

BULLETIN DE LA S. M. F.

BERTRAND GAMBIER

A. LABROUSSE

**Tétraèdres inscrits dans une biquadratique et
conjugués par rapport à une quadrique**

Bulletin de la S. M. F., tome 67 (1939), p. 177-222

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1939__67__177_0

© Bulletin de la S. M. F., 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**TETRAÈDRES INSCRITS DANS UNE BIQUADRATIQUE ET CONJUGUÉS
PAR RAPPORT A UNE QUADRIQUE;**

PAR MM. GAMBIER ET LABROUSSE.

1. Introduction. — Si une quadrique Σ est harmoniquement inscrite dans deux quadriques Q, Q_1 , elle est harmoniquement inscrite dans chaque quadrique du faisceau (Q, Q_1) , faisceau parfaitement déterminé par la biquadratique \mathcal{B} commune à Q et Q_1 ; nous dirons que Σ est harmoniquement inscrite dans le faisceau (\mathcal{B}) ou que le faisceau (\mathcal{B}) est harmoniquement circonscrit à Σ . Cette propriété se traduit par deux équations entre les coefficients de \mathcal{B} et ceux de Σ . D'autre part, si une biquadratique \mathcal{B} est circonscrite à un tétraèdre T conjugué par rapport à Σ , nous dirons que \mathcal{B} est harmoniquement circonscrite à Σ ou que Σ est harmoniquement inscrite dans \mathcal{B} ; il est clair que si la biquadratique \mathcal{B} est harmoniquement circonscrite à Σ , le faisceau \mathcal{B} est harmoniquement circonscrit à Σ ; le but de ce Mémoire est de prouver la réciproque, à savoir : si le faisceau \mathcal{B} est harmoniquement circonscrit à Σ , la biquadratique \mathcal{B} admet deux tétraèdres T_1, T_2 inscrits dans \mathcal{B} et conjugués chacun par rapport à Σ et, en général, il n'y a que ces deux tétraèdres. Le système général $(\mathcal{B}, T_1, T_2, \Sigma)$, où T_1, T_2 sont inscrits dans \mathcal{B} , conjugués par rapport à Σ , dépend de 23 paramètres, tout comme (\mathcal{B}, Σ) . Il existe une sous-classe particulière de telles configurations où le système (\mathcal{B}, Σ) dépend de 20 paramètres exactement, et le système $(\mathcal{B}, T_1, T_2, \Sigma)$ de 22 : la biquadratique \mathcal{B} possède alors ∞^1 tétraèdres qui lui sont inscrits et sont conjugués par rapport à Σ .

On réalise ces systèmes particuliers (\mathcal{B}, Σ) à 23 ou bien 20 paramètres de la façon suivante. Si l'on considère deux tétraèdres T_1, T_2 conjugués chacun par rapport à une même quadrique Σ , il est bien connu que leurs 8 sommets sont associés (bases d'un réseau

de quadriques). *Inversement*, si l'on considère les 8 points communs à 3 quadriques Q, Q_1, Q_2 , on peut de 35 façons différentes, séparer ces 8 points en deux quadruples (A_1, B_1, C_1, D_1) et (A_2, B_2, C_2, D_2) : il existe une quadrique Σ , et une seule, conjuguée par rapport aux deux tétraèdres $(A_1 B_1 C_1 D_1)$ et $(A_2 B_2 C_2 D_2)$: la démonstration géométrique est très simple (voir par exemple : DUPONCQ, *Principes de Géométrie Moderne*, p. 103-104, Paris, Gauthier-Villars). Donc, pour obtenir le système (\mathcal{B}, Σ) ou $(\mathcal{B}, T_1, T_2, \Sigma)$ à 23 paramètres, on détermine un système de 8 points associés, ce qui engage 21 paramètres, à savoir les coordonnées de 7 points du système; on circonscrit une biquadratique \mathcal{B} à ce système (deux nouveaux paramètres) et il existe alors 35 quadriques Σ , comme nous l'avons dit.

Pour obtenir les systèmes (\mathcal{B}, Σ) à 20 paramètres, nous prenons une biquadratique \mathcal{B} quelconque (16 paramètres) et nous considérons le tétraèdre Θ conjugué commun aux quadriques du faisceau (\mathcal{B}) ; soient Δ, Δ' un couple d'arêtes opposées de Θ et A un point quelconque de \mathcal{B} , A' l'homologue de A dans l'involution biaxiale (Δ, Δ') ; un plan quelconque issu de A' recoupe \mathcal{B} en B, C, D : ce groupe (A, B, C, D) dépend de trois paramètres, car la connaissance de B, C, D donne A' puis A ; on détermine ensuite un nouveau groupe (A_1, B_1, C_1, D_1) de même espèce; la quadrique, unique, Σ , conjuguée par rapport à $ABCD$ et $A_1 B_1 C_1 D_1$, donne avec \mathcal{B} ∞^1 tétraèdres; le système (\mathcal{B}, Σ) dépend alors de 20 paramètres. MM. Gambier et Rowe, dans un Mémoire paru aux *Annales de l'École Normale*, 3^e série, t. LVI, 1939, p. 71-118, relatif aux couples de Möbius, ont obtenu un exemple précis où (\mathcal{B}, Σ) dépend de 18 paramètres et admet ∞^1 couples de Möbius inscrits dans \mathcal{B} , conjugués par rapport à Σ . Plus bas, nous donnons un autre exemple précis où (\mathcal{B}, Σ) admet ∞^1 tétraèdres et dépend de 20 ou 19 paramètres, la courbe \mathcal{B} étant décomposée en une cubique et une sécante double ou en deux coniques bisécantes. Au cours de ce travail, il sera toujours nécessaire d'examiner si la biquadratique \mathcal{B} est ou non décomposée; si l'on part *a priori* d'une biquadratique \mathcal{B} indéterminée, il y a lieu de se demander si les équations que l'on écrit n'entraînent pas la décomposition de \mathcal{B} .

Tous ces résultats vont être démontrés par un ensemble de considérations fort simples, mais toutefois assez subtiles. Dans ce

genre de recherches, nous devons nous méfier des pièges fournis par les décomptes d'inconnues et de relations; le nombre de paramètres ne s'obtient pas, en général, par la comparaison du nombre d'inconnues et du nombre d'équations, et cela, pour une raison facile à saisir : les équations fournies par un problème de géométrie ne sont pas (sinon d'une façon générale, du moins très souvent), *indépendantes*, en raison de leur origine commune, relative à ce problème.

2. Points associés. — Pour que le lecteur ne soit pas obligé de recourir à un traité auxiliaire, donnons une démonstration analytique des propriétés rappelées pour 8 points *associés*.

Pour un tel système, le tableau rectangulaire à 8 lignes et 10 colonnes

$$(1) \quad \left\| \begin{array}{cccccccccc} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & t_1^2 & y_1 z_1 & z_1 x_1 & x_1 y_1 & x_1 t_1 & y_1 t_1 & z_1 t_1 \\ x_2^2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & z_2 t_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_8^2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & z_8 t_8 \end{array} \right\|$$

est de rang *sept* et réciproquement (au lieu d'être de rang *huit*). Il revient au même de dire que l'on peut obtenir certains multiplicateurs $\lambda_1, \dots, \lambda_8$ tels que la somme des produits par $\lambda_1, \dots, \lambda_8$ des termes d'une même colonne soit nulle; en éliminant certains cas de dégénérescence tels que celui où 7 des 8 points seraient dans un même plan, les multiplicateurs λ_i sont tous non nuls, de sorte qu'on peut les réduire tous à l'unité (en remplaçant x_i, y_i, z_i, t_i par $x_i \sqrt{\lambda_i}, y_i \sqrt{\lambda_i}, z_i \sqrt{\lambda_i}, t_i \sqrt{\lambda_i}$). On a alors l'identité (en u, v, w, h)

$$(2) \quad \sum_1^8 (u x_i + v y_i + w z_i + h t_i)^2 \equiv 0$$

et *réciproquement*. En posant

$$M_i \equiv u x_i + v y_i + w z_i + h t_i,$$

l'équation

$$M_i^2 + M_j^2 + M_k^2 + M_l^2 = 0$$

représente une quadrique Σ conjuguée par rapport au tétraèdre $M_i M_j M_k M_l$, où l'on suppose i, j, k, l différents et pris parmi les

entiers 1, 2, . . . , 8; si m, n, p, q sont les entiers restants, l'équation de Σ peut aussi être mise sous la forme

$$M_m^2 + M_n^2 + M_p^2 + M_q^2 = 0,$$

de sorte que Σ est conjuguée aussi par rapport au tétraèdre M_m, M_n, M_p, M_q . Les réciproques sont manifestement vraies, car les raisonnements peuvent être repris en sens inverse. Nos 8 points associés peuvent être séparés de $\frac{1}{2} C_8^4$ façons en deux quadruples; on obtient ainsi un ensemble remarquable de 35 quadriques, ne dépendant au total que de 21 paramètres. Ce qui vient d'être dit subsiste si les 8 points M_1, \dots, M_8 sont choisis au hasard sur une même cubique gauche Γ ; un tel système dépend alors de 20 paramètres (12 pour Γ , 8 pour le choix des M_i).

Sur une biquadratique \mathcal{B} donnée, supposée provisoirement indécomposable et de genre 1, adoptons un paramètre elliptique u tel que $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$ soit la condition nécessaire et suffisante pour que les quatre points correspondants soient coplanaires; 8 points *associés*, sur \mathcal{B} , sont caractérisés par la relation

$$(3) \quad u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + u_8 = 0,$$

et il existe une quadrique Σ conjuguée par rapport aux deux tétraèdres $(u_1 u_2 u_3 u_4), (u_5 u_6 u_7 u_8)$. Supposons qu'il existe un nouveau tétraèdre $(u_9 u_{10} u_{11} u_{12})$ inscrit dans \mathcal{B} et conjugué par rapport à Σ ; en posant

$$(4) \quad \begin{cases} S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4, \\ S_2 = u_5 + u_6 + u_7 + u_8, \\ S_3 = u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12}, \end{cases}$$

on a (à un multiple près des périodes $2\omega, 2\omega'$)

$$(5) \quad S_1 + S_2 = 0, \quad S_1 + S_3 = 0, \quad S_2 + S_3 = 0.$$

On en déduit, par élimination de S_2, S_3 ,

$$(6) \quad 2S_1 = 0,$$

d'où, puisqu'il s'agit d'un véritable tétraèdre, S_1 égal à l'une des

valeurs $\omega, \omega', \omega + \omega'$. Si donc on choisit les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 au hasard sur une biquadratique \mathcal{B} , la somme S_1 a une valeur arbitraire; de la sorte si l'on construit une quadrique Σ conjuguée par rapport au tétraèdre $M_1 M_2 M_3 M_4$, on est certain que l'on ne peut trouver que zéro ou un nouveau tétraèdre inscrit dans \mathcal{B} , conjugué par rapport à Σ : il s'agit de montrer qu'il existe un nouveau tétraèdre.

Ce résultat s'obtient par un simple décompte de paramètres (il s'agit ici, non d'un décompte de *paramètres inconnus et d'équations*, mais d'un décompte de *paramètres*); \mathcal{B} étant donnée, l'ensemble formé par 4 points M_1, M_2, M_3, M_4 de \mathcal{B} et une quadrique Σ conjuguée par rapport au tétraèdre $M_1 M_2 M_3 M_4$ forme une variété V_7 à 7 dimensions.

Cette variété est *indécomposable*, c'est-à-dire n'est pas la somme de deux variétés à 7 paramètres (pour la clarté, rappelons que l'ensemble des courbes gauches de degré 4 est décomposable en une somme de deux variétés V_{16}, W_{16} distinctes). L'ensemble formé par 4 premiers points M_1, M_2, M_3, M_4 , puis par 3 nouveaux points M_5, M_6, M_7 forme manifestement une variété W_7 également indécomposable; à chaque élément de W_7 correspond un seul point complémentaire M_8 complétant avec les 7 premiers un total de 8 points associés, puis une seule quadrique Σ conjuguée simultanément par rapport aux deux tétraèdres $(M_1 M_2 M_3 M_4), (M_5, M_6, M_7, M_8)$; mais alors, cette quadrique Σ , qui est un élément de W_7 , rentre dans le système V_7 : mais alors, puisque V_7 est *indécomposable*, la variété W_7 , contenue dans V_7 , coïncide nécessairement avec V_7 ; autrement dit, toute quadrique Σ conjuguée par rapport à un tétraèdre inscrit dans \mathcal{B} est conjuguée à un deuxième tétraèdre inscrit lui aussi dans \mathcal{B} .

Avec la terminologie adoptée dans l'introduction, nous avons ainsi démontré qu'une quadrique Σ , harmoniquement inscrite dans \mathcal{B} est, en réalité, deux fois harmoniquement inscrite dans \mathcal{B} , et, en général, deux fois seulement: l'ensemble de ces quadriques forme, pour une biquadratique \mathcal{B} donnée, une variété V_7 indécomposable.

Considérons maintenant l'ensemble des quadriques Σ harmoniquement inscrites dans le faisceau \mathcal{B} : cet ensemble forme une variété V_7 indécomposable; car, si nous supposons \mathcal{B} définie

définie par deux équations ponctuelles

$$(7) \quad \begin{cases} A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + A''' t^2 + 2B yz + \dots + 2C xt = 0, \\ A_1 x^2 + \dots + 2C_1 xt = 0, \end{cases}$$

et Σ par l'équation tangentielle

$$(8) \quad au^2 + a'v^2 + a''w^3 + a'''h^2 + 2bvw + \dots + 2cwh = 0,$$

on a les deux relations définissant V'_7

$$(9) \quad \begin{cases} A a + A' a' + A'' a'' + A''' a''' + 2Bb + \dots + 2C c = 0, \\ A_1 a + \dots + 2C_1 c = 0, \end{cases}$$

et l'on voit que V'_7 peut être représentée par un espace linéaire à 7 dimensions; mais alors la variété V_7 , définie plus haut, est contenue manifestement dans V'_7 ; *comme V'_7 est indécomposable, la variété V_7 contenue dans V'_7 ne peut que coïncider avec V'_7* (et en même temps, nous avons la démonstration de ce fait que V_7 est *indécomposable*; d'ailleurs ce point est presque évident).

Par conséquent la quadrique *générale* Σ harmoniquement inscrite dans le *faisceau* \mathcal{B} est harmoniquement inscrite (et même deux fois) dans la *biquadratique* \mathcal{B} : c'est la réciproque annoncée plus haut; désormais nous ne parlerons plus de quadrique harmoniquement inscrite dans le *faisceau* \mathcal{B} , mais de quadrique harmoniquement inscrite dans la biquadratique \mathcal{B} .

Il restera un problème intéressant à résoudre : quand on a une biquadratique (7) et une quadrique Σ (8), vérifiant les équations (9), comment trouve-t-on les deux tétraèdres inscrits dans \mathcal{B} et conjugués chacun par rapport à Σ ? Ce sera fait plus loin.

