BULLETIN DE LA S. M. F.

ERVIN FELDHEIM

Formules d'inversion et autres relations pour les polynômes orthogonaux classiques

Bulletin de la S. M. F., tome 68 (1940), p. 199-228

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1940__68__199_0>

FORMULES D'INVERSION ET AUTRES RELATIONS POUR LES POLYNOMES ORTHOGONAUX CLASSIQUES;

PAR M. E. FELDHEIM.

Introduction.

Dans quelques travaux récemment publiés nous avons été conduit, en relation avec d'autres recherches, à des relations d'inversion pour les polynomes de Laguerre et d'Hermite, c'est-à-dire à des formules donnant le développement de x^n en série de polynomes de Laguerre et d'Hermite (cette dernière n'étant d'ailleurs pas nouvelle). L'utilité de telles formules pour le développement de fonctions (et surtout de polynomes) en série de polynomes nous a amené à chercher les relations d'inversion pour les polynomes les plus fréquemment employés : les polynomes orthogonaux classiques de Jacobi, Laguerre et Hermite, et pour les cas particuliers importants des polynomes généraux mentionnés en premier lieu. Nous exposerons aussi quelques applications de ces relations d'inversion, et d'autres formules concernant les polynomes orthogonaux ou présentant un intérêt spécial (comme les polynomes d'Appell, par exemple).

I. — Inversion des polynomes de Jacobi.

1. Commençons par des considérations d'ordre général, pour établir la méthode qui nous servira pour déduire les différentes relations pour les divers polynomes orthogonaux. D'après un théorème connu [1], à tout intervalle (a, b), fini ou non, et à

---

[1] *Voir*, par exemple, J. SHOHAT, *Théorie générale des polynomes orthogonaux de Tchebychef* (*Mémorial des Sciences Mathématiques*, fasc. 66, Gauthier-Villars, Paris, 1934).

toute fonction $\Psi(x)$ possédant tous ses moments dans cet intervalle, on peut faire correspondre une suite de polynomes orthogonaux $\Phi_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, c'est-à-dire tels que

$$(1) \qquad \int_a^b \Phi_m(x)\,\Phi_n(x)\,d\Psi(x) = \begin{cases} \lambda_n, & \text{si } m = n, \\ 0, & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

Si $\lambda_n \equiv 1$, on dit que les polynomes $\Phi_n(x)$ sont *orthonormés* dans l'intervalle (a, b). Considérons maintenant le cas particulier où $d\Psi(x) = p(x)\,dx$, et donnons à $\Phi_n(x)$ la forme suivante :

$$(2) \qquad \Phi_n(x) = \frac{1}{p(x)}\,\frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n(x-b)^n \Pi_n(x)] \qquad [(a, b) \text{ fini}],$$

$\Pi_n(x)$ étant une fonction à déterminer, qui admet une expression assez simple pour la plupart des polynomes généralement utilisés.

Considérons, d'autre part, l'intégrale suivante :

$$\mathrm{I} = \int_a^b u v^{(k)}\,dx,$$

u et v étant des fonctions intégrables de x, et $v^{(k)}$ désignant la dérivée d'ordre k de $v(x)$. Des intégrations par parties nous donnent que

$$(3) \qquad \mathrm{I} = \int_a^b u v^{(k)}\,dx = \left\{ \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r u^{(r)} v^{(k-r-1)} \right\}_a^b + (-1)^k \int_a^b u^{(k)} v\,dx,$$

la première expression du second membre étant la partie toute intégrée : différence des valeurs de la somme entre accolades pour les valeurs b et a de la variable x.

Cherchons maintenant le développement de x^n en une série de polynomes orthogonaux $\Phi_m(x)$, définis par (1) et (2)

$$(4) \qquad x^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{A}_k^{(n)} \Phi_k(x).$$

La méthode de Fourier permet d'écrire pour les coefficients du développement (4) que

$$\mathrm{A}_k^{(n)} \lambda_k = \int_a^b x^n \Phi_k(x)\,p(x)\,dx.$$

Alors, d'après (2),

$$A_k^{(n)}\lambda_k = \int_a^b x^n \frac{d^k}{dx^k}[(x-a)^k(x-b)^k\Pi_k(x)]\,dx,$$

et l'on en déduit, à l'aide de (3), que

$$A_k^{(n)}\lambda_k = \left\{\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r r!\binom{n}{r}x^{n-r}\frac{d^{k-r-1}}{dx^{k-r-1}}[(x-a)^k(x-b)^k\Pi_k(x)]\right\}_a^b$$
$$+(-1)^k k!\binom{n}{k}\int_a^b x^{n-k}(x-a)^k(x-b)^k\Pi_k(x)\,dx.$$

