1, CB_1$  en un carré (fig. 5), les droites  $\Omega C_1$  et  $\Omega C$  indiquent les directions  $A, A_1$ , et il est clair alors qu'en prenant sur  $CC_1$  le vecteur  $\vec{C_1\Omega'} = \vec{\Omega B_1}$ , les droites  $B\Omega', B_1\Omega'$  sont respectivement parallèles à  $\Omega C$  et c'est la démonstration de la proposition qui précède, rendue intuitive.

7. Nous saurons donc, en comparant les figures 5 et 3 trouver les conditions propres à obtenir le maximum des six homologies et c'est surtout pour ce cas final que la transformation de  $BC_1, CB_1$  en carré est avantageuse. *Le rayon  $C_1A$  doit couper  $BA_1$  sur  $CB_1$  et couper  $CA_1$  sur  $BB_1$ .* Prenons donc pour axe des  $x$  la droite  $B_1C$ , pour axe des  $y$  la droite  $B_1B$  et nous supposons  $\overline{B_1C} = +1 = \overline{B_1B}$ . Les équations de  $CA_1, C_1A, BA_1$  sont :

$$\begin{aligned} CA_1 \dots \dots \dots y &= m_1(x-1) \\ C_1A \dots \dots \dots y-1 &= m(x-1) \\ BA_1 \dots \dots \dots y-1 &= m_1x \end{aligned}$$

Le point  $\Omega$  commun à  $CA_1, C_1A$  a pour coordonnées

$$\Omega \left( \frac{m_1 - m + 1}{m_1 - m}, \frac{m_1}{m_1 - m} \right);$$

le point commun à  $C_1A$  et  $BA_1$ , soit  $\alpha$  a pour coordonnées

$$\left( \frac{m_1}{m - m_1}, \frac{m - m_1 + m m_1}{m - m_1} \right).$$

On a les deux équations

$$m_1 - m + 1 = 0, \quad m - m_1 + m m_1 = 0$$

qui reviennent à

$$m - m_1 = 1, \quad m m_1 = -1.$$

On en conclut  $m = -j, m_1 = j^2$  où  $j$  est une racine cubique

imaginaire de l'unité. La configuration est donc imaginaire; elle n'a plus d'invariant homographique. Les six homographies donnent un ensemble de conditions distinctes réduit à quatre seulement. Le birapport  $(BB, \Omega O)$  ou  $(0, 1, -j^2, \infty)$  est égal à  $(-j)$  : c'est la valeur classique du rapport *équianharmonique*.

Ce qui a été dit dans le cas de quatre homologies telles qu'aucun sommet ne retrouve le même homologue serait intéressant à reprendre ici, mais les triangles qui interviennent étant imaginaires, nous ne pousserons pas l'étude plus loin (bien que cette configuration imaginaire puisse conduire à des applications réelles, mais nous n'en connaissons pas). On trouverait des systèmes de triangles ayant, par couples, six homologies. *Une forme réduite de cette figure doit être signalée* : ABC triangle équilatéral,  $A_1$  centre de ce triangle,  $B_1$  et  $C_1$  points cycliques du plan; la figure admet évidemment  $AA_1$ ,  $BA_1$ ,  $CA_1$ , pour axes de symétrie, de sorte que l'on aperçoit aussitôt deux homologies de même axe  $AA_1$ , deux autres de même axe  $BA_1$ , et deux autres d'axe  $CA_1$ .

8. Quand on passe à l'espace à quatre dimensions, les circonstances se modifient beaucoup; deux tétraèdres *quelconques* mettent en jeu 24 paramètres; pour deux tétraèdres homologiques, on peut choisir les sommets A, B, C, D du premier, le pôle S arbitrairement, puis les sommets du second respectivement sur SA, SB, SC, SD, ce qui fait un total de 19 paramètres; on trouve donc cinq conditions pour réaliser l'homologie, au lieu d'une seule dans le plan. Bien que ces décomptes ne soient pas une indication absolue, cela fait comprendre que le nombre d'homologies possibles, quand on joint un à un les sommets des deux tétraèdres, risque de ne pouvoir être très élevé : nous montrerons qu'il ne peut s'élever que jusqu'à *quatre*. Comme précédemment, nous devons faire état de l'homographie générale de l'espace à trois dimensions, de sorte qu'en réalité nous devons nous borner à 9 *paramètres (au lieu de 24) comme nombre des paramètres disponibles*, susceptibles d'être liés entre eux par certaines conditions [autrement dit on donne à A, B, C, D, A' des positions initiales choisies une fois pour toutes et l'on ne dispose plus que de B', C', D'].

Si nous prenons le tétraèdre A'B'C'D', réciproque par rapport à une quadrique Q d'un tétraèdre donné ABCD, ces deux

*tétraèdres ne sont pas homologiques*, contrairement à ce qui se passe pour deux triangles réciproques vis-à-vis d'une conique : en effet, ABCD et Q font intervenir  $12 + 9$ , ou 21 paramètres *métriques*, tandis que deux tétraèdres homologiques ne font intervenir que 19 paramètres métriques. On forme d'ailleurs aisément les deux conditions que doivent vérifier mutuellement ABCD et Q pour que l'homologie ait lieu entre ABCD et A'B'C'D'. Il est bon de remarquer aussi que si deux tétraèdres sont polaires réciproques vis-à-vis d'une quadrique Q, cette quadrique est *unique*, sinon on aurait deux quadriques avec huit points distincts chacun ayant même plan polaire par rapport aux deux quadriques. *Il n'y a d'exception que si l'on prend deux quadriques se raccordant le long d'une conique ou se coupant suivant un quadrilatère gauche*; dans le premier cas si ABC, A'B'C' sont deux triangles du plan de la conique de raccord et polaires réciproques par rapport à cette conique, et si D et D' sont confondus avec le sommet du cône circonscrit le long de la conique, les deux tétraèdres ABCD, A'B'C'D' sont polaires réciproques par rapport à toutes les quadriques du faisceau défini par les deux premières; ils sont homologiques par rapport au pôle d'homologie de ABC et A'B'C'. Dans le second cas, soit  $\alpha\beta\gamma\delta$  le quadrilatère gauche commun aux deux quadriques; A et B' d'une part, A' et B de l'autre sont deux points conjugués par rapport à  $\alpha\gamma$ , extrémités d'une diagonale du quadrilatère; de même C et D', puis C' et D sont conjugués, par rapport à  $\beta\delta$ ; les deux tétraèdres ABCD et A'B'C'D' sont réciproques par rapport à toutes les quadriques contenant  $\alpha\beta\gamma\delta$ ; ils ne sont pas homologiques. Si l'on considère les droites AA', BB', CC', DD', on constate aisément qu'*elles appartiennent à une même semi-quadrique*. Convenons de dire que deux tétraèdres sont en *situation hyperboloïdale* si les droites AA', BB', CC', DD' sont génératrices d'une même semi-quadrique; il est facile de voir que deux tels tétraèdres dépendent, au total, de vingt et un paramètres : en effet, on choisit une quadrique (9 paramètres), quatre génératrices d'un même système (4 paramètres), puis, sur chacune un couple de points (8 paramètres). Or, puisque deux tétraèdres réciproques vis-à-vis d'une quadrique sont en situation hyperboloïdale, ils forment, ou un cas

---

(<sup>1</sup>) Voir la note en fin du Mémoire.

*particulier* de tétraèdres en situation hyperboloïdale, ou le cas *général*. Or, comme le nombre de paramètres est le même, 21, soit pour les couples de tétraèdres en situation hyperboloïdale, soit pour les couples de tétraèdres réciproques par rapport à une quadrique (et que, en plus, il n'y a pas plusieurs espèces de tétraèdres en situation hyperboloïdale), on conclut de là que, *inversement*, deux tétraèdres en situation hyperboloïdale sont réciproques vis-à-vis d'une certaine quadrique, théorème bien simple qui ne semble pas avoir été déjà signalé. Le problème à étudier comme généralisation naturelle de notre étude plane serait donc (1) : chercher les tétraèdres qui offrent le plus de situations hyperboloïdales parmi les vingt-quatre façons différentes de joindre un à un leurs sommets, et non pas étudier les tétraèdres homologues de plusieurs façons.

9. Étudions d'abord le cas de tétraèdres homologues, qui est celui des deux problèmes, cités à l'instant, qui donne le maximum de restrictions, donc le minimum de solutions (du moins à première estime).

Il est clair que si l'on prend dans un même plan P deux triangles ABC,  $A_1 B_1 C_1$ , les deux tétraèdres ABCD,  $A_1 B_1 C_1 D$  où D est un point quelconque, hors de P, ont les mêmes homologues que ABC et  $A_1 B_1 C_1$ , car la droite DD<sub>1</sub> est indéterminée. Nous écartons donc un tel cas banal, où l'on pourrait trouver jusqu'à six homologues.

Nous écartons le cas d'un sommet confondu (par dualité, le cas d'une face portée par le même plan dans les deux tétraèdres), le cas d'une arête confondue (à titre de droite indéfinie), le cas où simultanément deux sommets homologues sont confondus, les faces opposées ayant même plan support.

Pour simplifier la recherche nous dirons que deux homologues

---

(1) Étant donnés deux tétraèdres quelconques ABCD, A'B'C'D' les deux systèmes de quatre droites : AA', BB', CC', DD' joignant les sommets homologues, puis (BCD, B'C'D'), (CDA, C'D'A'), (DAB, D'A'B'), (ABC, A'B'C') communes aux faces homologues ont les mêmes invariants. Si le premier système est formé de droites concurrentes, le second est formé de droites coplanaires; si le premier système est formé de quatre génératrices d'une semi-quadrique, il en est de même du second.

du type

A	B	C	D
A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>

A	B	C	D
A <sub>1</sub>	*	*	*

où A<sub>1</sub> est le seul à avoir conservé le même homologue n'intéresse que A, ou encore n'intéresse que BCD, car le groupe BCD a conservé — en *bloc* — les mêmes homologues.

Autrement dit nous considérons deux homologies qui intéressent un groupe de

a. 4 sommets, exemple

A	B	C	D
A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>

A	B	C	D
B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>

b. 3 sommets (ou 1), exemple

A	B	C	D
A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>

A	B	C	D
A <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>

c. 2 sommets, exemple

A	B	C	D
A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>

A	B	C	D
B <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>

Nous allons voir que seules les homologies du dernier type sont possibles.