Nous pouvons montrer dès maintenant qu'il existe des couples (\mathcal{B}, Σ) admettant ∞^1 tétraèdres inscrits dans \mathcal{B} , conjugués par rapport à Σ ; il est d'ailleurs bien clair que, s'il existe une infinité de tétraèdres, chacun ne dépend que d'un paramètre, car la donnée du premier sommet A détermine le plan de la face opposée, plan polaire de A par rapport à Σ . En effet M. Gambier, dans le Mémoire déjà cité, a établi que le couple général de tétraèdres T, T' de Möbius dépend de 17 paramètres et détermine, d'une part, une seule quadrique Σ conjuguée par rapport à T et aussi à T' et, d'autre part, ∞^2 biquadratiques \mathcal{B} qui lui sont circonscrites; le

système $(\mathcal{B}, T, T', \Sigma)$ ou (\mathcal{B}, T, Σ) dépend de 19 paramètres, mais le système (\mathcal{B}, Σ) dépend de 18 paramètres seulement, précisément parce qu'il admet ∞^1 couples (T, T') de Möbius; ce système (\mathcal{B}, Σ) ainsi obtenu par M. Gambier est une solution particulière du problème qui vient d'être posé; à titre de mémoire, signalons que si (T_1, T'_1) est un autre couple de Möbius appartenant à (\mathcal{B}, Σ) , le système $(\mathcal{B}, \Sigma, T, T_1)$ dépend de 20 paramètres.

Un couple (\mathcal{B}, Σ) qui admet simplement deux tétraèdres dépend de 23 paramètres (\mathcal{B} est supposée indécomposée), donc un couple (\mathcal{B}, Σ) qui en admet ∞^1 dépend de $23-h$ paramètres où h est un entier au moins égal à 1; le système (\mathcal{B}, Σ, T) dépend de $(24-h)$ paramètres $(\mathcal{B}, \Sigma, T, T_1)$ de $(25-h)$ paramètres; comme le système $(\mathcal{B}, \Sigma, T, T_1)$ dépend de 23 paramètres quand il n'y a que 2 tétraèdres, le nombre $25-h$ doit être inférieur à 23; (ce résultat va être confirmé un peu plus bas par un raisonnement indépendant de celui-ci); h est donc au moins égal à 3 et un raisonnement fait un peu plus bas montre que h est au plus égal à 3, de sorte que (\mathcal{B}, Σ) dépend de 20 paramètres exactement; or nous constaterons ce résultat curieux que ce nombre 20 est atteint même si \mathcal{B} se décompose en une cubique gauche Γ et une sécante double de Γ . Ce résultat ne doit pas surprendre; en effet si l'on définit \mathcal{B} par deux quadriques indéterminées (dont l'une passe par un point ω fixé *a priori*, l'autre par un point ω' également fixé, ceci dans le but de n'introduire que 16 inconnues pour \mathcal{B}), les équations à écrire entre les coefficients de \mathcal{B} et ceux de Σ sont assez compliquées; le résultat est qu'elles admettent plusieurs types distincts de solutions, et l'un d'eux correspond précisément à une courbe \mathcal{B} dégénérée en une cubique gauche et une sécante double : *le chercheur n'y peut rien, il doit subir les ordres des éléments mathématiques au lieu de chercher à leur imposer ses ordres*. Si, au contraire, nous partons délibérément d'une biquadratique \mathcal{B} indécomposée, nous pouvons en prendre les équations sous la forme canonique

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0, \quad x^2 - y^2 + m(z^2 - t^2) = 0,$$

où les 16 coefficients sont les paramètres de l'homographie générale, en nombre 15, et l'invariant homographique m de la courbe \mathcal{B} ; pour m distinct de 0, ∞ , 1, -1 , nous avons une courbe

indécomposée : cette fois nous retrouvons des solutions à 20 paramètres; d'autre part nous avons l'avantage d'avoir éliminé les 15 paramètres superflus de la transformation homographique générale. La conclusion est donc que l'on doit étudier séparément le cas de la courbe \mathcal{B} non décomposée et de genre 1, puis les cas de décomposition de \mathcal{B} .

Liquidons le cas de la cubique Γ (12 paramètres) et d'une sécante double Δ (2 paramètres); on choisit *arbitrairement* les 8 points (A, B, C, D) (A_1, B_1, C_1, D_1), ce qui donne un total de $12 + 2 + 8$ ou 22 paramètres; il existe une quadrique Σ , et une seule, conjuguée à T et T_1 , d'après le raisonnement indiqué plus haut; Γ admet ∞^1 tétraèdres inscrits dans Γ , conjugués par rapport à Σ ; donc le système (Γ, Δ, Σ) dépend de 2 paramètres de moins que ($\Gamma, \Delta, \Sigma, T, T_1$); on trouve ainsi le total 20 pour (Γ, Δ, Σ).

Quand la biquadratique \mathcal{B} est donnée, [par exemple par les équations (7)], et que la quadrique, (8), Σ , vérifie les équations (9), on peut, pour trouver les deux tétraèdres T_1 et T_2 , prendre pour inconnues

$$\left(\frac{x_1}{t_1}, \frac{y_1}{t_1}, \frac{z_1}{t_1}\right), \dots, \left(\frac{x_8}{t_8}, \frac{y_8}{t_8}, \frac{z_8}{t_8}\right),$$

où (x_i, y_i, z_i, t_i) sont les coordonnées des 8 sommets. L'inconnue auxiliaire

$$\xi = \left(\frac{x_1}{t_1}\right)^p + \left(\frac{x_2}{t_2}\right)^p + \left(\frac{x_3}{t_3}\right)^p + \left(\frac{x_4}{t_4}\right)^p,$$

où p est un entier qui peut être pris égal à 1, 2, 3 ou 4, est donnée par une équation de degré *deux*, obtenue rationnellement au moyen des coefficients qui entrent dans les équations de \mathcal{B} et Σ ; en égalant à zéro les coefficients de ($\xi^2, \xi, 1$) dans cette équation, nous obtenons *trois* relations entre \mathcal{B} et Σ (*distinctes, ou non distinctes, a priori, on ne le sait*); ces équations sont *nécessaires et suffisantes* pour qu'il existe ∞^1 tétraèdres au lieu de 2 seulement; leur nombre, qui est l'entier h introduit plus haut, est *au plus* égal à 3; or plus haut h devait être *au moins* égal à 3, donc h est égal à 3.

Nous avons introduit l'entier p pour éviter le cas où ξ resterait constant pour chacun des ∞^1 tétraèdres : c'est le cas, pour $p = 1$, pour les couples de Möbius ou pour l'exemple qui est donné au para-

graphe 4, tandis que dans l'exemple où \mathcal{B} comprend une cubique, la quantité ξ , pour $p = 1$, est variable; mais, si les tétraèdres varient, l'une au moins des valeurs de ξ relatives à $p = 1, 2, 3, 4$ est variable.

Prenons donc maintenant une biquadratique \mathcal{B} quelconque, non décomposée et, sur elle, deux quadruples de points (A, B, C, D) , (A_1, B_1, C_1, D_1) dont les paramètres vérifient les relations

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \omega, \quad u_5 + u_6 + u_7 + u_8 = \omega$$

nécessaires pour que la quadrique Σ , unique, conjuguée par rapport à T et T_1 , puisse fournir ∞^1 tétraèdres. L'interprétation de $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \omega$ est facile; elle s'écrit

$$(u_1 - \omega) + u_2 + u_3 + u_4 = 0;$$

le point $A'(u_1 - \omega)$ est l'homologue de A dans l'involution biaxiale dont les axes sont deux arêtes opposées Δ, Δ' du tétraèdre Θ conjugué commun aux quadriques issues de \mathcal{B} ; A' est coplanaire avec B, C, D ; ω' ou $\omega + \omega'$ correspondraient aux deux autres choix d'arêtes opposées de Θ ; on peut choisir les notations de façon à écrire ω au lieu de ω' ou $\omega + \omega'$. Supposons d'abord que chaque quadruple $(ABCD)$ ou $(A_1B_1C_1D_1)$ soit le *plus général* parmi ceux qui vérifient $\Sigma u = \omega$ et *qu'il n'y ait aucune relation spéciale établie entre les deux quadruples*; on a ainsi engagé un total de 22 paramètres pour \mathcal{B} et les deux tétraèdres T, T_1 . Il y a deux conclusions, s'excluant mutuellement, que nous devons étudier, pour en éliminer une :

- a. (\mathcal{B}, Σ) admettent deux tétraèdres, donc dépendent de 22 paramètres, tout comme $(\mathcal{B}, \Sigma, T, T_1)$ ou (\mathcal{B}, Σ, T)
- b. (\mathcal{B}, Σ) admettent ∞^1 tétraèdres; (\mathcal{B}, Σ) est un système dépendant de 20 paramètres, (\mathcal{B}, Σ, T) de 21, $(\mathcal{B}, \Sigma, T, T_1)$ de 22.

Or, on peut obtenir *des systèmes particuliers* (\mathcal{B}, Σ) de l'espèce précédente en opérant autrement : on part de \mathcal{B} (16 paramètres), du quadruple $(ABCD)$ déjà employé (3 paramètres) et l'on construit la quadrique Σ la plus générale conjuguée par rapport à $ABCD$ (3 paramètres), ce qui donne un système (\mathcal{B}, Σ, T) à 22 paramètres. Ce dernier résultat semblerait n'être compatible qu'avec l'hypothèse *a* qui précède; donc c'est *b* qui serait

exclue, et par conséquent les relations $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \omega$, $u_5 + u_6 + u_7 + u_8 = \omega$, qui sont *nécessaires* pour obtenir ∞^1 tétraèdres, ne seraient pas *suffisantes*; mais nous allons trouver une contradiction nous empêchant d'éliminer l'hypothèse b . En effet, si b était exclue, pour obtenir ∞^1 tétraèdres, on devrait adjoindre k relations, où k est un entier supérieur ou égal à 1 [l'exemple des tétraèdres de Möbius montre que le premier tétraèdre T peut être choisi arbitrairement, parmi ceux qui donnent $\Sigma u = \omega$; T' se déduit de T par l'involution signalée; le système (\mathcal{B}, Σ, T) dépend de $16 + 3$ ou 19 paramètres, et (\mathcal{B}, Σ) 18]; de la sorte, \mathcal{B}, T étant choisis, ce qui engage 19 paramètres, le second tétraèdre T_1 , ne pourrait dépendre de 3 paramètres, mais simplement de 1 ou 2 paramètres. de sorte que k serait égal à 2 ou 1 ; le système $(\mathcal{B}, T, T_1, \Sigma)$ dépendrait de $22 - k$ paramètres, (\mathcal{B}, Σ) de $20 - k$; d'après ce qui précède $20 - k = 23 - h$, d'où $h = k + 3$; or nous avons démontré que h est égal à 3 , donc k est nul et, par suite, *c'est l'hypothèse b qui est réalisée*; si donc \mathcal{B}, T et T_1 ont été choisis comme il a été dit, Σ en résulte et le système (\mathcal{B}, T, Σ) dépend de 21 paramètres. Si donc on part de (\mathcal{B}, T) , ce qui engage 19 paramètres, la quadrique Σ *la plus générale* conjuguée par rapport à T *donne un système (\mathcal{B}, T, Σ) à 22 paramètres, n'admettant que deux tétraèdres T, T_1 , mais où T_1 est confondu avec T* : cette circonstance particulière n'avait pas encore été signalée; elle se trouve mise en évidence et démontrée de la façon la plus simple, et toutes les contradictions sont levées; d'ailleurs en vertu de $u_1 + \dots + u_8 = 0$, *les deux tétraèdres T, T_1 ne peuvent se confondre que si $2(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) = 0$* , ce qui est le cas spécial qui nous occupe pour les quadruples ABCD. Mais parmi les ∞^3 quadriques Σ conjuguées par rapport à T , il y en a ∞^2 qui fournissent avec \mathcal{B} ∞^1 tétraèdres, et c'est pour cela que (\mathcal{B}, Σ, T) , dans ce cas, dépend de 21 paramètres et (\mathcal{B}, Σ) de 20 . La donnée de 2 tétraèdres T, T_1 *distincts* conduit donc à une quadrique Σ fournissant avec \mathcal{B} ∞^1 tétraèdres, sans qu'il soit besoin d'autre condition : c'est l'hypothèse b . Tous ces résultats seront confirmés au paragraphe 4 par une autre voie.

3. Détermination des tétraèdres T_1, T_2 . — Nous avons une biquadratique \mathcal{B} supposée harmoniquement circonscrite à la qua-

drique Σ ; \mathcal{B} est définie comme courbe commune à deux quadriques Q, Q_1 ; nous allons chercher une troisième quadrique Q_2 qui devra être circonscrite aussi à T_1 et T_2 , sans contenir \mathcal{B} ; les deux tétraèdres seront donc définis par les 8 points associés, communs à Q, Q_1, Q_2 ; s'il n'y a que deux tétraèdres, la quadrique inconnue Q_2 est arbitraire parmi celles d'un réseau ponctuel, de sorte que nous devons aboutir à sept équations linéaires par rapport aux coefficients ponctuels de Q_2 ; d'autre part, nous pouvons *déplacer* légèrement la question et raisonner ainsi : nous nous donnons trois quadriques

$$(1) \begin{cases} Q \equiv A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + A''' t^2 + 2B yz + 2B' yx + 2B'' xy + 2C xt + 2C' yt + 2C'' zt = 0, \\ Q_1 \equiv A_1 x^2 + \dots + 2C_1'' zt = 0, \\ Q_2 \equiv A_2 x^2 + \dots + 2C_2'' zt = 0, \end{cases}$$

et nous cherchons une des 35 quadriques Σ annoncées précédemment, conjuguées par rapport à un couple de tétraèdres formés avec les 8 points communs à Q, Q_1, Q_2 ; soit

$$(2) \quad \Sigma \equiv au^2 + a'v^2 + a''w^2 + a'''h^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv + 2cuh + 2c'vh + 2c''wh = 0.$$

Nous savons que Σ est *déterminée*, donc fournie par 9 équations dont trois sont immédiates, à savoir,

$$(3) \begin{cases} A a + A' a' + A'' a'' + A''' a''' + 2B b + 2B' b' + 2B'' b'' + 2C c + 2C' c' + 2C'' c'' = 0, \\ A_1 a + \dots + 2C_1'' c'' = 0, \\ A_2 a + \dots + 2C_2'' c'' = 0. \end{cases}$$

Les 6 autres sont symétriques par rapport aux coefficients de Q, Q_1, Q_2 ; elles sont *linéaires* par rapport aux coefficients de Q_2 , car si Q, Q_1, Σ sont données, Q_2 , nous l'avons dit, décrit un *réseau linéaire*; pour la même raison, les 6 équations en question doivent être linéaires par rapport aux coefficients de Q et Q_1 ; d'autre part si Q_2 est une quadrique associée à Q, Q_1, Σ , nous savons que $\lambda Q + \mu Q_1 + \nu Q_2$, où λ, μ, ν sont des constantes arbitraires, est aussi une quadrique associée : de tous ces résultats nous déduisons que les 6 équations complémentaires liant Q, Q_1, Q_2 et Σ sont de la forme ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$)

$$(4) \quad \alpha_i \begin{vmatrix} A & A' & A'' \\ A_1 & A'_1 & A''_1 \\ A_2 & A'_2 & A''_2 \end{vmatrix} + \beta_i \begin{vmatrix} A & A' & A''' \\ A_1 & A'_1 & A'''_1 \\ A_2 & A'_2 & A'''_2 \end{vmatrix} + \dots + \lambda_i \begin{vmatrix} C & C' & C'' \\ C_1 & C'_1 & C''_1 \\ C_2 & C'_2 & C''_2 \end{vmatrix} = 0,$$

où les $\alpha_i, \beta_i, \dots, \lambda_i$ sont des polynômes à coefficients entiers formés avec les quantités a, a', \dots, c'' . Il est d'ailleurs essentiel de remarquer qu'il n'y a que deux équations concernant Σ, Q, Q_1 à l'exclusion de Q_2 ; de la sorte il n'y a aucune combinaison des équations (4) d'où l'on puisse éliminer les coefficients d'une des trois quadriques Q_i .

