BULLETIN DE LA S. M. F.

J. DEKNATEL

Sur le lieu des points équidistants de deux ensembles

Bulletin de la S. M. F., tome 68 (1940), p. 41-52
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1940__68__41_0>

SUR LE LIEU DES POINTS ÉQUIDISTANTS DE DEUX ENSEMBLES;

PAR M. J. DEKNATEL.

1. Dans sa publication (*Bull. de la Soc. Math. de Fr.*, t. 63, 1935), J. Wolff a examiné le lieu $F(E_1, E_2)$ des points équidistants de deux courbes de Jordan E_1 et E_2 ayant un point commun et situé dans le plan euclidien.

Dans la recherche présente nous étudierons le même problème pour une classe d'ensembles aussi étendue que possible [1].

2. Nous remarquons que la distance $\overline{PE}$ d'un point P à un ensemble E ne varie pas, si l'on ajoute les points limites de E. Donc, pour l'étude de $F(E_1, E_2)$, on peut supposer E_1 et E_2 fermé, sans nuire à la généralité.

De la continuité des distances $\overline{PE_1}$ et $\overline{PE_2}$, considérées comme fonctions de la place de P, on conclut, sans difficultés, que $F(E_1, E_2)$ est fermé.

Si les ensembles E_1 et E_2 ne sont pas assujettis à certaines restrictions, $F(E_1, E_2)$ est déjà caractérisé par cette dernière propriété. En effet, soit f un ensemble fermé quelconque, p le plan dans lequel f est situé, il en résulte que $f = F(f, p)$.

3. Nous supposons que

$$\overline{E_1E_2} = d > 0; \tag{1}$$

$$E_1 \text{ et } E_2 \text{ limités.} \tag{2}$$

La dernière supposition n'est pas très importante.

4. THÉORÈME. — Si E_1 et E_2 sont des ensembles bornés et à distance d positive, $F(E_1, E_2)$ se compose d'un nombre fini de

---

(1) Les résultats des paragraphes 1 à 7 sont déjà publiés dans ma thèse *De meetkundige plaats van punten op gelijke afstanden van twee verzamelingen* (en hollandais).

courbes de Jordan fermées (ou réductibles à de telles courbes au moyen d'une transformation par rayons vecteurs réciproques). Ces courbes ne se coupent que dans un nombre fini de points. Dans tous les points, ces courbes sont munies de deux demi-tangentes distinctes.

Démonstration. — En nous conformant à la notation de l'article cité plus haut, nous indiquerons par $k(P, E)$ la circonférence de cercle, ayant le centre P et le rayon $\overline{PE}$; par $\varepsilon(P, E)$ l'ensemble commun à $k(P, E)$ et E.

Considérons sur $k(P, E_1) = k(P, E_2) = k$ un arc $A_1B_1 = z_1$, tel que A_1 est un point de E_1, B_1 est un point de E_2 et que z_1 ne contient plus de points de E_1 ou E_2. Alors

$$\overline{A_1B_1} \geqq \overline{E_1E_2} = d > 0.$$

Supposons que $z_1, \ldots, z_{2n}$ soient tous les arcs sur k de ce genre. Les arcs complémentaires se divisent en une série $e_1^1, e_2^1, \ldots, e_n^1$ ne renfermant que des points de E_1, et une série $e_1^2, e_2^2, \ldots, e_n^2$ ne renfermant que des points de E_2.

Cela posé, soit σ_k le secteur de k contenant l'arc e_k^1. Dans un certain voisinage de P, $F(E_1, E_2)$ n'a pas de points dans σ_k, excepté P. En effet, soit Q un point de $F(E_1, E_2)$ dans σ_k, δ la distance de E_2 à la partie de E_1 situé sur e_k^1. Si l'on choisit la distance de P à Q suffisamment petite, $k(Q, E_1)$ ne surpasse $k(Q, E_1)$ de plus d'une distance $\frac{1}{2}\delta$, donc $k(\bar{Q}, E_1)$ ne contiendrait pas de points de E_2. Donc les secteurs contenant les arcs $e_1^1, \ldots, e_n^1$ et $e_1^2, \ldots, e_n^2$ ne contiennent pas de points de F dans un domaine autour de P suffisamment petit.