Pour le premier, on voit aisément qu'il n'y a qu'un schéma à étudier (<sup>1</sup>); car A, dans la seconde homologie, a un correspondant autre que A<sub>1</sub>, et un simple changement de notations permet de supposer que c'est B<sub>1</sub>; mais alors B a, dans la seconde, un homologue qui n'est pas B<sub>1</sub>, et qui n'est pas non plus A, (sinon les

(<sup>1</sup>) Une autre façon d'expliquer le résultat est de montrer qu'une correspon-

dance telle que 

A	B	C	D
C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>

 peut s'écrire 

A	C	B	D
C <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>

 où la seconde ligne résulte bien du décalage de la première d'un rang vers la gauche, et l'on fait le changement de notations à ce moment.

deux homologies intéresseraient le groupe  $AB$ ); on peut donc choisir les noms de sorte que l'homologue de  $B$  s'appelle  $C_1$  plutôt que  $D_1$ ; ensuite  $C$  ne peut avoir ni  $A_1$ , ni  $B_1$ , ni  $C_1$  pour homologue dans la seconde homologie, mais simplement  $D_1$ . Si donc nous indiquons les centres  $O, O_1$  des deux homologies, puis  $A$  et  $A_1$  alignés avec  $O$ , on voit que par des alignements successifs avec  $O$  ou  $O_1$  et un sommet déjà indiqué, tous les points  $B_1, C_1, D_1, C, D$  viendraient successivement dans le plan  $OO_1A$ ; nous écartons le cas de tétraèdres aplatis.

Dans le second cas, on donnera la droite  $OO_1AA_1$  avec la position de ces quatre points sur la droite, et le point  $B$ ; des alignements feraient venir successivement les sommets tous dans le plan  $OO_1B$ .

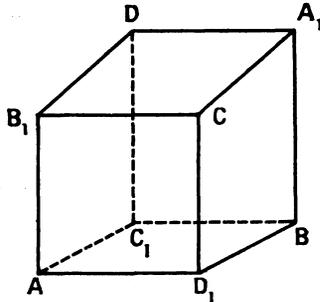


Fig. 6.

Il ne reste donc que le dernier cas qui est immédiat : on donne deux points  $O$  et  $O_1$  arbitraires (6 paramètres), on choisit un plan passant par  $OO_1$  (1 paramètre); on mène deux droites par  $O$  dans ce plan, deux autres par  $O_1$  (4 paramètres) et l'on marque  $A, B, A_1, B_1$  aux points où ces droites se rencontrent ( $A$  et  $A_1$  sur un même rayon issu de  $O$ ,  $B$  et  $B_1$  aussi, en mettant les noms de sorte que  $A, B_1$  soient alignés avec  $O_1$  et  $A_1$  et  $B$  aussi). On a de même 5 paramètres pour obtenir  $C, D, C_1, D_1$ . On a engagé successivement  $6 + 5 + 5$  ou 16 paramètres; il reste un seul invariant homographique; on peut remarquer que  $AB$  et  $A_1B_1$  percent  $OO_1$  en deux points  $\alpha$  et  $\alpha_1$  conjugués par rapport à  $OO_1$ ; de même  $CD$  et  $C_1D_1$  percent  $OO_1$  en un autre couple  $\gamma, \gamma_1$  conjugué par rapport à  $OO_1$ ; le birapport  $(OO_1\alpha\gamma)$ , par exemple,

est l'invariant homographique signalé. On écarterait le cas où  $\gamma$  coïncide avec  $\alpha$ , car ABCD seraient dans un même plan (mais il y aurait néanmoins encore 2 homologies); d'ailleurs  $\gamma_1$  coïnciderait avec  $\alpha_1$ .

Mais on peut prendre le cas où  $\gamma_1$  coïncide avec  $\alpha$  et par suite  $\alpha_1$  avec  $\gamma$ . C'est le cas qui peut, par homographie, s'obtenir avec un parallélépipède où AB et CD sont les diagonales non parallèles de deux faces parallèles et  $A_1, B_1, C_1, D_1$  les symétriques de A, B, C, D par rapport au centre du parallélépipède (*fig. 6*). On a alors quatre homologies

<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td><math>A_1</math></td><td><math>B_1</math></td><td><math>C_1</math></td><td><math>D_1</math></td></tr> </table>	A	B	C	D	$A_1$	$B_1$	$C_1$	$D_1$	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td><math>B_1</math></td><td><math>A_1</math></td><td><math>D_1</math></td><td><math>C_1</math></td></tr> </table>	A	B	C	D	$B_1$	$A_1$	$D_1$	$C_1$
A	B	C	D														
$A_1$	$B_1$	$C_1$	$D_1$														
A	B	C	D														
$B_1$	$A_1$	$D_1$	$C_1$														
<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td><math>C_1</math></td><td><math>D_1</math></td><td><math>A_1</math></td><td><math>B_1</math></td></tr> </table>	A	B	C	D	$C_1$	$D_1$	$A_1$	$B_1$	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td><math>D_1</math></td><td><math>C_1</math></td><td><math>B_1</math></td><td><math>A_1</math></td></tr> </table>	A	B	C	D	$D_1$	$C_1$	$B_1$	$A_1$
A	B	C	D														
$C_1$	$D_1$	$A_1$	$B_1$														
A	B	C	D														
$D_1$	$C_1$	$B_1$	$A_1$														

Il n'y a plus d'invariant homographique.

Les quatre centres d'homologie forment un tétraèdre  $T(\alpha\beta\gamma\delta)$  arbitraire; un point A choisi arbitrairement donne, dans les homologies involutives relatives à un sommet de T et à la face opposée des homologues  $A_1, B_1, C_1, D_1$ ; B, C, D sont les homologues de A dans les involutions biaxiales ayant pour directrices deux arêtes opposées de T. On voit que deux homologies donnent huit conditions et non dix et que quatre homologies donnent neuf conditions et non vingt.

Une discussion analogue se ferait pour deux  $(p + 1)$  — èdres pris dans un même espace linéaire à  $p$  dimensions. La parité de  $p$  joue un rôle fondamental; et en même temps le lien avec les groupes d'homographies apparaît clairement.

10. Nous allons maintenant traiter le cas des *tétraèdres en situation hyperboloidale*. Rappelons que, si l'on donne deux tétraèdres ABCD,  $A_1B_1C_1D_1$ , les quatre droites  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$  ont deux invariants homographiques, à savoir les birapports qu'elles interceptent sur leurs deux sécantes communes (si chacune est tangente à la semi-quadrique déterminée par les trois autres, ces deux birapports sont égaux; si elles appartiennent à une même

semi-quadrique, ces deux birapports sont encore égaux, mais, de plus, il y a une même relation linéaire et homogène entre les coordonnées plückeriennes de même rang des quatre droites). Si l'on prend les quatre droites d'intersection des faces homologues  $(BCD, B_1C_1D_1)$ ,  $(CDA, C_1D_1A_1)$ ,  $(DAB, D_1A_1B_1)$ ,  $(ABC, A_1B_1C_1)$  on obtient un système équivalent, par homographie ou corrélation, au précédent, car les deux invariants sont les mêmes (en particulier si les quatre premiers rayons sont concourants, les quatre derniers sont coplanaires; si les quatre premiers ont une sécante commune double, les quatre derniers aussi; si les quatre premiers appartiennent à une même semi-quadrique, les quatre derniers aussi).

Nous cherchons donc combien de situations hyperboloïdales peuvent offrir  $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ . Deux voies s'offrent au chercheur et peuvent conduire toutes deux au résultat; l'une ne fait intervenir que les notions les plus élémentaires de géométrie dans l'espace, la seconde fait intervenir les biquadratiques et leur représentation paramétrique par fonctions elliptiques; mais la réunion des deux méthodes est précieuse pour éviter les tâtonnements inutiles. Nous commencerons par le second procédé.

Nous devons, en tous cas, signaler une *situation hyperboloïdale dégénérée* qui s'introduira, dès que nous cesserons de faire de la géométrie et que nous nous fierons au calcul. *Si quatre droites sont génératrices d'une semi-quadrique, il existe  $\infty^1$  droites les rencontrant toutes quatre, à savoir les génératrices de la semi-quadrique complémentaire.* Mais ce cas n'est pas le seul où quatre droites  $D_1, D_2, D_3, D_4$  admettent  $\infty^1$  sécantes communes: supposons par exemple que  $D_1$  et  $D_2$  se rencontrent en un point  $\alpha$  et par suite soient contenues dans un même plan  $\pi$ ; il y a  $\infty^1$  droites qui remontent  $D_1, D_2$  et  $D_3$  sans rencontrer  $D_4$ , à savoir les droites issues de  $\alpha$  dans le plan  $(\alpha, D_3)$ ; pour que ces droites rencontrent automatiquement  $D_4$ , il est nécessaire et suffisant que  $D_4$  soit dans ce plan, autrement dit que  $D_3$  et  $D_4$  soient aussi concourantes en un point  $\alpha_1$ , tandis que le plan  $\pi_1$  de  $D_3$  et  $D_4$  passe en  $\alpha$ ; en renversant le rôle des couples  $(D_1, D_3)$  et  $(D_3, D_4)$ , on voit qu'une droite  $\Delta$  rencontrant trois des droites  $D_1, D_2, D_3, D_4$  ne rencontre sûrement la dernière que si la droite joignant  $\alpha$  et  $\alpha_1$  est en même temps la droite commune aux

*plans*  $\pi$  et  $\pi_1$  : cette condition est de nature dualistique. Or, pour exprimer que quatre droites appartiennent à une même semi-quadrique, nous écrirons qu'il existe une même relation linéaire et homogène entre leurs coordonnées plückériennes et l'on voit aisément que cette méthode ne sépare pas les situations hyperboloidales normales des situations dégénérées.

Commençons par les explications géométriques en écartant les situations dégénérées : s'il existe deux situations différentes, il y a ou 2, ou 1, ou 0 sommets du premier tétraèdre qui ont même homologue dans les deux situations (car *trois* entraînerait *quatre*, et alors les situations ne seraient pas différentes). Nous avons donc les divers cas :

a. 

A	B	C	D
A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>

A	B	C	D
A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>

Nous dirons que ce cas *concerne séparément* A, B.

b. 

A	B	C	D
A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>

A	B	C	D
A <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>

Ce couple de situations *concerne* A.

c. 

