

# BULLETIN DE LA S. M. F.

LEVI-CIVITA

## **La trigonométrie des petits triangles curvilignes sur une surface**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 67 (1939), p. 101-134 (supplément)

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1939\\_\\_67\\_\\_S101\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1939__67__S101_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Journée du 9 juillet 1937.

---

Réun. intern. Math. (1937, Paris)

Bull. Soc. math. France,

Suppl. 1939, p. 101 à 134.

LA TRIGONOMÉTRIE  
DES  
PETITS TRIANGLES CURVILIGNES  
SUR UNE SURFACE

Par M. LEVI-CIVITA.

---

Les premières notions de trigonométrie plane et sphérique remontent aux Babyloniens. La science hellénique les rattacha au théorème des transversales de Ménélas; des apports substantiels ont été ensuite fournis par les Indiens, par les Persans et par les Arabes, un de ces derniers, Nasir Ad-Din, ayant même fait paraître au treizième siècle un traité de trigonométrie pure, c'est-à-dire non mélangé à l'astronomie, tout en étant naturellement influencé par les besoins de celle-ci.

La Renaissance compléta la déduction des relations (dont trois seulement sont indépendantes) entre les six éléments (angles et côtés) d'un triangle, en leur donnant des formes très variées, pouvant convenir aux différents cas posés par la pratique. Il faut toutefois arriver jusqu'à Euler pour que les formules trigonométriques prennent la forme compacte actuelle : auparavant, faute d'avoir défini les fonctions trigonométriques d'une manière systématique pour toutes les valeurs réelles de leurs arguments, on était obligé à distinguer un tas de cas et de sous-cas.

Une grande généralisation de la trigonométrie, au point de vue théorique, fut conçue par Gauss, qui aborda l'étude des triangles géodésiques, c'est-à-dire formés par des arcs de lignes géodésiques, sur une surface quelconque. Dans ce cadre rentrent les recherches de Christoffel, Weingarten, Darboux (1) et de M. Severi (2).

---

(1) Voir notamment DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. 3 (Paris, Gauthier-Villars, 1894), Livre VI, Chap. VIII.

(2) *Sulla curvatura delle superficie e varietà* (*Rend. del Circolo Mat. di Palermo*, t. 42, 1917, p. 227-259).

Je me propose maintenant une extension ultérieure, en envisageant, au lieu de triangles géodésiques, des triangles formés par des arcs de courbes quelconques, sur une surface également quelconque. Toutefois, pour obtenir des résultats relativement simples, il convient de se borner à des triangles *petits*.

Mais, tout d'abord, qu'est-ce que c'est qu'un triangle *petit*? S'il s'agit de triangles rectilignes (en géométrie euclidienne) la petitesse n'a pas de sens intrinsèque, mais dépend du choix de l'unité de mesure : on peut toujours, par un choix convenable, représenter les longueurs des côtés par des nombres aussi petits que l'on veut. Le critère vulgaire de petitesse ressort ici nécessairement de quelque élément additionnel, qui peut dépendre des circonstances les plus variées. Mais, si les côtés sont curvilignes, il y a un repère naturel : c'est la courbure. En indiquant, pour fixer les idées, par  $\Gamma$  le maximum de ladite courbure (pour les différents points des trois côtés) et par  $L$  la longueur maximum des côtés, le produit

$$\Gamma L$$

est un nombre pur, et il est parfaitement justifié d'appeler petits les triangles pour lesquels le produit  $\Gamma L$  reste au-dessous d'une certaine fraction propre qu'on puisse traiter comme une quantité de premier ordre.

Dès lors la question se pose d'établir, comme en trigonométrie ordinaire, des relations entre les longueurs des côtés et les angles. En général, si les courbes sont quelconques, on ne pourrait s'attendre qu'à des relations fonctionnelles; mais il en est tout autrement si l'on pense qu'en ayant recours à des développements tayloriens, on peut faire état de la petitesse du triangle, c'est-à-dire de la circonstance qu'il y a lieu de supposer négligeable (vis-à-vis de l'unité) toute quantité d'ordre non inférieur à 1, ou à 2, ou à 3, etc.

En restant dans les généralités, il convient de remarquer tout de suite qu'on pourrait fort bien envisager ces triangles curvilignes comme étant immergés directement dans l'espace ambiant (espace ordinaire, ou plus généralement riemannien à un nombre quelconque de dimensions), mais il convient de commencer par le cas, qui est sans doute le plus intéressant au point de vue géodésique, ou même topographique, où l'on suppose le triangle tracé sur une surface  $\sigma$  donnée : plan, sphère, ellipsoïde, etc.

Il existe donc au préalable cette surface  $\sigma$ , et alors il y a (sauf pour le plan) un autre élément, la courbure totale  $K$  de la surface,

dont on doit aussi tenir compte pour apprécier la petitesse d'un triangle. Ici encore il y a un nombre pur dépendant des dimensions du triangle par rapport à celles de la surface : c'est le produit  $KL^2$ ,  $K$  désignant le maximum de  $K$  à l'intérieur du triangle. Nous admettons que,  $\Gamma L$  fournissant l'étalon du premier ordre,  $KL^2$  soit du second, c'est-à-dire comparable à  $(\Gamma L)^2$ .

Dans ce qui suit nous nous occuperons d'abord (n° 1) des petits triangles d'arcs de cercle dans le plan, en nous bornant à la première approximation, c'est-à-dire en négligeant le second ordre. Cette introduction élémentaire donne une première orientation à la recherche analogue, dans le cas général d'une surface quelconque et d'un triangle à côtés curvilignes également quelconques, lorsqu'on se propose de tenir compte aussi des termes de second ordre (en négligeant seulement le troisième). On s'aperçoit aisément que, pour passer à des courbes quelconques et à des approximations ultérieures, il y a lieu de s'appuyer sur les représentations canoniques des courbes au voisinage d'un de leurs points, d'où l'opportunité de rappeler leur déduction (n° 2), et de s'en procurer l'extension au cas de courbes appartenant à une surface donnée.

Ceci exige pas mal de préparation : dérivation intrinsèque et formules de Frenet; coordonnées convenables pour une petite région; et leurs expressions paramétriques (n° 3) pour une courbe donnée. On étudie ensuite le triangle des cordes géodésiques (n° 4), par lequel on se trouve ramené, en seconde approximation, à la trigonométrie sphérique (ordinaire ou lobatchewskienne) (n° 5). Il n'y a alors qu'à se servir des développements des numéros précédents pour obtenir, au même ordre d'approximation la trigonométrie des triangles curvilignes (n° 6).

Les formules de première approximation avaient été établies par moi-même en 1934 <sup>(1)</sup>, comme corollaire, assez éloigné, d'une recherche géométrique de plus longue haleine concernant les relations mutuelles de trois familles de courbes tracées sur une surface. Ensuite, le regretté Cohn-Vossen a montré <sup>(2)</sup> qu'on peut obtenir le même résultat par des considérations élémentaires directes.

<sup>(1)</sup> *Terne di congruenze sopra una superficie ed estensione della trigonometria*, Compositio Mathematica, Vol. I, 1934, p. 115-162. Voir aussi A. TONOLO, *Il teorema dei seni per i triangoli infinitesimi tracciati sopra una superficie*, *ibid.*, Vol. II, 1935, p. 424-437.

<sup>(2)</sup> *Der approximative Sinussatz für kleine Dreiecke auf krummen Flächen*, *ibid.*, Vol. III, 1936, p. 52-54.

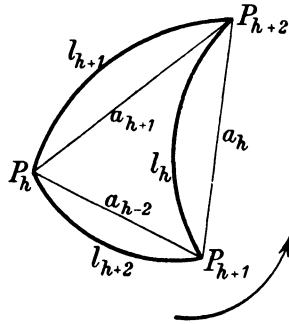
J'y étais parvenu pour mon compte (sans toutefois publier la remarque) dans la manière qui sera exposée ici au n° 1, et qui découle d'ailleurs de la même idée à laquelle s'était inspiré Cohn-Vossen. Le passage au second ordre (éventuellement à des ordres plus élevés: *cf.* n° 8) se fait au contraire, comme on l'a dit, par voie analytique admettant un traitement systématique.

J'ajouterai, pour être complet, que le numéro 7 de ce Mémoire contient une petite remarque se rapportant au théorème de Legendre sur la résolution des triangles sphériques.

### 1. Petits triangles plans formés par trois arcs de cercles.

— Soit  $P_h, P_{h+1}, P_{h+2}$  un tel triangle (*fig.* 1) avec la convention évi-

Fig. 1.



dente de regarder coïncidents les indices qui diffèrent de 3 ou d'un multiple de 3.

On fixera sur le triangle comme sens positif de circulation celui qui est défini par l'ordre croissant des indices (marqué par la flèche dans la figure). Et l'on désignera par  $l_h$  la longueur du côté opposé au sommet  $P_h$ , c'est-à-dire de l'arc de cercle  $\widehat{P_{h+1}P_{h+2}}$ ; par  $a_h$  celle de la corde correspondante  $\overline{P_{h+1}P_{h+2}}$ . Si  $R_h$  est le rayon du cercle auquel appartient l'arc  $\widehat{P_{h+1}P_{h+2}}$  le rapport  $l_h/R_h$  mesure en radians l'angle au centre correspondant. Il va sans dire que, dès qu'il s'agit de petits triangles, cet angle est également petit: en tout cas, notamment, il n'est pas douteux qu'il faut l'envisager comme un angle aigu.

J'introduirai encore la courbure avec signe  $\gamma_h$ , ayant  $1/R_h$  pour valeur absolue, et, comme signe,  $\pm$  selon que l'arc correspondant est

situé à l'extérieur (comme  $\widehat{P_h P_{h+1}}$ ,  $\widehat{P_{h+2} P_h}$  dans la figure 1), ou à l'intérieur du triangle (comme  $\widehat{P_{h+1} P_{h+2}}$ ). L'angle aigu, en  $P_{h+1}$  ou en  $P_{h+2}$ , compris entre l'arc  $\widehat{P_{h+1} P_{h+2}}$  et la corde n'est que la moitié de l'angle au centre  $l_h/R_h$ . Il convient d'attribuer un signe à cet angle en posant

$$(1.1) \quad {}_2\beta_h = l_h \gamma_h \quad (h = 1, 2, 3).$$

La valeur absolue  $|\beta_h|$  est ainsi précisément l'angle aigu entre l'arc et sa corde; et, d'après la définition de  $\gamma_h$ , le signe de  $\beta_h$  est  $\pm$  selon que le côté  $\widehat{P_{h+1} P_{h+2}}$  est situé à l'extérieur (comme dans la figure 1) ou à l'intérieur du triangle rectiligne des cordes.