Les 9 équations (3), (4) sont *les seules relations* existant entre Q, Q_1, Q_2, Σ , car si Σ est l'inconnue, elles doivent déterminer les a, a', \dots, c'' (donnant un système de 35 solutions); si, au contraire, nous donnons Q, Q_1, Σ , ces équations fournissent Q_2 , autant que Q_2 peut être obtenue. Dans cette méthode, nous avons suivi la marche habituelle : *on ne doit pas, a priori, considérer tel élément plutôt que tel autre comme une donnée ou une inconnue; nous avons une figure à étudier, nous formons toutes les relations nécessaires et suffisantes entre tous les éléments de la figure, et c'est seulement à partir de ce moment que nous pouvons préciser ce qui est l'inconnue, ce qui est la donnée.* Ici l'hypothèse, où Σ serait l'inconnue, nous montre que le nombre total des relations est neuf; l'hypothèse, où Q_2 serait l'inconnue, nous montre la forme des 6 relations (4). Quand Q_2 est l'inconnue, c'est-à-dire quand la biquadratique (Q, Q_1) et Σ sont données, il y a, sur les 9 équations, 2 équations où Q_2 n'entre pas, donc qui sont des conditions de *possibilité* : ce sont les 2 premières équations (3), qui expriment que Σ est harmoniquement inscrite dans \mathcal{B} ; ensuite il reste, pour déterminer Q_2 , la dernière équation (3) et les 6 équations (4) qui, *en général*, déterminent 7 des coefficients convenablement choisis de Q_2 en fonction linéaire et homogène des 3 restants; on peut profiter de la possibilité de remplacer Q_2 par $\lambda Q + \mu Q_1 + \nu Q_2$ pour supposer, à l'avance, nuls deux coefficients particuliers (tels que A_2, A'_2 par exemple, ce qui revient à faire passer Q_2 par deux sommets particuliers du tétraèdre de référence); appelons quadrique Q_2 *réduite* une telle quadrique : il reste alors 8 coefficients homogènes, liés par 7 équations linéaires, de sorte, qu'en général, on trouve une seule quadrique *réduite*, donc deux tétraèdres seulement. Remarquons que la *réduction* peut porter aussi sur Q et Q_1 , car on peut remplacer Q et Q_1 par deux quadriques quelconques du faisceau \mathcal{B} ; on pourra supposer $A = A'_1 = 0$.

Puisque nous prenons Q, Q_1, Σ pour données et Q_2 pour inconnue, il y a avantage à prendre Σ sous la forme

$$\Sigma \equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2.$$

Les équations (3) deviennent

$$(3') \quad A + A' + A'' + A''' = 0, \quad A_1 + A'_1 + A''_1 + A'''_1 = 0, \quad A_2 + A'_2 + A''_2 + A'''_2 = 0$$

et serviront à éliminer les coefficients A''', A''_1, A''_2 . Il nous reste simplement 6 équations à former ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) du type

$$(4') \quad \alpha_i \begin{vmatrix} A & A' & A'' \\ A_1 & A'_1 & A''_1 \\ A_2 & A'_2 & A''_2 \end{vmatrix} + \beta_i \begin{vmatrix} A & A' & B \\ A_1 & A'_1 & B_1 \\ A_2 & A'_2 & B_2 \end{vmatrix} + \dots + \lambda_i \begin{vmatrix} C & C' & C'' \\ C_1 & C'_1 & C''_1 \\ C_2 & C'_2 & C''_2 \end{vmatrix} = 0,$$

où les notations ne sont plus tout à fait les mêmes que pour (4).

Chaque équation telle que (4') contient un nombre de déterminants égal à $C_3^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$; les $\alpha_i, \beta_i, \dots, \lambda_i$ sont des entiers numériques; nous avons fait jouer à t un rôle spécial, car nous avons remplacé A''', A''_1, A''_2 par leurs valeurs déduites de (3'); donc, si nous permutons les lettres x, y, z , ce qui produit une permutation concomitante sur $(A, A', A''), (B, B', B''), (C, C', C'')$, une équation du système (4') peut se reproduire, ou se transformer en une combinaison des autres.

Quand les équations (4') sont distinctes, on pourra y supposer $A_2 = A'_2 = 0$; il reste alors 7 inconnues dont les rapports mutuels ($A''_2 : B_2 : B'_2 \dots$) sont déterminés d'une façon unique et donnent une quadrique Q_2 , réduite, unique; on obtient un unique couple (T_1, T_2) .

Nous sommes certains que les équations (4') peuvent se réduire, moyennant relations convenables entre Q, Q_1, Σ , à moins de six distinctes (les résultats relatifs aux couples de Möbius le prouvent); dans ce cas, elles doivent, s'il existe ∞^1 tétraèdres, se réduire à quatre. En effet, dans le cas où il y a une infinité de tétraèdres, ces tétraèdres ne peuvent dépendre que d'un paramètre, car la position de l'un des sommets détermine la face opposée, qui en est le plan polaire relativement à Σ ; les quadriques réduites Q_2 , que nous avons définies, passent par deux points fixes ω_1, ω_2 choisis une fois pour toutes hors de \mathcal{B} et la donnée, arbitraire, de deux

tétraèdres particuliers T_1, T_2 détermine complètement Q_2 , de sorte que ces quadriques Q_2 forment un système linéaire ∞^2 ponctuel; par suite, si les quadriques réduites correspondent par exemple à $A_2 = A'_2 = 0$, les 7 inconnues homogènes A''_2, B_2, \dots, C''_2 vérifient quatre équations homogènes, linéaires, *distinctes*. *Conclusion* : le système (4'), que nous pouvons écrire schématiquement sous la forme

$$(5) \quad a_i^1 X_1 + a_i^2 X_2 + \dots + a_i^7 X_7 = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

est, en général, formé de 6 équations distinctes et le tableau des coefficients

$$(6) \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^7 \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^7 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_6^1 & a_6^2 & \dots & a_6^7 \end{vmatrix}$$

est, en général, d'ordre 6; si le tableau (6) n'est pas de rang 6, il doit être de rang 4 (nous raisonnons bien entendu sur les systèmes \mathcal{B}, Σ les plus généraux parmi ceux qui ont ∞^1 tétraèdres); les explications données prouvent d'ailleurs que si l'on écrit que le tableau (6) est de rang 5, les conditions obtenues entraînent automatiquement que le rang soit, en réalité, égal à 4.

Donc, dans le cas de ∞^1 tétraèdres, si ω_1, ω_2 ont été fixés, les quadriques Q_2 réduites correspondantes forment un réseau et passent par 8 points fixes $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_8$ dont deux sont les points donnés (ω_1, ω_2) à priori; la quadrique générale de ce réseau qui passe par un point donné A de \mathcal{B} passe aussi par les sommets B, C, D du tétraèdre dont un sommet est A; cette quadrique engendre un faisceau ponctuel dont la biquadratique de base porte les 8 ω_i et les 4 sommets A, B, C, D; quand cette quadrique décrit le faisceau ponctuel, elle découpe, successivement, sur \mathcal{B} les ∞^1 tétraèdres que porte \mathcal{B} , conjugués à Σ . Nous avons ainsi un procédé géométrique intuitif pour découper sur \mathcal{B} les ∞^1 tétraèdres; nous pouvons remplacer ce procédé par celui qui consiste à envisager les ∞^1 biquadratiques contenant d'abord les 8 points ω_i , puis un point variable de \mathcal{B} .

Ces considérations précises montrent qu'il y a avantage, pour réduire la difficulté du problème, à perfectionner la méthode par le très simple artifice suivant : nous savons que, si Σ est harmoniquement inscrite dans \mathcal{B} , il existe, soit 2, soit ∞^1 tétraèdres de

l'espèce cherchée; nous pouvons donc faire coïncider le tétraèdre de référence avec l'un d'eux (de deux façons dans le cas général, de ∞^1 façons dans le cas spécial).

4. Détermination des tétraèdres T_1, T_2 (suite). — Nous écrivons donc

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2, \\ Q \equiv 2(Byz + B'zx + B''xy + Cxt + C'yt + C''zt), \\ Q_1 \equiv 2(B_1yz + B'_1zx + B''_1xy + C_1xt + C'_1yt + C''_1zt), \\ Q_2 \equiv 2(B_2yz + B'_2zx + B''_2xy + C_2xt + C'_2yt + C''_2zt). \end{array} \right.$$

Nous avons ainsi disposé des 15 paramètres de l'homographie générale, en prenant T_1 pour tétraèdre de référence et ramenant l'équation de Σ à la forme $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ plutôt que $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ (ici, que nous prenions l'équation ponctuelle ou tangentielle de Σ , cela n'a plus d'importance). Nous avons dit que nous traitons Q, Q_1, Q_2 symétriquement, cherchant à exprimer que les 4 nouveaux points communs à Q, Q_1, Q_2 forment un tétraèdre conjugué par rapport à Σ . Nous pouvons donc remplacer Q, Q_1, Q_2 par les nouvelles quadriques

$$(2) \quad \left| \begin{array}{ccc} Q & B' & B'' \\ Q_1 & B'_1 & B''_1 \\ Q_2 & B'_2 & B''_2 \end{array} \right| = 0, \quad \left| \begin{array}{ccc} B & Q & B'' \\ B_1 & Q_1 & B''_1 \\ B_2 & Q_2 & B''_2 \end{array} \right| = 0, \quad \left| \begin{array}{ccc} B & B' & Q \\ B_1 & B'_1 & Q_1 \\ B_2 & B'_2 & Q_2 \end{array} \right| = 0,$$

pourvu que le déterminant des multiplicateurs soit non nul; ce déterminant est l'adjoint du déterminant

$$\delta = \left| \begin{array}{ccc} B & B' & B'' \\ B_1 & B'_1 & B''_1 \\ B_2 & B'_2 & B''_2 \end{array} \right|.$$

Si δ est nul, les 3 quadriques (2) coïncident avec une même quadrique

$$t(\gamma x + \gamma' y + \gamma'' z) = 0$$

décomposée en deux plans dont l'un est le plan $t = 0$, face de T_1 , et dont l'autre passe par le sommet de T_1 opposé à cette face; autrement dit les 8 sommets de T_1 et T_2 se partagent alors en deux groupes de 4 points coplanaires, chaque tétraèdre ayant un sommet

particulier situé dans une face convenablement choisie de l'autre; nous écartons provisoirement cette dégénérescence.

Nous raisonnons donc sur les quadriques

$$(1') \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2, \\ \frac{1}{2} \bar{Q} \equiv \bar{B}y z + \bar{C}xt + \bar{C}'yt + \bar{C}''zt, \\ \frac{1}{2} \bar{Q}_1 \equiv \bar{B}'_1 z x + \bar{C}_1 xt + \bar{C}'_1 yt + \bar{C}''_1 zt, \\ \frac{1}{2} \bar{Q}_2 \equiv \bar{B}''_2 xy + \bar{C}_2 xt + \bar{C}'_2 yt + \bar{C}''_2 zt. \end{array} \right.$$

L'intersection de \bar{Q}_1 et \bar{Q}_2 se décompose en l'arête $x = t = 0$ du tétraèdre T_1 et en une cubique Γ qui passe par les sommets $(1, 0, 0, 0)$ et $(0, 0, 0, 1)$ de T_1 , puis par les sommets de T_2 . Donc Γ est harmoniquement circonscrite à Σ , ce qui revient à dire que trois quadriques, linéairement indépendantes, issues de Γ , sont, chacune, harmoniquement circonscrite à Σ . On connaît déjà \bar{Q}_1 , \bar{Q}_2 qui le sont; il suffit de considérer la nouvelle quadrique

$$\left| \begin{array}{ccc} \bar{B}'_1 z & \bar{C}_1 x + \bar{C}'_1 y + \bar{C}''_1 z & \\ \bar{B}''_2 y & \bar{C}_2 x + \bar{C}'_2 y + \bar{C}''_2 z & \end{array} \right| = 0$$

qui fournit la condition nécessaire

$$\bar{B}'_1 \bar{C}''_2 - \bar{B}''_2 \bar{C}'_1 = 0.$$

Or, ici $\bar{B}'_1 = \bar{B}''_2 = \delta \neq 0$, de sorte que l'on a la relation

$$\bar{C}'_1 = \bar{C}''_2.$$

La considération de \bar{Q}_2 et \bar{Q}_1 , puis de \bar{Q} et \bar{Q}_1 revient à laisser jouer à t le même rôle que primitivement, mais à permuter circulairement x, y, z ; on obtient ainsi l'ensemble des conditions

$$\bar{C} = \bar{C}'_1 = \bar{C}''_2$$

que nous écrivons, en revenant aux coefficients primitifs,

$$(3) \quad | C \ B' \ B'' | = | B \ C' \ B'' | = | B \ B' \ C'' |.$$

En permutant x et t sans toucher à y ni z , on fait les échanges

$$\begin{array}{ccccccc} B & B' & B'' & C & C' & C'' \\ B & C'' & C' & C & B'' & B' \end{array}$$

de sorte que nous obtenons au lieu de (3), les équations également nécessaires

$$(3') \quad | C \ C'' \ C' | = | B \ B'' \ C' | = | B \ C'' \ B' |.$$

En comparant (3) et (3'), nous voyons que nous avons obtenu les trois équations nécessaires

$$(4) \quad | C \ B' \ B'' | = | B \ C' \ B'' | = | B \ B' \ C'' | = | C \ C' \ C'' |.$$

D'après la façon même dont nous avons opéré (permutations circulaires sur x, y, z sans toucher à t , ensuite échange des rôles de x et t), nous sommes certains que cette méthode ne donne pas d'autre condition; on vérifie d'ailleurs sans peine que ces équations se reproduisent par une permutation quelconque sur x, y, z, t . Pour établir ces équations, nous avons supposé d'abord $| B \ B' \ B'' |$, puis $| B \ C'' \ C' |$ non nuls; mais il est facile de voir que les équations (4) subsistent même si ces restrictions ne sont pas vérifiées; nous avons vu que la nullité de $| B \ B' \ B'' |$ exprime qu'un sommet de chaque tétraèdre est dans une face de l'autre; donc, en vertu de l'échange possible des coordonnées entre elles, les équations (4) sont établies sauf si trois ou quatre sommets de chaque tétraèdre sont dans une face de l'autre. Mais alors, si trois (1) ou quatre sommets de chaque tétraèdre sont dans une face de l'autre, le calcul *direct* devient aisé et fournit de nouveau les équations (4); les restrictions trouvées tiennent donc non pas à la disposition relative de T_1 et T_2 , mais à la méthode que nous avons choisie pour éviter des calculs difficiles (difficiles dans le cas général, mais aisés en particulier dans le cas des tétraèdres de

(1) Quand on a

$$Q \equiv B_1 yz + B'' xy + C' yt, \quad Q_1 \equiv B_1 yz + B'_1 zx + C''_1 zt, \quad Q_2 \equiv C_2 xt + C'_2 yt + C''_2 zt,$$

on calcule aisément les coordonnées des sommets de T_2 ; on exprime qu'ils sont deux à deux conjugués par rapport à Σ et l'on retrouve précisément les équations (4), obtenues, dans ce cas, par un calcul aisé, mais lourd. La méthode suivie pour obtenir les équations (4) aurait pu, théoriquement, être remplacée par le calcul (irrationnel) des coordonnées des sommets de T_2 ; on aurait, à ce moment, exprimé que ces sommets sont deux à deux conjugués par rapport à Σ ; on obtiendrait ainsi les équations (4), sans avoir eu besoin de faire les restrictions du texte; mais ce calcul *direct* est lourd.