Je dis que, dans les secteurs $s_1, \ldots, s_{2n}$ contenant $z_1, \ldots, z_{2n}$, $F(E_1, E_2)$ se compose de courbes de Jordan, pour qui les bissectrices de $s_1, \ldots, s_{2n}$ sont des demi-tangentes en P. Considérons par exemple l'arc $A_1A_2 = z_1$ ($A_1 \prec E_1$ et $A_2 \prec E_2$), ω_1 et ω_2 des voisinages de A_1 et A_2 et z_1^* la partie de z_1 située en dehors de ω_1 et ω_2.

Les distances $\overline{z_1^*E_1}$ et $\overline{z_5^*E_2}$ étant toutes les deux positives et plus grandes que par exemple $\delta > 0$, il y a un domaine ω renfermant P et suffisamment petit pour que chaque point X de ω, les disques $k(X, E_1)$ et $k(X, E_2)$ ne passent k que d'une distance inférieure à δ. Donc $\varepsilon(X, E_1) \prec \omega_1$ et $\varepsilon(X, E_2) \prec \omega_2$ et les points d'intersection B_1 et B_2 de k et $k(X, E_1) = k(X, E_2)$ [quand $XF \prec (E_1, E_2)$] se trouvent dans ω_1, respectivement ω_2. La ligne PX coupe k à la moitié de l'arc B_1B_2. Si ω_1 et ω_2 tendent vers zéro, B_1 et B_2 tendent vers A_1, respectivement A_2, et PX vers la bissectrice b de l'angle s_1 renfermant z_1. Donc b est une demi-tangente de $F(E_1, E_2)$ en P.

Considérons ensuite une ligne $h \perp b$, coupant PA_1 en H_1, PA_2 en H_2. Nous remarquons que $\overline{H_1E_1} = \overline{H_1A_1} < \overline{H_1E_2}$ et $\overline{H_2E_2} = \overline{H_2A_2} < \overline{H_2E_1}$. Donc sur h se trouve au moins un point Y de F. Il n'y a pas d'autre point Y^* dans ω, différent de Y sur h, sinon les cercles $k(Y, E_1) = k(Y, E_2)$ et $k(Y^*, E_1) = k(Y^*, E_2)$ se couperaient en deux points formant un angle droit avec h, ce qui est impossible, car ces points se trouvent à l'intérieur de ω_1 et ω_2.

Choisissons des coordonnées rectangulaires, l'axe x positif tombant le long de la bissectrice b, $F(E_1, E_2)$ peut être représenté par une fonction $y = f(x)$. F étant fermé, on peut en conclure en outre que $f(x)$ est continu. Nous avons donc établi que tout point fini de $F(E_1, E_2)$ est situé dans un domaine choisi suffisamment petit, où F se compose d'un nombre pair d'arcs de Jordan, munis en chaque point de demi-tangentes. Nous exposerons dans le paragraphe 6 que les points infinis des courbes F ont cette même propriété.

D'après un théorème de Borel, on peut couvrir F d'un nombre fini de domaines, dans lesquels F a le caractère indiqué plus haut. Nous pouvons enlever de F une courbe fermée de Jordan J_1 (au sens large) composé d'un nombre fini d'arcs. $F - J_1$ a le même caractère que F : en chaque point il y a un nombre pair d'arcs. On peut enlever une seconde courbe fermée J_2, etc.

5. Avant que nous recherchions le caractère des points infinis de F, il faut que nous sachions les conditions pour E_1 et E_2, afin que F soit infini.

Théorème. — Supposons E_1 et E_2 fermés, finis et sans point commun, il faut et il suffit pour que $F(E_1, E_2)$ soit limité, que la frontière R de l'enveloppante convexe $\perp$ de E_1 et E_2 n'ait pas de points communs, ni avec E_1, ni avec E_2.