Il est aisé d'exprimer à la fois les côtés  $a_h$  et les angles  $\alpha_h$  du triangle rectiligne des cordes, en fonction des éléments  $l_h, \varphi_h$  du triangle circulaire et des courbures  $\gamma_h$ . En portant ces expressions dans les formules élémentaires de la trigonométrie rectiligne, on en tire autant de relations entre les  $l$ , les  $\varphi$  et les  $\gamma$ , qui, dûment simplifiés d'après la petitesse des arcs  $l_h$  (vis-à-vis des rayons respectifs), seront précisément les relations trigonométriques, se rapportant aux triangles circulaires, que nous nous proposons d'établir.

Ceci en thèse générale. Passant à l'exécution, il y a tout d'abord à exprimer les angles  $\varphi_h$  moyennant les  $\alpha_h$  et les auxiliaires  $\beta_h$ .

Si, comme en  $P_h$ , dans la figure 2, les arcs de cercle tournent tous les deux leur concavité vers l'intérieur du triangle rectiligne  $P_h P_{h+1} P_{h+2}$ ,  $\beta_{h+1}$  et  $\beta_{h+2}$ , ils sont tous les deux positifs, d'après (1.1), et l'on a évidemment

$$(1.2) \quad \varphi_h = \alpha_h + \beta_{h+1} + \beta_{h+2}.$$

*Cette formule subsiste en tout cas.* En effet, si un des côtés circulaires aboutissant à  $P_h$  est (au voisinage de ce point) intérieur au triangle rectiligne, le  $\beta$  correspondant devient négatif, d'après (1.1), et c'est justement ce signe qu'on doit attribuer à l'angle dans l'expression (1.2) de  $\varphi_h$ .

Quant à la corde  $a_h$  sous-tendante à l'arc  $l_h$ , on a

$$a_h = {}_2R_h \sin \frac{1}{2} \frac{l_h}{R_h}.$$

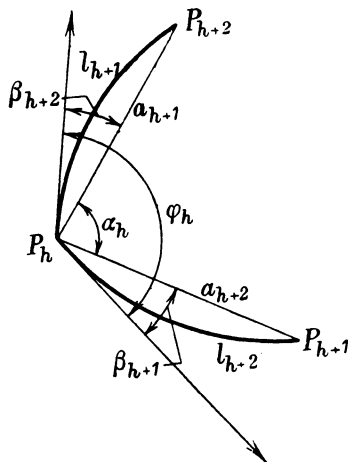
En y remplaçant  $1/R_h$  par  $\pm \gamma_h$ , l'ambiguïté du signe disparaît en tout

cas, et l'on peut retenir

$$(1.3) \quad a_h = \frac{2}{\gamma_h} \sin \frac{1}{2} l_h \gamma_h \quad (h = 1, 2, 3).$$

Envisageons maintenant une quelconque des formules de la trigonométrie ordinaire. C'est une relation entre les  $a$  et les  $\alpha$ . Tout se

Fig. 2.



réduit à y remplacer les  $a_h$  par leurs valeurs (1.3), et les  $\alpha_h$  par leurs valeurs tirées de (1.2); c'est-à-dire ayant égard aux (1.1), par

$$(1.4) \quad \alpha_h = \varphi_h - \frac{1}{2} (l_{h+1} \gamma_{h+1} + l_{h+2} \gamma_{h+2}).$$

Si (et c'est notre cas) on se contente de la première approximation (par rapport aux produits  $l_h \gamma_h$ ), on pourra négliger au cours du calcul tout terme du second ordre vis-à-vis de l'unité, et les résultats sont très simples.

Explicitons à titre d'exemple la formule des sinus

$$(1.5) \quad \frac{a_h}{\sin \alpha_h} = l \quad (h = 1, 2, 3),$$

où  $l$ , indépendante de  $h$ , désigne une petite quantité de l'ordre des dimensions du triangle (diamètre du cercle circonscrit).

Tout d'abord, en négligeant justement les termes du second ordre vis-à-vis de l'unité, on peut confondre le sinus avec l'arc et l'on tire

par conséquent de (1.3), qu'il est permis d'écrire

$$(1.6) \quad \alpha_h = l_h (1 + \textcircled{2}),$$

les symboles  $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$ , ... indiquant un ensemble de termes d'ordre 1, 2, ..., au moins par rapport à nos arguments  $l_h \gamma_h$ .

Au même ordre d'approximation on a uniquement à remplacer dans (1.5) les  $a_h$  et  $\alpha_h$  par leur valeur (1.6) et (1.4).

En tenant compte pour un moment, seulement des termes finis dans  $\alpha_h$ , on tire de (1.6)

$$(1.7) \quad l_h = l \{ \sin \varphi_h + \textcircled{1} \}.$$

On a ensuite, en développant  $\sin \alpha_h$  d'après (1.4), et en mettant en évidence seulement le premier ordre,

$$\sin \alpha_h = \sin \varphi_h - \frac{1}{2} l (\gamma_{h+1} \sin \varphi_{h+1} + \gamma_{h+2} \sin \varphi_{h+2}) \cos \varphi_h + \textcircled{2}.$$

Dans les termes du premier ordre on peut remplacer  $l_{h+1}$  et  $l_{h+2}$  par leurs valeurs (1.7), et il en résulte

$$(1.8) \quad \sin \alpha_h = \sin \varphi_h - \frac{1}{2} l (\gamma_h \sin \varphi_h + \gamma_{h+1} \sin \varphi_{h+1} + \gamma_{h+2} \sin \varphi_{h+2}) \cos \varphi_h + \frac{1}{2} l \gamma_h \sin \varphi_h \cos \varphi_h + \textcircled{2}.$$

En introduisant, pour abrégier l'écriture, la courbure triangulaire  $\tau$ , c'est-à-dire le trinome  $\tau$ ,

$$(1.9) \quad \tau = \frac{1}{3} (\gamma_h \sin \varphi_h + \gamma_{h+1} \sin \varphi_{h+1} + \gamma_{h+2} \sin \varphi_{h+2}),$$

on tire de (1.5), (1.6) et (1.8) les formules (1)

$$(1.10) \quad \frac{l_h}{\sin \varphi_h} = l \left\{ 1 + \frac{1}{2} l (\gamma_h \cos \varphi_h - 3 \tau \cot \varphi_h) + \textcircled{2} \right\} \quad (h = 1, 2, 3)$$

qu'il s'agissait d'établir.

(1) Dans les relations (10') et (14), données au Chap. III de mon Mémoire cité, il y a apparemment un changement de signe à l'égard des binomes

$$\gamma_h \cos \varphi_h - 3 \tau \cot \varphi_h.$$

Ceci provient de la circonstance que les angles désignés alors par  $\psi_h$  ne coïncident pas avec les  $\varphi_h$  actuels, mais avec leurs suppléments  $\pi - \varphi_h$  (angles extérieurs du triangle).



On y voit, bien mise en évidence, la correction due aux courbures des côtés, qui affecte la relation de simple proportionnalité, valable pour le triangle rectiligne. Dans (1.10) figure l'auxiliaire  $l$ , qui est d'après (1.5) le diamètre du cercle circonscrit au triangle (des cordes), c'est-à-dire (sans faire intervenir les cordes) passant par les trois sommets  $P_h$ .

Pour avoir un ensemble de trois relations indépendantes entre les côtés  $l_h$  et les angles  $\varphi_h$  du triangle curviligne, il suffira de se procurer une expression de  $l$  (en fonction de  $l_h, \varphi_h$ ) distincte des (1.10) elles-mêmes. On y parvient très rapidement en partant de l'expression bien connue de  $l$  en fonction des côtés  $a_h$  du triangle rectiligne et remplaçant ensuite chaque  $a_h$  par sa valeur (1.3), ce qui reviendra, d'après (1.6) (en négligeant encore ici le second ordre), à écrire matériellement  $l_h$  au lieu de  $a_h$ .

Pour le triangle des cordes on a, quel que soit  $h$ ,

$$l = \frac{a_h}{\sin \alpha_h} = \frac{a_h a_{h+1} a_{h+2}}{a_{h+1} a_{h+2} \sin \alpha_h}.$$

Le dénominateur est le double de l'aire du triangle, c'est-à-dire

$$2\sqrt{p(p-a_1)(p-a_2)(p-a_3)},$$

où

$$(1.11) \quad p = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$$

désigne le semi-périmètre.

En introduisant les rapports

$$\frac{a_h}{p} = \mu_h \quad (h = 1, 2, 3),$$

qui (puisque chaque côté est plus petit que la somme des deux autres) sont des *fractions propres*, on peut écrire

$$(1.12) \quad l = \frac{1}{2} p \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{\sqrt{(1-\mu_1)(1-\mu_2)(1-\mu_3)}}.$$

D'après (1.6) la définition (1.11) de  $p$  prend la forme

$$(1.13) \quad p = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 + l_3) \left(1 + \textcircled{2} \frac{l_1}{l_2}\right).$$

C'est comme dire que, toujours en négligeant le second ordre devant

l'unité,  $p$  est le semi-périmètre du triangle curviligne donné; de même que, d'après (1.6),

$$\frac{a_h}{p} = \frac{l_h}{p} \{ 1 + \textcircled{2} \},$$

de sorte que

$$(1.14) \quad \mu_h = \frac{l_h}{p} \{ 1 + \textcircled{2} \}.$$

En définitive l'équation à associer au théorème des sinus (1.10), pour le triangle curviligne plan est (1.12), où en première approximation (la même adoptée jusqu'ici) on peut rapporter  $p$  et les  $\mu_h$  au triangle donné,  $p$  semi-périmètre et  $\mu_h = l_h/p$ , de sorte que

$$(1.15) \quad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 2.$$

Il n'est peut-être pas sans intérêt de remarquer que, comme troisième équation à associer aux (1.8) (où l'on envisage  $l$  comme une auxiliaire indéterminée), on peut employer

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi,$$

qui est une identité goniométrique pour un triangle rectiligne, mais devient, d'après les (1.4), une véritable relation entre les éléments du triangle curviligne envisagé.

On pourrait remanier d'une manière analogue, pour les triangles d'arcs de cercle, les autres formules de la trigonométrie rectiligne ordinaire. Qu'il me soit permis de signaler cette petite tâche de beau vieux style à ceux qui aiment d'aller jusqu'au bout.