L'expression entre les accolades étant identiquement nulle, on aura

$$(5)\qquad A_k^{(n)} = \frac{(-1)^k k!\binom{n}{k}}{\lambda_k}\int_a^b x^{n-k}(x-a)^k(x-b)^k\Pi_k(x)\,dx.$$

Connaissant la fonction $\Pi_k(x)$, l'intégrale précédente peut être calculée, et ainsi les coefficients du développement (4) seront donnés explicitement.

2. Passons à l'inversion des polynomes généraux de Jacobi, définis par la relation suivante

$$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}].$$

Ici, dans la formule (2),

$$p(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta;\qquad a=1,\ b=-1\qquad (\alpha,\ \beta > -1);$$
$$\Pi_n(x) = \frac{1}{2^n n!}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta = \frac{1}{2^n n!}p(x),$$

et

$$(6)\qquad \lambda_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1}\,\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}.$$

La formule (5) donne alors pour les coefficients du développement

$$x^n = \sum_{r=0}^{n} a_r^{(n,\alpha,\beta)}P_r^{(\alpha,\beta)}(x),$$

l'expression

$$(7)\qquad a_r^{(n,\alpha,\beta)} = \frac{1}{2^r\lambda_r^{(\alpha,\beta)}}\binom{n}{r}\int_{-1}^{+1}x^{n-r}(1-x)^{\alpha+r}(1+x)^{\beta+r}\,dx,$$

avec la valeur (6) de $\lambda_r^{(\alpha,\beta)}$. L'intégrale précédente pourra être exprimée à l'aide des fonctions hypergéométriques de Gauss F.

Dans le cas particulier des polynomes ultrasphériques, c'est-à-dire lorsque $\alpha = \beta$, les coefficients du développement précédent se réduisent à la valeur

$$a_r^{(n,\alpha)} = \frac{1}{2^r \lambda_r^{(\alpha)}} \binom{n}{r} \int_{-1}^{+1} x^{n-r}(1-x^2)^{\alpha+r}\, dx.$$

Les polynomes ultrasphériques étant symétriques, on pose $r = n - 2s$; l'intégrale précédente admet alors la valeur

$$\int_{-1}^{+1} x^{2s}(1-x^2)^{n-2s+\alpha}\, dx = \int_0^1 t^{s-\frac{1}{2}}(1-t)^{n-2s+\alpha}\, dt$$
$$= \frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n-2s+\alpha+1)}{\Gamma\left(n-s+\alpha+\frac{3}{2}\right)}.$$

Finalement

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} & a_{n-2s}^{(n,\alpha)} = \frac{2n-4s+2\alpha+1}{2^{n+2\alpha+1}} \frac{n!}{s!} \frac{\Gamma(n-2s+2\alpha+1)}{\Gamma(n-2s+\alpha+1)\Gamma\left(n-s+\alpha+\frac{3}{2}\right)} \sqrt{\pi} \\ & \left[s = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right];\quad n = 0, 1, 2, \ldots\right]. \end{aligned}\right.$$

3. **Cas particuliers.** — *a. Polynomes de Legendre.* — Ce sont des polynomes ultrasphériques, pour lesquels $\alpha = \beta = 0$. Nous avons alors, d'après la formule (8),

$$X_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n} x^{n-2k}, \qquad x^n = \sum_{s=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_{n-2s}^{(n)} X_{n-2s}(x),$$

avec

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} & a_{n-2s}^{(n)} = 2^{n-2s+1} \frac{2n-4s+1}{2n-2s+1} \frac{\binom{n}{s}}{\binom{2n-2s}{n-s}} \\ & \left(s = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right). \end{aligned}\right.$$

Mentionnons encore quelques autres identités relatives aux polynomes de Legendre.