Démonstration. La condition est suffisante. — Supposons RE_1 vide, de sorte que $\overline{RE_1} = d > 0$. Soit M, si possible un point de $F(E_1, E_2)$ en dehors de H, et P un point de $\varepsilon(ME_1)$. Le cercle $k(ME_1) = k(ME_2) = k$ coupe H, donc on peut affirmer que la partie de R, située dans k, est une corde Q_1Q_2. Indiquons par P_1 le point d'intersection de MP et Q_1Q_2. Si D est le diamètre de H, on trouve

$$\overline{MP} = \frac{\overline{P_1Q_1}\cdot\overline{P_1Q_2} + \overline{PP_1^2}}{2\overline{PP_1}} < \frac{D^2}{d}.$$

La condition est nécessaire. — Supposons que Q_1 et Q_2 soient des points de RE_1, respectivement RE_2. Pour un point X_1 de la perpendiculaire sur la (une) tangente de R en Q_1, on a

$$\overline{X_1E_1} \leqq \overline{X_1E_2}.$$

Pour un point X_2 situé sur la perpendiculaire en Q_2, on a

$$\overline{X_2E_1} \geqq \overline{X_2E_2}.$$

Donc, il y a sur X_1X_2 un point X, situé tel que $\overline{XE_1} = \overline{XE_2}$.

6. Soient E_1 et E_2 des ensembles fermés, bornés et sans points communs. Supposons que $F(E_1, E_2)$ est infini. Suivant le théorème du paragraphe 5, on sait que RE_1 et RE_2 existent tous les deux. Nous divisons R dans les arcs $e_1^1, \ldots, e_n^1$ renfermant RE_1, les arcs $e_1^2, \ldots, e_n^2$ renfermant RE_2 et les arcs $z_1, \ldots, z_{2n}$ ne renfermant ni des points de E_1, ni des points de E_2, sauf les deux extrémités dont l'une est un point de E_1, l'autre de E_2. Les arcs $z_1, \ldots, z_{2n}$ sont des segments de droites. Soient A_1 et A_2 les extrémités de z_1, de sorte que $A_1 \prec E_1$ et $A_2 \prec E_2$, et soient h_1 et h_2 les deux perpendiculaires sur z_1 dans A_1, respectivement dans A_2. Nous indiquerons par G_1 cette partie du plan, ayant la frontière $h_1 \dotplus h_2 + z_1$ et ne contenant pas H.

Sur chaque segment de droite l, qui joint un point de h_1 à un point de h_2, est situé au moins un point X de F. Si $X \to \infty$ dans G_1 on a que chaque point de $\varepsilon(XE_1) \to A_1$ et chaque point de $\varepsilon(XE_2) \to A_2$; donc X s'approche de la perpendiculaire, élevée au milieu de $A_1A_2 = z_1$.

Sur l ne se trouve pas d'autre point Y de $F(E_1, E_2)$, sinon les points d'intersection de $k(XE_1) = k(XE_2)$ et $k(YE_1) = k(YE_2)$ seraient situés sur une perpendiculaire de l, ce qui est impossible : les deux ensembles $\varepsilon(XE_1)$ et $\varepsilon(YE_1)$ se rapprochent de A_1 et $k(XE_1)$ et $k(YE_1)$ se coupent donc dans un point $\alpha_1 \to A_1$ et dans un point $\alpha_2 \to A_2$.

Donc, dans chaque domaine G_k construit de façon analogue à G_1. il y a un arc infini de $F(E_1, E_2)$, chacun d'eux ayant une asymptote.

Dans les domaines qui restent, il n'y a pas de points de $F(E_1, E_2)$ situés à une distance suffisamment grande de H : en effet, on a, pour un point situé dans le domaine contigu à e_k^1, l'inégalité du paragraphe 5.

Nous avons donc établi que le point infini de F a le même caractère que les points finis de F : il y a un nombre pair d'arcs, chacun muni d'une demi-tangente.

7. Soient E_1 et E_2 des ensembles fermés, bornés et sans points communs, $P(O)$ un point fixe sur une courbe de $F(E_1, E_2)$; $P(s)$ le point de cette courbe, de sorte que la longueur de courbe $P(O)P(s)$, dans un sens déterminé, est s; $t^+(s)$ la demi-tangente dans $P(s)$ de la courbe dans le même sens; $t^-(s)$ l'autre demi-tangente dans $P(s)$; $\alpha(s)$ l'angle $(<\pi)$ de $t^+(s)$ et $t^-(O)$. Cela posé, nous avons le suivant :

Théorème. — $\alpha(s)$ est une fonction à variation bornée.