**2. Représentation locale des courbes planes.** — Une courbe plane  $C$  étant donnée, soient  $Q$  un point quelconque de la courbe,  $s$  son abscisse curviligne comptée à partir d'un autre point  $P$  fixé d'avance, la courbe étant régulière entre  $P$  et  $Q$ . Si  $x, y$  désignent des coordonnées cartésiennes de  $Q$ , les fonctions

$$(2.1) \quad x = x(s), \quad y = y(s),$$

qui définissent la courbe  $C$  sous forme paramétrique, seront supposées continues avec toutes les dérivées qu'il y aura lieu de considérer le long de l'arc  $PQ$  (extrémités incluses). Au même sens sont des fonctions régulières de  $s$  les vecteurs unitaires  $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{n}$ , le premier dirigé

suisant la tangente à  $C$  en  $Q$  (dans le sens positif des  $s$ ) et le second suisant la normale dans un tel sens que le couple  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$  soit orienté comme les directions positives des axes coordonnées  $x, y$ .

On a alors classiquement pour tout point  $Q$

$$(2.2) \quad \frac{dQ}{ds} = \mathbf{t}$$

avec les formules de Frenet

$$(2.3) \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \gamma \mathbf{n},$$

$$(2.4) \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\gamma \mathbf{t},$$

où  $\gamma$  désigne la courbure de  $C$  avec signe, et précisément avec le signe  $+$ , si  $\mathbf{n}$  est dirigé vers la concavité des  $C$ , avec le signe  $-$  dans le cas contraire <sup>(1)</sup>.

En dérivant (2.3) par rapport à  $s$ , et en remplaçant  $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$  par sa valeur (2.4), on tire

$$(2.5) \quad \frac{d^2\mathbf{t}}{ds^2} = -\gamma^2 \mathbf{t} + \dot{\gamma} \mathbf{n},$$

où le point superposé est une notation abrégée pour  $\frac{d}{ds}$ .

En appliquant au point  $Q(s)$  le développement de Maclaurin, on a

$$(2.6) \quad Q(s) = P + s\mathbf{t} + \frac{1}{2} s^2 \gamma \mathbf{n} + \frac{1}{6} s^3 (-\gamma^2 \mathbf{t} + \dot{\gamma} \mathbf{n}) + \dots,$$

les termes non écrits étant d'ordre supérieur au troisième par rapport à  $s$ . Bien entendu, les coefficients (vecteurs et scalaires) se rapportent tous au point  $P$ .

Un tel développement pourrait être prolongé en calculant les dérivées successives de  $Q$ , et par conséquent de  $\mathbf{t}$ , d'après (2.3), et en éliminant chaque fois les dérivées de  $\mathbf{n}$ , d'après (2.4) et ses dérivées.

<sup>(1)</sup> La convention adoptée au numéro précédent à propos de la courbure des côtés d'un triangle circulaire est parfaitement la même; le sens du couple  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$  étant dans le cas du triangle fixé comme il suit :

$\mathbf{t}$ , pour chaque côté, dirigé dans le sens de circulation  $P_h P_{h+1} P_{h+2}$ ;  $\mathbf{n}$  vers l'intérieur du triangle. Le sens de circulation figure à la place du sens défini par les axes coordonnées.

La formule (2.6) nous montre que, pour arriver jusqu'au terme en  $s^3$ , on a dû introduire  $\gamma$  et  $\dot{\gamma}$ . On reconnaît immédiatement, en raisonnant par récurrence, qu'en se proposant d'expliciter jusqu'au terme en  $s^n$  on serait amené à introduire les dérivées de  $\gamma$  (en P) jusqu'à l'ordre  $n - 2$ . Tenons compte maintenant de la circonstance essentielle qu'on aura affaire à des arcs *petits*. En généralisant ce qui a été admis dès le début (*voir* Introduction) à l'égard du maximum  $\Gamma$ , de la courbure et du produit  $\Gamma L$  ( $L$  longueur du petit arc envisagé), nous admettrons que les produits  $\dot{\gamma}L^2$ ,  $\ddot{\gamma}L^3$ , ... sont des petites quantités (nombres purs) des ordres 2, 3, ..., au moins. On constate alors que les termes successifs du développement de  $Q(s)$ , suivant les puissances de  $s$ , ont (un facteur  $s$  mis à part) un ordre de petitesse non inférieur à  $n - 1$ , s'il s'agit du terme en  $s^n$ . D'après cela, on peut en particulier spécifier la formule (2.6) en écrivant

$$(2.7) \quad Q(s) = P + s \left\{ \mathbf{t} + \frac{1}{2} s \gamma \mathbf{n} + \frac{1}{6} s^2 (-\gamma^2 \mathbf{t} + \dot{\gamma} \mathbf{n}) + \textcircled{3} \right\}.$$

Si l'on suppose l'origine des coordonnées au point P, on en tire la représentation canonique d'une courbe plane, au voisinage d'un de ses points <sup>(1)</sup>.

On n'a qu'à projeter ladite relation vectorielle sur les axes (c'est-à-dire décomposer le second membre suivant  $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{n}$ ). Il vient en conformité

$$(2.8) \quad \begin{cases} x = s \left\{ 1 - \frac{1}{6} s^2 \gamma^2 + \textcircled{3} \right\}, \\ y = s \left\{ \frac{1}{2} s \gamma + \frac{1}{6} s^2 \dot{\gamma} + \textcircled{3} \right\}. \end{cases}$$

③ pouvant dépendre des valeurs de  $\gamma, \dot{\gamma}$ , sur tout l'arc PQ.

### 3. Courbure géodésique et formules de Frenet pour une courbe tracée sur une surface. — Sur une surface $\sigma$ on peut consi-

<sup>(1)</sup> La déduction d'après les formules de Frenet se trouve (même pour les courbes de l'espace) à peu près dans tous les traités modernes de géométrie différentielle. *Voir*, par exemple, G. JULIA, *Éléments de géométrie infinitésimale*, Paris, Gauthier-Villars (2<sup>e</sup> éd., 1936, p. 129); ou bien W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Berlin, Springer, B. I (8. Auflage, 1930, p. 26); W. C. GRAUSTEIN, *Differential Geometry*, New York, Macmillan, 1935, p. 39.

dérer (comme dans le plan) une courbe C et un vecteur  $\mathbf{w}$ , fonction des points Q de C.

En supposant la surface rapportée à des coordonnées curvilignes quelconques  $x^1, x^2$ , soient

$$(3.1) \quad ds^2 = \sum_{ik}^2 a_{ik} dx^i dx^k$$

l'expression de son élément linéaire, et  $w^i$  les composantes contrevariantes du vecteur  $\mathbf{w}$ .

Si, en désignant par  $s$  l'arc de C, compté à partir d'un point fixe P,

$$(3.2) \quad x^1 = x^1(s), \quad x^2 = x^2(s)$$

sont les équations paramétriques de la courbe C, le vecteur unité  $\mathbf{t}$ , tangent à C au point courant Q d'abscisse curviligne  $s$ , aura pour composantes contrevariantes

$$(3.3) \quad t^1 = \frac{dx^1}{ds}, \quad t^2 = \frac{dx^2}{ds}.$$

Ceci posé, il nous faut encore rappeler <sup>(1)</sup> qu'on peut généraliser d'une manière invariante la notion de dérivée du vecteur  $\mathbf{w}$  par rapport à  $s$ , le long de la courbe C en définissant ce vecteur  $D\mathbf{w}$  moyennant les composantes

$$(3.4) \quad (D\mathbf{w})^i = \frac{dw^i}{ds} + \sum_{jh}^n \Gamma_{jh}^i w^j \frac{dx^h}{ds},$$

qu'on vérifie avoir justement comportement contrevariant, dès qu'on entend par  $\Gamma_{jh}^i$  les symboles de Christoffel (de seconde espèce) du  $ds^2$  envisagé.

On tire aisément de (3.4) que ce même vecteur  $D\mathbf{w}$  a pour composantes covariantes

$$(3.5) \quad (D\mathbf{w})_i = \frac{dw_i}{ds} - \sum_{jh}^2 \Gamma_{jh}^i w_j \frac{dx^h}{ds}.$$

Notons en passant que, si  $\mathbf{w}$  est défini *non seulement sur C*, mais

<sup>(1)</sup> Voir, par exemple, mon *Absolute differential calculus* (edited by Dr E. Perico), Glasgow and London, Blackie, 1927, p. 139-140.

aussi dans un domaine à deux dimensions de  $\sigma$ , dans le voisinage de  $C$ , on peut introduire les dérivées partielles des  $\omega^i$  par rapport à  $x^1$  et à  $x^2$ , et l'on a alors

$$\frac{d\omega^i}{ds} = \sum_h^2 \frac{\partial \omega^i}{\partial x^h} \frac{dx^h}{ds},$$

ce qui permet d'écrire les composantes contrevariantes (3.4) de  $D\mathbf{w}$  sous la forme

$$(D\mathbf{w})^i = \sum_h^2 \frac{dx^h}{ds} \left\{ \frac{\partial \omega^i}{\partial x^h} + \sum_j^2 \Gamma_{jh}^i \omega^j \right\}$$

ou bien, la quantité entre les crochets étant par définition la dérivée covariante  $\omega^i|_h$ ,

$$(D\mathbf{w})^i = \sum_h^2 \omega^i|_h \frac{dx^h}{ds},$$

qui laisse apercevoir le caractère contrevariant des composantes  $(D\mathbf{w})^i$ . Pour le cas dont il s'agit actuellement d'un vecteur  $\mathbf{w}$  défini uniquement sur  $C$ , je renvoie à mon livre cité tout à l'heure.

Si, en particulier, on fait coïncider le vecteur  $\mathbf{w}$  avec  $\mathbf{t}$ , on sait que

$$D\mathbf{t} = \frac{1}{r} \mathbf{n},$$

en désignant par  $\mathbf{n}$  le vecteur superficiel normal à  $\mathbf{t}$  vers la concavité de  $C$  et  $\frac{1}{r}$  la courbure géodésique en valeur absolue. Si  $\mathbf{v}$  désigne  $\pm \mathbf{n}$  et si l'on pose en conformité

$$\gamma = \pm \frac{1}{r},$$

on a

$$(3.6) \quad D\mathbf{t} = \gamma \mathbf{v},$$

où  $\gamma$  est la courbure géodésique de  $C$ , avec signe, et précisément avec le signe  $+$  lorsque  $\mathbf{v}$  est dirigé vers la concavité de  $C$ , le signe  $-$  dans le cas contraire. Le vecteur  $\mathbf{v}$  jouit de la double propriété d'être unitaire et perpendiculaire à  $\mathbf{t}$ . D'après la métrique de la surface  $\sigma$ ,

ceci se traduit dans les deux formules

$$\sum_1^2 v^i v_i = 1, \quad \sum_1^2 v^i t_i = 0,$$

$v_i$  et  $t_i$  désignant évidemment des composantes covariantes.