Cherchons, en premier lieu, le développement de la dérivée de $X_n(x)$ en série de ces mêmes polynomes

$$X'_n(x = \sum_{k=0}^{n-1} A_k^{(n)} X_k(x).$$

On en tire

$$A_k^{(n)} = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{+1} X'_n(x) X_k(x)\, dx.$$

Intégrons par parties

$$\int_{-1}^{+1} X'_n(x) X_k(x)\, dx = [X_n(x) X_k(x)]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} X_n(x) X'_k(x)\, dx.$$

$X'_k(x)$ étant un polynome de degré au plus égal à $n-2$, la seconde intégrale sera nulle, et ainsi

$$\text{(10)} \qquad X'_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1-(-1)^{n+k}}{2}(2k+1) X_k(x).$$

On peut encore généraliser cette relation pour les dérivées plus élevées du polynome $X_n(x)$. Si l'on fait

$$X_n^{(r)}(x) = \sum_{k=0}^{n-r} A_k^{(n,r)} X_k(x),$$

on aura, par une suite d'intégrations par parties [*voir* la formule (3)]

$$A_k^{(n,r)} = (2k+1)\frac{1+(-1)^{n+r+k}}{2} \sum_{s=0}^{r-1} (-1)^s X_k^{(s)}(1) X_n^{(r-s-1)}(1)$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n-r).$$

Or, il est facile de voir que

$$X_k^{(r)}(1) = \frac{r!}{2^r}\binom{2r}{r}\binom{k+r}{2r},$$

donc

$$\text{(11)} \quad \left\{ \begin{aligned} A_k^{(n,r)} &= (2k+1)(r-1)!\,\frac{1+(-1)^{n+k+r}}{2^r} \\ &\times \sum_{s=0}^{r-1} (-1)^s \frac{\binom{2s}{s}\binom{k+s}{2s}\binom{2r-2s-2}{r-s-1}\binom{n+r-s-1}{2r-2s-2}}{\binom{r-1}{s}} \\ &(r = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-r). \end{aligned} \right.$$

Par exemple, pour $n = 2$, on aura le développement

$$(12) \qquad X''_n(x) = \sum_{k=0}^{n-2} (2k+1)\left[\binom{n+1}{2} - \binom{k+1}{2}\right] \frac{1+(-1)^{n+k}}{2} X_k(x).$$

Rappelons encore la formule de composition des polynomes de Legendre ([2])

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_m(x) X_n(x) = \sum_{k=0}^{n} & \frac{2m-2n+4k+1}{2m+2k+1} \\ & \times \frac{\binom{m}{n-k}^2 \binom{m+k}{k}^2}{\binom{2m}{2n-2k}\binom{2m+2k}{2k}} X_{m-n+2k}(x) \\ & (m \geqq n), \end{aligned} \right.$$

ainsi que la relation suivante, due à M. W. Bailey ([3]),

$$(14) \qquad X_n(x) X_n(y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n+k}{k} \binom{n}{k} \left(\frac{x+y}{2}\right)^k X_k\left(\frac{1+xy}{x+y}\right).$$

Considérons, comme application des relations précédentes, l'intégrale du produit de trois polynomes de Legendre

$$I = \int_{-1}^{+1} X_m(x)\, X_n(x)\, X_r(x)\, dx,$$

où $m \geqq n \geqq r$. Si l'on écrit, d'après (13), que

$$X_m(x)\, X_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(m,n)} X_{m-n+2k}(x),$$

on aura

$$(15) \qquad I = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{2}{2m-2n+4k+1} a_k^{(m,n)}, \quad \text{si } r = m-n+2k \\ \qquad \left[k = 0, 1, 2, \ldots, \left(\dfrac{2n-m}{2}\right)\right], \\ 0, \quad \text{si} \left\{ \begin{array}{l} r = m-n+2k+1 \\ r < m-n \end{array} \right. \\ \left[k = 0, 1, 2, \ldots, \left(\dfrac{2n-m-1}{2}\right)\right]. \end{array} \right.$$

([2]) *Voir*, par exemple, E. W. Hobson, *The Theory of Spherical and Ellipsoïdal Harmonics*, Cambridge, 1939.

([3]) *Proceedings of the London Math. Soc.*, t. 41, 1936, p. 215-220.

