

# BULLETIN DE LA S. M. F.

POTRON

## **Sur les matrices non négatives et les solutions positives de certains systèmes linéaires**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 67 (1939), p. 56-61

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1939\\_\\_67\\_\\_56\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1939__67__56_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LES MATRICES NON NÉGATIVES,  
ET LES SOLUTIONS POSITIVES DE CERTAINS SYSTÈMES LINÉAIRES;**

Par M. L'ABBÉ POTRON.

1. Les matrices non négatives (dont aucun élément n'est négatif) ont été étudiées par Frobenius [1]. Il a démontré les résultats suivants :

F. I. Si  $\mathbf{a}$ , d'éléments  $a_{ik}$ , est une matrice carrée non négative, le déterminant caractéristique  $|\mathbf{su} - \mathbf{a}|$  a toujours une racine réelle  $r$ , non négative, au moins égale au module de toute autre racine.

Cette racine  $r$  est dite *racine maximale* de la matrice.

F. II. Soient  $\mathbf{a}_j$  ( $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}$ ) la matrice formée des éléments des  $j$  premières lignes et colonnes de  $\mathbf{a}$ , et  $r_j$  ( $r_n = r$ ) la racine maximale de  $\mathbf{a}_j$ . On a  $r_j \leq r_{j+1}$  ( $j = 1, \dots, n-1$ ); dans l'adjoint du déterminant caractéristique, les éléments diagonaux  $A_{ii}(s)$  sont tous positifs, et les autres éléments  $A_{ij}(s)$  non négatifs pour  $s > r$ ; les  $A_{ii}(r)$  et  $A_{ij}(r)$  sont non négatifs; dans le déterminant  $|\mathbf{ru} - \mathbf{a}|$ , si un mineur symétrique de degré quelconque est nul, il en est de même de tout mineur symétrique le contenant; si un mineur symétrique est positif, il en est de même de tous ceux qu'il contient.

F. III. Si les  $A_{ii}(r)$  sont tous positifs, 1° la matrice  $\mathbf{a}$  est indécomposable (1); 2° les  $A_{ij}(r)$  sont tous positifs, 3° si  $\mathbf{x}$ , d'élément  $x_i$ , est une matrice de type  $(n, 1)$ , et  $\mathbf{y}$ , d'éléments  $y^i$

---

(1) Une matrice  $\mathbf{a}$ , de type  $(n, n)$  est *décomposable* si les lignes et colonnes peuvent être mises, sans changer la diagonale, dans un ordre tel que  $\mathbf{a}$  ait la forme  $\begin{pmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{o} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{b}$  étant de type  $(h, h)$ ,  $\mathbf{o}$  (zéro) une matrice *nulle* de type  $(h, n-h)$ ,  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{d}$  de types  $(n-h, h)$  et  $(n-h, n-h)$ . Les sous-matrices  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{d}$  sont dites *composantes* de  $\mathbf{a}$ .

une matrice du type  $(1, n)$ , chacun des systèmes linéaires

$$(ru - a)x = 0, \quad y(ru - a) = 0,$$

a une solution positive.

F. IV. Si l'un des  $A_{ii}(r)$  est nul, il existe certainement un mineur symétrique  $b(s)$ , confondu avec  $A_{ii}(s)$  ou contenu dans  $A_{ii}(s)$ , pouvant être de degré 1, et ayant les deux propriétés : 1°  $b(r) = 0$ ; 2° si le degré de  $b(s)$  est  $> 1$ , tout mineur symétrique de  $b(r)$  est positif. Alors la matrice  $a$  est décomposable, et la sous-matrice dont les éléments sont ceux de  $b(0)$  est composable indécomposable.

COROLLAIRE. — Si la matrice  $a$  est indécomposable, les  $A_{ii}(r)$  sont tous positifs, et l'on a 2° et 3° de F. III.