En dérivant la première équation par rapport à  $s$ , il vient

$$\sum_1^2 \left( \frac{dv^i}{ds} v_i + \frac{dv_i}{ds} v^i \right) = 0.$$

Si l'on y remplace, d'après (3.4),  $\frac{dv^i}{ds}$  par

$$(D\mathbf{v})^i - \sum_1^2 \Gamma_{jh}^i v_j \frac{dx^h}{dt},$$

et  $\frac{dv_i}{ds}$ , d'après (3.5), par

$$(D\mathbf{v})_i + \sum_1^2 \Gamma_{jh}^i v_j \frac{dx^h}{ds},$$

on trouve après réduction

$$\sum_1^2 [(D\mathbf{v})^i v_i + (D\mathbf{v})_i v^i] = 0.$$

Les deux sommes sont égales, chacune d'elles représentant le produit scalaire de  $D\mathbf{v}$  et  $\mathbf{v}$ , d'après la métrique (3.1). Ce produit est donc nul, ce qui nous assure que le vecteur  $D\mathbf{v}$  est perpendiculaire à  $\mathbf{v}$  (sur  $\sigma$ ) et a par conséquent la même direction, sinon le même sens, de  $\mathbf{t}$ .

On peut donc poser

$$(3.7) \quad D\mathbf{v} = -\gamma^* \mathbf{t},$$

$\gamma^*$  représentant un facteur scalaire encore indéterminé. Pour le fixer on n'a qu'à dériver par rapport à  $s$  la relation d'orthogonalité

$$\sum_1^2 v^i t_i = 0$$

et remplacer, comme tout à l'heure, les dérivées  $\frac{dv^i}{ds}$  et  $\frac{dt_i}{ds}$  par leurs valeurs tirées de (3.4) et (3.5). On a ainsi

$$\sum_1^2 [(Dv)^i t_i + (Dt)_i v^i] = 0.$$

Or (3.6), en prenant les composantes covariantes, équivaut à

$$(Dt)_i = \gamma v_i.$$

De même (3.7), en prenant les composantes contrevariantes, donne

$$(Dv)^i = -\gamma^* t^i.$$

L'égalité provenant de la dérivation devient partant (puisque  $t$  et  $v$  ont tous les deux longueurs 1)

$$-\gamma^* + \gamma = 0.$$

L'expression de  $Dv$  acquiert en définitive la forme

$$(3.8) \quad Dv = -\gamma t,$$

qui n'est pas autre chose que la seconde formule de Frenet pour les courbes de  $\sigma$ , la première étant (3.6) <sup>(1)</sup>.

En revenant aux composantes covariantes, d'après (3.4) (où l'on pose  $w = t$ , et l'on écrit  $t^i$  au lieu de  $\frac{dx^i}{ds}$ ), les deux formules de Frenet (3.6) et (3.8) s'explicitent sous la forme

$$(3.9) \quad \frac{dt^i}{ds} = \gamma v^i - \sum_1^2 \Gamma_{jh}^i t^j t^h,$$

$$(3.10) \quad \frac{dv^i}{ds} = -\gamma t^i - \sum_1^2 \Gamma_{jh}^i v^j t^h \quad (i = 1, 2).$$

<sup>(1)</sup> On aurait pu se passer de la vérification directe en se rapportant au cas général d'une variété riemannienne à un nombre quelconque  $n$  de dimensions. L'extension des formules de Frenet a été signalée par BLASCHKE [*Frenet's Formeln für den Raum von Riemann* (*Math. Zeitschrift*, B. 6, 1920, p. 94-99)] et a fait ensuite l'objet d'un grand nombre de publications. Voir notamment L. P. EISENHART, *Riemannian geometry*, Princeton University Press, 1927, p. 103-107.



Pour simplifier, il convient de se rapporter à des coordonnées  $x^1, x^2$  isothermes, c'est-à-dire telles que  $ds^2$  se réduit à la forme

$$(3.11) \quad ds^2 = \lambda(dx^{1^2} + dx^{2^2}).$$

Il convient en outre de supposer qu'on a justement affaire à la forme canonique <sup>(1)</sup> relative au point P, origine des arcs  $s$ . Alors, au voisinage, soit du premier ou du second ordre, de P, tout se passe comme si  $\lambda$  avait la forme

$$\frac{1}{1 + \frac{K}{4}(x^{1^2} + x^{2^2})^2},$$

les coordonnées  $x^1, x^2$  s'annulant au point P, et K désignant la courbure totale de la surface  $\sigma$  en ce point. Si l'on adopte les notations évidentes

$$\lambda_i = \frac{\partial \lambda}{\partial x^i}, \quad \lambda_{ik} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^i \partial x^k} \quad (i, k = 1, 2),$$

on reconnaît tout de suite que, au point P,

$$(3.12) \quad \lambda = 1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_{11} = \lambda_{22} = -K, \quad \lambda_{12} = 0.$$

Les valeurs des dérivées secondes peuvent être réunies dans la formule

$$(3.13) \quad \lambda_{ik} = -\delta_{ik}K \quad (i, k = 1, 2),$$

$\delta_{ik}$  étant les symboles de Kronecker (0 pour  $i \neq k$ , 1 pour  $i = k$ ).

On a, par conséquent,

$$\Gamma_{jh}^i = \frac{1}{2\lambda} \sum_l^2 \delta_{il} \{ \delta_{lj} \lambda_h + \delta_{lh} \lambda_j - \delta_{jh} \lambda_l \}.$$

Puisque  $\delta_{il}$  est nul pour  $l \neq i$  et égal à l'unité pour  $l = i$ , il reste simplement

$$(3.14) \quad \Gamma_{jh}^i = \frac{1}{2\lambda} \{ \delta_{ij} \lambda_h + \delta_{ih} \lambda_j - \delta_{jh} \lambda_i \}.$$

En introduisant ces valeurs dans (3.9) et en remplaçant au premier

<sup>(1)</sup> Voir ma Note, *Forme canoniche dei  $ds^2$  binari con data curvatura totale* (Rend. Acc. Lincei, Vol. XXV, 1937, p. 197-205).

membre  $t^i$  par  $\frac{dx^i}{ds}$ , il vient [à cause de  $\lambda(t^1 + t^2) = 1$ ]

$$(3.15) \quad \frac{d^2 x^i}{ds^2} = \gamma v^i - \frac{t^i}{\gamma} \sum_1^2 \lambda_h t^h + \frac{2\lambda}{\lambda_i}.$$

Au point P il reste simplement

$$(3.16) \quad \left(\frac{d^2 x^i}{ds^2}\right)_P = \gamma v^i \quad (i = 1, 2).$$

De même (3.10) se réduit, toujours au point P, à

$$(3.17) \quad \left(\frac{dv^i}{ds}\right)_P = -\gamma t^i.$$

En dérivant (3.15) par rapport à  $s$ , en tenant compte de ce que, pour une fonction  $f(x^1, x^2)$ , telle que  $\lambda, \lambda_h$  ou  $\lambda_i$ ,

$$\frac{df}{ds} = \sum_1^2 \frac{df}{\partial x^j} \frac{dx^j}{ds} = \sum_1^2 \frac{\partial f}{\partial x^j} t^j,$$

et en se rapportant ensuite au point P, il vient, d'après (3.16),

$$\left(\frac{d^3 x^i}{ds^3}\right)_P = \dot{\gamma} v^i - \gamma^2 t^i - \frac{t^i}{\lambda} \sum_1^2 \lambda_{hj} t^h t^j + \frac{1}{2\lambda^2} \sum_1^2 \lambda_{ij} t^j,$$

où  $\dot{\gamma}$  signifie  $\frac{d\gamma}{ds}$  (au point P, cela va sans dire) et les termes omis s'annulent en P.

En ayant égard aux formules (3.13), on a

$$(3.18) \quad \left(\frac{d^3 x^i}{ds^3}\right)_P = \dot{\gamma} v^i - \gamma^2 t^i + K t^i - \frac{1}{2} K t^i = \dot{\gamma} v^i + \left(\frac{1}{2} K - \gamma^2\right) t^i.$$

Au point P,  $\lambda = 1$  et les paramètres  $t^1 = \frac{dx^1}{ds}$ ,  $t^2 = \frac{dx^2}{ds}$  d'une direction quelconque  $\mathbf{t}$  coïncident, d'après (3.11), avec leurs cosinus de direction, c'est-à-dire avec  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$ , si  $\theta$  est l'angle que le vecteur  $\mathbf{t}$  forme avec la direction positive de la ligne coordonnée  $x^1$  ( $x^2 = \text{const.}$ ).

Analoguement  $\nu$  a les paramètres

$$\nu^1 = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta, \quad \nu^2 = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta,$$

étant toujours tourné par rapport à  $t$  de  $\frac{\pi}{2}$  dans le sens positif des rotations (qui est celui de la circulation  $P_h P_{h+1} P_{h+2}$ ), lorsqu'on envisage un triangle.

Il s'ensuit, d'après (3.3), (3.16) et (3.18), toujours pour le point  $P$  et ayant égard aux (3.12),

$$(3.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{dx^1}{ds}\right)_P = \cos\theta, \\ \left(\frac{d^2x^1}{ds^2}\right)_P = -\gamma \sin\theta, \\ \left(\frac{d^3x^1}{ds^3}\right)_P = \left(\frac{1}{2}K - \gamma^2\right) \cos\theta - \dot{\gamma} \sin\theta, \\ \left(\frac{dx^2}{ds}\right)_P = \sin\theta, \\ \left(\frac{d^2x^2}{ds^2}\right)_P = \gamma \cos\theta; \\ \left(\frac{d^3x^2}{ds^3}\right)_P = \left(\frac{1}{2}K - \gamma^2\right) \sin\theta + \dot{\gamma} \cos\theta. \end{array} \right.$$

Au numéro précédent nous avons caractérisé la petitesse d'un arc de courbe *plane*. Ici il s'agit plus généralement de courbes tracées sur une surface, ce qui fait intervenir aussi, on le voit notamment dans les développements ci-dessus, la courbure  $K$ . La manière dont doit se comporter  $K$  pour des arcs (et des triangles) petits peut se condenser en peu de mots, si l'on convient d'indiquer indifféremment par  $D$  la dérivée (d'une fonction ponctuelle sur  $\sigma$ ) par rapport à l'une ou à l'autre des lignes coordonnées. Alors,  $L$  ayant toujours la signification de longueur maximum à envisager dans les calculs, l'hypothèse à introduire à l'égard de  $K$  est que les produits (tous des nombres purs)

$$KL^2, \quad DK.L^3, \quad D^2K.L^4, \quad \dots$$

soient d'un ordre non inférieur à 2, 3, 4, ...