Ainsi, par exemple,

$$\int_{-1}^{+1} X_n^3(x)\,dx = \begin{cases} \dfrac{2}{3n+1}\,\dfrac{\dbinom{n}{\frac{n}{2}}^2 \dbinom{\frac{3n}{2}}{\frac{n}{2}}^2}{\dbinom{2n}{n}\dbinom{3n}{n}}, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

b. Polynomes de Tchebychef :

$$T_n(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2} = \cos n(\operatorname{arc}\cos x),$$

$$p(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}};$$

$$U_n(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1} - (x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sin(n+1)(\operatorname{arc}\cos x)}{\sin(\operatorname{arc}\cos x)};$$

$$p(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Ce sont des polynomes ultrasphériques, de paramètres

$$\alpha = \beta = -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \alpha = \beta = \frac{1}{2}$$

respectivement.

$$(16) \qquad T_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{n}{2(n-k)} \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \alpha_{n-2k}^{(n)} x^{n-2k}.$$

Les coefficients du développement ne changent pas si l'on remplace l'indice n par un multiple mn, et x^{n-2k} par $T_n^{m-2k}(x)$

$$(17) \qquad T_{mn}(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \alpha_{m-2k}^{(m)} T_n^{m-2k}(x).$$

Pour le polynome de Tchebychef de seconde espèce

$$(18) \qquad U_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \beta_{n-2k}^{(n)} x^{n-2k},$$

on a la formule analogue connue

$$(19)\qquad U_{mn-1}(x) = U_{n-1}(x) \sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \beta_{m-2k-1}^{(m-1)}\, T_n^{m-2k-1}(x).$$

Les formules de composition des polynomes de Tchebychef sont les relations de récurrence

$$(20)\qquad T_m(x)T_n(x) = \frac{1}{2}[T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x)]$$

et

$$(21)\qquad U_m(x)U_n(x) = \sum_{r=0}^{\min(m,n)} U_{m+n-2r}(x).$$

On a aussi

$$T_n(x)T_n(y) = \frac{1}{2}[T_n(x+y) + T_n(x-y)].$$

Les coefficients des formules d'inversion de ces polynomes seront donnés par la formule (8), et l'on aura

$$(22)\quad x^n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} \binom{n}{r} T_{n-2r}(x) + \begin{cases} \dfrac{1}{2^n}\dbinom{2m}{m}, & \text{pour } n = 2m \\ \dfrac{1}{2^{n-1}}\dbinom{2m+1}{m} T_1(x), & \text{pour } n = 2m+1 \end{cases}$$

et

$$(23)\qquad x^n = \frac{1}{2^n} \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n-2r+1}{n-r+1} \binom{n}{r} U_{n-2r}(x).$$

Nous avons encore établi des relations particulières pour les polynomes de Tchebychef, en rapport avec des recherches sur l'interpolation de Lagrange ([4]), mais nous ne nous en arrêterons pas ici.

([4]) Voir E. Feldheim, *Sur l'orthogonalité des fonctions fondamentales, etc.* (*Bull. de la Soc. Math. de France*, t. 65, 1937, p. 1-40); *Quelques recherches sur l'interpolation de Lagrange et d'Hermite, etc.* (*Mathematische Zeitschrift.*, t. 44, 1938, p. 55-84).

II. — Les polynomes d'Hermite.

4. Adoptons, suivant l'usage, la définition suivante des polynomes d'Hermite

$$(24) \qquad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n}.$$

Cette définition est équivalente à la représentation par la « fonction génératrice »

$$(25) \qquad e^{2mx-m^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^k}{k!} H_k(x),$$

ou à

$$(26) \qquad H_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{n!}{k!} \frac{(2x)^{n-2k}}{(n-2k)!}.$$

Il est bien connu que la suite des polynomes $H_n(x)$ forme une suite harmonique ([5]) au sens de Niels Nielsen, c'est-à-dire

$$(27) \qquad H'_n(x) = 2n H_{n-1}(x).$$

Le développement de la dérivée du polynome d'Hermite en série de ces mêmes polynomes se réduit donc à la relation de récurrence précédente. Cherchons maintenant le développement de la quantité $H_n(x+y)$. La formule de Taylor donne que

$$H_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y^k}{k!} H_n^{(k)}(x);$$

l'application répétée de la formule (27) permet alors d'écrire immédiatement que

$$(28) \qquad H_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2y)^k H_{n-k}(x).$$

Si l'on multiplie aux deux membres de (28) par $e^{-\frac{y^2}{a}}$ (a étant une quantité réelle ou complexe, mais de partie réelle positive),