A	B	C	D
A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>

A	B	C	D
B <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>

Ce couple *concerne* (AB), et par suite (C D), parce que le bloc (AB) a conservé les mêmes homologues en bloc; on aurait pu dire, pour la même raison, que le cas (a) concerne séparément A, B, (CD), que le cas (b) concerne A et (BCD) séparément.

d. 

A	B	C	D
A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>

A	B	C	D
B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>

Ce cas *concerne* les quatre sommets (en bloc). Quand il n'y a que deux situations, nous pouvons choisir les notations de façon à obtenir les schémas qui précèdent : c'est évident pour (a), (b), (c).

Pour (*d*), nous prenons au hasard un sommet du premier tétraèdre, nous l'appelons A et appelons A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub> ses homologues dans la première et seconde situation; B est alors le sommet du premier tétraèdre homologue de B<sub>1</sub> dans la première situation; B a pour homologue dans la seconde situation un sommet qui n'est ni A<sub>1</sub> ni B<sub>1</sub>, et que nous appelons C<sub>1</sub>; à C<sub>1</sub> correspond C dans la première situation et notre choix des noms est alors achevé.

Si nous avons deux situations (non dégénérées), deux quadriques proprement dites entrent en jeu; leur courbe d'intersection contient les huit sommets; nous voyons donc que divers cas peuvent se présenter suivant que les huit sommets déterminent une seule biquadratique [non décomposée ou décomposée] et par suite ∞<sup>1</sup> quadriques, ou suivant qu'ils déterminent ∞<sup>2</sup> quadriques et ∞<sup>2</sup> biquadratiques (le nombre précis de biquadratiques décomposées pourra jouer un rôle important).

Si donc nous envisageons le cas (*a*), les deux quadriques mises en jeu ont deux génératrices AA<sub>1</sub>, BB<sub>1</sub> communes; le reste de leur intersection se trouve donc sur deux droites rencontrant AA<sub>1</sub>, BB<sub>1</sub>; l'une porte CD, l'autre C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>; CD coupe AA<sub>1</sub> en α, BB<sub>1</sub> en β; C<sub>1</sub>D<sub>1</sub> coupe AA<sub>1</sub> en α<sub>1</sub> et BB<sub>1</sub> en β<sub>1</sub>; nous pouvons, *a priori*, choisir le quadrilatère gauche αββ<sub>1</sub>α<sub>1</sub>; nous prenons C et D conjugués harmoniques par rapport à α et β et de même C<sub>1</sub>, D<sub>1</sub> conjugués par rapport à α<sub>1</sub> et β<sub>1</sub>; de la sorte

$$(\alpha\beta CD) = (\alpha_1\beta_1 C_1 D_1) = (\alpha_1\beta_1 D_1 C_1) = -1,$$

et les quatre droites αα, ββ<sub>1</sub>, CC<sub>1</sub>, DD<sub>1</sub> appartiennent à une même quadrique, et de même αα<sub>1</sub>, ββ<sub>1</sub>, CD<sub>1</sub>, DC<sub>1</sub>; nous choisissons au hasard A et A<sub>1</sub> sur αα<sub>1</sub>, B et B<sub>1</sub> sur ββ<sub>1</sub>; le nombre de paramètres arbitraires est dix-huit; il y a trois invariants homographiques (par exemple les birapports ααAA<sub>1</sub>, ββ<sub>1</sub>BB<sub>1</sub> et le nouveau birapport ainsi obtenu : la quadrique déterminée par αα<sub>1</sub>, ββ<sub>1</sub>, CC<sub>1</sub> possède une génératrice de système opposé, issue de A<sub>1</sub>, recoupant ββ<sub>1</sub> en B'<sub>1</sub>; on prend le birapport ββ<sub>1</sub>BB'<sub>1</sub>). On peut aisément obtenir une configuration avec trois situations de ce genre, en reprenant la construction qui précède et choisissant A seul au hasard sur αα<sub>1</sub>; A<sub>1</sub> est le conjugué de A par rapport à αα<sub>1</sub>; on prend pour droite AB ou droite A<sub>1</sub>B<sub>1</sub> les génératrices issues de A, A<sub>1</sub>, sur la quadrique αα<sub>1</sub>, ββ<sub>1</sub>, CC<sub>1</sub>, de

système opposé à  $\alpha\alpha_1$ . Et alors on a les situations

A	B	C	D
A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>

A	B	C	D
A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>

A	B	C	D
B <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>

Cette fois il n'y a plus d'invariant homographique; la réunion des situations de rang 2 et 3 appartient au type (c). C'est un cas où la réunion des trois situations entraîne neuf conditions qui ne se réduisent pas; les huit sommets appartiennent à deux biquadratiques dégénérées distinctes (l'une est formée par les droites AA<sub>1</sub>, BB<sub>1</sub>, CD, C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>, l'autre par AB, A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>, CC<sub>1</sub>, DD<sub>1</sub>), de sorte que ces huit points déterminent un réseau de quadriques. On peut dire que *les deux quadrilatères gauches que nous venons de mettre en évidence sont tracés sur une même quadrique et se divisent harmoniquement* (les quatre génératrices de même système se divisant harmoniquement).

Dans le cas (b), les deux quadriques en jeu se coupent suivant la droite AA<sub>1</sub> et une cubique (dégénérée ou non) recoupant AA<sub>1</sub> en deux points, réels ou non. Il est facile de traiter synthétiquement, en nous bornant au cas précis de trois situations (et non davantage). *Nous prenons quatre points B, C, D, B<sub>1</sub> arbitraires sur une cubique gauche  $\Gamma$ ; les paramètres de B, C, D sur la cubique sont racines d'une équation de degré 3 dont le hessien détermine sur  $\Gamma$  deux points  $\alpha$  et  $\alpha_1$ ; A et A<sub>1</sub> sont deux points arbitraires de la corde  $\alpha\alpha_1$ ; la quadrique Q, déterminée par  $\Gamma$  et les cordes  $\alpha\alpha_1$  et BB<sub>1</sub>, donne en C, D des génératrices de même système que  $\alpha\alpha_1$ , recoupant  $\Gamma$  en C<sub>1</sub>, D<sub>1</sub>. On voit tout de suite que l'on a les situations*

A	B	C	D
A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>

A	B	C	D
A <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>

A	B	C	D
A <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>

car on peut choisir le paramètre de sorte que  $\alpha$  et  $\alpha_1$  correspondent à 0 et  $\infty$ ; si B et B<sub>1</sub> correspondent à  $t_1$  et  $t'_1$ , les paramètres de C et C<sub>1</sub> sont  $jt_1$ ,  $j^2t'_1$ , ceux de D et D<sub>1</sub>  $j^2t_1$  et  $jt'_1$ ; les trois quadriques que l'on trouve correspondent aux involutions  $TT' = t_1t'_1$ , ou  $jt_1t'_1$ , ou  $j^2t_1t'_1$ ; si B, C, D sont réels, la corde  $\alpha\alpha_1$  est réelle mais  $\alpha$  et  $\alpha_1$  sont imaginaires conjugués; si  $\alpha$  et  $\alpha_1$  sont réels, un

seul point du système BCD est réel. Le nombre de paramètres est  $12 + 4 + 2 = 18$ ; il y a trois invariants homographiques qui sont, par exemple, le birapport des paramètres de B, C, D et B<sub>1</sub> et ensuite les birapports déterminés par A ou A<sub>1</sub> avec les points où la droite  $\alpha\alpha_1$  perce les plans osculateurs à  $\Gamma$  en B, C, D.

Supposons que les huit points ABCD, A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub> n'offrent pas la configuration précédente et déterminent une seule biquadratique  $\mathcal{B}$  indécomposée non unicursale (sans point double). Nous savons que nous ne pouvons avoir les cas (a), (b); cherchons à réaliser le cas (c) ou le cas (d). Nous savons aussi que *le nombre de situations ne pourra dépasser quatre* sinon il y aurait nécessairement deux situations offrant pour le sommet A le même homologue A<sub>1</sub> et l'on retrouverait deux quadriques dont l'intersection comprend une ou deux génératrices. Sur cette biquadratique  $\mathcal{B}$ , nous choisissons un paramètre elliptique  $u$ , tel que la condition  $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$  exprime que les quatre points correspondants sont dans un plan. Si donc  $a$  est une constante arbitraire,  $u_1 + u_2 = a$  définit, quand  $u_1$  varie, une semi-quadrique engendrée par la corde  $u_1 u_2$ ; et  $u_3 + u_4 = -a$  définit la semi-quadrique complémentaire, car nous avons deux surfaces réglées telles que chaque génératrice de l'une rencontre toutes les génératrices de l'autre.

*Supposons donc que l'on ait les deux situations indiquées au type (c).* Si  $u_1, u_2, u_3, u_4$  sont les paramètres de A, B, C, D, en vertu de la première situation ceux de A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>, C<sub>1</sub>, D<sub>1</sub> sont respectivement  $a - u_1, a - u_2, a - u_3, a - u_4$  où  $a$  est une certaine constante. En vertu de la seconde situation on a

$$u_1 + a - u_2 = u_2 + a - u_1 = u_3 + a - u_4 = u_4 + a - u_3,$$

ou

$$2(u_2 - u_1) = 0$$

(à un multiple près des périodes bien entendu). Si l'on appelle les périodes  $2\omega, 2\omega'$  on peut choisir les notations de sorte que  $u_2 = u_1 + \omega$ ;  $u_4 - u_3$  est égale à  $u_2 - u_1$ , donc  $u_4 = u_3 + \omega$ . Nous avons ainsi réalisé très intuitivement les deux situations

$u_1$	$u_1 + \omega$	$u_3$	$u_3 + \omega$
$a - u_1$	$a - u_1 + \omega$	$a - u_3$	$a - u_3 + \omega$

et

$u_1$	$u_1 + \omega$	$u_3$	$u_3 + \omega$
$a - u_1 + \omega$	$a - u_1$	$a - u_3 + \omega$	$a - u_3$

Si  $S_1, S_2, S_3, S_4$  sont les sommets des quatre cônes du second degré contenant  $\mathcal{B}$ , les génératrices de ces cônes issues du point  $u_1$  donnent sur la biquadratique les nouveaux points  $-u_1, -u_1 + \omega, -u_1 + \omega', -u_1 + \omega + \omega'$ , de sorte que les deux points  $u_1, u_1 + \omega$  se correspondent dans l'involution biaxiale d'axes  $S_1 S_2, S_3 S_4$ ; A et B se correspondent, C et D aussi, puis  $A_1$  et  $B_1, C_1$  et  $D_1$ . La configuration dépend de  $16 + 2 + 1$  ou  $19$  paramètres ( $16$  pour  $\mathcal{B}$ ,  $2$  pour choisir A, C,  $1$  pour choisir  $A_1$ ). En général il n'y a que ces deux situations.

