BULLETIN DE LA S. M. F.

MENAHEM SCHIFFER

Sur un problème d'extrémum de la représentation conforme

Bulletin de la S. M. F., tome 66 (1938), p. 48-55
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1938__66__48_0>

SUR UN PROBLÈME D'EXTRÉMUM DE LA REPRÉSENTATION CONFORME

PAR M. MENAHEM SCHIFFER
(Jérusalem).

1. Soit

$$z = f(\zeta) = \zeta + \frac{\alpha_1}{\zeta} + \frac{\alpha_2}{\zeta^2} + \dots \tag{1}$$

holomorphe et univalente dans le domaine $|\zeta| > 1$; alors on a pour le domaine D représenté par $f(\zeta)$ le théorème classique :

Si a et b sont deux points quelconques de la frontière C de D, on a toujours $|a - b| \leqq 4$.

Pour la fonction

$$p(\zeta) = \zeta + \frac{1}{\zeta}, \tag{2}$$

cette borne est atteinte en effet aux points $a = 2$, $b = -2$.

2. On est amené facilement à la généralisation suivante de cette question. On considère sur la frontière C n points $a_1, a_2, \dots, a_n$ et l'on forme le produit des différences

$$\mathfrak{T}_n(C; a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{\nu<\mu} |a_\nu - a_\mu|. \tag{3}$$

Le maximum de cette fonction des a_i pour une frontière donnée C

$$\mathfrak{T}_n(C) = \operatorname*{Max}_{a_i \subset C} \left\{ \prod_{\nu<\mu} |a_\nu - a_\mu| \right\} \tag{3'}$$

dépend de C seulement et par là de $f(\zeta)$. $\mathfrak{T}_n(C)$ est borné pour n fixe, et, puisque la famille (1) est normale et fermée, il y a pour chaque n une fonction $f_n(\zeta)$ de la famille (1), pour laquelle $\mathfrak{T}_n(C)$ atteint en effet sa borne supérieure. Nous appelons la fonction $f_n(\zeta)$ une fonction extrémale du problème du maximum de $\mathfrak{T}_n(C)$.

Dans la présente Note nous montrerons quelques propriétés géométriques de la frontière C_n, appartenant à une fonction extrémale $f_n(\zeta)$. Nous démontrerons que C_n est une courbe de Jordan, composée d'arcs analytiques, qui satisfont tous à un certain type d'équations différentielles. Nous ferons aussi une première application au problème des coefficients de la famille (1); en outre nous croyons aussi la méthode employée de quelque intérêt en elle-même.

3. Nous choisissons une frontière fixe C_n et désignons sur elle un point O, qui sera l'origine du plan des z. Nous coupons sur C_n, autour de O, une section $\mathfrak{S}$, de diamètre transfini ρ. C'est-à-dire qu'il existe une fonction

$$\zeta = \varphi(z) = \rho\,\psi\left(\frac{z}{\rho}\right) = z + k\rho + \frac{\mathcal{B}_1\rho^2}{z} + \frac{\mathcal{B}_2\rho^3}{z^2} + \ldots, \tag{4}$$

qui représente l'extérieur de $\mathfrak{S}$ simplement sur le domaine $|\zeta| > \rho$. On voit aisément que la fonction $\psi(t)$ représente l'extérieur d'un continu de diamètre transfini 1 sur l'extérieur du cercle-unité. $\psi(t)$ possède donc pour fonction inverse une fonction de la famille (1). Nous remarquons que $\psi(t)$ et par là aussi K, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, ... dépendent du choix de $\mathfrak{S}$. Si l'on choisit une suite de section $\mathfrak{S}(\rho)$ de manière que $\mathfrak{S}(\rho) \subset \mathfrak{S}(\rho')$ pour $\rho < \rho'$, ρ étant le diamètre transfini de $\mathfrak{S}(\rho)$, on peut supposer que $\psi(t)$ dépend d'un paramètre ρ et dans ce sens nous écrirons plus exactement $\psi_\rho(t)$, $K(\rho)$, $\mathcal{B}_1(\rho)$, $\mathcal{B}_2(\rho)$, ... s'il est nécessaire.

La fonction inverse de (4)

$$z = \varphi^{-1}(\zeta) = \rho\,\psi^{-1}\left(\frac{\zeta}{\rho}\right) = \zeta - k.\rho - \frac{\mathcal{B}_1\rho^2}{\zeta} - \frac{(\mathcal{B}_2 + k\mathcal{B}_1)\rho^3}{\zeta^2} - \ldots \tag{5}$$

représente le domaine $|\zeta| > \rho$ simplement sur l'extérieur de $\mathfrak{S}$. Puisque $\psi^{-1}(\tau)$ appartient à la famille (1), on a par le théorème des aires

$$1 \geqq |\mathcal{B}_1|^2 + 2\,|\mathcal{B}_2 + k\mathcal{B}_1|^2 + \ldots. \tag{6}$$

On a en particulier $|\mathcal{B}_1| \leqq 1$.