([5]) *Voir* le Chapitre V, relatif aux polynomes d'Appell.

et, si l'on intègre de $-\infty$ à $+\infty$ (ce qui est légitime), il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{a}} \mathrm{H}_n(x+y)\, dy = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \mathrm{H}_{n-k}(x) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{a}} y^k\, dy.$$

Or

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{a}} y^k dy = \frac{1+(-1)^k}{2} a^{\frac{k+1}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right).$$

Ainsi, l'on obtient ([6])

$$(29) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{a}} \mathrm{H}_n(x+y)\, dy = \sqrt{a\pi} \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a^r \frac{n!}{r!} \frac{\mathrm{H}_{n-2r}(x)}{(n-2r)!}.$$

D'autre part, en multipliant (28) par $e^{-\frac{x^2}{a}}$, et en intégrant de $-\infty$ à $+\infty$, nous aurons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a}} \mathrm{H}_n(x+y)\, dx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2y)^k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a}} \mathrm{H}_{n-k}(x)\, dx.$$

L'intégrale qui figure au second membre n'est différente de zéro que pour les valeurs paires de $n-k$. En posant

$$\mathrm{C}_r = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a}} \mathrm{H}_{2r}(x)\, dx,$$

([6]) Cette relation peut être généralisée, en remplaçant $\mathrm{H}_n(x)$ par un polynome général $\mathrm{P}(x)$ de degré arbitraire. La formule de Taylor donne

$$\mathrm{P}(x+y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} \mathrm{P}^{(\nu)}(y),$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a}} \mathrm{P}(x+y)\, dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathrm{P}^{\nu}(y)}{\nu!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^\nu e^{-\frac{x^2}{a}}\, dx,$$

et ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a}} \mathrm{P}(x+y)\, dx = \sqrt{a\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2^{2\nu}\nu!}{a^\nu} \mathrm{P}^{(2\nu)}(y).$$

Si nous substituons à $\mathrm{P}(x)$ le polynome d'Hermite, $\mathrm{H}_n(x)$, nous retrouvons immédiatement la relation (29).

nous aurons ([7])

$$(30)\qquad C_r = 2^r(a-1)^r 1.3.5\ldots(2r-1)\,C_0 = \sqrt{a\pi}\,(a-1)^r\frac{2r!}{r!}.$$

Alors, d'après (26),

$$(31)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a}} H_n(x+y)\,dx$$

$$= \sqrt{a\pi}\,(1-a)^{\frac{n}{2}} \sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} {}^r\ \frac{n!}{r!}\,\frac{\left(2\frac{y}{\sqrt{1-a}}\right)^{n-2r}}{(n-2r)!}$$

$$= \sqrt{a\pi}\,(1-a)^{\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{y}{\sqrt{1-a}}\right).$$

Nous avons donc retrouvé la représentation intégrale connue des polynomes d'Hermite

$$(32)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a}} H_n(x+y)\,dx = \sqrt{a\pi}\,(1-a)^{\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{y}{\sqrt{1-a}}\right),$$

dont un cas particulier remarquable est le suivant

$$a = 2, \qquad y = it \qquad (i = \sqrt{-1})$$

$$(33)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x+it)\,dx = \sqrt{2\pi}\,i^n H_n(t).$$

Les premiers membres des relations (29) et (31) étant identiques, nous serons conduits à la relation intéressante

$$(34)\qquad \lambda^n H_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (1-\lambda^2)^\nu \frac{n!}{\nu!}\,\frac{H_{n-2\nu}(x)}{(n-2\nu)!}.$$

On en déduit immédiatement *la formule d'inversion des polynomes d'Hermite*. En effet, si $\lambda \to 0$, on tire de (34)

$$(35)\qquad x^n = \frac{1}{2^n}\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n!}{\nu!}\,\frac{H_{n-2\nu}(x)}{(n-2\nu)!},$$

([7]) E. Feldheim, *Quelques nouvelles relations pour les polynomes d'Hermite* (*Journal of the London Math. Soc.*, vol. 13, 1938, p. 22-29).

qu'on pourrait d'ailleurs retrouver directement par la méthode employée dans le cas des polynomes de Jacobi.