Nous allons voir que si l'on réalise la situation nouvelle <sup>(1)</sup>, intéressant (AC) on a automatiquement la quatrième situation concernant (AD). En effet, pour obtenir la troisième situation, on doit écrire

$$u_1 + a - u_3 = u_3 + a - u_1 = u_1 + a - u_3 = u_3 + a - u_1,$$

ce qui se réduit à

$$2(u_3 - u_1) = 0,$$

et puisque l'on ne doit pas prendre  $u_3 = u_1 + \omega$  qui ferait coïncider C et B, on prend  $u_3 = u_1 + \omega'$ , de sorte que  $u_4 = u_1 + \omega + \omega'$ . On voit que B, C, D dérivent de A par les involutions biaxiales relatives aux couples d'arêtes opposées du tétraèdre  $S_1 S_2 S_3 S_4$ . Nous pouvons exposer le résultat intuitivement, sans employer la théorie des biquadratiques.

*La configuration fournissant quatre situations biaxiales dont deux quelconques concernent deux sommets s'obtient en choisissant arbitrairement un tétraèdre  $S_1 S_2 S_3 S_4$  et deux points A,  $A_1$ ; B, C, D sont les homologues de A (et  $B_1, C_1, D_1$  ceux de  $A_1$ ) dans les involutions biaxiales relatives aux couples d'arêtes opposées du tétraèdre. La configuration dépend de  $18$  paramètres métriques.*

---

<sup>(1)</sup> Nous associons chaque situation nouvelle à la première situation, afin de pouvoir définir les sommets concernés par un couple de situations.

Dans le cas particulier où  $A_1$  est homologue de  $A$  dans l'homologie involutive dont un sommet  $S_1, S_2, S_3, S_4$  est pôle, le plan directeur correspondant étant la face opposée, les quatre situations sont les homologues déjà signalées en étudiant les tétraèdres homologiques (les huit points déterminent un réseau de quadratiques). Nous retrouverons cette situation en étudiant les situations dégénérées.

*Étudions maintenant deux situations du cas (d). Nous trouvons alors automatiquement les quatre situations*

<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td><math>A_1</math></td><td><math>B_1</math></td><td><math>C_1</math></td><td><math>D_1</math></td></tr> </table>	A	B	C	D	$A_1$	$B_1$	$C_1$	$D_1$	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td><math>B_1</math></td><td><math>C_1</math></td><td><math>D_1</math></td><td><math>A_1</math></td></tr> </table>	A	B	C	D	$B_1$	$C_1$	$D_1$	$A_1$
A	B	C	D														
$A_1$	$B_1$	$C_1$	$D_1$														
A	B	C	D														
$B_1$	$C_1$	$D_1$	$A_1$														
<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td><math>C_1</math></td><td><math>D_1</math></td><td><math>A_1</math></td><td><math>B_1</math></td></tr> </table>	A	B	C	D	$C_1$	$D_1$	$A_1$	$B_1$	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td><math>D_1</math></td><td><math>A_1</math></td><td><math>B_1</math></td><td><math>C_1</math></td></tr> </table>	A	B	C	D	$D_1$	$A_1$	$B_1$	$C_1$
A	B	C	D														
$C_1$	$D_1$	$A_1$	$B_1$														
A	B	C	D														
$D_1$	$A_1$	$B_1$	$C_1$														

(la première et la deuxième concernent les quatre sommets, de même les situations 1-4, ou 2-3, ou 3-4, tandis que les situations 1-3, 2-4 concernent le couple AC du premier tétraèdre). Nous avons, en effet,

$$u_1 + a - u_2 = u_2 + a - u_3 = u_3 + a - u_4 = u_4 + a - u_1.$$

Ces quatre quantités sont égales; leur somme vaut  $4a$ , donc chacune vaut  $a$ , à un quart de période près,  $-\left(\frac{m}{2}\omega + \frac{n}{2}\omega'\right)$ . Si l'on désigne, pour abrégier, par  $\alpha$  la quantité  $\frac{m}{2}\omega + \frac{n}{2}\omega'$ , on a

$$u_2 = u_1 + \alpha, \quad u_3 = u_1 + 2\alpha, \quad u_4 = u_1 + 3\alpha, \quad \alpha = \frac{m}{2}\omega + \frac{n}{2}\omega'.$$

Les entiers  $m, n$  peuvent prendre les valeurs  $-1, 0, 1, 2$  indépendamment l'un de l'autre;  $\alpha = 0$  doit être rejeté, ainsi que  $\alpha = \omega, \omega + \omega', \omega'$ ; il ne reste que douze valeurs distinctes pour  $\alpha$ . D'une façon générale, une biquadratique admet un groupe de trente-deux transformations homographiques <sup>(1)</sup> en elle-même faisant cor-

---

<sup>(1)</sup> Voir mon Mémoire : *Sur les Transformations homographiques d'une biquadratique en elle-même* (Journal de Math., XII, 1933, p. 309-336).

respondre au point  $u$  le point  $\pm u + \frac{m}{2}\omega + \frac{n}{2}\omega'$ ; les transformations  $(u, u + \frac{m}{2}\omega + \frac{n}{2}\omega')$  forment un sous-groupe à seize éléments. La correspondance  $(u, u + \lambda)$  fournit des cordes engendrant ( $\lambda$  constant,  $u$  variable) une surface réglée algébrique de degré 8; pour  $\lambda = \frac{m}{2}\omega + \frac{n}{2}\omega'$ , la surface admet  $\infty^1$  quadrilatères gauches, formés par des génératrices, ayant leurs sommets sur  $\mathcal{B}$ ; on choisit deux de ces quadrilatères, et nos tétraèdres sont ainsi obtenus. On a donc dix-huit paramètres au total.

*Les deux types à quatre situations que nous avons ainsi obtenus sont des spécialisations du type (b) (deux situations concernant un couple); en effet,  $2\alpha$  est bien une demi-période,  $m\omega + n\omega'$ , et  $u_3 = u_1 + m\omega + n\omega'$ . Quand les huit sommets sont sur une biquadratique unique, non décomposée, nous avons épuisé tous les résultats : zéro, une, deux, quatre situations possibles (quatre étant obtenu de deux façons différentes). Mais si la biquadratique se décompose (avec une droite comme morceau de décomposition particulier) on peut obtenir d'autres cas. Si les huit points définissent un réseau de quadriques, il y a  $\infty^2$  biquadratiques contenant les huit sommets : or, si l'on doit n'obtenir que deux situations au plus, notre analyse épuise les résultats, car il y a au plus deux semi-quadriques à intervenir et leur intersection est une biquadratique à laquelle s'appliquent nos constructions; mais on pourrait craindre l'existence d'une configuration telle que la suivante : trois situations  $s_1, s_2, s_3$ , les quadriques correspondantes  $Q_1, Q_2, Q_3$  non contenues dans un même faisceau;  $(s_2, s_3)$  conduisent à une biquadratique  $\mathcal{B}_{23}$  à laquelle s'applique la construction du type (c); de même  $(s_3, s_1)$  donnent  $\mathcal{B}_{13}$  et  $(s_1, s_2)$   $\mathcal{B}_{12}$ ; ce que nous avons expliqué pour  $\mathcal{B}_{23}$  ne permet, en aucune façon de prévoir les particularités que les points ABCD et  $A_1B_1C_1D_1$  peuvent offrir sur  $\mathcal{B}_{13}$ . Soit encore une autre configuration : supposons qu'il existe deux configurations  $s_1, s_2$  relatives à une biquadratique  $\mathcal{B}_{12}$  intersection des deux quadriques  $Q_1, Q_2$  fournies par  $s_1, s_2$ , puis deux configurations  $s_3, s_4$  relatives à deux quadriques  $Q_3, Q_4$  et une autre biquadratique  $\mathcal{B}_{34}$ , notre analyse ne nous renseigne pas. D'autre part, quand les huit sommets définissent un réseau de quadriques et  $\infty^2$  biquadratiques, il peut*

arriver que, parmi ces biquadratiques figurent un nombre fini de courbes décomposées (nous en verrons un exemple plus bas).

En tous cas, nous sommes partis d'une première situation

A	B	C	D
A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>

, pour laquelle la somme des arguments des

sommets d'un même couple vaut  $\alpha$ , donc la somme des huit arguments vaut  $4\alpha$ ; chaque fois que  $4\alpha$  est une période, nous sommes dans le cas critique où les huit points déterminent  $\infty^2$  quadriques et  $\infty^2$  biquadratiques. Un exemple très simple (et très particulier) (*fig. 7*) se présente en prenant pour ABCD les sommets consé-

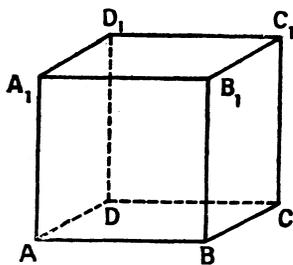


Fig. 7.

cutifs d'une base d'un parallélépipède (un cube pour fixer les idées),  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$  étant parallèles entre eux; on a les quatre situations du type (*d*), la première est une homologie ainsi que la troisième, la seconde et la troisième donnent deux semi-quadriques complémentaires; ceci est une propriété générale: sur une quadrique donnée, traçons deux quadrilatères gauches  $(AB_1CD_1)$  et  $(A_1BC_1D)$  tels que  $AB_1$  et  $A_1B$  soient de système opposé; les tétraèdres ABCD et  $A_1B_1C_1D_1$  offrent manifestement les deux situations hyperboloïdales

A	B	C	D
B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>

A	B	C	D
D <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>

[qui sont bien du type (*c*) concernant le couple (AC) ou le couple BD]. On réalise ainsi deux tétraèdres offrant deux situations hyperboloïdales avec deux semi-quadriques complémen-

taires. Cette configuration dépend de dix-sept paramètres, et il est très remarquable que (sauf changement de notations) cette configuration soit précisément celle que nous avons signalée plus haut, type (c), si la constante  $a$ , employée à cet endroit, reçoit la valeur  $-\frac{\omega}{2}$ . Il suffit en effet d'écrire les schémas (avec les notations employées à l'endroit cité)