D'un autre côté nous trouverons pour chaque α donné ($|\alpha| \leqq 1$) toujours des fonctions univalentes dans le domaine $|\zeta| > \rho$ et possédant un développement

$$z = \zeta + \frac{\alpha\rho^2}{\zeta} + \dots. \tag{7}$$

Prenons par exemple la fonction

$$z = q_\alpha(\zeta) = \rho\sqrt{\alpha}\, p\left(\frac{\zeta}{\rho\sqrt{\alpha}}\right) = \zeta + \frac{\alpha\rho^2}{\zeta} \tag{7'}$$

qui est holomorphe et univalente pour $|\zeta| > \rho$ à cause de $|\alpha| \leqq 1$.

La fonction

$$q_\alpha[\varphi(z)] = z + k\rho + \frac{(\alpha + \mathcal{B}_1)\rho^2}{z} + \dots \tag{8}$$

est, pour tout $|\alpha| \leqq 1$, holomorphe et univalente dans l'extérieur de $\mathfrak{S}$ et représente donc tout le domaine D_n (de frontière C_n) sur un domaine D'_n (de frontière C'_n), qu'on obtient aussi de $|\zeta| > 1$ à l'aide d'une fonction (1). Le domaine D_n appartenait à une fonction extrémale; nous trouvons donc

$$\mathfrak{T}_n(C'_n) \leqq \mathfrak{T}_n(C_n) \tag{9}$$

ou

$$\mathfrak{T}_n(C'_n; a'_1, \dots, a'_n) \leqq \mathfrak{T}_n(C_n; a_1, \dots, a_n) \tag{9'}$$

si C'_n, a'_i résulte de C_n, a_i par la représentation (8) et si les a_i étaient l'ensemble de points, qui donnait à $\mathfrak{T}_n(C_n; a_1, \dots, a_n)$ son maximum sur C_n. Ainsi nous obtenons

$$\prod_{\nu<\mu}\left|a_\nu - a_\mu + (\alpha + \mathcal{B}_1)\rho^2\left(\frac{1}{a_\nu} - \frac{1}{a_\mu}\right) + \rho^3(\dots)\right| \leqq \prod_{\nu<\mu}|a_\nu - a_\mu| \tag{10}$$

ou

$$\prod_{\nu<\mu}\left|1 - (\alpha + \mathcal{B}_1)\rho^2\frac{1}{a_\nu a_\mu} + \rho^3(\dots)\right| \leqq 1, \tag{10'}$$

$$\left|1 - (\alpha + \mathcal{B}_1)\rho^2\sum_{\nu<\mu}\frac{1}{a_\nu a_\mu} + \rho^3(\dots)\right| \leqq 1. \tag{10''}$$

L'inégalité (10″) est valable pour tout ρ. Faisons converger ρ vers zéro; selon (6), $\mathcal{B}_1(\rho)$ est borné et il existe donc au moins une valeur limite $\mathcal{B}_0$ des $\mathcal{B}_1(\rho)$, et pour elle nous tirons de (10″)

$$(11) \qquad \mathcal{R}\left\{(\alpha+\mathcal{B}_0)\sum_{\nu<\mu}\frac{1}{a_\nu a_\mu}\right\}\geqq 0.$$

$\mathcal{R}(x)$ désignant la composante réelle de x. Le coefficient α est encore quelconque soumis à la condition $|\alpha|\leqq 1$. Puisqu'on a aussi $|\mathcal{B}_0|\leqq 1$, (11) peut être satisfait seulement pour $|\mathcal{B}_0|=1$. Soit donc $\mathcal{B}_0=e^{i\theta}$. Un choix correspondant des α donne à la somme $\alpha+\mathcal{B}_0$ tous les arguments de l'intervalle ouvert

$$\left(-\frac{\pi}{2}+\theta, \frac{\pi}{2}+\theta\right).$$

Grâce à (11) nous avons

$$(12) \qquad \arg\sum_{\nu<\mu}\frac{1}{a_\nu a_\mu}=-\theta$$

ou

$$(12') \qquad \mathcal{B}_0\sum_{\nu<\mu}\frac{1}{a_\nu a_\mu}\geqq 0.$$

Il suit de (12), que l'argument θ de la valeur limite $\mathcal{B}_0$ est déterminé sans ambiguïté $\left(\text{excepté le cas } \sum_{\nu<\mu}\frac{1}{a_\nu a_\mu}=0\right)$. Donc

$$\lim_{\rho\to 0}\mathcal{B}_1(\rho)=e^{i\theta}$$

existe.