Möbius). D'ailleurs, nous donnons plus bas une méthode toute différente pour retrouver les trois équations.

Nous avons expliqué que nous pouvons, *sans restreindre*, supposer $B = B'_1 = B_2 = B'_2 = 0$; dans ce cas, les équations (4) s'écrivent, sous forme *réduite*

$$(4') \quad \left| \begin{array}{ccc} C & B' & B'' \\ C_1 & 0 & B''_1 \\ C_2 & 0 & B''_2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 0 & C' & B'' \\ B_1 & C'_1 & B''_1 \\ 0 & C'_2 & B''_2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 0 & B' & C'' \\ B_1 & 0 & C''_1 \\ 0 & 0 & C''_2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} C & C' & C'' \\ C_1 & C'_1 & C''_1 \\ C_2 & C'_2 & C''_2 \end{array} \right|$$

Elles ne contiennent que les 4 inconnues homogènes C_2, C'_2, C''_2, B_2 et, *en général*, déterminent les rapports mutuels de ces expressions; or, au paragraphe précédent, nous avons vu que la quadrique *réduite* est unique; par conséquent les équations (4), qui sont *nécessaires*, sont aussi *suffisantes*. Comme vérification, on a retrouvé 23 paramètres pour $(\mathcal{B}, \Sigma, T_1, T_2)$ ou (\mathcal{B}, Σ) : les 15 paramètres de l'homographie générale, les rapports mutuels de B', B'', C, C', C'' et ceux de $B_1, B''_1, C_1, C'_1, C''_1$.

Que va-t-il arriver cette fois dans le cas où (\mathcal{B}, Σ) donnent ∞^1 tétraèdres? La quadrique *réduite* $B''_2 xy + C_2 xt + C'_2 yt + C''_2 zt = 0$, au lieu d'être unique, dépend d'un paramètre et d'un seul: au paragraphe précédent, nous avons dit que les quadriques réduites dépendaient de deux paramètres; il n'y a contradiction qu'apparente, car au paragraphe précédent une quadrique réduite passe par deux points fixes ω_1, ω_2 choisis *a priori* et par les sommets de 2 tétraèdres T_1, T_2 choisis tous deux *arbitrairement*, parmi les ∞^1 tétraèdres solutions, et cela fait bien deux paramètres; mais ici, non seulement ω_1, ω_2 ont été fixés comme avant, mais même le tétraèdre T_1 a été choisi une fois pour toutes, de sorte qu'il ne reste plus que l'unique paramètre relatif à T_2 . Les quadriques réduites forment, dans ce paragraphe, un faisceau linéaire et ont en commun une biquadratique (passant par ω_1, ω_2 et les quatre sommets de T_1).

Les équations (4') peuvent s'écrire

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} B'B'_1 C_2 \quad \star \quad + \quad B_1 B' C''_2 \quad - B' C_1 B''_2 = 0, \\ \star \quad + \quad B_1 B'' C'_2 \quad + \quad B_1 B' C''_2 \quad - B_1 C' B''_2 = 0, \\ (C' C'_1 - C'' C''_1) C_2 + (C'' C_1 - C C'_1) C'_2 + (C C'_1 - C_1 C' + B_1 B') C''_2 + \star = 0, \end{array} \right.$$

et les conditions (nécessaires et suffisantes) à réaliser pour

obtenir ∞^1 tétraèdres sont, en supposant $B'B''B_1B_1'' \neq 0$,

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} B_1'' & \star & B_1 \\ \star & B'' & B' \\ C'C_1'' - C''C_1 & C''C_1 - CC_1'' & CC_1 - C_1C' + B_1B' \end{array} \right| = 0, \\ \left| \begin{array}{ccc} B_1'' & \star & C_1 \\ \star & B'' & C' \\ C'C_1'' - C''C_1 & C''C_1 - CC_1'' & \star \end{array} \right| = 0. \end{array} \right.$$

Il est nécessaire de donner ici quelques explications; les équations (6) réduisent à 21 (au lieu de 23) les paramètres figurant dans l'ensemble $(\mathcal{B}, \Sigma, T_4)$; elles n'entraînent pas la décomposition de \mathcal{B} ; on le voit, par exemple, en prenant l'exemple numérique

$$Q \equiv 2(zx - xy + xt - yt), \quad Q_1 \equiv 2(yz - xy + xt + zt),$$

qui fournit, avec un paramètre λ variable,

$$Q_2 \equiv 2[xy + (\lambda - 1)xt + (\lambda + 1)yt + \lambda zt].$$

Le cône de sommet $(0, 0, 1, 0)$ contenant \mathcal{B} a pour équation

$$(x + t)y^2 + (t^2 - x^2)y + xt(x - t) = 0,$$

et ne se décompose pas. Il est facile de vérifier l'existence de ∞^1 tétraèdres (un pour chaque valeur de λ) : on peut considérer $Q = 0$, $Q_2 = 0$ comme un système linéaire en y et z , permettant d'exprimer y et z en x sous la forme

$$y = \frac{ax^2 + bx}{a''x^2 + b''x + c''}, \quad z = \frac{a'x^2 + b'x}{a''x^2 + b''x + c''}.$$

En portant dans $Q_1 = 0$, on a une équation en x de degré 4, une fois supprimée la racine $x = 0$,

$$x^4 + Hx^3 + Kx^2 + Lx + M = 0.$$

Il s'agit de vérifier que x_1 et x_2 étant deux racines de cette équation on a (en remplaçant y_1, z_1 par leurs valeurs en x_1 et de même y_2 et z_2)

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 + 1 = 0.$$

Cette équation est symétrique en x_1, x_2 et de degré 3 par rapport à chacune de ces variables; donc x_1 étant fixé, x_2 est racine d'une équation

$$x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,$$

dont on vérifie qu'elle coïncide avec

$$x^3 + (H + x_1)x^2 + (K + Hx_1 + x_1^2)x + L + Kx_1 + Hx_1^2 + x_1^3 = 0,$$

précisément en tenant compte de la relation

$$x_1^4 + Hx_1^3 + Kx_1^2 + Lx_1 + M = 0.$$

Cette méthode réussit, quel que soit l'exemple numérique adopté et par conséquent, nous avons vérifié que les équations (6) entraînent bien l'existence de ∞^1 tétraèdres. Nous avons ainsi vérifié les résultats établis au paragraphe 2 : d'ailleurs ce fait que nous avons été conduits à un système $(\mathcal{B}, \Sigma, T_1)$ dépendant de 21 paramètres, conformément aux prévisions du paragraphe 2, suffisait à nous rassurer; grâce à l'artifice suivi dans le paragraphe actuel, nous avons pu éviter des calculs pénibles.

M. Gambier a obtenu un autre procédé géométrique que celui signalé page 190, pour déterminer tous les tétraèdres portés par \mathcal{B} . On peut supposer que la courbe \mathcal{B} soit le lieu du point $(snu, cnu, dnu, 1)$ où nous prenons les notations de Legendre-Jacobi; un premier tétraèdre a ses sommets fournis par l'équation

$$f_1(u) \equiv \alpha sn(u - a) + \alpha_1 cn(u - a) + \alpha_2 dn(u - a) + \alpha_3 = 0$$

où $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont des constantes et où $4a$ est égal à

$$2(K + iK'), \quad 2K \quad \text{ou} \quad 2iK'$$

suivant le couple d'arêtes opposées choisi sur le tétraèdre Θ conjugué à toutes les quadriques issues de \mathcal{B} . Un second tétraèdre

est supposé fourni par l'équation analogue

$$f_2(u) \equiv \beta_3 sn(u - a) + \beta_1 cn(u - a) + \beta_2 dn(u - a) + \beta_3 = 0,$$

où les β_i sont de nouvelles constantes. Cela posé, l'équation

$$\lambda_1 f_1(u) + \lambda_2 f_2(u) = 0,$$

où le rapport $\lambda_1 : \lambda_2$ est variable, fournit les ∞^1 tétraèdres inscrits dans \mathcal{B} et conjugués par rapport à la quadrique Σ que déterminent les deux premiers.

Pour être certains de ne pas avoir commis d'affirmation téméraires, les auteurs ont vérifié les circonstances annoncées sur d'autres exemples numériques : quand on choisit arbitrairement $C', C'', C_1, C_1', C_1''$, les équations (6) où l'on fait $B' = B_1 = B_2' = 1$ donnent B'' et B_1'' par un système du premier degré, en écartant la solution $B'' = B_1'' = 0$.

La vérification a été faite sur les exemples nouveaux

$$\begin{aligned} Q &\equiv zx - 2xy + y + 2z = 0, \\ Q_1 &\equiv yz - 2xy + 2x + y, \\ Q_2 &\equiv xy + \left(\frac{\lambda}{2} - 1\right)x + \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2}\right)y + \lambda z, \end{aligned}$$

puis sur l'exemple

$$\begin{aligned} Q &\equiv zx + 2xy + y + 2z = 0, \\ Q_1 &\equiv yz + xy + x + 2y + 3z, \\ Q_2 &\equiv xy + 2\lambda x + \lambda y + (1 - 2\lambda)z. \end{aligned}$$

Les trois exemples qui précèdent donnent une biquadratique \mathcal{B} non décomposée; le nouvel exemple simple

$$\begin{aligned} Q &\equiv zx + xy + x - z = 0, \\ Q_1 &\equiv yz + xy + y - z = 0, \\ Q_2 &\equiv xy + \lambda(x + y - z) = 0, \end{aligned}$$

conduit à une biquadratique décomposée en deux coniques, car on a $Q - Q_1 \equiv (z + 1)(x - y)$; dans ce cas le tétraèdre T_2 a

pour sommets

$$\begin{array}{cccc} a & b & -1 & 1 \\ b & a & -1 & 1 \\ \alpha & \alpha & \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)\alpha + 1 & 1 \\ \beta & \beta & \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)\beta + 1 & 1 \end{array}$$

avec

$$ab = -1, \quad a + b = \frac{1}{\lambda} - 1, \quad \alpha\beta = -\lambda, \quad \alpha + \beta = 1 - 3\lambda,$$

de sorte que l'on vérifie sans peine que le produit (au sens des déterminants) de deux lignes du tableau qui précède est nul.

Nous pouvons maintenant indiquer, *a priori*, une raison profonde qui explique l'existence de ∞^1 quadriques Q_2 si l'on a choisi sur \mathcal{B} le tétraèdre $ABCD(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \omega)$, puis le nouveau tétraèdre $A_1B_1C_1D_1(u_5 + u_6 + u_7 + u_8 = \omega)$ et construit la quadrique Σ conjuguée par rapport à $ABCD$ et $A_1B_1C_1D_1$; la méthode consiste en effet à chercher une quadrique variable passant par deux points fixes ω_1, ω_2 et par A, B, C, D , recoupant \mathcal{B} en quatre nouveaux points, sommets d'un tétraèdre conjugué par rapport à Σ ; or on connaît *deux* quadriques de cette espèce, à savoir la quadrique passant en ω_1, ω_2 et *tangente* à \mathcal{B} en A, B, C, D , puis la quadrique passant en ω_1, ω_2 et par les 8 points $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$: donc, puisque l'on détermine Q_2 par des équations *linéaires*, on trouve toutes les quadriques du *faisceau ponctuel* déterminé par les deux quadriques connues *a priori*.

Quand on a choisi sur \mathcal{B} le quadruple $ABCD$, non quelconque, mais satisfaisant à la relation $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \omega$, puis la quadrique Σ *au hasard* parmi celles qui sont conjuguées par rapport à $ABCD$, on a un total de 22 paramètres et l'*unique quadrique* Q_2 que l'on trouve est celle qui est issue de ω_1, ω_2 et touche \mathcal{B} aux points A, B, C, D . Moyennant une *condition nouvelle* imposée à Σ , on retrouve ∞^1 tétraèdres, et cela montre, en accord avec les considérations de ce paragraphe, l'existence de deux conditions [les équations (6)] pour obtenir ∞^1 tétraèdres.

Nous pouvons donc conclure ce paragraphe en faisant constater aux lecteurs éventuels de cette étude que la plupart de nos raisonnements peuvent, *isolément*, être considérés comme chan-

celants, mais que par *leur appui mutuel* ils forment une architecture parfaitement équilibrée; il a suffi de quelques raisonnements un peu subtils, pour éviter une série de calculs lourds et pénibles.

Nous allons indiquer un autre procédé pour conduire le calcul, lorsqu'il s'agit de ∞^1 tétraèdres.

Supposons donc que l'on ait su obtenir le tétraèdre Θ , que nous prenons pour tétraèdre de référence; supposons que Δ soit ($x = y = 0$), Δ' ($z = t = 0$). Nous écrivons

$$(7) \quad \mathcal{B} \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0, \\ x^2 - y^2 + m(z^2 - t^2) = 0; \end{cases}$$

$$(8) \quad \Sigma \equiv Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + A'''t^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cxt + 2C'yt + 2C''zt = 0.$$

Nous posons

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \begin{vmatrix} A' & B & C' \\ B & A'' & C'' \\ C' & C'' & A''' \end{vmatrix}, \quad a' = \begin{vmatrix} A & B' & C \\ B' & A'' & C'' \\ C & C'' & A''' \end{vmatrix}, \\ a'' = \begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ C & C' & A''' \end{vmatrix}, \quad a''' = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}. \end{array} \right.$$

On doit d'abord avoir

$$(10) \quad \begin{cases} a + a' + a'' + a''' = 0, \\ a - a' + m(a'' - a''') = 0. \end{cases}$$

Quand il existe ∞^1 tétraèdres, le plan

$$(11) \quad X\Sigma_x + Y\Sigma_y + Z\Sigma_z + T\Sigma_t = 0,$$

polaire par rapport à Σ du point (x, y, z, t) de \mathcal{B} , doit contenir le point $(x, y, -z, -t)$ déduit du premier par l'involution biaxiale (Δ, Δ') ; on a donc la relation

$$(12) \quad Ax^2 + A'y^2 - A''z^2 - A'''t^2 + 2B''xy - 2C''zt = 0$$

qui doit être conséquence de (7), donc représenter une quadrique

du faisceau issu de \mathcal{B} , on a donc, avec deux indéterminées λ, μ ,

$$(13) \quad \begin{cases} B'' = 0, & C'' = 0, \\ A = \lambda + \mu, & -A'' = \lambda + m\mu, \\ A' = \lambda - \mu, & -A''' = \lambda - m\mu, \end{cases}$$

ce qui donne les conditions *nécessaires*

$$(10') \quad B'' = 0, \quad C'' = 0, \quad A + A' + A'' + A''' = 0, \quad m(A - A') + A'' - A''' = 0.$$

Les deux dernières équations (10') expriment que Σ est à la fois harmoniquement *inscrite et circonscrite* à chacune des deux quadriques qui sont explicitées dans les équations (7).