$\Lambda(u_1)$	$B(u_1 + \omega)$	$C(u_3)$	$D(u_3 + \omega)$
$\Lambda_1\left(-\frac{\omega}{2} - u_1\right)$	$B_1\left(-u_1 + \frac{\omega}{2}\right)$	$C_1\left(-\frac{\omega}{2} - u_3\right)$	$D_1\left(-u_3 + \frac{\omega}{2}\right)$

Cette situation est relative à la semi-quadrique  $\left(-\frac{\omega}{2}\right)$ ; l'autre schéma

$\Lambda(u_1)$	$B(u + \omega)$	$C(u_3)$	$D(u_3 + \omega)$
$B_1\left(-u_1 + \frac{\omega}{2}\right)$	$A_1\left(-\frac{\omega}{2} - u_1\right)$	$D_1\left(-u_3 + \frac{\omega}{2}\right)$	$C_1\left(-\frac{\omega}{2} - u_3\right)$

fournit la situation relative à la semi-quadrique  $\left(\frac{\omega}{2}\right)$ . Par ce procédé la situation semble faire intervenir dix-huit paramètres (16 pour la biquadratique, 1 pour A, 1 pour C), mais il faut remarquer que nous avons non seulement indiqué la configuration, mais encore *une* biquadratique particulière (dont on aurait pu se dispenser); or, ici les huit points sont bases d'un réseau de quadriques; ils déterminent  $\infty^2$  biquadratiques, sur lesquelles  $\infty^1$  seulement sont susceptibles de donner une représentation conforme au schéma : ce sont les intersections de la quadrique

$$Q(AA_1, BB_1, CC_1, DD_1)$$

avec les quadriques du réseau  $\lambda Q + \mu Q_1 + \nu Q_2 = 0$ , c'est-à-dire finalement les  $\infty^1$  biquadratiques d'équation  $Q = 0, \mu Q_1 + \nu Q_2 = 0$ .

*Étant donnée une biquadratique  $\mathcal{B}$  quelconque, il existe six quadriques dont chacune possède  $\infty^1$  quadrilatères gauches dont les sommets sont sur  $\mathcal{B}$ ; elles jouent un rôle important dans la théorie des transformations homographiques de la biquadratique en elle-même et nous les avons retrouvées ici.* (Je renvoie à

mon Mémoire déjà cité.) Nous avons, d'autre part, trouvé ce théorème : *deux quadrilatères gauches tracés sur une quadrique déterminent par leurs sommets huit points bases d'un réseau de quadriques, de  $\infty^2$  biquadratiques, dont  $\infty^1$  sont situées sur la quadrique.*

Appliquons au plan ce dernier théorème (il suffit de mettre la quadrique en perspective sur un plan quelconque à partir d'un point de cette quadrique). Nous considérons deux points fixes I, J d'un plan et les quartiques de ce plan ayant I, J pour points doubles; elles dépendent de huit paramètres et, en général, huit points suffisent à déterminer une quartique de ce système; si nous imaginons deux quadrilatères complets différents ayant chacun I et J pour sommets opposés, les huit sommets de ces deux quadrilatères (autres que I, J) déterminent  $\infty^1$  quartiques.

11. Nous allons maintenant faire cette étude par voie élémentaire, ce qui nous permettra, grâce aux renseignements fournis par la méthode transcendante, de signaler un cas où il y a *six situations hyperboloïdales*, dont certaines sont dégénérées. Nous pouvons supposer ABCD choisi comme tétraèdre de référence; les coordonnées des sommets sont ainsi

A	1	0	0	0
B	0	1	0	0
C	0	0	1	0
D	0	0	0	1

$A_1$	$a$	$b$	$c$	$d$
$B_1$	$a'$	$b'$	$c'$	$d'$
$C_1$	$a''$	$b''$	$c''$	$d''$
$D_1$	$a'''$	$b'''$	$c'''$	$d'''$

(on pourra ensuite supposer  $a = b = c = d = a' = a'' = a''' = 1$ , mais pour l'instant c'est inutile et il vaut mieux, pour les permutations de  $A_1, B_1, C_1, D_1$  relatives aux diverses situations, laisser les coordonnées sous la forme générale). Les coordonnées plückériennes de  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$  sont ( $p_{14}, p_{24}, p_{34}, p_{23}, p_{31}, p_{12}$ )

$AA_1$	$d$	0	0	0	$-c$	$b$
$BB_1$	0	$d'$	0	$c'$	0	$-a'$
$CC_1$	0	0	$d''$	$-b''$	$a''$	0
$DD_1$	$-a'''$	$-b'''$	$-c'''$	0	0	0

La situation hyperboloïdale (ABCD) ( $A_1 B_1 C_1 D_1$ ) s'obtient en exprimant qu'il existe des constantes  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ , telles que l'on ait

$$\begin{aligned} \lambda_1 d - \lambda_4 a''' &= 0, & \lambda_2 c' - \lambda_3 b'' &= 0, \\ \lambda_2 d' - \lambda_4 b''' &= 0, & \lambda_3 a'' - \lambda_1 c &= 0, \\ \lambda_3 d'' - \lambda_4 c''' &= 0, & \lambda_1 b - \lambda_2 a' &= 0. \end{aligned}$$

Les équations de gauche permettent de prendre

$$\lambda_4 = 1, \quad \lambda_1 = \frac{a'''}{d}, \quad \lambda_2 = \frac{b'''}{d'}, \quad \lambda_3 = \frac{c''}{d''},$$

et alors les équations de droite permettent d'écrire les conditions nécessaires et suffisantes

$$(I) \quad \begin{array}{|l} c' d'' b''' = d' b'' c''' \\ d' a'' c''' = c' d'' a''' \\ b' d' a''' = d' a' b''' \end{array} \quad \begin{array}{|l} A \quad B \quad C \quad D \\ A_1 \quad B_1 \quad C_1 \quad D_1 \end{array}$$

D'ailleurs les équations de droite, aux  $\lambda$ , fournissaient aussitôt la relation

$$c' a'' b = b'' c a',$$

conséquence de (I) [on l'a en multipliant les équations (I) membre à membre].

Des équations (I) on déduit aussitôt les conditions nécessaires pour la situation (ABCD) ( $B_1 C_1 D_1 A_1$ ) par exemple, en remplaçant les accents

zéro, prime, seconde, tierce,

par

prime, seconde, tierce, zéro.

Écrivons ainsi le système (II) relatif à cette nouvelle situation

$$(II) \quad \begin{array}{|l} c'' a''' b = d'' b''' c \\ d' a''' c = c' d'' a' \\ b' d'' a = d' a'' b \end{array} \quad \begin{array}{|l} A \quad B \quad C \quad D \\ B_1 \quad C_1 \quad D_1 \quad A_1 \end{array}$$

On a de même

(III)	$\begin{aligned} c'' d b' &= d'' b c' \\ d'' a c' &= c'' d a' \\ b'' d'' a' &= d'' a'' b' \end{aligned}$	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">A</td> <td style="padding: 2px 10px;">B</td> <td style="padding: 2px 10px;">C</td> <td style="padding: 2px 10px;">D</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">C<sub>1</sub></td> <td style="padding: 2px 10px;">D<sub>1</sub></td> <td style="padding: 2px 10px;">A<sub>1</sub></td> <td style="padding: 2px 10px;">B<sub>1</sub></td> </tr> </table>	A	B	C	D	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	
A	B	C	D								
C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>								
(IV)	$\begin{aligned} c d' b'' &= d b' c'' \\ d''' a' c'' &= c''' d' a'' \\ b'' d a'' &= d'' a b'' \end{aligned}$	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">A</td> <td style="padding: 2px 10px;">B</td> <td style="padding: 2px 10px;">C</td> <td style="padding: 2px 10px;">D</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 10px;">D<sub>1</sub></td> <td style="padding: 2px 10px;">A<sub>1</sub></td> <td style="padding: 2px 10px;">B<sub>1</sub></td> <td style="padding: 2px 10px;">C<sub>1</sub></td> </tr> </table>	A	B	C	D	D <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	
A	B	C	D								
D <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>								

On pourrait, sans l'analyse géométrique, être assez long à remarquer que (I) et (II) entraînent (III) et (IV) [c'est le type catalogué (*d*), concernant les quatre sommets]. D'abord trois de ces quatre systèmes entraînent le quatrième, car en multipliant les quatre équations qui sont au même étage, on trouve aux deux membres le produit des quatre lettres *a*, des quatre lettres *b*, des quatre lettres *c*, des quatre lettres *d*. Le produit membre à membre des équations que je représente par (I<sub>2</sub>), (II<sub>2</sub>) et (II<sub>3</sub>) donne précisément (III<sub>1</sub>); le produit (I<sub>1</sub>), (II<sub>1</sub>), (II<sub>2</sub>) donne

$$a'' b c'' = a b'' c'',$$

qui est équivalent, comme on l'a remarqué, à une équation (III). Si l'on écrit (I<sub>2</sub>), (I<sub>3</sub>), (II<sub>1</sub>), en renversant l'ordre des deux membres pour cette dernière équation, on a, multipliant membre à membre,

$$\left. \begin{aligned} d a'' c'' &= c d'' a'' \\ b d' a'' &= d a' b'' \\ d'' b'' c &= c'' d'' b \end{aligned} \right\} d' a'' c'' = d'' a' c'',$$

qui est (IV<sub>2</sub>), de sorte que (III<sub>2</sub>), d'après une remarque faite en découle: nous avons donc eu (III<sub>1</sub>), (III<sub>2</sub>) et l'équation  $a'' b c'' = a b'' c''$  équivalente à (III<sub>3</sub>) quand (III<sub>1</sub>) et (III<sub>2</sub>) sont vérifiées; donc (III) est conséquence de (I), (II); (IV) aussi est conséquence. On vérifie sans peine que (I) et (II) sont composées d'équations distinctes; mais, sans s'embarrasser de ce point, nous pouvons considérer les équations [se réduisant à trois]

$$c' a'' b = b'' c a', \quad c' a'' b' = b'' c' a'', \quad c'' a b'' = b c' a, \quad c a' b'' = b' c'' a,$$

qui permettent d'écrire

$$(1) \quad c' = c \frac{a' b''}{a'' b}, \quad c'' = c \frac{a' b'' b'''}{a''' b b'}, \quad c''' = c \frac{a' b'''}{a b'}.$$