4. De $\lim\mathcal{B}_1(\rho)=e^{i\theta}$ et (6) on tire

$$(13) \qquad \lim_{\rho\to 0}\{\psi_\rho^{-1}(\tau)+k(\rho)\}=\tau-\frac{e^{i\theta}}{\tau}=p_\theta(\tau).$$

Cette fonction limite représente $|\tau|>1$ sur l'extérieur d'un segment de droite, qui a la direction $\sigma=\pm e^{i\frac{\theta+\pi}{2}}$. Pour tout ε et des ρ suffisamment petits les points de frontière du domaine, représenté à l'aide de $\psi_\rho^{-1}(\tau)$ de $|\tau|>1$, se trouvent donc tous à une distance moindre de ε d'une droite de direction σ, et puisque cette frontière contient toujours l'origine, ils se trouvent aussi à une distance moindre de 2ε de la droite d par l'origine avec la direction σ. Pour $\rho\to 0$ nous avons $\varepsilon(\rho)\to 0$. La fonction (5) représente donc pour des ρ suffisamment petits le domaine $|\zeta| > \rho$ sur un domaine dont les points de frontière se trouvent à une distance $\leqq 2\rho\varepsilon(\rho)$ de la droite d. Construisons maintenant autour de O un cercle de rayon ρ; il contient une section de C_n dont le diamètre transfini est au plus ρ. Toute intersection de cette section avec le cercle $|z| = \rho$ apparaît de O sous un angle ω par rapport à d, qui est borné par l'inégalité

$$\sin\omega \leqq 2\,\varepsilon(\rho). \tag{14}$$

On voit donc que d est la tangente à C_n en O [1].

5. Puisque O était un point quelconque sur C_n, nous avons le théorème suivant :

La frontière C_n obtenue à l'aide d'une fonction extrémale $f_n(\zeta)$ est une courbe continue $z = z(s)$ (s un paramètre réel), qui possède toujours une tangente, excepté en $2(n-1)$ points, et qui satisfait à l'équation différentielle

$$\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 \sum_{\nu<\mu}^{1\ldots n} \frac{1}{(a_\nu - z)(a_\mu - z)} \gtrless 0. \tag{15}$$

L'équation (15) vient de (12') en posant $\mathcal{B}_0 = e^{i\theta}$ et $\sigma^2 = -e^{i\theta}$. Elle est en effet une équation différentielle pour la courbe

$$z(s) = x(s) + i\,y(s).$$

Car, en écrivant l'équation de cette courbe sous la forme $y = y(x)$, nous trouvons

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathcal{J}\{z'(s)\}}{\mathcal{R}\{z'(s)\}}; \tag{15'}$$

on obtient le second membre de (15') aisément de (15). Les $2(n-1)$ points critiques de l'équation différentielle sont les $(n-2)$ zéros et les n pôles de la somme du premier membre de (15). Si l'on connaissait les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ on aurait déterminé complè-

---

[1] Pour une formulation générale du principe appliqué ici et une recherche plus profonde à l'aide de la théorie des ensembles, voir une Note *A method of variation within the family of simple functions* qui va paraitre dans les *Proceedings of the London Math. Society*.

tement une fonction extrémale $f_n(\zeta)$. En tout cas les a_i sont soumis à la restriction que si l'on résout pour eux l'équation (15), il faut qu'une courbe existe, qui satisfait à (15) et qui passe par tous ces points a_i. Ceci est en général seulement possible pour certains n-tuples de a_i.

6. Maintenant nous nous servirons du résultat précédent pour évaluer le coefficient $\mathfrak{A}_2$ dans (1). Dans le cas $n=3$ nous obtenons pour C_3 l'équation différentielle

$$(16) \qquad \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 \frac{z - \dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)} \leqq 0.$$

On voit aisément que, dans le cas d'extrémum, les points a_i ne se trouvent pas sur une droite et que dans ce cas la courbe résolvante de (16) est composée de trois arcs analytiques, qui se rencontrent au centre de gravité $g = \frac{a_1+a_2+a_3}{3}$ sous des angles de 120°. Faisons g origine du plan des z et construisons autour de g un cercle de rayon r. Dans celui-ci se trouve, pour r suffisamment petit, une section étoilée E de C_n; si son diamètre transfini est ρ, alors on a $\frac{r}{4} \leqq \rho \leqq r$, tel que ρ et r convergent en même temps vers zéro. Prenons la suite des sections $E(\rho)$, qu'on obtient en faisant converger $r \rightarrow O$. C_n possède en g trois tangentes, qui forment l'une avec l'autre des angles de 120°; donc $E(\rho)$ tend (avec une approximation d'ordre supérieur en ρ) vers une étoile de trois segments rectilignes égaux, qui forment des angles de 120°.