Démonstration. — Soient $A(s)$ un point de $\varepsilon[P(s)E_1]$ et $B(s)$ un point de $\varepsilon[P(s)E_2]$. Je dis que $P(O)A(O)$ ne coupe pas $P(s)A(s)$: considérons la réunion des disques $k[P(O)E_1]$ et $k[P(s)E_1]$ et sa frontière, se composant de deux arcs $c(O)$ et $c(s)$. Les points $A(O)$ et $A(s)$ sont situés respectivement sur $c(O)$ et $c(s)$. Les deux segments considérés ne se coupent donc pas.

Considérons un arc $o \leq s \leq \sigma$ de $F(E_1, E_2)$ suffisamment petit. Le point d'intersection $A^*(s)$ de $k[P(O)E_1] = k[P(O)E_2] = k$ et $P(s)A(s)$ ne recule donc pas, quand s croît. Soient donc $P(s_1)$ et $P(s_2)$ deux points de σ, on trouve

$$\begin{aligned} &\angle\{P(s_1)A(s_1), P(s_2)A(s_2)\} \\ &\leq \angle\{A^*(s_1)P(s_1)A^*(s_2)\} + \angle\{P(s_1)A^*(s_2)P(s_2)\} \\ &\leq c_1 \operatorname{arc} A^*(s_1)A^*(s_2) + c_2(s_2 - s_1), \end{aligned}$$

c_1 et c_2 constantes. Donc, si l'on a une série $P(s_1), \ldots, P(s_k)$ sur σ, on a

$$\sum_k \angle \{ P(s_k)A(s_k), P(s_{k+1})A(s_{k+1}) \}$$
$$\leqq c_1 \Sigma \operatorname{arc} A^*(s_k)A^*(s_{k+1}) + c_2 \Sigma (s_{k+1} - s_k) = c_1 \operatorname{arc} A^*(\sigma)A^*(o) + c_2\sigma.$$

Nous avons donc prouvé que la direction de $P(s)A(s)$ est à variation bornée; la même propriété pour $P(s)B(s)$ et donc pour la demi-tangente, bissectrice de $\angle A(s)P(s)B(s)$. Le théorème est donc démontré pour des arcs finis de $F(E_1; E_2)$.

Soit $y = f(x)$ un arc infini de $F(E_1, E_2)$. Sur l'enveloppe convexe de $E_1 + E_2$ se trouvent, d'après le théorème du paragraphe 6, deux points $A \prec E_1$ et $B \prec E_2$, la perpendiculaire élevée au milieu de AB étant l'asymptote de $y = f(x)$. Supposons que l'axe y du système coordonné rectangulaire x, y coïncide avec AB, l'origine en A. Si $x \to \infty$, on trouve

$$\varepsilon\{P(x)E_1\} \to A \quad \text{et} \quad \varepsilon\{P(x)E_2\} \to B.$$

Soit $A^*(x)$ le point d'intersection de $P(x)A(x)$ et AB; $c^*(x)$ le point d'intersection de $P(x)A(x)$ et la ligne droite $x = c$ ($c > o$ et suffisamment grand). Les segments $P(x_k)A(x_k)$ et $P(x_{k+1})A(x_{k+1})$ ne se coupent pas, donc on a

$$\sum \angle \{ P(x_k)A(x_k), P(x_{k+1})A(x_{k+1}) \}$$
$$\leqq c_1 \Sigma A^*(x_k)A^*(x_{k+1}) + c_2 \Sigma c^*(x_k)c^*(x_{k+1}) = c_1 A^*(c)A^*(\infty)^* + c_2 c^*(c)c^*(\infty).$$

Le théorème est donc vrai pour des arcs infinis.

Donc, toute partie suffisamment petite des courbes J, peut être représentée par une fonction $y = f(x)$, dont la dérivée à droite $D(x)$ existe et est à variation bornée. Donc $D(x)$ est la somme de deux fonctions monotones, respectivement croissant et diminuant, ce dont il suit que J est la somme d'une courbe convexe et d'une courbe concave.