Nous remplaçons, dans les équations (10), les coefficients $A, A', A'', A''', B'', C''$ par leurs expressions (13) et l'on obtient

$$(14) \quad \begin{cases} a + a' + a'' + a''' \\ = \mu [2\lambda\mu(1 - m^2) + (C^2 - B^2)(1 + m) + (C'^2 - B'^2)(m - 1)], \\ a - a' + m(a'' - a''') \\ = -\lambda [2\lambda\mu(1 - m^2) + (C^2 - B^2)(1 + m) + (C'^2 - B'^2)(m - 1)]. \end{cases}$$

Les équations (14) peuvent être vérifiées de deux façons différentes

$$(a) \quad \lambda = \mu = 0.$$

$$(b) \quad 2\lambda\mu(1 - m^2) + (C^2 - B^2)(1 + m) + (C'^2 - B'^2)(m - 1) = 0.$$

Nous allons montrer que l'hypothèse (a) conduit à la configuration de MM. Gambier et Rowe, où (\mathcal{B}, Σ) dépend de 18 paramètres, et où il existe ∞^1 couples de Möbius (T, T') inscrits dans \mathcal{B} , conjugués par rapport à Σ ; les systèmes (\mathcal{B}, Σ, T) ou $(\mathcal{B}, \Sigma, T, T')$ dépendent de 19 paramètres, les systèmes $(\mathcal{B}, \Sigma, T, T_1)$ de 20 paramètres, si (T_1, T'_1) est un autre couple de Möbius. En effet, Σ a maintenant pour équation

$$(15) \quad \Sigma \equiv 2(Byz + B'zx + Cxt + C'yt) = 0.$$

de sorte qu'elle contient les arêtes Δ, Δ' du tétraèdre Θ . Si T est un tétraèdre inscrit dans \mathcal{B} , conjugué par rapport à Σ , l'involution biaxiale (Δ, Δ') change \mathcal{B} en elle-même, Σ aussi et remplace T par un tétraèdre T' encore inscrit dans \mathcal{B} , conjugué par rapport à Σ , et en position de Möbius avec T ; comme on suppose qu'il y a ∞^1 tétraèdres T , il y a ∞^1 couples (T, T') , et il suffit de se

reporter au Mémoire de M. Gambier, déjà cité, pages 111 à 115, pour arriver à la conclusion suivante : si Q_1, Q'_1 sont les réciproques par rapport à Σ des quadriques Q et Q' explicitées dans les équations (7), les ∞^1 couples (T, T') inscrits dans \mathcal{B} , circonscrits à la développable (Q_1, Q'_1) sont *conjugués tous par rapport à la même quadrique Σ* , et cela exige la relation

$$(b') \quad (C^2 - B^2)(1 + m) + (C'^2 - B'^2)(m - 1) = 0,$$

de sorte que la condition (b) est elle-même vérifiée puisque λ et μ sont nuls. On a alors purement et simplement retrouvé la configuration (\mathcal{B}, Σ) à 18 paramètres obtenue par MM. Gambier et Rowe : \mathcal{B} donnée, Σ , définie par l'équation (15), ne dépend que de deux paramètres puisque les rapports $B : B' : C : C'$ satisfont à (b') , et il existe ∞^1 couples de Möbius (T, T') inscrits dans \mathcal{B} , conjugués par rapport à Σ .

Reste donc à étudier l'hypothèse (b) en supposant que λ et μ ne sont pas nuls tous deux; \mathcal{B} dépend de 16 paramètres (les 15 paramètres de l'homographie générale et la constante m); la quadrique Σ a pour équation

$$(\Sigma) \quad (\lambda + \mu)x^2 + (\lambda - \mu)y^2 - (\lambda + m\mu)z^2 + (m\mu - \lambda)t^2 + 2Byz + 2B'zx + 2Cxt + 2C'yt = 0$$

et, à cause de (b) , ne dépend que de 4 paramètres nouveaux; nous avons retrouvé le total de 20 paramètres annoncés pour (\mathcal{B}, Σ) quand il y a ∞^1 tétraèdres, de sorte que ce système (\mathcal{B}, Σ) admet effectivement ∞^1 tétraèdres. Voici comment on pourrait le vérifier. Si l'on prend un point $A(x, y, z, t)$ de \mathcal{B} , son plan polaire P par rapport à Σ passe en $A'(-x, -y, z, t)$; les deux coniques (P, Q) , (P, Q') sont toutes deux harmoniquement circonscrites à la conique (P, Σ) et passent en A' ; nous projetons sur le plan xOy (on supposera désormais $t = 1$; on appelle les coordonnées courantes X, Y, Z); nous éliminons Z au moyen de l'équation de P , ce qui revient à projeter (P, Q) , (P, Q') , (P, Σ) sur xOy ; en posant $X = -x + X_1, Y = -y + Y_1$, les équations de (P, Q) , (P, Q') , (P, Σ) deviennent

$$\begin{aligned} (P, Q) \quad & \bar{A} X_1^2 + 2\bar{B} X_1 Y_1 + \bar{C} Y_1^2 + 2\bar{D} X_1 + 2\bar{E} Y_1 = 0, \\ (P, Q') \quad & \bar{A}' X_1^2 + 2\bar{B}' X_1 Y_1 + \bar{C}' Y_1^2 + 2\bar{D}' X_1 + 2\bar{E}' Y_1 = 0, \\ (P, \Sigma) \quad & \bar{A}'' X_1^2 + 2\bar{B}'' X_1 Y_1 + \bar{C}'' Y_1^2 + 2\bar{D}'' X_1 + 2\bar{E}'' Y_1 + \bar{F}'' = 0, \end{aligned}$$

où les coefficients $\bar{A}, \dots, \bar{F}''$ sont du second degré en x, y, z ; on a à exprimer que les trois nouveaux points B, C, D communs à (P, Q), (P, Q') forment un triangle conjugué par rapport à (P, Σ); on obtient le résultat en formant une troisième conique passant par B, C, D mais non par A'; il suffit d'écrire l'équation

$$\begin{vmatrix} \bar{A} X_1 + \bar{B} Y_1 + 2\bar{D} & \bar{B} \bar{X}_1 + C Y_1 + 2\bar{E} \\ \bar{A}' X_1 + \bar{B}' Y_1 + 2\bar{D}' & \bar{B}' \bar{X}_1 + \bar{C}' Y_1 + 2\bar{E}' \end{vmatrix} = 0$$

et l'on écrit que cette conique est harmoniquement circonscrite à (P, Σ); cette unique équation (E) se trouve vérifiée quelle que soit la position de A sur \mathcal{B} . Nous allons nous borner à étudier le cas particulier où le tétraèdre Θ est conjugué aussi par rapport à Σ ; on a

$$(B) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0, \\ x^2 - y^2 + m(z^2 - t^2) = 0; \end{cases}$$

$$(16) \quad \Sigma \equiv A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + A''' t^2 = 0.$$

L'équation (b) revient cette fois à $2\lambda\mu(1 - m^2) = 0$; si l'on prend d'abord $m^2 = 1$, on peut, en échangeant au besoin z avec t , supposer $m = 1$ (plutôt que $m = -1$); on a alors, en vertu de (13),

$$A = \lambda + \mu, \quad A' = \lambda - \mu, \quad A'' = -(\lambda + \mu), \quad A''' = -(\lambda - \mu).$$

et les équations de (B) et Σ prennent la forme

$$(B) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0, \\ x^2 - y^2 + z^2 - t^2 = 0, \end{cases} \quad (\Sigma) \quad x^2 - z^2 + k(y^2 - t^2) = 0,$$

en désignant par k le quotient $(\lambda - \mu) : (\lambda + \mu)$; la biquadratique se décompose en quatre droites formant un quadrilatère gauche dont chaque côté a pour conjugué par rapport à Σ le côté opposé, de sorte que l'on obtient deux séries ∞^2 de tétraèdres répondant à la question; expliquons, en effet, le résultat indépendamment des équations particulières trouvées; quand deux droites δ , δ' sont conjuguées par rapport à une quadrique Σ , si nous marquons sur δ deux points A, B conjugués par rapport à Σ (ce qui peut se faire de ∞^1 façons), puis sur δ' deux points C, D conjugués par rapport à Σ (ce qui donne un second paramètre), le tétraèdre ABCD est manifestement conjugué par rapport à Σ . Or ici, nous avons un

quadrilatère gauche formé de quatre droites $\delta, \delta_1, \delta', \delta'_1$, où δ et δ' sont conjuguées par rapport à Σ et δ_1, δ'_1 aussi; chaque couple (δ, δ') ou (δ_1, δ'_1) fournit ∞^2 tétraèdres dont on peut dire qu'ils sont inscrits dans la biquadratique dégénérée et qui sont conjugués par rapport à Σ ; mais c'est en quelque sorte une dégénérescence, car il n'y a pas un sommet sur chaque côté; toutefois les sommets du quadrilatère gauche forment un tétraèdre commun aux deux séries ∞^2 signalées, pouvant à la rigueur être considéré comme ayant un sommet sur chaque côté. Il est à remarquer aussi que le nombre de tétraèdres est ∞^2 et non pas ∞^1 . C'est le seul cas où cette circonstance puisse se produire (¹).

Si l'on prend $\lambda = 0$, on trouve

$$(\mathcal{B}) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0, \\ x^2 - y^2 + m(z^2 - t^2) = 0, \end{cases} \quad (\Sigma) \quad x^2 - y^2 - m(z^2 - t^2) = 0.$$

Si l'on prend $\mu = 0$, on trouve

$$(\mathcal{B}) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0, \\ x^2 - y^2 + m(z^2 - t^2) = 0, \end{cases} \quad (\Sigma) \quad x^2 + y^2 - (z^2 + t^2) = 0.$$

Les deux cas $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$ reviennent au même : dans le cas $\lambda = 0$, la quadrique $x^2 - y^2 + m(z^2 - t^2) = 0$ est sa propre polaire réciproque par rapport à Σ ; dans le cas $\mu = 0$, la quadrique $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$ est sa propre polaire réciproque par rapport à Σ : il n'y a, au fond, qu'un changement de notations très simple à faire pour passer du cas $\lambda = 0$ au cas $\mu = 0$ (on écrirait $x = X, y = iY, z\sqrt{m} = Z, it\sqrt{m} = T$).

Prenons, par exemple, $\mu = 0$; un point $A(x, y, z, t)$ de \mathcal{B} [en remplaçant partout t par 1] donne un plan polaire P par rapport à $\Sigma, xX + yY - zZ - 1 = 0$ qui, *non seulement, passe en A' ($-x, -y, z, 1$), mais touche \mathcal{B} en A'* , car A se transforme en le

(¹) Nous devons ajouter une remarque : soient deux quadriques Q, Q_1 qui se coupent suivant 4 génératrices G, G', γ, γ' formant un quadrilatère gauche dont G et G' sont côtés opposés; on peut construire une quadrique Σ par rapport à laquelle G et G' sont conjuguées, mais non γ et γ' ; en prenant sur G deux points A, B conjugués par rapport à Σ , et sur G' deux points C, D aussi conjugués par rapport à Σ , le tétraèdre $ABCD$ est inscrit dans la biquadratique (Q, Q_1) et conjugué par rapport à Σ . Cette fois on a non pas deux séries ∞^2 , mais une seule série ∞^2 de tels tétraèdres.

plan polaire de A par rapport à Σ , et ce plan est tangent à la quadrique $Q(x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0)$ en A' , donc à la biquadratique \mathcal{B} ; appelons Q' la quadrique $x^2 - y^2 + m(z^2 - 1) = 0$; les coniques (P, Q) et (P, Q') se touchent en A' et se recoupent en deux points B, C; comme (P, Q) , (P, Q') sont toutes deux harmoniquement circonscrites à la conique (P, Σ) , la conique dégénérée $(A'B, A'C)$ est elle-même harmoniquement circonscrite à (P, Σ) , de sorte que le pôle de $A'B$ par rapport à Σ est sur $A'C$ et il suffit d'une condition au plus pour que ce pôle soit C: si cela a lieu, le triangle $A'BC$ est conjugué par rapport à Σ [car (P, Q) est harmoniquement circonscrite à (P, Σ) ; on a pris le point C sur (P, Q) et coupé (P, Q) par la polaire de C relativement à (P, Σ)]. Nous allons faire le calcul rapidement et vérifier que l'on trouve ∞^1 tétraèdres.

En effet la droite BC doit être conjuguée de AA' par rapport à Σ ; elle doit donc être définie par les deux équations

$$(BC) \quad xX + yY = 0, \quad zZ + 1 = 0.$$

D'autre part les équations de (P, Q) , (P, Q') sont

$$(P, Q) \begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 + 1 = 0, \\ xX + yY - zZ - 1 = 0; \end{cases} \quad (P, Q') \begin{cases} X^2 - Y^2 + m(Z^2 - 1) = 0, \\ xX + yY - zZ - 1 = 0 \end{cases}$$

et les projections de ces deux coniques sur le plan $Z = 0$ sont définies par les équations

$$(17) \quad X^2 + Y^2 + \frac{(xX + yY - 1)^2}{z^2} + 1 = 0, \\ X^2 - Y^2 + m \left[\frac{(xX + yY - 1)^2}{z^2} - 1 \right] = 0,$$

et, si les explications qui précèdent ont été bien comprises, nous devons simplement exprimer que la droite $xX + yY = 0$ est une sécante commune des deux coniques (17): autrement dit les équations

$$X^2 + Y^2 + \frac{1}{z^2} + 1 = 0, \quad X^2 - Y^2 + m \left[\frac{1}{z^2} - 1 \right] = 0, \quad xX + yY = 0$$

doivent avoir deux solutions communes en X et Y: en posant $X = \rho y$, $Y = -\rho x$, où ρ est une inconnue auxiliaire, et en tenant compte des équations de (\mathcal{B}) on trouve aussitôt que ρ est fournie

par l'unique équation $\rho^2 = \frac{1}{z^2}$; nous avons ainsi le résultat suivant :
la *biquadratique générale*

$$(B) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0, \\ x^2 - y^2 + m(z^2 - t^2) = 0 \end{cases}$$

possède ∞^1 tétraèdres T qui lui sont inscrits et qui sont conjugués par rapport à la quadrique

$$\Sigma \quad x^2 + y^2 - (z^2 + t^2) = 0.$$

Les coordonnées des sommets du tétraèdre général T sont

$$T \begin{cases} x & y & z & t \\ -x & -y & z & t \\ y & -x & -t & z \\ -y & x & -t & z \end{cases}$$

où (x, y, z, t) sont les coordonnées d'un point arbitraire de B , et la vérification est immédiate. Pour chaque couple d'arêtes opposées de Θ on trouve une quadrique analogue à Σ et une série ∞^1 de tétraèdres.

On voit bien pourquoi le résultat trouvé précédemment pour les couples de Möbius disparaît : l'involution biaxiale Δ, Δ' , où Δ est la droite $x = y = 0$, Δ' la droite $z = t = 0$, échange Q, Q', Σ en elles-mêmes chacune, mais échange T avec lui-même au lieu de le transformer en un autre tétraèdre T' ; on peut dire que les 2 tétraèdres $ABCD$ et $BACD$, où les sommets de même rang se correspondent, sont en position de Möbius, mais c'est une dégénérescence de la position de Möbius.

Nous devons remarquer ici que l'inconnue ξ introduite au paragraphe 2 a la valeur fixe zéro, quel que soit le tétraèdre T , si $p = 1$. L'exemple qui vient d'être traité ne fait intervenir que les 16 paramètres qui figurent dans B .