J'ai montré autrefois [2] que l'on déduit, de ces théorèmes les résultats suivants :

P. I. Soit  $a$  une matrice non négative, de type  $(n, n)$ , indécomposable, et  $b$  une matrice non négative et non nulle, de type  $(n, 1)$ ; 1° quel que soit  $s > r$ , le système linéaire  $(su - a)x = b$  a une solution positive; 2° si ce système a une solution non négative et non nulle,  $s$  est  $> r$ .

P. II. Soit  $a$  décomposable et  $b$  positive. Pour que le système considéré ait une solution positive, il faut et suffit que  $s$  soit  $> r$ .

2. Ces théorèmes ne fournissent aucun moyen simple pour reconnaître si  $s$  est  $>$  ou  $<$   $r$ . Le calcul des dérivées successives de  $|su - a|$ , que  $s > r$  doit rendre toutes positives, exigerait le calcul de tous les mineurs symétriques de degrés  $n - 1, n - 2, \dots$

Mais une méthode nouvelle [3] de calcul de la solution d'un système linéaire, d'après laquelle le calcul se fait en trois étapes, permet de reconnaître, dès la première étape, si  $s$  est  $>$  ou  $<$   $r$ , et par suite, si le système admet, ou non, une solution positive. Voici cette méthode, qui n'a pas été publiée *in extenso* (1).

---

(1) M. Lanczos n'a donné dans le *Bull. Am. Math. Soc.* qu'un résumé très sommaire. Il a eu l'obligeance de me communiquer son manuscrit.

3. Soit un système linéaire quelconque

$$(1) \quad \mathbf{d}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Cherchons à déterminer deux matrices triangulaires  $\alpha$  et  $\beta$  ( $\alpha_i^i = \beta_i^i = 1$ ,  $\alpha_i^k = \beta_i^k = 0$  pour  $i < k$ , et une matrice diagonale  $\lambda$  ( $\lambda_i^k = 0$  pour  $i \neq k$ ) telle que l'on ait

$$(2) \quad \alpha\lambda\bar{\beta} = \mathbf{d}.$$

On voit que (2) donne

$$(3) \quad \sum \alpha_i^j \lambda_j^k \beta_k^i = d_i^k.$$

D'après les conditions imposées aux matrices  $\alpha$  et  $\beta$ , les seuls termes  $\neq 0$  du premier membre seront obtenus pour  $j \leq \min [h, k]$ . On aura donc

$$(4) \quad \alpha_h^k \lambda_1^k \beta_1^k + \dots + \alpha_{m-1}^k \lambda_{k-1}^k \beta_{k-1}^k + \alpha_m^k \lambda_k^k = d_m^k \quad (k = 1, \dots, m-1),$$

$$(5) \quad \alpha_i^i \lambda_1^i \beta_m^i + \dots + \alpha_i^{i-1} \lambda_{i-1}^i \beta_m^{i-1} + \lambda_i^i \beta_m^i = d_i^m \quad (i = 1, \dots, m-1),$$

$$(6) \quad \alpha_h^m \lambda_1^m \beta_m^m + \dots + \alpha_{m-1}^m \lambda_{m-1}^m \beta_m^{m-1} + \lambda_m^m = d_m^m.$$

Si  $\mathbf{d}_m$ ,  $\alpha_m$ ,  $\beta_m$ ,  $\lambda_m$  désignent les sous-matrices formées des éléments des  $m$  premières lignes et colonnes de  $\mathbf{d}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ , on déduit de (4)-(5)-(6) la relation.

$$(7) \quad \alpha_m \lambda_m \bar{\beta}_m = \mathbf{d}_m.$$

Comme  $|\alpha_m| = |\beta_m| = 1$ , on tire de (7)

$$(8) \quad |\mathbf{d}_m| = |\lambda_m| = \lambda_1^m \lambda_2^m \dots \lambda_m^m.$$

Ces formules permettent de calculer par récurrence, les matrices  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ . Supposons en effet connues  $\alpha_{m-1}$ ,  $\beta_{m-1}$ ,  $\lambda_{m-1}$ . Les formules (4) détermineront successivement  $\alpha_m^1$ ,  $\alpha_m^2$ , ...,  $\alpha_m^{m-1}$  : les formules (5) détermineront de même successivement  $\beta_m^1$ ,  $\beta_m^2$ , ...,  $\beta_m^{m-1}$ ; puis la formule (6) donnera  $\lambda_m^m$ .