8. Nous montrerons maintenant que la propriété de $F(E_1, E_2)$ du paragraphe 7 est caractéristique pour les courbes $F(E_1, E_2)$: si une ou plusieurs courbes ayant cette propriété sont données, il est possible de construire deux ensembles E_1 et E_2, tels que les courbes soient identiques à $F(E_1, E_2)$. Nous nous servons du lemme suivant :

LEMME. — Si L est un champ de lignes droites, tel qu'un point quelconque x, y d'un domaine G est situé sur une seule ligne $l(x, y)$ de L, on trouve ce qui suit :

1° Chaque point x_0y_0 d'un domaine quelconque $G' < G$ (ayant une distance positive de la frontière de G) est situé sur une seule trajectoire orthogonale $T(x_0y_0)$ des lignes L (dans G').

2° Si x_1y_1 est un point de G' situé sur $l(x_0y_0)$, la distance de x_1y_1 à $T(x_0y_0)$ est égale à $\overline{x_1y_1, x_0y_0}$.

Démonstration. — Soit $\beta(xy)$ un angle entre $l(xy)$ et la ligne constante $l(x_0y_0)$. Nous définissons la fonction $\beta(xy)$ de telle façon qu'elle est continue. Soit ρ la distance de G' jusqu'à la frontière de G; on trouve

$$\beta(x+\Delta x, y+\Delta y) - \beta(x, y) \leqq \frac{\pi}{2\rho}(\Delta x + \Delta y).$$

Il existe donc un nombre M, tel que

$$\sin\beta(x+\Delta x, y+\Delta y) - \sin\beta(xy) \leqq M(\Delta x + \Delta y)$$

et

$$\cos\beta(x+\Delta x, y+\Delta y) - \cos\beta(xy) \leqq M(\Delta x + \Delta y).$$

Il suit d'un théorème de Lipschitz qu'il y a une seule solution des équations différentielles

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sin\beta(xy), \qquad \frac{dy(t)}{dt} = -\cos\beta(xy),$$

qui répond aux conditions initiales

$$x(0) = x_0 \quad \text{et} \quad y(0) = y_0;$$

c'est la trajectoire orthogonale de L.

Pour la démonstration de la deuxième partie, nous considérons la ligne $l(x_0y_0)$ sur laquelle x_1y_1 est situé. Si $\varepsilon[(x_1y_1)T(x_0y_0)]$ contenait un point $Q \neq x_0y_0$, la trajectoire $T(x_0y_0)$ serait tangente à $k\{(x_1y_1)T(x_0y_0)\}$ dans ce point. Donc la ligne $l(Q)$ renfermerait le point x_1y_1, ce qui serait en contradiction avec l'admission que $l(x_0y_0)$ est la seule ligne de L renfermant x_1y_1.

9. Soit J une courbe de Jordan, $P(s)$, $t^+(s)$ et $t^-(s)$ un point et les deux demi-tangentes, comme exposé dans le paragraphe 7, et $v(s)$ la variation de l'angle ($< \pi$) entre $t^+(O)$ et $t^+(s)$.

Ensuite, nous faisons les suppositions suivantes :

1° $$t^+(s) \neq t^-(s)$$

et 2° $v(s)$ fini, pour toutes les valeurs de s.

Nous allons démontrer qu'on peut construire deux champs de lignes droites dans le sens du paragraphe 8 aux deux côtés de J, de telle manière que deux trajectoires E_1 et E_2 de ces deux champs donnent J comme lieu des points équidistants de E_1 et E_2. Nous remarquons que $v(s)$ peut avoir des discontinuités

$$2\alpha(s_k) = v(s_k + 0) - v(s_k - 0).$$

La somme totale des $\alpha(s_k)$ est finie, il y a donc un maximum α^*. Soit 2α le plus petit des nombres $\pi - 2\alpha^*$ et $\frac{\pi}{2}$.

Choisissons une série de points $P(\sigma_1)$, $P(\sigma_2)$, ..., $P(\sigma_k)$ qui tendent vers $P(O)$ quand $k \to \infty$. Nous construisons (*fig.* 1) dans les extrémités $P(O)$ et $P(\sigma_k)$ des demi-droites $h_1(O)$ et $h_1^*(\sigma_k)$... qui forment avec $t^+(O)$ respectivement $t^-(\sigma_k)$ les angles α, et qui sont situées d'un côté de J. La distance du point d'intersection S_k de $h_1(O)$ et $h_1^*(\sigma_k)$ à J est à peu près $\rho_k = \frac{1}{2}\sigma_k \operatorname{tang}\alpha$; c'est-à-dire que la différence relative tend vers zéro quand $k \to \infty$.