Nous sommes finalement à même d'écrire, comme au numéro précédent, et avec les mêmes remarques pour les arcs qui seront à

*regarder petits*, les développements suivant les puissances de l'arc  $s$  (explicités jusqu'au troisième ordre inclus) des coordonnées  $x^1, x^2$  d'une courbe  $C$  sortant du point  $P$  dans la direction  $\theta$  (à partir de la ligne coordonnée  $x^1$ ). On aura en premier lieu, puisque  $x^1, x^2$  s'annulent pour  $s = 0$ ,

$$x^i(s) = s \left\{ \left( \frac{dx^i}{ds} \right)_P + \frac{1}{2} s \left( \frac{d^2x^i}{ds^2} \right)_P + \frac{1}{6} s^2 \left( \frac{d^3x^i}{ds^3} \right)_P + \textcircled{3} \right\} \quad (i = 1, 2).$$

où les dérivées au point  $P$  sont définies par (3.19).

En mettant en évidence les facteurs  $\cos \theta, \sin \theta$ , on pourra écrire

$$(3.20) \quad \begin{cases} x^1 = \cos \theta y^1 + \sin \theta z^1, \\ x^2 = \cos \theta y^2 + \sin \theta z^2, \end{cases}$$

où

$$(3.21) \quad \begin{cases} y^1 = s \left\{ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{2} K - \gamma^2 \right) s^2 + \textcircled{3} \right\}, \\ y^2 = s \left\{ \frac{1}{2} \gamma s + \frac{1}{6} \dot{\gamma} s^2 + \textcircled{3} \right\}; \end{cases}$$

$$(3.22) \quad \begin{cases} z^1 = s \left\{ -\frac{1}{2} \gamma s + \frac{1}{6} \dot{\gamma} s^2 + \textcircled{3} \right\}, \\ z^2 = s \left\{ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{2} K - \gamma^2 \right) s^2 + \textcircled{3} \right\}. \end{cases}$$

Evidemment, les (3.21) sont les expressions paramétriques des coordonnées d'une courbe  $C$  tangente en  $P$  à la ligne  $x^1$  ( $\theta = 0$ ), tandis que les (3.22) se rapportent à une courbe tangente à la ligne orthogonale  $x^2$ .

**4. Corde géodésique issue de  $P$ . Angle avec la courbe au point  $P$ . Longueur.** — S'il s'agit en particulier d'une géodésique ( $\gamma = \dot{\gamma} = 0$ ), on tire des (3.21), (3.22)

$$\begin{aligned} y^1 &= s \left\{ 1 + \frac{1}{12} K s^2 + \textcircled{3} \right\}, & y^2 &= s \textcircled{3}; \\ z^1 &= s \textcircled{3}, & z^2 &= s \left\{ 1 + \frac{1}{12} K s^2 + \textcircled{3} \right\}. \end{aligned}$$

La représentation paramétrique (3.20) se réduit partant à

$$(4.1) \quad \begin{cases} x^1 = \cos \theta s \left( 1 + \frac{1}{12} K s^2 \right) + \sin \theta s \textcircled{3}, \\ x^2 = \sin \theta s \left( 1 + \frac{1}{12} K s^2 \right) + \cos \theta s \textcircled{3}. \end{cases}$$

Considérons sur C un point P', dont l'abscisse curviligne soit l, en regardant  $l > 0$ , c'est-à-dire les arcs comptés positivement de P vers P'. Supposons pour simplifier d'avoir choisi en P la direction de la ligne  $x^1$  tangente à C. Alors c'est la représentation paramétrique (3.21) qui convient à C, et il suffit d'y poser  $s = l$  pour avoir les coordonnées

$$l \left\{ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{2} K - \gamma^2 \right) l^2 + \textcircled{3} \right\}, \quad l \left\{ \frac{1}{2} \gamma l + \frac{1}{6} \dot{\gamma} l^2 + \textcircled{3} \right\}$$

du point P'.

Ce même point appartient d'ailleurs aussi à la corde  $\overline{PP'}$ , représentée paramétriquement par (4.1) et correspond à  $s = a$ . Égalant et divisant par l, on a

$$(4.2) \quad \begin{cases} 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{2} K - \gamma^2 \right) l^2 + \textcircled{3} = \frac{a}{l} \cos \theta \left( 1 + \frac{1}{12} K a^2 \right), \\ \frac{1}{2} \gamma l + \dot{\gamma} l^2 + \textcircled{3} = \frac{a}{l} \sin \theta \left( 1 + \frac{1}{12} K a^2 \right), \end{cases}$$

qui définissent  $\frac{a}{l}$  et  $\theta$  en fonction de l et des caractères se rapportant au point P :  $\gamma, \dot{\gamma}$  de la courbe C, K de la surface  $\sigma$ .

Tout d'abord, en divisant la seconde équation par la première, on tire

$$\text{tang } \theta = \frac{\frac{1}{2} \gamma l + \frac{1}{6} \dot{\gamma} l^2}{1 + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{2} K - \gamma^2 \right) l^2} + \textcircled{3} = \frac{1}{2} \gamma l + \frac{1}{6} \dot{\gamma} l^2 + \textcircled{3},$$

montrant, ce qui était évident *a priori*, que  $\text{tang } \theta$  est une petite quantité de premier ordre. Dès lors, par le développement de Maclaurin, puisque  $\text{tang } \theta$  est une fonction impaire,  $\text{tang } \theta = \theta + \textcircled{3}$ .

et par conséquent

$$(4.3) \quad \theta = \frac{1}{2} \gamma l + \frac{1}{6} \gamma l^2 + \textcircled{3}, \quad \cos \theta = 1 - \frac{1}{8} \gamma^2 l^2 + \textcircled{3}.$$

Avec une telle valeur de  $\cos \theta$ , la première des équations (4.2) donne successivement, en négligeant d'abord même le premier ordre,

$$\frac{a}{l} = 1 + \textcircled{1},$$

puis le second

$$\frac{a}{l} = 1 + \textcircled{2},$$

et enfin seulement le troisième

$$1 + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{2} K - \gamma^2 \right) l^2 = \frac{a}{l} \left( 1 - \frac{1}{8} \gamma^2 l^2 \right) \left( 1 + \frac{1}{12} K l^2 \right) + \textcircled{3}.$$

Dans le dernier binôme on a pu écrire tranquillement  $l$  au lieu de  $a$ , puisque la différence entre  $K l^2$  et  $K a^2$  est non seulement du troisième, mais même du quatrième ordre. Il vient de la sorte

$$\begin{aligned} \frac{a}{l} &= \left\{ 1 + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{2} K - \gamma^2 \right) l^2 \right\} \left( 1 + \frac{1}{8} \gamma^2 l^2 \right) \left( 1 - \frac{1}{12} K l^2 \right) + \textcircled{3} \\ &= 1 - \frac{1}{24} \gamma^2 l^2 + \textcircled{3} \end{aligned}$$

ou, si l'on veut,

$$(4.4) \quad a = l \left\{ 1 - \frac{1}{24} \gamma^2 l^2 + \textcircled{3} \right\},$$

relation bien connue entre la longueur d'un petit arc et sa corde, pour une courbe plane ou de l'espace ordinaire <sup>(1)</sup>. Pour une courbe tracée sur une surface quelconque (où  $\gamma$  indique sa courbure géodésique et  $a$  la longueur de la corde géodésique), le résultat a été déjà signalé par Darboux <sup>(2)</sup>, qui a poussé le calcul jusqu'au quatrième ordre

(1) Elle découle immédiatement de la représentation canonique d'une courbe au voisinage d'un de ses points. Voir, par exemple, JULIA, *loc. cit.*, à la page 11, p. 132; E. CESÀRO y parvient par des considérations directes à la page 194 de ses *Elementi di calcolo infinitesimale*, Napoli, Alvano, 1905.

(2) *Loc. cit.*, à la page 1, p. 176.

inclus. Même en s'arrêtant au troisième, on aurait pu s'attendre à l'intervention de  $K$ , puisque au cours du calcul on a affaire aux termes du troisième ordre dans le développement paramétrique (qui dépendent en général des dérivées premières et secondes des coefficients du  $ds^2$ ). Le résultat montre qu'il n'en est rien; tandis que je n'ai pas réussi à m'en rendre compte d'une manière synthétique.

*Remarque.* — Dans la formule (4.4) la valeur de  $\gamma$  se rapporte au point  $P$ , une des deux extrémités commune à l'arc et à sa corde. Au même ordre d'approximation, on peut remplacer la valeur de  $\gamma$  en  $P$  par sa détermination à l'autre extrémité  $P'$ , ou plus généralement dans un point quelconque  $M$ , intérieur à l'arc  $\widehat{PP'}$ . En effet, si  $s \leq l$  est l'abscisse curviligne  $\widehat{PM}$  de  $M$ , on a, d'après la formule des accroissements finis,

$$\gamma_M = \gamma \left\{ 1 + \textcircled{1} \right\},$$

ce qui assure la validité des (4.4), au troisième ordre près, quel que soit le point  $M$  de  $PP'$  auquel on rapporte la détermination de  $\gamma$ .

**5. Retour au triangle  $P_h P_{h+1} P_{h+2}$ . Le triangle des cordes géodésiques. Relations entre les côtés et les angles de ces deux triangles.** — Revenons au triangle  $P_h P_{h+1} P_{h+2}$  en remarquant que, au point de vue qualitatif (sens et signes), tout marche, si le triangle est assez petit, comme dans le cas des petits triangles circulaires dans le plan (n° 1).

D'après cela, fixons notre attention sur un sommet quelconque  $P_h$ , et continuons à appeler  $\varphi_h$  l'angle du triangle donné (formé en  $P_h$  par les deux arcs curvilignes  $\widehat{P_h P_{h+1}}$  et  $\widehat{P_h P_{h+2}}$ ),  $\alpha_h$  l'angle des cordes géodésiques correspondantes  $\overline{P_h P_{h+1}}$  et  $\overline{P_h P_{h+2}}$ . Comme au n° 1, il convient d'introduire les deux angles  $\beta$ , compris au point  $P_h$  entre les côtés  $\widehat{P_h P_{h+1}}$ ,  $\widehat{P_h P_{h+2}}$  et leurs cordes. Nous les appellerons  $\beta_{h,h+1}$  et  $\beta_{h,h+2}$  respectivement, *le premier indice se rapportant au sommet*. Au n° 1, à cause d'une propriété du cercle, on avait seulement trois angles  $\beta$ , et l'on pouvait se passer du premier indice. En envisageant par exemple le côté  $\widehat{P_h P_{h+1}}$ , on avait l'égalité des deux angles  $\beta_{h,h+1}$  et  $\beta_{h+1,h}$ , qu'on appelait tous les deux  $\beta_{h+2}$ . Ici nous devons introduire six  $\beta$ , à deux indices distincts. Leur évaluation a été substantiellement

faite au numéro précédent : on n'a qu'à spécifier dûment la formule (4.3).