Ce calcul ne peut être arrêté que si l'un des  $\lambda_i^i$  est trouvé nul. D'après (8), cette circonstance se présentera toujours et seulement si  $|\mathbf{d}_i|$  est le premier déterminant nul de la suite  $|\mathbf{d}_1|, |\mathbf{d}_2|, \dots$ . Or, si  $|\mathbf{d}| \neq 0$ , il est toujours possible de mettre les colonnes dans un ordre tel que tous les  $|\mathbf{d}_i|$  soient  $\neq 0$ . La propriété est évidente

pour un déterminant de degré 2. Supposons-la vraie pour tout déterminant de degré  $< n$ . Si  $|\mathbf{d}|$  est  $\neq 0$ , l'un au moins des éléments de la dernière ligne de son adjoint est  $\neq 0$ ; on peut toujours mettre les colonnes dans un ordre tel que cet élément  $\neq 0$  soit  $D_n^n = |\mathbf{d}_{n-1}|$ . On peut ensuite, d'après l'hypothèse faite, mettre les  $n-1$  premières colonnes dans un ordre tel que les  $|\mathbf{d}_i|$  ( $i=1, \dots, n-2$ ) soient tous  $\neq 0$ .

Comme il sera démontré plus loin, cette première étape du calcul, appliqué, à la matrice  $\mathbf{d} = \mathbf{s}\mathbf{u} - \mathbf{a}$ , suffit pour reconnaître si le nombre  $s$  est inférieur ou supérieur à la racine maximale  $r$  de la matrice  $\mathbf{a}$ . Cette première étape du calcul suffit donc pour prévoir si la solution du système  $(\mathbf{s}\mathbf{u} - \mathbf{a})\mathbf{x} = \mathbf{b}$  est, ou non, positive. Elle suffit d'ailleurs pour le calcul du déterminant  $|\mathbf{d}| = \lambda_1^r \lambda_2^r, \dots, \lambda_n^n$ .

4. Les matrices auxiliaires, vérifiant (2), ayant été formées, le système (1) s'écrit

$$(9) \quad \alpha \lambda \bar{\beta} \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Il peut être résolu par la résolution successive de

$$(10) \quad \alpha \mathbf{z} = \mathbf{b},$$

$$(11) \quad \lambda \mathbf{y} = \mathbf{z},$$

$$(12) \quad \bar{\beta} \mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

Le système (10), qui peut s'écrire

$$(10) \quad \alpha_h z_1 + \dots + \alpha_h^{h-1} z_{h-1} + z_h = b_h \quad (h = 1, \dots, n),$$

donne successivement  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . Puis (11) donne  $y_i = \frac{z_i}{\lambda_i}$ ; enfin le système (12), qui peut s'écrire

$$(12) \quad x_h + \beta_{h+1}^h x_{h+1} + \dots + \beta_n^h x_n = y_h,$$

donne successivement  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ .

5. Prenons maintenant  $\mathbf{d} = \mathbf{s}\mathbf{u} - \mathbf{a}$ . Si  $s$  est  $> r$ , tous les  $|\mathbf{d}_i|$  sont positifs (F. II). D'après (8), il en est de même de tous les  $\lambda_i^i$ . Inversement, supposons que les  $\lambda_i^i$  soient trouvés tous positifs. Dans (4) et (5), on a maintenant  $d_m^k = -a_m^k \leq 0$ ,  $d_i^m = -a_i^m \leq 0$ . Pour  $m = 2$ , on a

$$\alpha_2^1 \lambda_1^1 = -\alpha_1^1, \quad \lambda_1^1 \beta_2^1 = -\alpha_1^2.$$