Nous construisons en chaque point $P(s)$, $O \leqq s \leqq \sigma_k$ une demi-droite $h_1(s)$, formant avec $t^+(s)$ l'angle $\alpha(s)$, satisfaisant à l'équation [2]

$$\alpha(s) = \alpha - v(s) + \frac{1}{\rho_k}\int_0^s \sin^2\alpha(s)\,ds.$$

Pour deux demi-droites voisines, on a

$$\Delta\alpha(s) = -\Delta v(s) + \frac{\sin^2\alpha(s)}{\rho_k}\Delta s.$$

Nous remarquons que deux demi-droites, pour lesquelles on aurait

$$\Delta\alpha(s) = -\Delta v(s),$$

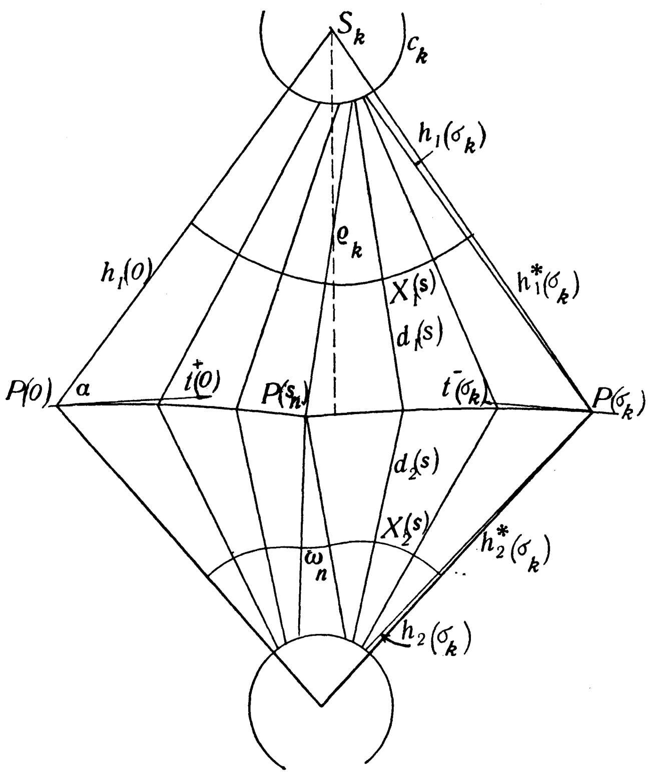
---

[2] L'existence d'une solution peut être démontrée par une méthode d'approximations successives

$$y_0(s) = -v(s), \qquad y_{n+1}(s) = -v(s) + \int^s \sin^2 y_n(t)\,dt.$$

ne se coupent pas [la tangente $t^+(s)$ est tournée sur un angle de maximum $\Delta\varphi(s)$]. Donc si l'on tourne la seconde demi-droite sur l'angle $\frac{\Delta s . \sin^2\alpha}{\rho k}$, la distance du point d'intersection des deux demi-droites est au moins $\frac{\rho k}{\sin\alpha}$ (A).

Fig. 1.



Pour un nombre k suffisamment grand, $\varphi(s)$ est une quantité négligeable comparée à $\alpha(s)$; donc on a

$$\alpha(s) \sim \alpha + \frac{1}{\rho k}\int_0^s \sin^2\alpha(s)\,ds,$$

$$\int_0^s \frac{d\alpha(s)}{\sin^2\alpha(s)} \sim \frac{1}{\rho k}\int_0^s ds, \qquad \cot\alpha(s) \sim \frac{-s+\frac{1}{2}\sigma}{\rho k} \qquad \text{(B)}.$$

Il suit de (B) que $h_1(s)$ passe à peu près par le point d'intersection S_k de $h_1(O)$ et $h_1^*(s_k)$.

Nous concluons de (A) et (B) qu'il existe un nombre M, tel que, pour chaque $k > M$, il existe un cercle c_k de rayon ε_k et de centre S_k, de sorte que $\frac{\varepsilon_k}{\sigma_k} \to 0$ quand $k \to \infty$ et tel que deux demi-droites de l'arc $P(O)P(\sigma_k)$ se coupent dans c_k ou derrière c_k.