Nous représentons $E(\rho)$ sur un cercle $|\zeta| > \rho$ à l'aide de

$$(4') \qquad \zeta = \varphi(z) = \rho\,\psi\left(\frac{z}{\rho}\right) = z + k.\rho + \frac{\mathfrak{B}_1 \rho^2}{z} + \frac{\mathfrak{B}_2 \rho^3}{z^2} + \ldots.$$

La fonction inverse $\psi_\rho^{-1}(\tau)$ de $\psi_\rho(t)$ représente l'extérieur du cercle-unité sur l'extérieur d'une étoile $E'(\rho)$, qui s'obtient de $E(\rho)$ par une dilatation de facteur $\frac{1}{\rho}$. $E'(\rho)$ converge comme $E(\rho)$ vers une étoile avec des segments égaux et des angles égaux; appelons-le E'_0. Plus exactement : $E'(\rho)$ converge vers E'_0 dans ce sens, qu'un domaine contenant E'_0 dans son extérieur, contient aussi tous les $E'(\rho)$ dans l'extérieur pour ρ suffisamment petit. L'extérieur de E'_0 est le noyau de tous les extérieurs des $E'(\rho)$; car on voit sans difficulté que E'_0 est le plus grand domaine avec la propriété énoncée. D'après un théorème classique de la théorie de la représentation conforme la suite $\varphi_\rho(t)$ converge, dans tout domaine contenant E'_0 dans l'extérieur, uniformément vers la fonction univalente $\psi_0(t)$, qui représente l'extérieur de E'_0 sur l'extérieur du cercle-unité. Puisque tous les $\psi_\rho(t)$ étaient normalisés au développement $t + K + \frac{\mathcal{B}_1}{t} + \frac{\mathcal{B}_2}{t^2} + \dots$, ceci est valable également pour $\psi_0(t)$. Ce fait et la propriété de représentation déterminent $\psi_0(t)$ essentiellement. Toutes les fonctions normalisées, représentant le cercle-unité sur une étoile E'_0, ont la forme

$$(17) \qquad g_1(\tau) = \tau \sqrt[3]{1 + \frac{2\lambda^3}{\tau^3} + \frac{\lambda^6}{\tau^6}} \qquad |\lambda| = 1.$$

Cette fonction représente le domaine $|\tau| > 1$ sur l'extérieur de l'étoile rectiligne $\left(O, \frac{1}{\lambda}\sqrt[3]{4}, \frac{1}{\lambda}e^{\frac{2\pi i}{3}}\sqrt[3]{4}, \frac{1}{\lambda}e^{\frac{4\pi i}{3}}\sqrt[3]{4}\right)$. Les $\psi_\rho^{-1}(\tau)$ convergent vers un certain $g_1(\tau)$, λ dépendant de l'orientation de E'_0. Nous trouvons donc pour $(4')$

$$(18) \qquad \lim_{\rho \to 0} k(\rho) = \lim_{\rho \to 0} \mathcal{B}_1(\rho) = 0, \qquad \lim_{\rho \to 0} \mathcal{B}_2(\rho) = -\frac{2}{3}\lambda^3.$$

Si

$$(19) \qquad r(\zeta) = \zeta + \frac{\mathfrak{A}_1 \rho^2}{\zeta} + \frac{\mathfrak{A}_2 \rho^3}{\zeta^2} + \dots$$

est une fonction holomorphe et univalente dans $|\zeta| > \rho$, alors

$$(20) \qquad r[\varphi(z)] = z + k.\rho + \frac{(\mathcal{B}_1 + \mathfrak{A}_1)\rho^2}{z} + \frac{(\mathcal{B}_2 - k\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2)\rho^3}{z^2} + \dots$$

est holomorphe et univalente à l'extérieur de E. Concluons comme en (3) et considérons $a_1 + a_2 + a_3 = O$; alors nous obtenons

$$(21) \qquad \left| 1 + 3\rho^3(\mathcal{B}_2 - k\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2)\frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \rho^4(\dots) \right| \leqq 1.$$

Si $\rho \to O$, il suit de (18) et (21)

$$(22) \qquad \mathcal{R}\left\{\left(-\frac{2}{3}\lambda^3 + \mathfrak{A}_2\right)\frac{1}{a_1 a_2 a_3}\right\} \leqq 0.$$

Cela n'est possible que si l'on a toujours $|\mathfrak{A}_2| \leqq \frac{2}{3}$. Ainsi nous trouvons :

Soit $f(\zeta) = \zeta + \frac{\mathfrak{A}_1}{\zeta} + \frac{\mathfrak{A}_2}{\zeta^2} + \ldots$ holomorphe et univalente pour $|\zeta| > 1$, alors on a $|\mathfrak{A}_2| \leqq \frac{2}{3}$ et cette limite est atteinte pour

$$f(\zeta) = \zeta \sqrt[3]{1 + \frac{2}{\zeta^3} + \frac{1}{\zeta^6}}. \tag{17'}$$