Faisons maintenant une remarque sur la définition (24) des polynomes d'Hermite. On rencontre souvent la définition suivante

$$(36) \qquad \mathcal{H}_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)}{dx^n}.$$

Entre les deux définitions, il y a la relation de correspondance

$$\mathcal{H}_n(x) = 2^{-\frac{n}{2}} \mathrm{H}_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

et l'on tire alors de (34) le développement

$$(37) \qquad \mathcal{H}_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^\nu \frac{n!}{\nu!} \frac{\mathrm{H}_{n-2\nu}(x)}{(n-2\nu)!}.$$

On démontre encore, au moyen des fonctions génératrices, que l'on a la relation

$$\mathrm{H}_n\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \mathcal{H}_\nu(x) \mathcal{H}_{n-\nu}(y).$$

Passons ensuite à la formule de composition des polynomes d'Hermite. Nous avons démontré ([8]) que

$$(38) \qquad \mathrm{H}_m(x)\mathrm{H}_n(x) = 2^n n! \sum_{r=0}^{n} \binom{m}{n-r} \frac{\mathrm{H}_{m-n+2r}(x)}{2^r r!} \qquad (m \geqq n).$$

Donnons ici une nouvelle démonstration de cette relation, basée sur la méthode esquissée et employée au début de ce travail. Écrivons que

$$\mathrm{H}_m(x)\mathrm{H}_n(x) = \sum_{r=0}^{n} \mathrm{A}_r^{(m,n)} \mathrm{H}_{m-n+2r}(x),$$

([8]) Voir *loc. cit.* ([7]), et encore la Note de M. G. N. Watson sur le même sujet, et au même endroit. *Voir* aussi Dhar, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, t. 26, 1934, p. 57-64.

d'où

$$A_r^{(m,n)}\, 2^{m-n+2r}(m-n+2r)!\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} H_m H_n H_{m-n+2r}\, e^{-x^2} dx.$$

L'intégrale qui figure au second membre peut s'écrire, d'après (24) et (3), de la façon suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m H_n H_{m-n+2r}\, e^{-x^2} dx = (-1)^{m-n} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m H_n \frac{d^{m-n+2r}(e^{-x^2})}{dx^{m-n+2r}} dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{m-n+2r}(H_m H_n)}{dx^{m-n+2r}} e^{-x^2} dx.$$

Or, d'après la formule de Leibniz,

$$\frac{d^{m-n+2r}(H_m H_n)}{dx^{m-n+2r}} = \sum_{k=0}^{m-n+2r}{}' \, 2^{m-n+2r} k! \binom{n}{k} \binom{m-n+2r}{k}$$
$$\times \binom{m}{m-n+2r-k} (m-n+2r-k)!\, H_{n-2r+k} H_{n-k},$$

de sorte que l'intégrale précédente ne sera différente de zéro que pour les valeurs de k tirées de

$$n-2r+k = n-k,$$

c'est-à-dire $k=r$. Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m H_n H_{m-n+2r}\, e^{-x^2} dx = 2^{m-n+2r}(m-n+2r)!\sqrt{\pi}\, \frac{2^n n!}{2^r r!} \binom{m}{n-r},$$

et l'on a bien

$$A_r^{(m,n)} = \frac{2^n n!}{2^r r!} \binom{m}{n-r}.$$

C. Q. F. D.

Le cas particulier $m=n$ conduit à la formule

$$(38') \qquad H_n^2(x) = 2^n n! \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{H_{2r}(x)}{2^r r!}.$$

Les formules précédentes peuvent servir au calcul de certaines intégrales contenant les polynomes d'Hermite.

On sait [et la formule (38′) le montre immédiatement] que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)\, dx = 2^n n!\, \sqrt{\pi}.$$

D'après (38), si $m \geqq n \geqq p$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x)\, H_n(x)\, H_p(x)\, dx = \begin{cases} 2^{n+p-r} \dfrac{n!\,p!}{r!} \dbinom{m}{n-r} \sqrt{\pi}, & \text{si } p = m-n+2r \\ \quad \left(r = 0, 1, 2, \ldots, \dfrac{2n-m}{2}\right), & \\ 0, \quad \text{si } p = m-n+2r+1 \text{ ou } p < m-n & \\ \quad \left(r = 0, 1, 2, \ldots, \dfrac{2n-m-1}{2}\right). & \end{cases}$$