Pour compléter le champ des demi-droites, nous ajoutons des $h_1(s_n, \varphi)$ dans ces points de discontinuité $P(s_n)$ pour qui, dans un certain voisinage de $P(s_n)$, le prolongement de $t^-(s_k)$ est situé du même côté de J que $h_1(O)$. Soit ω_n le saut de $\nu(s)$ à $P(s_n)$. Nous ajoutons les demi-droites $h_1(s_n, \varphi)$, qui font les angles

$$\alpha(s_n) + \varphi, \qquad 0 < \varphi \leqq \omega_n, \qquad \text{avec} \qquad t^+(s_n).$$

Les demi-droites $h_1(s)$ et $h_1(s_n, \varphi)$ constituent un champ, satisfaisant aux conditions du lemme [§ 8], dans le domaine $G(O\sigma_k)$, borné par l'arc $P(O)P(\sigma_k)$ de J, $h_1(O)$, $h_1(\sigma_k)$ et c_k.

Même construction pour les demi-droites $h_2(s)$ et $h_2(s, \varphi)$ situées de l'autre côté de J. Soient T_1 et T_2 deux trajectoires orthogonales, coupant les demi-droites $h_1(s)$ et $h_2(s)$ respectivement en $X_1(s)$ et $X_2(s)$. Posons

$$\overline{P(s)X_1(s)} = d_1(s), \qquad \overline{P(s)X_2(s)} = d_2(s).$$

Ces fonctions sont continues, parce que les trajectoires coupent les $h_1(s, \varphi)$ et $h_2(s, \varphi)$ suivant un arc de cercle, donc

$$d_1(s_n + 0) = d_1(s_n - 0).$$

Soit $R[d_1(s)]$ la dérivée à droite de $d_1(s)$, $R[d_2(s)]$ celle de $d_2(s)$. On vérifie aisément que

$$R[d_1(s)] = -\cos\alpha(s) = R[d_2(s)].$$

Les deux fonctions continues $d_1(s)$ et $d_2(s)$ ayant partout la même dérivée à droite sont égales à une constante près. Cette constante est zéro si l'on prend

$$d_1(0) = d_2(0).$$

Du lemme du paragraphe 8 on conclut que le lieu $F(T_1, T_2)$ renferme l'arc $P(O)P(\sigma_k)$ de J.

Soient maintenant A et B deux points quelconques de $P(O)P(\sigma_k)$. On peut construire deux arcs correspondants $T_1(AB)$ et $T_2(AB)$

de la façon indiquée plus haut. La différence relative entre $T_1(AB)$ et un arc de cercle tend vers zéro quand $k \to \infty$. Donc, il existe sur J un point B^* près de B, tel que

$$d_1(A) = d_1(B^*) = d_2(A) = d_2(B^*)$$

[quand B est éloigné d'une distance suffisamment grande de $P(\sigma_k)$].

On peut donc diviser $P(O)P(\sigma_k)$ par des points $P(\sigma_k, 1)$, $P(\sigma_k, 2)$, ..., $P(\sigma_k, n)$ de manière que, pour les arcs

$$T_1[P(\sigma_k, l)P(\sigma_k, l+1)],$$

les distances $d_1(O), d_1(\sigma_k, 1), \ldots, d_1(\sigma_k, n)$ soient égales. Supposons que $P(\sigma_k, n) \not\asymp P(\sigma_k)$ et qu'il ne soient pas possible d'ajouter un arc $P(\sigma_k, n)P(\sigma_k, n+1)$ ne renfermant pas $P(\sigma_k)$. On peut choisir le premier arc $P(O)P(\sigma_k, 1)$ suffisamment petit, donc le nombre n suffisamment grand, de sorte que l'on peut laisser accroître continuellement le nombre ρ_k, donc les arcs $P(\sigma_k, l)$, $P(\sigma_k, l+1)$ jusqu'à ce que $P(\sigma_k, n)$ coïncide avec $P(\sigma_k)$.