Appliquons-la d'abord à l'angle  $\beta_{h,h+1}$ , compris au point  $P_h$  entre l'arc  $\widehat{P_h P_{h+1}}$  et sa corde. Alors  $\beta_{h,h+1}$  s'identifie avec  $\theta$ , pourvu que l'on remplace  $l$  par la longueur  $l_{h+2}$  du côté  $\widehat{P_h P_{h+1}}$  opposé au point  $P_{h+2}$ , et  $\gamma, \dot{\gamma}$  par  $\gamma_{h+2}$  et  $\dot{\gamma}_{h+2}$ , ou, en spécifiant davantage, par  $(\gamma_{h+2})_{P_h}$ ,  $(\dot{\gamma}_{h+2})_{P_h}$ , ce qui met en évidence le point de l'arc  $\widehat{P_h P_{h+1}}$  auquel se rapportent les valeurs de la courbure et de sa dérivée. On a de la sorte

$$(5.1) \quad \beta_{h,h+1} = \frac{1}{2} (\gamma_{h+2})_{P_h} l_{h+2} + \frac{1}{6} (\dot{\gamma}_{h+2})_{P_h} l_{h+2}^2 + \textcircled{3}.$$

Le signe de  $\beta_{h,h+1}$  est celui du terme prépondérant, c'est-à-dire (les longueurs  $l$  étant nécessairement positives) de  $(\gamma_{h+2})_{P_h}$ , comme il doit arriver, conformément aux remarques faites au n° 1, à propos de la formule (1.1). Naturellement on peut donner à  $h$  les valeurs 1, 2, 3, avec la convention usuelle de réduire mod 3 tout indice  $h + 1, h + 2$ .

La notation  $\dot{\gamma}$  indique la dérivée par rapport à l'arc du côté  $\widehat{P_h P_{h+1}}$ , compté de  $P_h$  vers  $P_{h+1}$ , c'est-à-dire dans le sens  $P_h P_{h+1} P_{h+2}$  adopté comme positif pour la circulation sur le périmètre du triangle.

Considérons maintenant l'autre côté  $\widehat{P_h P_{h+2}}$  aboutissant au point  $P_h$ , et l'angle  $\beta_{h,h+2}$  qu'il forme avec sa propre corde  $\overline{P_h P_{h+2}}$ . Son expression, fournie directement par (4.3) serait

$$\beta_{h,h+2} = \frac{1}{2} (\gamma_{h+1})_{P_h} l_{h+1} + \frac{1}{6} (\dot{\gamma}_{h+1})_{P_h} l_{h+1}^2 + \textcircled{3},$$

où l'indice  $h + 1$  se rapporte au côté  $\widehat{P_h P_{h+2}}$ , opposé au sommet  $P_{h+1}$ ; ici évidemment on doit regarder la dérivée  $\dot{\gamma}_{h+1}$  de la courbure faite (par rapport à l'arc du côté  $\widehat{P_h P_{h+2}}$ ) vers  $P_{h+2}$ . Le sens ne coïncide pas cette fois avec le sens positif de circulation  $P_h P_{h+1} P_{h+2}$ , mais se trouve renversé. Si nous convenons que le point superposé  $\dot{\gamma}$  désigne toujours une dérivation dans le sens circulaire ( $h, h + 1, h + 2$ ), adopté comme positif sur le périmètre du triangle, il faut remplacer dans le second membre de la formule ci-dessus le signe  $+$  par  $-$ , et il vient

$$(5.2) \quad \beta_{h,h+2} = \frac{1}{2} (\gamma_{h+1})_{P_h} l_{h+1} - \frac{1}{6} (\dot{\gamma}_{h+1})_{P_h} l_{h+1}^2 + \textcircled{3}.$$



La règle à retenir est que, dans les expressions des  $\beta$  à deux indices distincts, si l'ordre de ces indices est progressif [formule (5.1)], le second terme a le signe +, tandis qu'il est précédé du signe - si [comme dans (5.2)] l'ordre circulaire des deux indices est rétrograde.

Dans les formules (5.1) et (5.2) figurent les  $\gamma$  et  $\dot{\gamma}$  d'un même côté, soit (par un choix convenable des indices)  $\widehat{P_{h+1}P_{h+2}}$ , rapportées une fois à  $P_{h+1}$  et une fois à  $P_{h+2}$ . On le constate en écrivant  $h+1$  au lieu de  $h$  dans les formules (5.1), ce qui donne, en mettant en évidence le point auquel se rapporte la détermination,

$$\beta_{h+1, h+2} = \frac{1}{2} (\gamma_h)_{P_{h+1}} l_h + \frac{1}{6} (\dot{\gamma}_h)_{P_{h+1}} l_h^2 + \textcircled{3};$$

et  $h+2$  au lieu de  $h$  dans (5.2), ce qui donne

$$\beta_{h+2, h+1} = \frac{1}{2} (\gamma_h)_{P_{h+2}} l_h - \frac{1}{6} (\dot{\gamma}_h)_{P_{h+2}} l_h^2 + \textcircled{3}.$$

Il est avantageux de faire apparaître dans les deux formules les déterminations au point  $M_h$ , milieu de l'arc  $\widehat{P_{h+1}P_{h+2}}$ . On a, en procédant dans le sens direct de la circulation,

$$(\gamma_h)_{M_h} l_h = (\gamma_h)_{P_{h+1}} l_h + \frac{1}{2} (\dot{\gamma}_h)_{P_{h+1}} l_h^2 + \textcircled{3},$$

$$(\gamma_h)_{P_{h+2}} l_h = (\gamma_h)_{M_h} l_h + \frac{1}{2} (\dot{\gamma}_h)_{M_h} l_h^2 + \textcircled{3}.$$

Supprimons la spécification ponctuelle lorsqu'il s'agit du point  $M_h$ , et remarquons que

$$(\dot{\gamma}_h)_{P_{h+1}} l_h^2 = (\dot{\gamma}_h)_{M_h} l_h^2 + \textcircled{3} = \dot{\gamma}_h l_h^2 + \textcircled{3}.$$

Il vient alors

$$(\gamma_h)_{P_{h+1}} l_h = \gamma_h l_h - \frac{1}{2} \dot{\gamma}_h l_h^2 + \textcircled{3},$$

$$(\gamma_h)_{P_{h+2}} l_h = \gamma_h l_h + \frac{1}{2} \dot{\gamma}_h l_h^2 + \textcircled{3},$$

et les expressions précédentes de  $\beta_{h+1, h+2}$  et  $\beta_{h+2, h+1}$  prennent la forme

définitive

$$(3.3) \quad \beta_{h+1,h+2} = \frac{1}{2} \gamma_h l_h - \frac{1}{3} \dot{\gamma}_h l_h^2 + \textcircled{3},$$

$$(3.4) \quad \beta_{h+2,h+1} = \frac{1}{2} \gamma_h l_h + \frac{1}{3} \dot{\gamma}_h l_h^2 + \textcircled{3},$$

où c'est toujours le premier indice qui marque le sommet auquel se rapporte l'angle; et l'on doit entendre par  $\gamma_h, \dot{\gamma}_h$  justement leur détermination au milieu  $M_h$  du côté  $\widehat{P_{h+1}P_{h+2}}$ .

Des formules analogues à (1.2) expriment l'angle  $\varphi_h$  du triangle donné moyennant l'angle correspondant  $\alpha_h$  du triangle des cordes et les  $\beta$ . Elles s'écrivent actuellement

$$\varphi_h = \alpha_h + \beta_{h,h+1} + \beta_{h,h+2},$$

c'est-à-dire, d'après (3.3) et (3.4), en isolant  $\alpha_h$ ,

$$(3.5) \quad \alpha_h = \varphi_h - \frac{1}{2} (\gamma_{h+1} l_{h+1} + \gamma_{h+2} l_{h+2}) - \frac{1}{3} (\dot{\gamma}_{h+1} l_{h+1}^2 - \dot{\gamma}_{h+2} l_{h+2}^2) + \textcircled{3} \quad (h = 1, 2, 3).$$

Dans ces relations [ainsi que dans les (4.3), dont elles dérivent] ne figure pas, au troisième ordre près, la courbure totale  $K$  de la surface, où a siège le triangle. Il en est de même pour les expressions des longueurs des cordes géodésiques en fonction des côtés. En effet, la formule (4.4), rapportée au côté  $\widehat{P_{h+1}P_{h+2}}$  de longueur  $l_h$ , donne, pour la corde géodésique  $a_h$ ,

$$(3.6) \quad a_h = l_h \left\{ \left( 1 - \frac{1}{24} \gamma_h^2 l_h^2 \right) + \textcircled{3} \right\},$$

où il est loisible [n° 4, remarque finale] de regarder  $\gamma_h$  comme étant la détermination au point  $M_h$ , milieu du côté  $\widehat{P_{h+1}P_{h+2}}$ .

Nous avons désormais dans les formules (3.5), (3.6) tout ce qu'il nous faut pour établir, en seconde approximation, la trigonométrie des petits triangles curvilignes de  $\sigma$ .

**6. Relations trigonométriques.** — Le triangle des cordes géodésiques a les côtés  $a_h$  et les angles  $\alpha_h$ . Dans notre approximation,

c'est-à-dire *au troisième ordre près*, (vis-à-vis de l'unité, bien entendu), la surface  $\sigma$ , aux environs d'un quelconque de ses points  $O$ , peut être envisagée comme *une variété à courbure constante*  $K$ , la détermination de  $K$  se rapportant justement au point  $O$  <sup>(1)</sup>.

D'après cela, pour le triangle géodésique ayant les côtés  $a_h$  et les angles  $\alpha_h$ , sont valables les formules de la trigonométrie sphérique ou lobatchewskienne, suivant le signe de  $K$ . On posera

$$K = \frac{1}{R^2},$$

avec la spécification

$$R > 0 \quad \text{pour } K > 0$$

et

$$-iR > 0 \quad \text{pour } K < 0 \quad (i = \sqrt{-1}).$$

En se bornant au théorème des sinus on aura à transformer, qu'il s'agisse de la sphère ou de la pseudo-sphère, les formules

$$(6.1) \quad |\sin a'_h| = \frac{l}{|R|} \sin \alpha_h \quad (h = 1, 2, 3),$$

où j'ai posé pour abrégier l'écriture

$$(6.2) \quad a'_h = \frac{a_h}{R} \quad (2).$$

(1) La remarque est presque évidente, puisque, dans les représentations canoniques d'une courbe au voisinage d'un point donné, la variation de la courbure affecte seulement les termes à partir du quatrième ordre. Pour plus de détails on peut voir ma Note récente déjà citée à la page 16, ainsi que le mémoire, déjà cité dans la préface, de M. SEVERI, notamment p. 232-241.