Un calcul semblable, opéré au moyen des équations (I<sub>3</sub>), (II<sub>3</sub>), (III<sub>3</sub>), (IV<sub>3</sub>), donne

$$(2) \quad d' = d \frac{a' b'''}{a'' b}, \quad d'' = d \frac{a' a'' b'''}{a a''' b}, \quad d''' = d \frac{a'' b'''}{a b''},$$

et comme on vérifie aussitôt que (I), (II) sont vérifiées, il en résulte bien que l'on avait six équations indépendantes entre les douze quantités du début; nous avons pris les  $a$  et  $b$  comme variables indépendantes et exprimé  $\frac{c'}{c}$ ,  $\frac{c''}{c}$ ,  $\frac{c'''}{c}$ ,  $\frac{d'}{d}$ ,  $\frac{d''}{d}$ ,  $\frac{d'''}{d}$  au moyen de ces expressions. La discussion géométrique transcendante qui a été faite nous a prouvé que l'on peut obtenir ainsi des situations non dégénérées. Si nous envisageons maintenant les quatre situations

A	B	C	D
A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>

A	B	C	D
B <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>

A	B	C	D
C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>

A	B	C	D
D <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>

elles conduisent aux systèmes (I), (II'), (III), (IV') où (I) et (III) ont déjà été écrits; (II') se déduit de (I) par échange des accents zéro et prime, seconde et tierce; (IV') d'une façon analogue. On vérifie comme plus haut que (I), (II'), (III), (IV') se réduisent à trois d'entre eux, toujours parce que les équations de même étage multipliées terme à terme donnent une identité. Il est très simple de résoudre les équations (I), (II'), (III), mais cela n'a qu'un intérêt médiocre — d'ailleurs, nous avons donné l'interprétation géométrique — mais ce qui est intéressant, c'est de trouver *un couple de tétraèdres qui offrent les six situations*, obtenues en réunissant les deux cas qui précèdent; la discussion géométrique transcendante faite précédemment ne pouvait nous permettre de conclure, tandis que, maintenant, il suffit d'adjoindre le système (II') aux systèmes (I), (II); ou simplement, il suffit de vérifier

les équations (II')

$$(II') \quad \boxed{\begin{array}{l} c d''' b'' = d b''' c'' \\ d' a'' c'' = c' d''' a'' \\ b' d a'' = d' a b'' \end{array}}$$

en utilisant les formules (1), (2), et cela conduit à l'unique équation complémentaire

$$(3) \quad aa' b' b''' = a'' a''' b b',$$

et cela donne les formules définitives

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} a, a', a'', a''', b, b', b'', c, d \text{ arbitraires,} \\ b'' = \frac{a'' a''' b b'}{a a' b''}, \quad c' = c \frac{a' b''}{a'' b}, \quad c'' = c \frac{a''}{a}, \quad c''' = c \frac{a'' a''' b}{a^2 b''}, \\ d' = d \frac{a'' b'}{a b''}, \quad d'' = d \frac{a''^2 b}{a^2 b''}, \quad d''' = d \frac{a''^2 a''' b b'}{a^2 a' b''^2}. \end{array} \right.$$

Il reste, au point de vue homographique, deux arbitraires seulement, car on peut supposer  $a, b, c, d, a', a'', a'''$  égaux à l'unité (choisissant  $A_1$  comme point unité et profitant de l'homogénéité).

Le tableau des coordonnées est alors

$$(T) \quad \boxed{\begin{array}{cccc} A_1 & 1 & 1 & 1 \\ B_1 & 1 & b' & b'' \\ C_1 & 1 & b'' & 1 \\ D_1 & 1 & \frac{b'}{b''} & \frac{b'}{b''^2} \end{array}}$$

tableau où  $b', b''$  jouent le rôle d'invariants homographiques; écrivons les schémas relatifs aux six situations :

<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>A<sub>1</sub></td><td>B<sub>1</sub></td><td>C<sub>1</sub></td><td>D<sub>1</sub></td></tr> </table>	A	B	C	D	A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>B<sub>1</sub></td><td>C<sub>1</sub></td><td>D<sub>1</sub></td><td>A<sub>1</sub></td></tr> </table>	A	B	C	D	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>
A	B	C	D														
A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>														
A	B	C	D														
B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>														
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>C<sub>1</sub></td><td>D<sub>1</sub></td><td>A<sub>1</sub></td><td>B<sub>1</sub></td></tr> </table>	A	B	C	D	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>D<sub>1</sub></td><td>A<sub>1</sub></td><td>B<sub>1</sub></td><td>C<sub>1</sub></td></tr> </table>	A	B	C	D	D <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>
A	B	C	D														
C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>														
A	B	C	D														
D <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>														
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>B<sub>1</sub></td><td>A<sub>1</sub></td><td>D<sub>1</sub></td><td>C<sub>1</sub></td></tr> </table>	A	B	C	D	B <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>D<sub>1</sub></td><td>C<sub>1</sub></td><td>B<sub>1</sub></td><td>A<sub>1</sub></td></tr> </table>	A	B	C	D	D <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>
A	B	C	D														
B <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>														
A	B	C	D														
D <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>														

Étudions maintenant chaque situation : les coordonnées plückériennes des droites qui entrent en jeu dans la première situation sont ( $p_{13}, p_{24}, p_{34}, p_{23}, p_{31}, p_{12}$ ) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 AA_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
 BB_1 & 0 & \frac{b'}{b''} & 0 & b'' & 0 & -1 \\
 CC_1 & 0 & 0 & \frac{1}{b''} & -b'' & 1 & 0 \\
 DD_1 & -1 & \frac{-b'}{b''} & \frac{-1}{b''} & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

Les invariants simultanés de deux de ces droites sont <sup>(1)</sup> :

$$\begin{array}{ll}
 (AA_1, BB_1) \text{ ou } (CC_1, DD_1) \dots\dots\dots & b'' - \frac{b'}{b''} \\
 (AA_1, CC_1) \text{ ou } (BB_1, DD_1) \dots\dots\dots & \frac{1}{b''} - b'' \\
 (AA_1, DD_1) \text{ ou } (BB_1, CC_1) \dots\dots\dots & \frac{b'}{b''} - \frac{1}{b''}
 \end{array}$$

Cette situation ne dégénère que si  $(b' - 1)(b' - b''^2)(b''^2 - 1)$  est nul;  $b'' = 1$  est à rejeter ( $A_1$  et  $C_1$  seraient confondus,  $B_1$  et  $D_1$  aussi).

Étudions de même la seconde situation et, puisque la méthode a été expliquée, il suffira de donner les invariants simultanés des divers couples d'arêtes : pour la seconde situation

$$\begin{array}{ll}
 (AB_1, BC_1) \text{ ou } (CD_1, DA_1) \dots\dots\dots & \frac{b'}{b''} - 1 \\
 (AB_1, CD_1) \text{ ou } (BC_1, DA_1) \dots\dots\dots & 0 \\
 (AB_1, DA_1) \text{ ou } (BC_1, CD_1) \dots\dots\dots & 1 - \frac{b'}{b''}
 \end{array}$$

La seconde situation est dégénérée; de plus, on a en évidence le cas où  $b' = b''$  : la situation devient alors une homologie.

<sup>(1)</sup> On sait que les deux invariants homographiques des droites  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$  sont les rapports mutuels des quantités  $(b'' - \frac{b'}{b''})^2, (\frac{1}{b''} - b'')^2, (\frac{b'}{b''} - \frac{1}{b''})^2$ , et le fait que la somme des racines carrées (convenablement choisies) de ces quantités est nulle est une vérification dans le cas actuel.

La troisième situation donne

$$\begin{aligned} (AC_1, BD_1) \text{ ou } (CA_1, DB_1) &\dots\dots\dots \frac{1}{b''} - \frac{b'}{b''} \\ (AC_1, CA_1) \text{ ou } (BD_1, DB_1) &\dots\dots\dots b'' - \frac{1}{b''} \\ (AC_1, DB_1) \text{ ou } (BD_1, CA_1) &\dots\dots\dots \frac{b'}{b''} - b'' \end{aligned}$$

On retrouve les mêmes cas de dégénérescence que pour la première situation. Pour la quatrième situation, on a

$$\begin{aligned} (AD_1, BA_1) \text{ ou } (CB_1, DC_1) &\dots\dots\dots \frac{b'}{b''} - 1 \\ (AD_1, CE_1) \text{ ou } (BA_1, DC_1) &\dots\dots\dots 0 \\ (AD_1, DC_1) \text{ ou } (BA_1, CB_1) &\dots\dots\dots 1 - \frac{b'}{b''} \end{aligned}$$

et l'on retrouve les mêmes valeurs que pour la seconde situation. Pour la cinquième on trouve

$$\begin{aligned} (AB_1, BA_1) \text{ ou } (CD_1, DC_1) &\dots\dots\dots \frac{b'}{b''} - b'' \\ (AB_1, CD_1) \text{ ou } (BA_1, DC_1) &\dots\dots\dots 0 \\ (AB_1, DC_1) \text{ ou } (BA_1, CD_1) &\dots\dots\dots b'' - \frac{b'}{b''} \end{aligned}$$

Cette cinquième situation est dégénérée, et même, pour  $b' = b''^2$ , elle se transforme en une homologie.

La sixième situation donne

$$\begin{aligned} (AD_1, BC_1) \text{ ou } (CB_1, DA_1) &\dots\dots\dots \frac{b' - 1}{b''} \\ (AD_1, CB_1) \text{ ou } (BC_1, DA_1) &\dots\dots\dots 0 \\ (AD_1, DA_1) \text{ ou } (BC_1, CB_1) &\dots\dots\dots \frac{1 - b'}{b''} \end{aligned}$$

Cette sixième situation est dégénérée ; et même pour  $b' = 1$ , elle se transforme en une homologie. Nous avons ainsi constaté que *sur les six situations, quatre sont dégénérées* ; en regardant nos tableaux, nous voyons que la dégénérescence tient simplement à ce que AC rencontre B<sub>1</sub>D<sub>1</sub> et que BD rencontre A<sub>1</sub>C<sub>1</sub>, pendant que la droite commune aux deux plans (ACB<sub>1</sub>D<sub>1</sub>) et (A<sub>1</sub>C<sub>1</sub>BD) porte les points d'intersection des côtés opposés du quadrilatère

$AD, CB_1$  et les points analogues relatifs au quadrilatère  $A, DC_1, B_1$ ; et quand deux de ces quatre points viennent à se confondre, on a les homologies annoncées.