Nous réunissons les arcs $T_1[P(\sigma_k, m), P(\sigma_k, m+1)]$ et $h_1(\sigma_k, n)$ à $h_1^*(\sigma_k)$ par les arcs de cercle de centre $P(\sigma_k, m)$ et de rayon $d_1(O)$. Soit $E_1(O, \sigma_k)$ la réunion de ces arcs. Nous avons donc établi que :

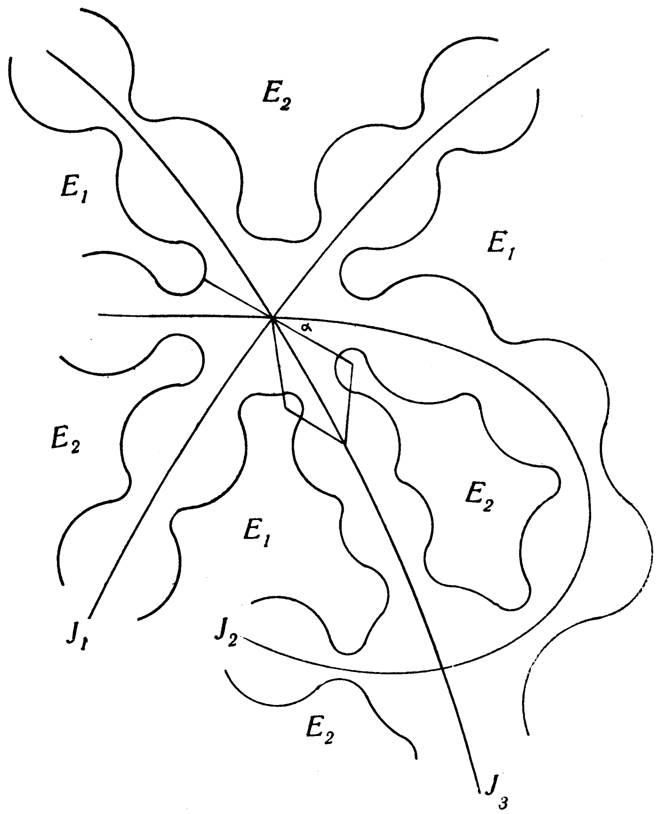
Si $P(O)$ est un point arbitraire de J et $P(\sigma_k)$ une série de points de J ayant la limite $P(O)$, on peut déterminer un nombre M de sorte que pour chaque nombre $k > M$, l'arc $P(O)P(\sigma_k)$ est une partie du lieu des points équidistants des arcs $E_1(O, \sigma_k)$ et $E_2(O, \sigma_k)$. Ces arcs aboutissent dans les demi-droites $h_1(O)$ et $h_1^*(\sigma_k)$ respectivement $h_2(O)$ et $h_2^*(\sigma_k)$ qui forment avec $t^+(O)$ respectivement $t^-(\sigma_k)$ l'angle prescrit α. Les distances des extrémités $P(O)$ et $P(\sigma_k)$ de $E_1(O, \sigma_k)$ et $E_2(O, \sigma_k)$ sont égales.

Nous remarquons qu'on peut choisir la distance $d_1(O)$ aussi petite qu'on veut, en choisissant le nombre n suffisamment grand.

10. Soient maintenant données les courbes $J_1, J_2, \ldots, J_\nu$, satisfaisant aux conditions du paragraphe 9. Soit $2\alpha^*$ le plus petit angle entre deux demi-tangentes quelconques dans un point P d'intersection des J_k et soit $2\alpha^{**}$ le plus grand saut de $v(s)$ dans un point quelconque d'une des courbes J_k. Nous choisissons le plus petit des nombres $2\alpha^*$ et $2\alpha^{**}$ pour construire des intervalles

$P(s)P(s+\sigma_k)$ et $P(s)P(s-\sigma_k)$ pour chaque s, comme indiqué plus haut. Suivant un théorème de Borel, nous pouvons couvrir toute partie finie des courbes J_k d'un nombre fini de ces arcs. Il est possible de choisir les subdivisions des J_k suffisamment petites, pour que les J_k ne coupent pas les domaines $G(O, \sigma_k)$. Si deux de

Fig. 2.



ces arcs se couvrent partiellement, on peut les réduire jusqu'à ce qu'ils n'aient plus qu'un seul point de commun. Le plus petit de ces arcs nous fournit une valeur de $d_1(O)$ applicable pour la construction des $E_1(s, s+\sigma_k)$ et $E_2(s, s+\sigma_k)$ de tous les arcs. Les réunions E_1 et E_2 de ces arcs sont respectivement les deux ensembles demandés (*fig.* 2).