(2) En effet, dans le cas de la sphère ( $R > 0$ ) les premiers membres des (6.1) doivent être  $\sin \frac{a_h}{R}$ , c'est-à-dire  $\sin a'_h$ , qui ne diffère pas de  $|\sin a'_h|$  pour  $a'_h$  positif et assez petit. Dans le cas non euclidien, où  $R$  est purement imaginaire ( $-iR > 0$ ), on n'a qu'à remplacer  $\sin \frac{a_h}{R}$  par  $\mathfrak{s}$  (sinus hyperbolique) de l'argument  $\frac{a_h}{|R|}$ . Pour constater que c'est encore  $|\sin a'_h|$ , partons de

$$a'_h = \frac{a_h}{R} = -i \frac{a_h}{|R|};$$

$l$ , indépendant de  $h$ , est ce qu'on appelle le *module* du triangle sphérique ou pseudo-sphérique. Sa valeur, exprimée par exemple moyennant les seuls côtés, est

$$(6.3) \quad \frac{l}{|R|} = \frac{|\sin a'_1 \sin a'_2 \sin a'_3|}{\{1 - \cos^2 a'_1 - \cos^2 a'_2 - \cos^2 a'_3 + 2 \cos a'_1 \cos a'_2 \cos a'_3\}^{\frac{1}{2}}}.$$

L'expression de  $l$  prête à des remarques intéressantes, mais nous ne nous y arrêterons pas pour ne pas trop allonger le présent article. On se bornera à développer ici encore le *théorème des sinus*, c'est-à-dire à introduire dans les formules (6.1) les expressions (5.5) des  $\alpha_h$  et (6.2), (5.6) des  $a_h$ , savoir

$$(6.4) \quad a'_h = \frac{l_h}{R} \left\{ 1 - \frac{1}{24} \gamma_h^2 l_h^2 + \textcircled{3} \right\}.$$

D'après la préparation déjà accomplie, justement à l'ordre d'approximation susdit, des expressions (6.4) des  $a'_h$  et (5.5) des  $\alpha_h$ , il n'y a qu'à faire la substitution dans les (6.1); en résolvant ensuite par rapport aux côtés  $l_h$  du triangle curviligne. Un tel calcul a été déjà fait, en se bornant toutefois à la première approximation, au n° 1, et il nous a conduit aux expressions (1.10) des  $l_h$  comme fonctions des angles  $\varphi_h$  (des  $\gamma_h$  et de l'auxiliaire  $l$ ). Il importe de remarquer à ce propos que la longueur auxiliaire  $l$ , introduite actuellement comme facteur de proportionnalité dans les formules (6.1), s'identifie en première approximation avec ce qu'on a désigné par la même lettre au n° 1.

En effet, partons des (6.1) et tenons compte de ce que  $a'_h$  est réel ou purement imaginaire (et par suite  $a_h'^2$  est réel en tout cas). Il vient

d'où

$$\sin a'_h = -\sin i \frac{\alpha_h}{|R|} = -i s \frac{\alpha_h}{|R|}.$$

En égalant les modules des deux membres, on a bien

$$|\sin a'_h| = s \frac{\alpha_h}{|R|}.$$

G. Q. F. D.

Voir, par exemple, BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, Vol. I (Terza edizione, Pisa, 1922, p. 638).

d'abord

$$|a'_h| \left\{ 1 - \frac{1}{6} a_h'^2 + \textcircled{4} \right\} = \frac{l}{|R|} \sin \alpha_h.$$

En y remplaçant  $|a'_h|$  par sa valeur (6.4), puisque, toujours en vertu des (6.4),

$$a'_h = \frac{l_h}{R} \left\{ 1 + \textcircled{2} \right\}, \quad 1 - \frac{1}{6} a_h'^2 = 1 - \frac{1}{6} \frac{l_h^2}{R^2} + \textcircled{4},$$

on tire

$$\frac{l_h}{|R|} = \frac{l}{|R|} \sin \alpha_h \left\{ 1 + \frac{1}{6} \frac{l^2}{R^2} \sin^2 \alpha_h + \frac{1}{24} \gamma_h^2 l_h^2 + \textcircled{3} \right\};$$

d'où, en particulier,

$$l_h = l \sin \alpha_h \left\{ 1 + \textcircled{2} \right\},$$

ce qui coïncide bien au second ordre près, avec la caractérisation de  $l$ , qu'on tire de (1.5) moyennant (1.6).

Dans la parenthèse de la formule, où l'on tient compte aussi du second ordre, on peut remplacer tout bonnement  $\alpha_h$  par  $\varphi_h$ , et également  $l_h$  par  $l \sin \varphi_h$ , puisque de la sorte on ne néglige que le troisième ordre devant l'unité. On a ainsi, en écrivant en surplus  $K$  au lieu de  $\frac{1}{R^2}$ ,

$$(6.5) \quad l_h = l \sin \alpha_h \left\{ 1 + \frac{1}{6} l^2 \sin^2 \varphi_h (K + \frac{1}{4} \gamma_h^2) + \textcircled{3} \right\}.$$

Il ne reste plus qu'à se procurer  $\sin \alpha_h$ , jusqu'au second ordre, en fonction des  $\varphi_h$  et de  $l$ .

En posant pour un moment

$$(6.6) \quad \delta_h = \frac{1}{2} (\gamma_{h+1} l_{h+1} + \gamma_{h+2} l_{h+2}) + \frac{1}{3} (\dot{\gamma}_{h+1} l_{h+1}^2 + \dot{\gamma}_{h+2} l_{h+2}^2),$$

les équations (5.5) s'écrivent

$$\alpha_h = \varphi_h - \delta_h + \textcircled{3};$$

d'où

$$\sin \alpha_h = \sin \varphi_h \cos \delta_h - \cos \varphi_h \sin \delta_h + \textcircled{3}.$$

En tenant compte de la circonstance que  $\delta_h$  est du premier ordre, et en négligeant, comme toujours, le troisième (vis-à-vis des termes finis)

il s'ensuit

$$\sin \alpha_h = \sin \varphi_h \left( 1 - \frac{1}{2} \delta_h^2 \right) - \cos \varphi_h \cdot \delta_h + \textcircled{3}.$$

Dans  $\delta_h^2$ , il y lieu de retenir, d'après (6.6), seulement le carré du premier terme. Il reste partant

$$(6.7) \quad \sin \alpha_h = \sin \varphi_h \left\{ 1 - \frac{1}{8} (\gamma_{h+1} l_{h+1} + \gamma_{h+2} l_{h+2})^2 \right\} - \cos \varphi_h \cdot \delta_h + \textcircled{3},$$

où  $\delta_h$  est défini par (6.6). Les parties d'ordre 0 et 1 ont été déjà calculées au n° 1, formule (1.8). Elles peuvent partant s'écrire, d'après (1.9),  $\sin \varphi_h$  et  $\psi_h \sin \varphi_h$ , où

$$(6.8) \quad \psi_h = \frac{1}{2} l (\gamma_h \cos \varphi_h - 3\tau \cot \varphi_h).$$

D'autre part, à cause de (6.6), le terme du second ordre  $\chi_h \sin \varphi_h$  dans (6.7) est

$$- \sin \varphi_h \frac{1}{8} (\gamma_{h+1} l_{h+1} + \gamma_{h+2} l_{h+2})^2 - \cos \varphi_h \frac{1}{3} (\dot{\gamma}_{h+1} l_{h+1}^2 + \dot{\gamma}_{h+2} l_{h+2}^2).$$

On peut y remplacer  $l_{h+1}$  et  $l_{h+2}$  par  $l \sin \varphi_{h+1}$ ,  $l \sin \varphi_{h+2}$ , et l'on a

$$\chi_h = - l^2 \left\{ \frac{1}{8} (\gamma_{h+1} \sin \varphi_{h+1} + \gamma_{h+2} \sin \varphi_{h+2})^2 + \frac{1}{3} \cot \varphi_h (\dot{\gamma}_{h+1} \sin^2 \varphi_{h+1} + \dot{\gamma}_{h+2} \sin^2 \varphi_{h+2}) \right\}.$$

Pour plus de symétrie faisons apparaître, comme au n° 1, la courbure triangulaire

$$(6.9) \quad \tau = \frac{1}{3} \sum_1^3 \gamma_h \sin \varphi_h,$$

et le trinome analogue

$$(6.10) \quad \tau' = \frac{1}{3} \sum_1^3 \dot{\gamma}_h \sin^2 \varphi_h.$$

Alors on peut attribuer à  $\chi_h$  la forme

$$(6.11) \quad \chi_h = - l^2 \left\{ \frac{1}{8} (3\tau - \gamma_h \sin \varphi_h)^2 + \frac{1}{3} \cot \varphi_h (3\tau' - \dot{\gamma}_h \sin^2 \varphi_h) \right\}.$$

Toujours est-il que (1.7), en y séparant les termes de différents ordres s'écrit

$$(6.12) \quad \sin \alpha_h = \sin \varphi_h \left\{ 1 + \psi_h + \chi_h + \textcircled{3} \right\} \quad (h = 1, 2, 3).$$

En remarquant que  $\sin \alpha_h$  peut être remplacé par  $\sin \varphi_h$  lorsqu'il est multiplié par un terme du second ordre, on tire finalement des (6.5) et (6.12)

$$(6.13) \quad \frac{l_h}{|R| \sin \varphi_h} = l \left\{ 1 + \psi_h + \chi_h + \frac{1}{6} l^2 \left( K + \frac{1}{4} \gamma_h^2 \right) \sin^2 \varphi_h + \textcircled{3} \right\}.$$

C'est la forme du théorème des sinus en seconde approximation,  $\psi_h$  et  $\chi_h$  ayant les valeurs (6.8) et (6.11).

**7. Remarque sur le théorème de Legendre.** — Dans le calcul du numéro précédent nous avons utilisé, pour le triangle des cordes, des formules de trigonométrie sphérique ou pseudo-sphérique. On serait peut-être enclin à penser que, dans l'approximation du second ordre dont nous nous sommes contentés, on aurait pu d'abord appliquer le théorème de Legendre, qui, au même degré d'approximation, ramène la résolution d'un triangle géodésique sur une surface à courbure constante à celle d'un triangle plan ayant les mêmes côtés et les angles modifiés d'un tiers de l'excès  $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \pi$ . En réalité il n'en est rien et voici pour quelle raison.