5. Cas où la biquadratique est dégénérée en une cubique et une droite. — Nous avons, au paragraphe 2, indiqué que le système formé par une cubique gauche Γ , une sécante double Δ de Γ et une quadrique Σ harmoniquement inscrite dans Γ , forme un système à 20 paramètres admettant une série ∞^1 de tétraèdres. Nous allons

montrer que nous pouvons, en particulierisant Δ , obtenir non pas une série ∞^1 de tétraèdres, mais deux séries ∞^1 . Considérons 8 points communs à un réseau de quadriques et 2 tétraèdres T_1, T_2 dont les sommets forment le total de ces 8 points. Si A_1B_1 est une arête du premier, nous pouvons tracer la cubique Γ circonscrite à $C_1D_1A_2B_2C_2D_2$; elle admet A_1B_1 comme sécante double; l'ensemble (Γ, A_1B_1) forme une biquadrique \mathcal{B} dégénérée; soit Σ la quadrique conjuguée simultanément à T_1 et T_2 ; A_1B_1 et C_1D_1 sont deux droites conjuguées par rapport à Σ ; nous pouvons, sur la droite A_1B_1 , remplacer le couple (A_1, B_1) par ∞^1 autres couples (A'_1, B'_1) formés de deux points conjugués par rapport à Σ ; chacun des ∞^1 tétraèdres $A'_1B'_1C_1D_1$ est donc inscrit dans la biquadratique \mathcal{B} dégénérée actuelle et conjugué par rapport à Σ ; d'autre part Γ contient ∞^1 tétraèdres analogues à T_2 , inscrits dans Γ (donc dans \mathcal{B}) conjugués par rapport à Σ ; donc, nous trouvons cette fois deux séries distinctes, ∞^1 chacune, de tétraèdres inscrits dans \mathcal{B} et conjugués par rapport à Σ . Il est facile de compter le nombre de paramètres dont dépend Σ et cette biquadratique spéciale : Γ dépend de 12 paramètres; Σ doit être harmoniquement inscrite dans trois quadriques, linéairement indépendantes issues de Γ , de sorte que Σ dépend de 6 paramètres; enfin l'arête A_1B_1 , corde de Γ , dépend d'un seul paramètre, à savoir la position de C_1 sur Γ (C_1D_1 est l'une des 3 arêtes, issues de C_1 , du tétraèdre inscrit dans Γ , conjugué à Σ , dont C_1 est un premier sommet et la droite A_1B_1 est la conjuguée de C_1D_1 par rapport à Σ). On trouve $12 + 6 + 1$ ou 19 paramètres indépendants⁽¹⁾; à titre de vérification on retrouve ce nombre 19 par une autre méthode : on choisit 8 points

(1) Cet exemple est intéressant à divers points de vue : d'abord, il a été employé au paragraphe 4 pour trouver les relations de condition. Ensuite il sert à prouver la proposition suivante : soient deux tétraèdres T_1, T_2 dont les 8 sommets sont 8 points associés et Σ la quadrique conjuguée à la fois par rapport à T_1 et T_2 ; il existe ∞^2 biquadratiques \mathcal{B} circonscrites à T_1, T_2 , dont chacune donne avec Σ les deux seuls tétraèdres T_1, T_2 , le système $(T, T_1, \Sigma, \mathcal{B})$ dépendant de 23 paramètres; or les systèmes $(T_1, T_2, \Sigma, \mathcal{B})$ donnant ∞^1 tétraèdres pour (Σ, \mathcal{B}) dépendent de 22 paramètres; on peut donc espérer trouver parmi les ∞^2 biquadratiques circonscrites à T_1, T_2 , certaines fournissant avec Σ ∞^1 tétraèdres; en effet chacune des 12 arêtes de T_1 et T_2 donne précisément une biquadratique dégénérée donnant ∞^1 tétraèdres.

(A_1, B_1, C_1, D_1) , (A_2, B_2, C_2, D_2) associés, soit un total de 21 paramètres. La quadrique Σ conjuguée à T_1 et T_2 est unique; on circonscrit à $C_1 D_1 A_2 B_2 C_2 D_2$ la cubique Γ , elle-même unique; la biquadratique dégénérée, formée par la cubique Γ réunie à la droite indéfinie $A_1 B_1$, et la quadrique Σ forment un ensemble dépendant de 19 paramètres, car il y a ∞^1 façons de trouver sur Γ un tétraèdre remplaçant $A_2 B_2 C_2 D_2$, inscrit dans Γ et conjugué par rapport à Σ ; il y a aussi ∞^1 couples pouvant remplacer $A_1 B_1$ sur la droite support (deux points conjugués par rapport aux points où Σ coupe cette droite); $21 - 2 = 19$ et l'on a retrouvé le nombre 19. A remarquer que si $A_1 B_1$ varie, le centre de gravité de $A_1 B_1 C_1 D_1$ varie, ce qui prouve que l'inconnue ξ introduite au paragraphe 2 varie d'un tétraèdre à l'autre.

Imaginons au contraire que l'on ait choisi la droite $A_1 A_2$ et la cubique gauche Γ' passant par les 6 autres sommets; cette fois Γ ne possède aucun tétraèdre, inscrit dans Γ' , conjugué à Σ ; on arrive à la configuration en prenant une cubique gauche Γ' quelconque (12 paramètres), une corde $A_1 A_2$ quelconque de Γ' (2 paramètres), puis une quadrique Σ harmoniquement inscrite dans deux quadriques du faisceau déterminé par Γ' et sa corde $A_1 A_2$; Σ est astreinte à 2 conditions seulement (au lieu de 3 comme dans l'exemple précédent); on trouve donc $12 + 2 + 7$ ou 21 paramètres; il n'existe que deux tétraèdres inscrits dans cette biquadratique dégénérée et conjugués par rapport à Σ . *La configuration, quand la biquadratique n'était pas dégénérée, faisait intervenir 23 paramètres, pour deux seuls tétraèdres; ici il y a 21 paramètres.*

Il faut signaler qu'ici il n'a que deux cônes (comptant chacun pour deux) passant par la biquadratique dégénérée; les deux droites Δ , Δ' qui étaient intervenues dans le cas de ∞^1 tétraèdres sont toutes deux confondues avec la corde de la cubique Γ qui joint les sommets de ces deux cônes et l'involution biaxiale, signalée plus haut, dégénère ici, de sorte que le critérium géométrique est beaucoup moins intéressant, dans le cas de ∞^1 tétraèdres.

6. Cas où la biquadratique dégénère en deux coniques. — Soit une quadrique Σ , un premier tétraèdre T_1 conjugué par rapport à Σ , de sommets A_1, B_1, C_1, D_1 ; construisons un second tétraèdre

$A_2 B_2 C_2 D_2$ conjugué par rapport à Σ , en prenant le point A_2 dans la face $B_1 C_1 D_1$); le plan $B_2 C_2 D_2$, polaire de A_2 , passe donc par A_1 ; le système Σ, T_1, T_2 dépend de $9 + 6 + 5$ ou 20 paramètres; circonscrivons une conique γ aux quatre points B_1, C_1, D_1, A_2 , ce qui introduit un nouveau paramètre; le plan $A_1 B_2 C_2 D_2$ perce cette conique γ en deux points qui, réunis à $B_2 C_2 D_2$, déterminent une nouvelle conique γ' , laquelle passe en A_1 , de sorte que (γ, γ') forment une biquadratique dégénérée \mathcal{B} ; il existe ∞^1 tétraèdres inscrits dans cette biquadratique et conjugués par rapport à Σ ; en effet, le plan $B_2 C_2 D_2 A_1$ de la conique γ' coupe Σ suivant une conique σ harmoniquement inscrite dans γ' (à cause de $B_2 C_2 D_2$); donc γ' contient ∞^1 triangles, inscrits dans γ' , conjugués par rapport à σ ; si $B'_2 C'_2 D'_2$ est un tel triangle, le tétraèdre $A_2 B'_2 C'_2 D'_2$ est inscrit dans \mathcal{B} , conjugué par rapport à Σ ; on trouve de même ∞^1 tétraèdres analogues $A_1 B'_1 C'_1 D'_1$; on a donc trouvé deux séries ∞^1 de tétraèdres, tous les tétraèdres d'une même série ayant un sommet commun; le système $(\Sigma, T_1, T_2, \gamma, \gamma')$ dépend de 21 paramètres; le système $(\Sigma, \gamma, \gamma')$ dépend de 19 paramètres: nous retrouvons le nombre 19, comme au paragraphe qui précède.

Il est bon de songer au critérium géométrique déjà rappelé plusieurs fois depuis le paragraphe 2. Les quadriques issues du système (γ, γ') admettent ∞^1 tétraèdres conjugués communs. Nous pouvons, par une homographie préalable réduire les deux coniques bisécantes γ, γ' à deux cercles égaux coaxiaux; dans ces conditions, les tétraèdres conjugués ont en commun 2 sommets et 2 faces: sur l'axe commun des deux cercles, le point O , équidistant des plans des deux cercles, et le point à l'infini sont les deux sommets fixes; les deux plans fixes sont le plan équidistant des plans des deux cercles et le plan de l'infini; les deux faces variables sont rectangulaires et pivotent d'un bloc autour de l'axe commun des deux cercles; nous appellerons Oz l'axe des deux cercles, Ox, Oy deux droites issues de O complétant avec Oz un trièdre trirectangle; pour obtenir l'exemple étudié jusqu'ici, il suffit de couper l'ensemble des deux cercles par une quadrique quelconque, d'appeler A_1, B_2, C_2, D_2 les points obtenus sur γ , A_2, B_1, C_1, D_1 les points obtenus sur γ' . Le critérium du numéro 2 est bien obtenu pour $A_1 B_2 C_2 D_2$, car le symétrique de A_1 par rapport à Ox (Ox

et la droite à l'infini de γOz jouent le rôle de Δ et Δ') est un point A_1 du cercle γ_2 ; on peut dire que l'on a coupé la biquadratique (γ, γ') par un plan (celui de γ') qui a fourni les points $A_1 B_2 C_2 D_2$ et on a remplacé A_1 par A_1 , d'où obtention du tétraèdre $A_1 B_2 C_2 D_2$; le tétraèdre $A_2 B_1 C_1 D_1$ est obtenu de même : donc le critérium s'applique, *sous forme dégénérée*, il est vrai.

Mais nous pouvons obtenir, avec une autre configuration, ce critérium *sous forme non dégénérée*, de la façon suivante : supposons maintenant que Δ et Δ' soient les deux arêtes fixes communes à tous les tétraèdres conjugués Θ , à savoir Oz et la droite à l'infini de xOy ; marquons sur γ un point A , puis le point A' symétrique de A par rapport à Oz (A' est sur γ); par A' menons un plan qui recoupe γ en B et γ' en C, D ; le tétraèdre $ABCD$ est l'un des tétraèdres spéciaux considérés au paragraphe 2; si nous prenions les symétriques B', C', D' de B, C, D relativement à Oz , nous aurions deux tétraèdres $ABCD, A'B'C'D'$ en position de Möbius, de sorte que finalement les 4 sommets $ABCD$ du tétraèdre T jouent le même rôle; il existe une quadrique Σ et une seule conjuguée par rapport à T ($ABCD$) et T' ($A'B'C'D'$); il existe ∞^1 couples de Möbius (T_1, T'_1) inscrits dans (γ, γ') , avec deux sommets de T_1 sur γ et deux sur γ' , conjugués par rapport à Σ ; ces résultats découlent par continuité du cas où \mathcal{B} n'est pas dégénérée. Le système $(\gamma, \gamma', T, \Sigma)$ dépend de 17 paramètres, et le système $(\gamma, \gamma', \Sigma)$ de 16.

7. Recherche de la quadrique Q_2 . — Étant donné la quadrique Σ et la biquadratique $\mathcal{B}(Q, Q_1)$ nous savons reconnaître s'il existe 0, 2 ou ∞^1 tétraèdres. Le cas de ∞^1 tétraèdres se traite sans difficulté; mais le cas de 2 tétraèdres exige que l'on détermine Q_2 , si l'on veut obtenir T_1, T_2 . Aux paragraphes 2, 3, nous avons indiqué ce qu'il y *aurait* à faire, mais nous ne l'avons pas fait *effectivement*. Il est utile de compléter cette lacune et d'indiquer une méthode qui n'exige pas plusieurs siècles pour mener les calculs jusqu'au bout. La méthode pratique que nous allons exposer donne des calculs relativement courts; elle a l'inconvénient d'introduire des solutions étrangères; toutefois, si nous songeons à l'étude analogue des polygones de Poncelet, nous remarquons que, là aussi, s'introduisent des solutions étrangères, quelle que soit la méthode

employée, de sorte que l'inconvénient en jeu semble plutôt tenir à la nature du problème qu'à un défaut de la méthode.

Puisque \mathcal{B} est harmoniquement circonscrite à Σ , prenons un point M arbitraire sur \mathcal{B} ; le plan P , polaire de M par rapport à Σ , donne, sur Q , une conique (P, Q) harmoniquement circonscrite à la conique (P, Σ) ; de même pour (P, Q_1) ; donc les 4 points M_1, M_2, M_3, M_4 communs à (P, Q) et (P, Q_1) sont tels que deux cordes $M_i M_j$ et $M_k M_l$ (i, j, k, l étant une permutation quelconque de 1, 2, 3, 4) sont conjuguées par rapport à la conique (P, Σ) ; *imaginons donc que nous écrivions que le pôle de $M_1 M_2$ relativement à (P, Σ) est sur (P, Q) : ce pôle, étant aussi sur $M_3 M_4$, est ou M_3 ou M_4* ; un choix convenable de notations permet de supposer que ce pôle s'appelle M_3 et non M_4 ; mais alors puisque (P, Q) est harmoniquement circonscrite à (P, Σ) et que M_3 est sur (P, Q) , la polaire de M_3 relativement à (P, Σ) , à savoir $M_1 M_2$, coupe (P, Q) en deux points conjugués par rapport à (P, Σ) et le triangle $M_1 M_2 M_3$ est conjugué par rapport à (P, Σ) et le tétraèdre $MM_1 M_2 M_3$ est inscrit dans \mathcal{B} et conjugué par rapport à Σ ; *la position de M sur \mathcal{B} dépend d'une seule arbitraire; nous avons eu une seule équation à former pour préciser la position de M , de sorte que, d'après les explications données aux paragraphes 2, 3 nous obtenons par ce procédé une unique équation qui — si on la débarrasse de solutions étrangères éventuelles — donne les positions de M , en nombre 8, et conduit par suite à l'équation de la quadrique Q_2 (dans le cas de ∞' tétraèdres, cette équation unique se réduit soit à une identité, soit à une combinaison linéaire de Q et Q_1 , ce qui revient au même, puisque nous devons, dans les calculs, tenir compte des équations $Q = Q_1 = 0$). Cette méthode a l'inconvénient d'introduire des calculs *irrationnels*, puisqu'il faudrait envisager une des six cordes joignant deux à deux les 4 points M_1, M_2, M_3, M_4 ; elle peut, d'ailleurs, être appliquée suivant l'esprit et non la lettre stricte : on arrive au même résultat en exprimant que deux de ces 4 points sont conjugués par rapport à (P, Σ) .*

Nous allons supprimer *l'irrationalité*; considérons, pour cela, dans le plan P , la polarité (P, Σ) ; la conique σ réciproque de (P, Q) est, si $M_1 M_2 M_3$ est conjugué par rapport à (P, Σ) , une conique tangente aux polaires de M_1, M_2, M_3 , donc inscrite dans

le triangle $M_1M_2M_3$; on a ainsi trois coniques (P, Q_1) , σ , (P, Σ) admettant un triangle $M_1M_2M_3$ inscrit dans la première, circonscrit à la seconde, conjugué par rapport à la troisième.