Cet exemple est très instructif : *pour réaliser simplement quatre situations dégénérées*

A	B	C	D
$B_1$	$C_1$	$D_1$	$B_1$

A	B	C	D
$D_1$	$A_1$	$B_1$	$C_1$

A	B	C	D
$B_1$	$A_1$	$D_1$	$C_1$

A	B	C	D
$D_1$	$C_1$	$B_1$	$A_1$

on prend deux quadrilatères plans  $AB_1, CD_1$  et  $A_1, BC_1, D$  et on les transporte arbitrairement dans l'espace de façon que les droites portant les points d'intersection des côtés opposés de chacun d'eux coïncident. La figure dépend de 18 paramètres métriques; il y a trois invariants homographiques qui sont : d'abord le birapport des quatre points alignés  $(AB_1, CD_1)$ ,  $(AD_1, CB_1)$ ,  $(A_1, B_1, C_1, D)$ ,  $(A_1, D, C_1, B)$ , puis les deux birapports ainsi obtenus : sur la droite commune aux deux plans, les coniques du faisceau  $AB_1, CD_1$  déterminent une involution; de même les coniques du faisceau  $A_1, BC_1, D$  donnent une seconde involution; supposons que  $ij$  soit le couple commun à ces deux involutions; sur la conique  $AB_1, CD_1$ ,  $ij$  nous prenons le birapport  $(AB_1, CD_1)$  et nous obtenons de même  $(A_1, BC_1, D)$  sur la conique  $A_1, BC_1, D$ ; ce sont les deux birapports annoncés. Pour obtenir les deux situations complémentaires (en général non dégénérées)

A	B	C	D
$A_1$	$B_1$	$C_1$	$D_1$

A	B	C	D
$C_1$	$D_1$	$A_1$	$B_1$

il est nécessaire et suffisant que les deux derniers birapports signalés coïncident; d'ailleurs nous construisons synthétiquement cette configuration ainsi : dans deux plans distincts, dont  $\Delta$  est la droite commune, nous construisons deux coniques  $\Gamma$  et  $\Gamma_1$  perçant  $\Delta$  aux deux mêmes points  $i$  et  $j$  : sur  $\Gamma$  nous marquons deux couples  $A$  et  $C$ ,  $B_1$  et  $D_1$  conjugués par rapport à  $(ij)$ ; sur  $\Gamma_1$  nous marquons deux points  $A_1$  et  $B$  tels que les birapports

$(AB, ij)$  sur  $\Gamma$  et  $(A_1 B_1 j)$  sur  $\Gamma_1$  soient égaux, enfin  $C_1$  est conjugué de  $A_1$ , et  $D$  de  $B$ , par rapport au couple  $(ij)$ . On voit aussitôt que  $AD_1$  et  $B_1 C$  se coupent sur  $\Delta$ , ainsi que  $AB_1$  et  $D_1 C$  et de même  $A_1 D$  et  $BC_1$  ou  $A_1 B$  et  $DC_1$ ; d'autre part il existe évidemment une transformation homographique changeant  $\Gamma$  en  $\Gamma_1$  et faisant correspondre

$$\begin{aligned} (\Gamma) & \quad i \quad j \quad A \quad C \quad B_1 \quad D_1, \\ (\Gamma_1) & \quad i \quad j \quad A_1 \quad C_1 \quad B \quad D, \end{aligned}$$

de sorte que  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$  sont génératrices d'une même semi-quadrique; il existe de même une autre homographie produisant les échanges

$$\begin{aligned} (\Gamma) & \quad i \quad j \quad A \quad C \quad B_1 \quad D_1, \\ (\Gamma_1) & \quad i \quad j \quad C_1 \quad A_1 \quad D \quad B, \end{aligned}$$

on le voit en supposant que les points  $(i, j, A, C, B_1, D_1)$  ont respectivement  $(0, \infty, a, -a, b, -b)$  pour paramètres sur  $\Gamma$  et que ces mêmes valeurs correspondent à  $(i, j, A_1, C_1, B, D)$  sur  $\Gamma_1$ : la correspondance primitive sur  $\Gamma$  correspond alors à  $t = t_1$ , tandis que la seconde correspond à  $t = -t_1$ . Alors  $AC_1, CA_1, DB_1$  et  $BD_1$  sont génératrices d'une autre semi-quadrique et la proposition est établie. Les deux quadriques que nous venons de construire contiennent toutes deux les coniques  $\Gamma$  et  $\Gamma_1$  (correspondance homographique entre  $\Gamma$  et  $\Gamma_1$ ),  $i$  se correspondant à lui-même ainsi que  $j$  et droite joignant les points homologues; les huit points déterminent une seule biquadratique, décomposée en  $\Gamma$  et  $\Gamma_1$ , sauf cas où l'une des quatre situations dégénérées devient une homologie.

Pour terminer, supposons maintenant que nous voulions obtenir, en même temps que les six situations qui viennent d'être réalisées, la septième

A	B	C	D
A <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>

autrement dit on doit adjoindre aux systèmes (I), (II) et (II') qui ont déjà été écrits et résolus le système déduit de (I) en laissant

les lettres  $a, b, c, d$ , mais remplaçant les accents

par zéro, prime, seconde, tierce,

zéro, seconde, tierce, prime,

ce qui donne

$$(II''') \quad \begin{array}{l} c'' d''' b' = d'' b''' c' \\ d a''' c' = c d''' a' \\ b d'' a' = d a'' b' \end{array}$$

En utilisant les valeurs de  $a, b, c, d, \dots, d'''$  fournies par le Tableau T des coordonnées  $(A_1, B_1, C_1, D_1)$ , on a

$$b' = b'', \quad b' = b'''^3, \quad 1 = b' b'',$$

et écartant la solution  $b' = b'' = 1$  qui réunirait  $A_1, B_1, C_1, D_1$  en un seul point, on a  $b' = b'' = -1$ ; le tableau des coordonnées de  $A_1, B_1, C_1, D_1$  est alors

$$(T_1) \quad \begin{array}{l} A_1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ B_1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \\ C_1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \\ D_1 \quad 1 \quad +1 \quad -1 \quad -1 \end{array}$$

On pourra faire aisément la figure en supposant, par exemple, que A est l'origine, AB, AC, AD trois axes rectangulaires issus de A, le plan BCD étant le plan de l'infini (autrement dit AB est Ax, AC est Ay, AD est Az);  $A_1, B_1, C_1, D_1$  sont quatre sommets du cube d'arête égale à 2, ayant A pour centre et ses arêtes parallèles aux axes;  $B_1, C_1, D_1$  sont les symétriques de  $A(1, 1, 1)$  par rapport à Az, Ay, Ax. La première situation dégénère,  $AA_1$  rencontrant  $CC_1$  au point  $\alpha(-1, -1, -1)$  et  $BB_1$  rencontrant  $DD_1$  au point  $\gamma(1, -1, 1)$ . La troisième situation dégénère aussi,  $AC_1$  et  $CA_1$  se coupant au point  $\gamma$  et  $BD_1, DB_1$  se coupant en  $\alpha$ . La deuxième situation est une homologie par rapport au point  $\beta(1, 1, -1)$ ; la quatrième situation est une homologie par rapport au point  $\delta(-1, 1, 1)$ ; la cinquième situation dégénère,  $AB_1$  et  $CD_1$  se coupant en  $\beta$ , tandis que  $BA_1$  et  $DC_1$  se coupent en  $\gamma$ ; la sixième situation dégénère,  $AD_1$  et  $CB_1$  se coupant en  $\delta$  et  $BC_1$  et  $DA_1$  se coupant en  $\beta$ . Quant à la septième

situation, elle dégénère  $AA_1$  et  $DB_1$  se coupant en  $\alpha$ , tandis que  $BC_1$  et  $CD_1$  se coupent en  $\beta$ . Donc sur les sept situations, deux sont des homologies, les autres sont des situations dégénérées proprement dites : au point de vue projectif on peut dire que

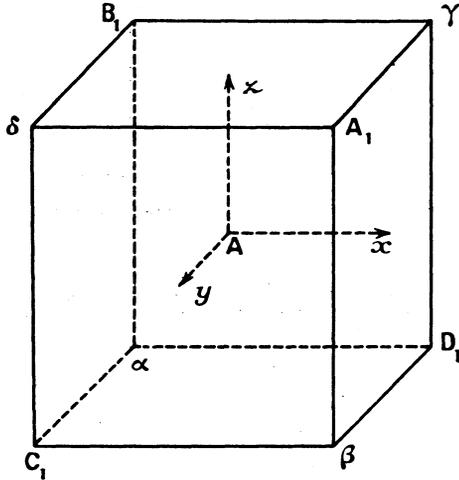


Fig. 8. — Triangles homologues.