On arrive à l'énoncé ci-dessus en constatant que les mêmes relations indépendantes, au nombre de trois (précisément celles qui expriment le théorème du cosinus), sont satisfaites *au troisième ordre près* par les éléments du triangle sphérique (ou pseudo-sphérique) et ceux du triangle plan correspondant. Il ne s'ensuit pas d'une manière absolue (comme s'il s'agissait d'égalités rigoureuses) que toute combinaison des trois relations soit également valable dans les deux cas *au même ordre d'approximation*. Justement, pour le théorème des sinus, on s'aperçoit aisément que l'équivalence subsiste seulement en première, mais *non en seconde approximation*.

C'est pour cela que nous avons dû prendre comme point de départ les formules (6.1) de trigonométrie sphérique (ou pseudo-sphérique), sans les réduire d'avance moyennant le théorème de Legendre.

### 8. Indications générales sur les approximations d'ordre supérieur.

I. *Cas du plan.* — La représentation paramétrique des courbes planes, envisagée au n° 2, peut être poussée, à l'aide de développements tayloriens, suivant les puissances croissantes de l'arc  $s$ , jusqu'à un ordre  $m$  arbitraire. On suppose, bien entendu, que chaque arc de courbe dont il s'agit, se comporte, par rapport à la courbure géodésique  $\gamma$  et à ses dérivées, d'une manière analogue à celle admise pour les deux premières approximations. On suppose notamment (n° 2, page 11) que,  $L$  étant une limite supérieure des longueurs à envisager, et

$$\gamma, \dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(m-1)}, \gamma^{(m)},$$

les valeurs des dérivées de la courbure (dans n'importe quel point de cet arc), les produits

$$\gamma L, \dot{\gamma} L^2, \dots, \gamma^{(m-1)} L^m, \gamma^{(m)} L^{m+1}$$

(qui sont des nombres purs) ont un ordre de grandeur non inférieure à

$$1, 2, \dots, m, m+1,$$

respectivement. Alors, si l'on considère d'abord le vecteur-unité  $\mathbf{t}$ , tangent à la courbe, on reconnaît, d'après les formules de Frenet, que  $\mathbf{t}(s)$ , jusqu'à l'ordre  $m$  inclus peut être représenté sous la forme

$$(8.1) \quad \mathbf{t}(s) = \alpha(s) \mathbf{t}_0 + \omega(s) \mathbf{n}_0,$$

$\alpha(s)$  et  $\omega(s)$  étant des polynomes de degré  $m$  en  $s$ , dont les coefficients contiennent (sous forme rationnelle et entière) les valeurs de  $\gamma$  et de ses dérivées  $\dot{\gamma}, \dots, \gamma^{(m-1)}$ , jusqu'à l'ordre  $m-1$ , pour  $s=0$  (ou même pour une autre valeur quelconque de  $s$  entre 0 et  $L$ );  $\mathbf{t}_0$  désigne évidemment la détermination de  $\mathbf{t}$  pour  $s=0$ , et  $\mathbf{n}_0$  n'est que  $\mathbf{t}_0$  tourné de  $\frac{\pi}{2}$  dans le sens positif.

Si  $Q(s)$  désigne le point courant de l'arc dont on s'occupe, on a

$$\frac{dQ}{ds} = \mathbf{t}(s)$$

et, par intégration de  $\mathbf{t}(s)$ , depuis  $s=0$ , correspondant, disons, au point P, jusqu'à un  $s$  générique, on se procure la représentation



paramétrique de l'arc. Si l'on pose, pour abrégér,

$$\mathcal{C}(s) = \int_0^s \alpha(s) ds, \quad \mathcal{Q}(s) = \int_0^s \beta(s) ds$$

(les  $\gamma$  figurant dans  $\alpha$  et  $\beta$  devant être traitées comme des constantes vis-à-vis de l'intégration), il vient, pour l'autre extrémité  $P'$  de l'arc ( $s = l$ ,  $Q = P$ )

$$(8.2) \quad P' - P = \mathcal{C}(l)\mathbf{t}_0 + \mathcal{Q}(l)\mathbf{n}_0,$$

tandis que, pour le verneur tangentiel  $\mathbf{t}'$  au point  $P$ , on tire de (8.1), en y posant  $s = l$ ,

$$(8.3) \quad \mathbf{t}' = \alpha(l)\mathbf{t}_0 + \beta(l)\mathbf{n}_0.$$

D'autre part, si  $\mathbf{u}$  désigne le verneur de  $P' - P$  et  $a$  sa longueur, on a

$$P' - P = a\mathbf{u},$$

ce qui permet d'attribuer à l'équation vectorielle (8.2) la forme

$$(8.4) \quad a\mathbf{u} = \mathcal{C}(l)\mathbf{t}_0 + \mathcal{Q}(l)\mathbf{n}_0,$$

qui équivaut à deux équations scalaires, tandis que (8.3), exprimant l'égalité de deux verseurs, revient à une seule. Les trois ensemble permettent de déduire, pour la figure (lunule) formée par un arc  $\widehat{PP'}$  et sa corde  $\overline{PP'}$ , soit la longueur  $a$  de la corde, soit les deux angles de contingence entre corde et arc aux sommets  $P$ ,  $P'$ , en fonction de  $l$ , de  $\gamma$  et de ses dérivées (jusqu'à l'ordre  $m - 1$ ).

Si maintenant on envisage, toujours dans le plan, un petit triangle  $P_h P_{h+1} P_{h+2}$  ayant pour côtés des courbes quelconques, on peut, pour chaque côté, se procurer de la sorte la longueur  $a_h$  de la corde et les deux angles de contingence  $\beta_{h+1, h+2}$ ,  $\beta_{h+2, h+1}$  en fonction des  $l_h$ , des  $\gamma_h$  et de leurs dérivées. Et l'on aura, comme au n° 5, pour les angles  $\alpha_h$  du triangle des cordes,

$$\alpha_h = \varphi_h - (\beta_{h+1, h+2} + \beta_{h+2, h+1}),$$

$\varphi_h$  étant les angles du triangle curviligne.

Dès lors, on n'a qu'à remplacer, dans une relation quelconque de la trigonométrie rectiligne, les  $a_h$  et les  $\alpha_h$  en fonction des  $l_h$ , des  $\varphi_h$ , des courbures  $\gamma_h$  et de leurs dérivées  $\dot{\gamma}_h, \dots, \gamma_h^{(m-1)}$  (jusqu'à

l'ordre  $m - 1$ ), pour en déduire les formules correspondantes, se rapportant au triangle curviligne, *exactes jusqu'à l'ordre  $m$  inclus*.

II. *Sphère*. — Tout ce qui précède peut être transporté *mutatis mutandis* aux petits triangles (curvilignés quelconques) tracés sur une sphère ou pseudo-sphère, étant naturellement à compter que, au cours de calculs et dans les formules finales, il y aura lieu de rencontrer aussi la constante  $K$  de la courbure totale ( $KL^2$  étant censé du second ordre).

III. *Surface quelconque*. — La méthode suivie aux nos 3 et 5, pour  $m = 2$ , sur une surface quelconque, et les compléments esquissés, dans le cas du plan, pour  $m$  quelconque, peuvent être combinés. On introduit alors, non seulement les dérivées des courbures géodésiques, jusqu'à l'ordre  $m - 1$ , mais aussi les valeurs de la courbure totale  $K$  et de ses dérivées partielles, jusqu'à l'ordre  $m - 2$ , ces dernières dans un même point du triangle, qu'on peut choisir à son gré. On suppose naturellement, à l'égard des ordres de grandeurs, que les choses se passent de la manière spécifiée au n° 3, page 18.

Il convient toutefois, même en restant dans les généralités, de fixer l'attention sur une circonstance qui est bien connue pour les triangles géodésiques (<sup>1</sup>). C'est qu'on ne pourra pas, de règle, aboutir à des relations renfermant *seulement* côtés, angles, courbures géodésiques  $\gamma$  des côtés, courbure totale  $K$  de la surface, et leurs dérivées. Ceci à cause de la non-homogénéité métrique de la surface  $\sigma$ , d'après laquelle la position et l'orientation du triangle ne sont pas indifférents, de sorte que, en général, on ne réussira pas à éliminer les coordonnées des sommets (ou quelque autre élément absolu, c'est-à-dire impliquant la localisation du triangle sur la surface  $\sigma$ ), qu'il convient d'introduire pour effectuer les calculs, ainsi que pour réduire les valeurs de  $K$  et de ses dérivées à un point unique. On est assuré *a priori* qu'une telle difficulté n'existe pas pour les surfaces admettant un groupe  $\infty^3$  de mouvements. Alors, on retombe d'ailleurs sur les surfaces à courbure totale constante.

IV. *Première et seconde approximation*. — On a traité en détail les cas  $m = 1$  et  $m = 2$ . A la vérité, pour  $m = 1$ , nous nous sommes d'abord appuyés (n° 1) sur la géométrie élémentaire dans le plan;

---

(<sup>1</sup>) Comparez DARBOUX, *loc. cit.* au début, p. 181-182.

mais nous avons ensuite constaté (à la fin du n° 5) que les résultats de première approximation n'en diffèrent pas, quelle que soit la courbure  $K$ , puisqu'elle intervient seulement à partir de  $m = 2$ . *Tout se passe donc en première approximation comme pour les triangles d'arcs de cercle dans le plan.*

Quant à  $m = 2$ , l'analyse développée aux nos 4 et 6 laisse apercevoir que la courbure  $K$ , figurant seulement dans des termes du second ordre, peut être rapportée à un même point du triangle. Dès lors, il n'y a pas de différence avec le cas de  $K$  constante. On peut, partant, si l'on veut, se placer d'avance sur la sphère, ou sur la pseudo-sphère, suivant le signe de  $K$ , ou, comme cas particulier ( $K = 0$ ), encore une fois dans le plan.

Il n'est peut-être pas sans intérêt d'ajouter encore un mot sur un modèle canonique pouvant convenir aux côtés de nos triangles curvilignes.

Pour  $m = 1$  (on vient de le remarquer), tout côté peut être identifié à un petit arc de cercle, donc de son cercle osculateur.

Pour  $m = 2$ , il faut tenir compte aussi de  $\gamma$ , ce qui porte sur des courbes, dont la courbure géodésique n'est pas constante; d'ailleurs, le choix du type canonique est arbitraire. Dès lors, en se rapportant spécifiquement à la sphère, on pourra, par exemple, avoir recours aux courbes loxodromiques; et il serait parfaitement loisible de se borner, pour  $m = 2$ , aux triangles sphériques formés par des arcs loxodromiques: on devra toutefois se servir de loxodromies se rapportant en général à des pôles différents pour les trois côtés.