Nous allons utiliser un résultat obtenu par M. Gambier dans un Mémoire du *Journal de Mathématiques* (9^e série, XVII, 1938, p. 261-326) : on a trois coniques s, s_1, s_2 ; l'équation en λ , relative au faisceau $s_i + \lambda s_j = 0$ ($i, j = 0, 1, 2$), est

$$\Delta_i + \lambda \theta_{ij} + \lambda^2 \theta_{ji} + \lambda^3 \Delta_j = 0;$$

il existe ∞^1 triangles inscrits dans s , circonscrits à s_1 si l'on a $\theta_{10}^2 - 4\theta_{01}\Delta_1 = 0$; ∞^1 triangles circonscrits à s_1 , conjugués à s_2 si l'on a $\theta_{12} = 0$; ∞^1 triangles inscrits dans s , conjugués à s^2 si l'on a $\theta_{20} = 0$. Si l'on a simultanément

$$\theta_{10}^2 - 4\theta_{01}\Delta_1 = 0, \quad \theta_{12} = 0, \quad \theta_{20} = 0,$$

nous prenons un point μ de s et menons de μ les tangentes à s_1 ; elles recoupent s en μ' et μ'' et la droite $\mu'\mu''$ est tangente à s_1 d'une part, et, d'autre part, polaire de μ relativement à une certaine conique fixe s'_2 ; si s_2 et s'_2 coïncident, il y a ∞^1 triangles de l'espèce cherchée; si s_2 et s'_2 sont distinctes, elles ont un unique triangle conjugué commun qui est le triangle cherché.

Appliqué au problème actuel, cet énoncé montre que (P, Q_1) , σ vérifient déjà par rapport à (P, Σ) les conditions [(P, Q_1) jouant le rôle de s , σ celui de s_1 et (P, Σ) celui de s_2], puisque la première (ou seconde) est harmoniquement circonscrite (ou inscrite) à (P, Σ) ; il n'y a donc qu'à exprimer que (P, Q_1) et σ admettent ∞^1 triangles inscrits dans (P, Q_1) , circonscrits à σ ; cette fois, les calculs se font *rationnellement* par rapport aux coordonnées du point M, mais, comme nous le verrons, introduisent *divers facteurs étrangers*. Nous avons besoin de l'équation en λ relative aux coniques (P, Q_1) et σ ; or le calcul, très simple, qui fournit σ donne une quadrique q la contenant : nous avons donc à considérer le faisceau linéaire ponctuel des quadriques $Q_1 + \lambda q = 0$ et nous cherchons celles qui touchent le plan P; on a une équation de degré 3 en λ et la relation

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 4(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2) = 0$$

fournit, par des calculs rationnels, non inextricables, la relation à ajouter aux équations $Q = 0$, $Q_1 = 0$ pour obtenir les coordonnées (x_0, y_0, z_0, t_0) de l'un des sommets de T_1 ou T_2 . Indiquons maintenant les calculs; nous adoptons les équations

$$(Q) \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + A'''t^2 = 0,$$

$$(Q_1) \quad A_1x^2 + A'_1y^2 + A''_1z^2 + A'''_1t^2 + 2B_1yz + 2B'_1zx + 2B''_1xy \\ + 2C_1xt + 2C'_1yt + 2C''_1zt = 0,$$

$$(\Sigma) \quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$$

en supposant Q et Σ rapportées à leur tétraèdre conjugué commun. On a

$$A + A' + A'' + A''' = 0 \quad \text{et} \quad A_1 + A'_1 + A''_1 + A'''_1 = 0$$

comme conditions de possibilité. Pour avoir σ , remarquons que toutes les quadriques contenant (P, Q) ont pour réciproque, vis-à-vis de Σ , des quadriques toutes inscrites dans le cône réciproque de (P, Q) vis-à-vis de Σ ; or Q contient (P, Q) et sa réciproque est définie par

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{A'} + \frac{z^2}{A''} + \frac{t^2}{A'''} = 0,$$

de sorte que le cône réciproque de (P, Q) a pour équation

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} k \left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{A'} + \frac{z^2}{A''} + \frac{t^2}{A'''} \right) - \left(\frac{xx_0}{A} + \frac{yy_0}{A'} + \frac{zz_0}{A''} + \frac{tt_0}{A'''} \right)^2 = 0, \\ k = \frac{x_0^2}{A} + \frac{y_0^2}{A'} + \frac{z_0^2}{A''} + \frac{t_0^2}{A'''}, \end{array} \right.$$

et la section de ce cône par le plan P est justement σ , qui se trouve donc définie par (1) et

$$(2) \quad P \equiv xx_0 + yy_0 + zz_0 + tt_0 = 0.$$

Pour avoir les coniques $(P, Q_1) + \lambda\sigma = 0$ réduites à deux droites, nous considérons les quadriques

$$(3) \quad Q_1 + \lambda \left[k \left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{A'} + \frac{z^2}{A''} + \frac{t^2}{A'''} \right) - \left(\frac{xx_0}{A} + \frac{yy_0}{A'} + \frac{zz_0}{A''} + \frac{tt_0}{A'''} \right)^2 \right] = 0.$$

Nous écrivons l'équation tangentielle de ces quadriques

$$\begin{array}{cccccc}
 A_1 + \lambda \left(\frac{k}{A} - \frac{x_0^2}{A^2} \right) & B_1'' - \lambda \frac{x_0 y_0}{\Lambda A'} & B_1' - \lambda \frac{x_0 z_0}{\Lambda A''} & C_1 - \lambda \frac{x_0 t_0}{\Lambda A'''} & u & \\
 B_1'' - \lambda \frac{x_0 y_0}{\Lambda A'} & A_1' + \lambda \left(\frac{k}{A'} - \frac{y_0^2}{A'^2} \right) & B_1 - \lambda \frac{y_0 z_0}{\Lambda' A''} & C_1' - \lambda \frac{y_0 t_0}{\Lambda' A'''} & v & \\
 B_1' - \lambda \frac{x_0 z_0}{\Lambda A''} & B_1 - \lambda \frac{y_0 z_0}{\Lambda' A''} & A_1'' + \lambda \left(\frac{k}{A''} - \frac{z_0^2}{A''^2} \right) & C_1'' - \lambda \frac{z_0 t_0}{\Lambda'' A'''} & w & \\
 C_1 - \lambda \frac{x_0 t_0}{\Lambda A'''} & C_1' - \lambda \frac{y_0 t_0}{\Lambda' A'''} & C_1'' - \lambda \frac{z_0 t_0}{\Lambda'' A'''} & A_1''' + \lambda \left(\frac{k}{A'''} - \frac{t_0^2}{A'''^2} \right) & h & \\
 u & v & w & h & o & = 0.
 \end{array}$$

L'équation contient λ au degré 3; comme à l'intérieur du déterminant, chaque lettre λ est multipliée par un facteur homogène et de degré 2 en x_0, y_0, z_0, t_0 et que les autres quantités sont des constantes, la puissance λ^p ($p = 0, 1, 2, 3$), dans le développement, est multipliée par un polynôme homogène et de degré $2p$. Quand on remplace ensuite u, v, w, h par x_0, y_0, z_0, t_0 (de façon que P soit tangent à la quadrique), on obtient une équation

$$(5) \quad \lambda^3 F_8(x_0, y_0, z_0, t_0) + \lambda^2 F_6(x_0, y_0, z_0, t_0) + \lambda F_4(x_0, y_0, z_0, t_0) + F_2(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0.$$

où l'indice des F indique le degré d'homogénéité en x_0, y_0, z_0, t_0 . On arrive ainsi à l'équation résolvante

$$(6) \quad F_6^2 - 4F_4 F_8 = 0$$

qui est de degré 12 en x_0, y_0, z_0, t_0 . Il faut débarrasser l'équation (6) des facteurs étrangers; k^2 est en facteur dans F_8 et k dans F_6 ; on s'en rend compte aisément en remarquant que, si k est nul, nous avons à prendre l'équation tangentielle des quadriques

$$(7) \quad Q_1 - \lambda \left(\frac{x x_0}{A} + \frac{y y_0}{A'} + \frac{z z_0}{A''} + \frac{t t_0}{A'''} \right)^2 = 0$$

qui est du premier degré en λ , de sorte que F_8 et F_6 s'annulent si k est nul: il est d'ailleurs essentiel, en effectuant le calcul, de ne pas remplacer k par sa valeur développée $\left(\frac{x_0^2}{A} + \dots \right)$, mais de le manipuler, provisoirement, comme une simple constante.

Ce raisonnement montre bien que F_6 contient la quantité k en facteur, mais ne montre pas que F_8 contient le facteur k^2 ; or, si l'on exprime que la quadrique

$$(8) \quad k \left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{A'} + \frac{z^2}{A''} + \frac{t^2}{A'''} \right) - \left(\frac{xx_0}{A} + \frac{yy_0}{A'} + \frac{zz_0}{A''} + \frac{tt_0}{A'''} \right)^2 = 0$$

(où on laisse la quantité k indéterminée, de façon qu'elle ne soit pas un cône) est tangente au plan

$$P \equiv xx_0 + yy_0 + zz_0 + tt_0 = 0,$$

on obtient précisément l'équation $F_8 = 0$; or l'équation tangentielle de la quadrique (8) est du troisième degré en k et ne contient que les termes en k^3 et k^2 : c'est le même raisonnement que pour la quadrique (7). Par conséquent l'équation (6), où k n'a pas été explicité, contient k^2 en facteur et prend la forme simplifiée $\left(\frac{F_6}{k}\right)^2 - 4F_4\left(\frac{F_8}{k^2}\right) = 0$ ou, si l'on veut,

$$(9) \quad \Phi_4^2 - 4F_4\psi_4 = 0,$$

où les polynômes Φ_4, ψ_4 sont eux aussi de degré 4 en x_0, y_0, z_0, t_0 (c'est à partir de ce moment que l'on peut expliciter k). D'autre part $k = 0$ est l'équation de la polaire réciproque de Q par rapport à Σ ; il suffirait de remplacer Q par une autre quadrique du faisceau (\mathcal{B}) pour obtenir sur \mathcal{B} n'importe quel point comme point parasite. Donc le facteur k est bien à éliminer.

Il s'agit maintenant de montrer que le système

$$(10) \quad Q = 0, \quad Q_1 = 0, \quad \Phi_4^2 - 4F_4\psi_4 = 0$$

admet comme solutions triples les 8 points communs à Q, Q_1, Σ . Autrement dit, on a à prendre les points communs à \mathcal{B} et à la surface de degré 8 représentée par $\Phi_4^2 - 4F_4\psi_4 = 0$; on a 32 points d'intersection, dont il faut retrancher les 8 points communs à \mathcal{B} et Σ , comptant chacun pour 3; il reste donc 8 points seulement, qui sont les sommets de T_1 et T_2 .

Portons notre attention sur un point M commun à \mathcal{B} et Σ ; le plan P correspondant est tangent à Σ en M et coupe \mathcal{B} en quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 : l'un M_3 , par exemple, coïncide avec M ; les trois autres points communs à (P, Q) et (P, Q_1) sont

appelés M_1, M_2, M_3 *au hasard*; la conique (P, Σ) est dégénérée en deux droites, de sorte que le pôle de M_1, M_2 par rapport à (P, Σ) est justement M_3 , et c'est précisément cette propriété que nous avons choisie au début de ce paragraphe pour déterminer un point M de \mathcal{B} ; ici, comme les noms M_1, M_2, M_3 ont été répartis *au hasard* entre trois points fixes, nous voyons que M répond, actuellement, *trois fois* à la condition indiquée, de sorte que M est bien une solution *triple*.

Reste à voir comment nous allons faire pour substituer à l'équation de degré 8, $\Phi_4^2 - 4F_4\psi_4 = 0$ une équation de degré 2, qui donne justement Q_2 . D'abord F_8 , ou, ce qui revient au même, $\frac{F_8}{k^2} \equiv \psi_4$, est divisible *algébriquement* par $(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + t_0^2)^2$ ou Σ_0^2 . En effet, nous avons considéré le faisceau de quadriques

$$Q_1 + \lambda \left[k \left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{A'} + \frac{z^2}{A''} + \frac{t^2}{A'''} \right) - \left(\frac{xx_0}{A} + \frac{yy_0}{A'} + \frac{zz_0}{A''} + \frac{tt_0}{A'''} \right)^2 \right] = 0.$$

Nous l'avons coupé par P et avons ensuite cherché les trois couples de sécantes communes au faisceau de coniques obtenues; ne nous occupons pas provisoirement de \mathcal{B} et prenons le point $M(x_0, y_0, z_0, t_0)$ au hasard dans l'espace; les deux quadriques de base sont d'abord Q_1 , puis le cône S circonscrit de M à Q ; si M est sur Σ le plan P passe en M et le cône S est précisément l'une des quadriques du faisceau coupées par P suivant deux droites, de sorte que l'équation (5) a la racine $\lambda = \infty$; F_8 est donc nul, ainsi que $\psi_4 = \frac{F_8}{k^2}$; donc ψ_4 est divisible par $(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + t_0^2)$; *reciproquement*, si ψ_4 et F_8 sont nuls, l'équation (5) a la racine $\lambda = \infty$ et le plan P coupe S suivant deux droites, donc $(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + t_0^2)$ est nul; donc ψ_4 , qui est de degré 4, n'a d'autre facteur que Σx_0^2 ; donc, a un numérique près, ψ_4 est égal à $(\Sigma x_0^2)^2$.

Supposons maintenant que M soit non seulement sur Σ , mais sur l'une des biquadratiques (Σ, Q) ou (Σ, Q_1) ; prenons d'abord (Σ, Q_1) : la conique (P, Q_1) passe en M , de sorte que les deux génératrices communes à S et P forment un couple *double* de sécantes communes aux coniques du faisceau étudié dans P : donc F_6 ou $\Phi_4 \equiv \frac{F_6}{k}$ est nul si Σ et Q_1 sont nulles

[de façon que $\lambda = \infty$ soit racine double de l'équation (5)]. Si M est sur la biquadratique (Σ, Q) , le cône S se réduit à un plan double, de sorte que l'une des coniques de base du faisceau (celle obtenue pour $\lambda = \infty$) est une droite double : elle compte encore pour un couple *double* de sécantes communes ; finalement Φ_4 est nul si Σ et le produit QQ_4 sont nuls ; on peut donc écrire une identité

$$\Phi_4 \equiv \alpha Q Q_4 + \beta (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + t_0^2) \Phi_2,$$

où α et β sont des constantes dont le calcul est très simple et Φ_2 un polynome homogène et de degré 2 en x_0, y_0, z_0, t_0 .