*l'on a pris un premier tétraèdre ABCD arbitraire; on choisit un point  $A_1$  arbitrairement et l'on prend les homologues de  $A_1$  dans les involutions biaxiales qui ont pour directrices un couple d'arêtes opposées de ABCD : la figure réalisée avec le cube employé déjà montre que, réciproquement, le premier tétraèdre se déduit du second par le même procédé; d'autre part nous avons dit que si le point  $A_1$ , par exemple, prend par rapport au tétraèdre ABCD une autre position  $A'_1$  (auquel cas  $B_1, C_1, D_1$  deviennent  $B'_1, C'_1, D'_1$ ), la nouvelle figure ABCD,  $A'_1B'_1C'_1D'_1$  est équivalente à la première; mais si  $A'_1$  coïncide avec  $B_1$ ,  $B'_1$  coïncide avec  $A_1$ ,  $C'_1$  avec  $D_1$  et  $D'_1$  avec  $C_1$  de sorte qu'une première situation connue ou bien s'échange avec une situation déjà connue, ou avec une nouvelle : ainsi la première est devenue  $(ABCD)(A'_1B'_1C'_1D'_1)$ , c'est-à-dire  $(ABCD)(B_1A_1D_1C_1)$  : on a retrouvé la cinquième situation déjà connue; on voit que le procédé revient dans un schéma de situation à échanger en seconde ligne  $A_1$  avec  $B_1$ ,  $C_1$  avec  $D_1$ ; la seconde situation*

fournit aussi celle que nous appelons 8 dans le schéma ci-dessous, la situation 4 donne 9 et 7 donne 10 (nous ne citons pas les situations qui se sont reproduites). Par échange de  $A_1$  et  $C_1$ ,  $B_1$  et  $D_1$  on obtient 11 à partir de 7, et 12 à partir de 10. On a ainsi le tableau des douze situations, toutes dégénérées :

1	2	3																								
<table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>A<sub>1</sub></td><td>B<sub>1</sub></td><td>C<sub>1</sub></td><td>D<sub>1</sub></td></tr> </table>	A	B	C	D	A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	<table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>B<sub>1</sub></td><td>C<sub>1</sub></td><td>D<sub>1</sub></td><td>A<sub>1</sub></td></tr> </table>	A	B	C	D	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	<table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>C<sub>1</sub></td><td>D<sub>1</sub></td><td>A<sub>1</sub></td><td>B<sub>1</sub></td></tr> </table>	A	B	C	D	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>
A	B	C	D																							
A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>																							
A	B	C	D																							
B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>																							
A	B	C	D																							
C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>																							
4	5	6																								
<table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>D<sub>1</sub></td><td>A<sub>1</sub></td><td>B<sub>1</sub></td><td>C<sub>1</sub></td></tr> </table>	A	B	C	D	D <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	<table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>B<sub>1</sub></td><td>A<sub>1</sub></td><td>D<sub>1</sub></td><td>C<sub>1</sub></td></tr> </table>	A	B	C	D	B <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	<table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>D<sub>1</sub></td><td>C<sub>1</sub></td><td>B<sub>1</sub></td><td>A<sub>1</sub></td></tr> </table>	A	B	C	D	D <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>
A	B	C	D																							
D <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>																							
A	B	C	D																							
B <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>																							
A	B	C	D																							
D <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>																							
7	8	9																								
<table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>A<sub>1</sub></td><td>C<sub>1</sub></td><td>D<sub>1</sub></td><td>B<sub>1</sub></td></tr> </table>	A	B	C	D	A <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	<table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>A<sub>1</sub></td><td>D<sub>1</sub></td><td>C<sub>1</sub></td><td>B<sub>1</sub></td></tr> </table>	A	B	C	D	A <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	<table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>C<sub>1</sub></td><td>B<sub>1</sub></td><td>A<sub>1</sub></td><td>D<sub>1</sub></td></tr> </table>	A	B	C	D	C <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>
A	B	C	D																							
A <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>																							
A	B	C	D																							
A <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>																							
A	B	C	D																							
C <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>																							
10	11	12																								
<table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>B<sub>1</sub></td><td>D<sub>1</sub></td><td>C<sub>1</sub></td><td>A<sub>1</sub></td></tr> </table>	A	B	C	D	B <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	<table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>C<sub>1</sub></td><td>A<sub>1</sub></td><td>B<sub>1</sub></td><td>D<sub>1</sub></td></tr> </table>	A	B	C	D	C <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	<table border="0" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr> <tr><td>D<sub>1</sub></td><td>B<sub>1</sub></td><td>A<sub>1</sub></td><td>C<sub>1</sub></td></tr> </table>	A	B	C	D	D <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>
A	B	C	D																							
B <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>																							
A	B	C	D																							
C <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	D <sub>1</sub>																							
A	B	C	D																							
D <sub>1</sub>	B <sub>1</sub>	A <sub>1</sub>	C <sub>1</sub>																							

On vérifie par le même procédé que les douze autres associations ne donnent aucune situation hyperboloïdale dégénérée ou non; par exemple, chaque association

$$(ABCD)(A_1B_1D_1C_1), \quad (ABCD)(A_1C_1B_1D_1), \quad (ABCD)(A_1D_1B_1C_1)$$

fait intervenir dans le cube, de côté égal à 2 employé pour la figure 8, la diagonale  $AA_1$  et trois arêtes non concurrentes parallèles à  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$  : ces quatre droites ne sont pas sur un même hyperboloïde; chacune de ces associations par les échanges indiqués fait intervenir trois autres situations de même définition ( $AA_1$  étant successivement remplacée par  $AB_1$ , en  $AC_1$  ou  $AD_1$ ), et par suite il suffit de trois essais pour vérifier que les douze associations non écrites ne donnent rien. C'est un résultat intéressant d'avoir ainsi obtenu le nombre maximum 12 de situations; au lieu d'obtenir douze fois trois conditions, on n'a obtenu que neuf conditions distinctes. Sur les douze situations, quatre sont des homologies (ayant leur pôle aux sommets du cube en jeu opposés à  $A_1$ ,  $B_1$ ,

$C_1, D_1$ ), c'est le nombre maximum d'homologies. On peut remarquer d'ailleurs que la figure que nous venons de donner est projectivement équivalente à celle que nous avons donnée précédemment : en effet, dans la figure  $\hat{\gamma}$ , on voit que dans l'involution biaxiale d'axes  $(AB, CD)$ , ou  $(AC, BD)$ , ou  $(AD, BC)$   $A_1$  a pour homologues  $B_1, C_1$  ou  $D_1$ , ce qui, sauf changement de notation, est bien ce que nous avons donné pour le cas étudié ici. Il est intéressant de constater que les trois tétraèdres que nous obtenons simultanément, à savoir les deux tétraèdres déduits l'un de l'autre par la construction de ce paragraphe et le nouveau tétraèdre formé par les pôles des quatre homologies, jouent le même rôle (comparer avec le cas de deux triangles homologues de trois façons différentes, où l'on a trois triangles jouant un même rôle); deux quelconques de ces trois tétraèdres possèdent quatre homologies et huit autres situations dégénérées. Les points qui interviennent dans les huit situations dégénérées ne sont autres que ceux qui ont déjà servi pour les homologies.

#### Notes complémentaires.

I. *Étude d'un paradoxe.* — Nous avons montré plus haut par un raisonnement intuitif que si deux tétraèdres sont en situation hyperboloïdale, ils sont réciproques par rapport à une quadrique  $Q$  (unique, sauf les deux cas d'exception qui ont été donnés plus haut). Pour déterminer cette quadrique, nous avons douze équations linéaires entre les coefficients ponctuels (ou entre les coefficients tangentiels de la quadrique inconnue  $Q$ ). On pourrait être tenté de dire : conservons les équations exprimant que  $A$  est pôle de  $B'C'D'$ ,  $B$  pôle de  $C'D'A'$  et  $C$  pôle de  $D'A'B'$ ; le paradoxe qui se présente est le suivant : si ces équations, au nombre de neuf, déterminaient  $Q$ , le pôle de  $A'B'C'$  serait un point déterminé de la droite  $DD'$  (génératrice de la semi-quadrique déterminée par  $AA', BB', CC'$ ), et ce ne serait pas nécessairement  $D$ . D'autre part, en réfléchissant davantage, on s'aperçoit que les plans  $\alpha(B'C'D')$ ,  $\beta(C'D'A')$ ,  $\gamma(D'A'B')$ , qui forment un trièdre de sommet  $D'$  sont seuls à intervenir (avec  $A, B, C$ ), mais que les positions précises de  $A', B', C'$  sur les arêtes de ce trièdre n'interviennent pas dans les neuf équations écrites : il faut donc mieux interpréter les équations.

Supposons donc que nous donnions un point  $D'$  et trois plans  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  issus de  $D'$ ; nous choisissons trois points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et nous cherchons s'il y a une quadrique  $Q$  telle que  $A$  soit pôle de  $\alpha$ ,  $B$  pôle de  $\beta$ ,  $C$  pôle de  $\gamma$ . *En général* cette quadrique, étudiée ponctuellement, se réduit au plan double  $ABC$ ; étudiée ponctuellement elle se réduirait au point double  $D'$ ; s'il existe une quadrique  $Q$  véritable, il résulte de ce qui précède que toutes les quadriques du faisceau ponctuel  $Q + \lambda P^2 = 0$ , où  $P$  est le plan  $ABC$ , répondent aux conditions (comme le pôle de  $P$  est alors  $D'$ , on a une équation linéaire aussi en coordonnées tangentielles  $q + \mu d^2 = 0$ , où  $d = 0$  est l'équation tangentielle de  $D'$ ). Donc il faut, pour obtenir une quadrique véritable, que les neuf équations se réduisent à huit; la condition est bien connue : les plans  $D'AA'$ ,  $D'BB'$ ,  $D'CC'$  déterminés par les arêtes du trièdre donné de sommet  $D'$  et les arêtes correspondantes  $D'A$ ,  $D'B$ ,  $D'C$  doivent se couper suivant une droite issue de  $D'$ ; s'il en est ainsi et si  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  sont trois points pris au hasard sur les arêtes du trièdre de sommet  $D'$ , la droite  $G$  commune aux trois plans  $D'AA'$ ,  $D'BB'$ ,  $D'CC'$  est manifestement une génératrice de la semi-quadrique complémentaire de celle que  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  déterminent; autrement dit  $D'$  est sur la quadrique déterminée par  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ; la condition que le pôle de  $A'B'C'$  soit le point  $D$  de  $G$  est la neuvième équation qui achève de déterminer d'une façon unique la quadrique cherchée.

II. Page 19, on doit ajouter le troisième cas d'exception où les quadriques  $Q$  et  $Q'$  ont deux coniques communes  $\gamma, \gamma'$ ; les sommets  $A$  et  $A'$  coïncident avec l'un des sommets des deux cônes contenant les deux coniques,  $B$  et  $B'$  avec l'autre sommet. Les sommets  $C, D$  sont pris quelconques sur la droite réunissant les points  $\alpha, \beta$  communs aux deux coniques;  $C'$  est le conjugué de  $D$  par rapport à  $\alpha, \beta$  et  $D'$  le conjugué de  $C$ ; les plans supports des faces  $ACD$  et  $A'C'D'$  coïncident donc, ainsi que les plans des faces  $BCD$  et  $B'C'D'$ . Les deux tétraèdres sont réciproques vis-à-vis de toutes les quadriques du faisceau  $Q, Q'$  et peuvent être regardés comme homologues vis-à-vis de tout point de la droite  $CDC'D'$ .

---