Donc les éléments non diagonaux des sous-matrices  $\alpha_2$  et  $\bar{\beta}_2$  sont  $\leq 0$ . S'il en est ainsi des éléments non diagonaux de  $\alpha_{m-1}$  et  $\beta_{m-1}$ , les formules (4) et (5) montrent, de proche en proche, que les  $\alpha_m^i$  et  $\beta_m^i$  ( $i = 1, 2, \dots, m - 1$ ) sont  $\leq 0$ . Alors, si l'on prend pour  $\mathbf{b}$  une matrice positive, les formules (10) et (11) donnent des valeurs positives successivement pour  $x_1, x_2, \dots, y_1, \dots, y_n$ , et les formules (12) donnent des valeurs positives successivement pour  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ .

Ainsi, si les  $\lambda_i^j$  sont trouvés tous positifs, le système

$$(\mathbf{s}\mathbf{u} - \mathbf{a})\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

$\mathbf{b}$  étant une matrice positive, a une solution positive; donc  $s$  est supérieur à la racine maximale  $r$ .

On a donc le résultat : *pour que  $s$  soit supérieur à  $r$ , racine maximale de la matrice non négative  $\mathbf{a}$ , il faut et suffit que la matrice diagonale  $\lambda$ , calculée par récurrence, en même temps que les matrices triangulaires  $\alpha$  et  $\beta$ , à partir de la matrice  $\mathbf{a} - \mathbf{s}\mathbf{u}$ , soit une matrice positive.*

6. Ce critérium est avantageux au point de vue du calcul pratique. D'abord,  $\lambda_i^j$  dépend seulement des éléments de  $\mathbf{a}_i$ . Ensuite, l'ordre dans lequel se présentent les  $\lambda_i^j$  dépend de l'ordre adopté pour les éléments diagonaux de  $\mathbf{a}$ . Cet ordre peut être modifié à condition d'opérer en même temps les mêmes permutations sur les lignes et colonnes de mêmes rangs. Plusieurs calculateurs, ayant adopté des ordres différents, pourront opérer simultanément. Si, dans  $\mathbf{s}\mathbf{u} - \mathbf{a}$ ,  $s$  est  $< r$ , on arrivera ainsi plus vite au  $\lambda_i^j$  non positif qui doit sûrement se présenter.

7. Les problèmes économiques relatifs aux équilibres production-consommation et prix-salaires se ramènent, comme je l'ai montré [2, 4] à la recherche de deux matrices positives à une colonne,  $\mathbf{p}$  pour les productions,  $\mathbf{a}$  pour les prix, solutions des systèmes  $(\mathbf{u} - \mathbf{C})\mathbf{p} = \mathbf{f}$ ,  $(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{C}})\mathbf{a} = \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{C}$  étant une matrice carrée, non négative, donnée,  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{b}$  deux matrices à une colonne, positives, arbitraires. Les matrices solutions seront positives toujours et seulement si la racine maximale de  $\mathbf{C}$  est  $< 1$ . Le calcul des  $\lambda_i^j$  succes-

sifs permettrait de reconnaître si cette condition est remplie, et préparerait le calcul des solutions.

**BIBLIOGRAPHIE.**

1. FROBENIUS, *Positive und nicht-negative Matrizen* (*Sitzungsberichte der Academie von Berlin*, 1908, p. 471; 1909, p. 514; 1912, p. 556).
  2. POTRON, *Les Substitutions linéaires à Coefficients non négatifs* (*Annales de l'École Normale*, t. 30, 1913, p. 53; *C. R. Acad. Sc.*, t. 153, 1911, p. 1129 et 1458; t. 204, 1937, p. 844).
  3. LANZOS, *Recursion Method for solving linear Equations* (*Bulletin of the American Mathematical Society*, t. 42, 1936, p. 325).
  4. POTRON, *L'Aspect mathématique de certains Problèmes économiques* (Paris, 1936, chez l'auteur).
-