Comme nous ne cherchons que des points de \mathcal{B} , on peut réduire Φ_4 à $\beta (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + t_0^2) \Phi_2$ et l'équation (9) déjà écrite, $\Phi_4^2 - 4F_4\psi_4 = 0$, se réduit finalement à la forme plus simple

$$(11) \quad \beta_1 \Phi_2^2 - 4F_4 = 0,$$

où β_1 est une nouvelle constante, puisque ψ_4 est égal au produit de $(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + t_0^2)^2$ par une constante. Ces calculs très simples ont déjà supprimé le facteur $(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + t_0^2)^2$; les explications géométriques nous prouvent que l'on peut encore supprimer une fois les 8 points (\mathcal{B}, Σ) ; autrement dit, moyennant les égalités

$$\Lambda + \Lambda' + \Lambda'' + \Lambda''' = 0, \quad \Lambda_1 + \Lambda'_1 + \Lambda''_1 + \Lambda'''_1 = 0,$$

qui jusqu'ici n'ont pas eu à intervenir, il existe une identité

$$(12) \quad \beta_1 \Phi_2^2 - 4F_4 \equiv Q f_2 + Q_1 \varphi_2 + (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + t_0^2) Q_2,$$

où f_2, φ_2, Q_2 sont certains polynomes homogènes du second degré en x_0, y_0, z_0, t_0 ; la détermination de ces polynomes inconnus se fait par résolution d'équations linéaires très simples [on a 30 inconnues ; le premier membre de (12) contient 35 coefficients ; on sait que les équations sont compatibles]. On doit résoudre le système formé par l'équation (12) réunie à $Q = 0$ et $Q_1 = 0$; on voit qu'il reste manifestement, en éliminant $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + t_0^2 = 0$, le système définitif

$$(13) \quad Q = Q_1 = Q_2 = 0,$$

qui a été obtenu uniquement par des opérations rationnelles.

Si nous comparons avec le raisonnement du paragraphe 3, nous remarquons que nous avons alors à déterminer un nombre de constantes égal à 6×84 ; ici nous avons un nombre d'inconnues égal à 28, seulement, quand on a annulé deux coefficients de Q_2 de façon à avoir une quadrique Q_2 réduite. Nous avons divisé le nombre d'inconnues par 18.

Cette méthode pourrait être appliquée même dans le cas de ∞^1 tétraèdres (nous avons dit que, dans ce cas, il vaut mieux prendre un point M au hasard sur \mathcal{B} , couper ensuite \mathcal{B} par le plan P polaire de M relativement à Σ ; l'un des points où P coupe \mathcal{B} s'obtient *rationnellement* en fonction des coordonnées de M et les trois autres sont ceux qui complètent le tétraèdre). Qu'arriverait-il alors : c'est que l'identité (12) serait vérifiée en supposant le polynôme Q_2 identiquement nul. Remarquons d'ailleurs que l'identité (12) peut être remplacée par ∞^2 identités équivalentes

$$\beta_1 \Phi_3^2 - 4F_4 \equiv Q[f_2 + \lambda(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + t_0^2)] + Q_1[\varphi_2 + \mu(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + t_0^2)] + (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + t_0^2)(Q_2 - \lambda Q - \mu Q_1),$$

où λ et μ sont des constantes arbitraires; cela prouve même que les 35 relations d'identification se réduisent à 28 équations distinctes seulement. Nous avons expliqué que l'on peut disposer de λ et μ pour annuler deux coefficients de Q_2 .

8. Cas d'une biquadratique unicursale. — Cette fois le calcul se simplifie beaucoup parce que nous n'avons plus à manier des inconnues (x_0, y_0, z_0, t_0) liées par deux équations quadratiques; on exprime (x_0, y_0, z_0, t_0) au moyen d'un paramètre t et alors le calcul se poursuit jusqu'au bout, sans avoir à introduire de solutions étrangères; c'est là, au fond, la grosse simplification. Nous exposons le procédé avec la biquadratique

$$(1) \quad x = t^4, \quad y = t^3, \quad z = t^2$$

qui, non seulement, est unicursale, mais a un point de rebroussement (mais cela ne change pas la méthode). Elle est intersection de deux quadriques telles que $2y^2 - 2xz = 0$, $2z^2 - 2x = 0$, de sorte que les quadriques $\Sigma(au^2 + a'v^2 + \dots = 0)$ doivent vérifier $b' = a'$, $c = a''$. Nous prenons la quadrique particulière pour

laquelle $\alpha' = \beta' = c = \alpha''$, les autres coefficients étant nuls. On a ainsi la quadrique Σ d'équations tangentielle et ponctuelle

$$(2) \quad \begin{cases} v^2 + w^2 + 2wu + 2uh = 0, \\ y^2 + z^2 + 2x - 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

Deux points t, θ de $\mathcal{O}\mathcal{B}$ sont conjugués par rapport à Σ si l'on a

$$(2) \quad t^3 \theta^3 + t^2 \theta^2 + t^4 + \theta^4 - t^2 - \theta^2 + 1 = 0.$$

Cette relation, en posant $t + \theta = s$, $t\theta = p$, devient

$$(2') \quad t + \theta = s, \quad t\theta = p, \quad s^4 - (4p + 1)s^2 + p^3 + 3p^2 + 2p + 1 = 0.$$

Cela posé si t, θ, T_1, T_2 forment un tétraèdre conjugué, les nombres θ, T_1, T_2 sont racines de l'équation déduite de (2) en remplaçant θ par T , soit

$$(3) \quad T^4 + t^3 T^3 + (t^2 - 1)T^2 + t^4 - t^2 + 1 = 0.$$

Donc T_1 et T_2 sont racines de cette équation (3) divisée par $T - \theta$, soit

$$(4) \quad T^3 + (t^3 + \theta)T^2 + (t^3\theta + \theta^2 + t^2 - 1)T + t^3\theta^2 + \theta^3 + t^2\theta - \theta = 0.$$

Si, maintenant, nous intervertissons les rôles de t et θ , nous voyons que T_1, T_2 satisfont aussi à l'équation

$$(4') \quad T^3 + (t + \theta^3)T^2 + (t\theta^3 + t^2 + \theta^2 - 1)T + t^2\theta^3 + t^3 + t\theta^2 - t = 0.$$

Le problème est uniquement ramené à exprimer que les équations (4), (4') ont deux racines communes : cela donne deux équations nécessaires et suffisantes pour calculer t et θ ; nous avons donc à déduire de (4), (4') deux combinaisons du second degré en T et à exprimer que ces équations coïncident. En retranchant (4), (4') et divisant par $t - \theta$, on a la première combinaison

$$(I) \quad (s^2 - p - 1)T^2 + psT + p^2 + 2p + 1 - s^2 = 0.$$

Formons la combinaison symbolique $\frac{\theta(4) - t(4')}{\theta - t}$; on a ainsi

$$(5) \quad T^3 + s(1 - p)T^2 + (s^2 - 2p - 1 - p^2)T + s(s^2 - 2p + 1) = 0.$$

En formant la combinaison symbolique $(s^2 - p - 1)(5) - T(I)$,

nous avons la seconde combinaison de degré 2,

$$(II) \quad s(s^2 - p - 1 + p^2 - sp)T^2 + (p - s^2)(p^2 + 2p + 1 - s^2)T + s(s^2 - p - 1)(s^2 - 2p - 1) = 0.$$

En exprimant que (I), (II) coïncident, on a les deux équations nécessaires et suffisantes

$$(6) \quad \frac{s(s^2 - p - 1 + p^2 - s^2p)}{s^2 - p - 1} = \frac{(p - s^2)(p^2 + 2p + 1 - s^2)}{ps} \\ = \frac{s(s^2 - p - 1)(s^2 - 2p - 1)}{p^2 + 2p + 1 - s^2}.$$

On forme un rapport égal à chacun des rapports (6) en ajoutant terme à terme les rapports extrêmes

$$(7) \quad \frac{-s(p^2 + 1)}{p^2 + p}.$$

En essayant $p = -1$, on a deux équations

$$(7) \quad s^4 + 3s^2 + 1 = 0, \quad p + 1 = 0.$$

Comme vérification, l'équation (2') est satisfaite; on a donc, par (7), une partie des solutions de (6). On a ainsi

$$(8) \quad s = \frac{i(\varepsilon + \varepsilon' \sqrt{5})}{2}, \quad p = -1 \quad (\varepsilon = \pm 1, \varepsilon' = \pm 1),$$

et les nombres t, θ sont racines de l'équation

$$(9) \quad t^2 - st - 1 = 0.$$

Les nombres T_1, T_2 sont racines de (I) qui s'écrit

$$(10) \quad T^2 - \frac{T}{s} - 1 = 0.$$

Quand on a choisi s , le nombre $\frac{1}{s}$ est l'autre racine de l'équation

$$s^2 + 1 - \varepsilon is = 0.$$

On a

$$s^4 + 3s^2 + 1 \equiv (s^2 + 1)^2 + s^2 \equiv (s^2 + 1 - \varepsilon is)(s^2 + 1 + \varepsilon is).$$

Donc s et $\frac{1}{s}$ correspondent à la même valeur de ε et aux deux

valeurs opposées de ε' . Si donc on appelle les quatre valeurs de s

$$s, \quad \frac{1}{s}, \quad -s, \quad -\frac{1}{s},$$

un premier tétraèdre solution est fourni par les racines de (9), (10); le second tétraèdre solution est fourni par les valeurs changées de signe de t ou T . On vérifie sans peine que les autres solutions de (6) redonnent les mêmes tétraèdres; cela tient à ce que nous pouvons prendre pour couple d'arêtes opposées dans un tétraèdre (t, θ) , (T_1, T_2) comme nous l'avons fait, mais aussi (t, T_1) et (θ, T_2) , puis (t, T_2) et (θ, T_1) ; en effet, si p est différent de (-1) , l'expression (7) est égale à $\frac{-s(p^2 - p + 1)}{p}$ et, en égalant au premier et second rapport (6), on a les conditions

$$(11) \quad \begin{cases} s^2 = p^2 + p - 1, \\ p^4 - p^3 + p^2 - p + 1 = 0. \end{cases}$$

Or, si l'on remplace, dans (2'), s^2 par $p^2 + p + 1$, on retrouve la seconde équation (11); donc les deux équations (11) sont les seules qui restent et l'on trouve de nouveau les tétraèdres déjà obtenus: le procédé, employé ici, revient en effet à trouver les arêtes successivement; il y a 12 arêtes, dont 4 ont été obtenues pour $p = -1$, et les 8 autres obtenues au moyen du système (11).

9. Dégénérescences. Critériums analogues à ceux d'Halphen pour les polygones de Poncelet. — Quand la biquadratique \mathcal{B} est donnée, il lui correspond ∞^7 quadriques Σ harmoniquement inscrites dans \mathcal{B} ; on pourrait manifester ainsi les 7 paramètres: 2 pour donner une corde Δ réunissant deux points M_1, M_2 de \mathcal{B} , 2 pour donner une corde analogue Δ' réunissant M_3, M_4 ; ensuite on détermine Σ par les conditions exprimant que $M_1 M_2 M_3 M_4$ est un tétraèdre conjugué par rapport à Σ ; il s'introduit alors 3 paramètres nouveaux pour le choix de Σ et, en réunissant aux 4 paramètres déjà engagés, on retrouve le total de 7.

Cette façon de compter est commode pour signaler des dégénérescences; on peut supposer que M_3 et M_4 se confondent; il n'y a plus que 3 paramètres à engager pour obtenir la corde $\Delta(M_1, M_2)$ et la tangente Δ' en M_3 ; Σ doit admettre Δ et Δ' comme droites conjuguées, passer par M_3 et diviser harmoniquement $M_1 M_2$, de

sorte que Σ dépend de 3 paramètres qui, réunis aux 3 paramètres précédents, donnent un total de 6 paramètres, quand l'un des tétraèdres dégénère ainsi : un sommet (M_3) compte pour deux, les arêtes (M_3M_1) et (M_3M_2) comptent chacune pour deux : le plan tangent à Σ en M_3 contient M_3M_1 et M_3M_2 , qui sont conjuguées par rapport aux génératrices de Σ issues de M_3 (c'est la proposition limite de celle qui donnait pour M_3M_1 et M_1M_2 deux droites conjuguées).

La dégénérescence s'aggrave encore en supposant que M_1 et M_2 se confondent aussi; il n'y a plus que 2 paramètres à engager pour indiquer la tangente Δ en M_1 , la tangente Δ' en M_3 ; Δ et Δ' sont conjuguées par rapport à Σ , et Σ passe en M_1 et M_3 , de sorte que M_1M_3 est génératrice de Σ d'après les propriétés connues (d'ailleurs, en comparant avec le cas précédent, M_3M_1 et M_3M_2 se confondant et étant toujours conjuguées, on a bien, à la limite, une génératrice portée par M_1, M_3).

On a engagé 2 paramètres pour Δ et Δ' , 3 nouveaux pour Σ : on a donc des quadriques Σ , associées à \mathcal{B} , ne dépendant plus que de 5 paramètres. Le plan tangent en M_1 à Σ est $M_1\Delta'$ et le plan tangent en M_3 est $M_3\Delta$.

La dégénérescence s'aggrave de nouveau si M_1 et M_3 , de l'exemple immédiatement précédent, se rapprochent indéfiniment; M_1M_3 , génératrice de Σ , devient tangente en M_1 , unique sommet du tétraèdre limite réduit à un point; le plan $M_1\Delta'$ coupe \mathcal{B} en trois points, l'un simple M_1 , l'autre comptant pour 2 dans l'intersection, à savoir M_3 ; de la sorte, à la limite, le plan tangent à Σ en M_1 (limite de $M_1\Delta'$) est osculateur à \mathcal{B} en M_1 ; la quadrique Σ satisfait d'ailleurs dans ce cas à deux nouvelles conditions plus difficiles à mettre en évidence; elle dépend au total de 4 paramètres, quand \mathcal{B} est donnée (l'un est la position de M_1 sur \mathcal{B} , et il reste trois paramètres complémentaires, comme plus haut). On pourrait d'ailleurs étudier aussi le cas où le tétraèdre a un sommet simple et trois confondus.

Il suffit donc qu'il existe un tétraèdre véritable ou dégénéré, mais satisfaisant aux conditions qui ont été indiquées, pour que Σ soit harmoniquement inscrite dans \mathcal{B} ; dès qu'il existe trois tétraèdres (dont certains peuvent être dégénérés), Σ admet ∞^1 tétraèdres conjugués par rapport à Σ et inscrits dans \mathcal{B} .

Or, quand il existe ∞^1 tétraèdres, chaque point de \mathcal{B} donne lieu à un tétraèdre : songeons alors aux points où \mathcal{B} rencontre Σ ; soit M ce point; le plan P , tangent à Σ en M , coupe Q suivant une conique (P, Q) , Q_1 suivant une conique (P, Q_1) en reprenant les notations du paragraphe 7; (P, Q_1) , (P, Q) se coupent en 4 points $M_1 M_2 M_3 M_4$ dont l'un, M_3 , coïncide avec M ; si nous sommes dans le cas de ∞^1 tétraèdres, il arrive que deux des 3 cordes $M_3 M_4$, $M_3 M_2$, $M_3 M_1$, par exemple $M_3 M_4$ et $M_3 M_2$, sont conjuguées par rapport à Σ , c'est-à-dire par rapport aux deux génératrices de Σ issues de M_3 et alors le tétraèdre $MM_3 M_4 M_2$ est un tétraèdre dégénéré où les deux sommets M et M_3 sont confondus. Cette circonstance se présente alors pour chacun des 8 points communs à \mathcal{B} et Σ ; *il suffit que cette circonstance se présente pour 3 des 8 points en jeu pour que \mathcal{B} et Σ admettent ∞^1 tétraèdres*; c'est un critérium simple que l'on peut rapprocher de ceux que Halphen a indiqués pour les polygones de Poncelet.

ERRATUM

Ligne 19, page 177, lire : 23 paramètres, au lieu de : 20 paramètres.
Le nombre 20 paramètres de la ligne 21 est correct.