Mentionnons aussi une autre représentation intégrale des polynomes d'Hermite qu'il est intéressant de comparer à (32); on connaît la formule de Nielsen (⁹)

$$(39) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} (x+it)^n\, dx = \sqrt{2\pi}\, i^n \mathcal{H}_n(t).$$

Si l'on effectue les changements de variable et de paramètre

$$x = \frac{y\sqrt{2}}{\sqrt{a}}, \qquad t = \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{a}},$$

on aura la relation plus générale

$$(40) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{a}} (x+iu)^n\, dx = \sqrt{\pi}\, a^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{i}{2}\right)^n H_n\left(\frac{u}{\sqrt{a}}\right).$$

Par exemple, pour $a = 1$,

$$(41) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} (x+iu)^n\, dx = \sqrt{\pi} \left(\frac{i}{2}\right)^n H_n(u),$$

qui constitue une autre représentation de $H_n(x)$, analogue à (33).

5. Passons maintenant à la généralisation des relations précédentes, en les rapportant aux polynomes d'Hermite de plusieurs variables.

(⁹) N. Nielsen, *Recherche sur les polynomes d'Hermite. Det kgl. Danske videnskabernes selskab.* (*Math. Phys. Medd.*, I, t. 6, p. 1918).

Considérons la forme quadratique homogène

$$\varphi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$
$$(a > 0,\ c > 0,\ \Delta = ac - b^2 > 0,\ ax + by = \xi,\ bx + cy = \eta),$$

et sa conjuguée

$$\psi(x, y) = \frac{c}{\Delta}x^2 - \frac{2b}{\Delta}xy + \frac{a}{\Delta}y^2.$$

La fonction génératrice du polynome d'Hermite de deux variables est

$$(42)\qquad \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^m k^n}{m!\,n!}\mathrm{H}_{m,n}(x, y) = e^{2h(ax+by)+2k(bx+cy)-\varphi(h,k)} = e^{2h\xi+2k\eta-\varphi(h,k)},$$

et le polynome d'Hermite de seconde espèce sera donné par

$$(43)\qquad \begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^m k^n}{m!\,n!}\mathrm{G}_{m,n}(x, y) &= e^{2h\left(\frac{c}{\Delta}\xi-\frac{b}{\Delta}\eta\right)-2k\left(\frac{b}{\Delta}\xi-\frac{a}{\Delta}\eta\right)-\psi(h,k)}\\ &= e^{2hx+2ky-\psi(h,k)}.\end{aligned}$$

Il est très facile de trouver la relation suivante entre les polynomes d'Hermite d'une et de deux variables

$$(44)\qquad \left\{\begin{aligned}\mathrm{H}_{m,n}(x, y) &= a^{\frac{m}{2}}c^{\frac{n}{2}}\sum_{r=0}^{\min(m,n)}\left(-\frac{2b}{\sqrt{ac}}\right)^r r!\binom{m}{r}\\ &\quad\times\binom{n}{r}\mathrm{H}_{m-r}\left(\frac{\xi}{\sqrt{a}}\right)\mathrm{H}_{n-r}\left(\frac{\eta}{\sqrt{a}}\right),\\ \mathrm{G}_{m,n}(x, y) &= \frac{a^{\frac{m}{2}}c^{\frac{n}{2}}}{\Delta^{\frac{m+n}{2}}}\sum_{r=0}^{\min(m,n)}\left(\frac{2b}{\sqrt{ac}}\right)^r r!\binom{m}{r}\\ &\quad\times\binom{n}{r}\mathrm{H}_{m-r}\left(x\sqrt{\frac{\Delta}{c}}\right)\mathrm{H}_{n-r}\left(y\sqrt{\frac{\Delta}{a}}\right).\end{aligned}\right.$$

Mentionnons ici la formule de Nielsen relative au cas de deux variables

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned}\mathrm{H}_{m,n}(x, y) &= \frac{1}{\pi\sqrt{\Delta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi + iu)^m(\eta + iv)^n e^{-\psi(u,v)}\,du\,dv,\\ \mathrm{G}_{m,n}(x, y) &= \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x + iu)^m(y + iv)^n e^{-\varphi(u,v)}\,du\,dv.\end{aligned}\right.$$

Nous allons généraliser la relation (32). Écrivons que

$$e^{2A(x+y)-A^2}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{A^m}{m!}H_m(x+y),\qquad e^{2B(x+z)-B^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B^n}{n!}H_n(x+y);$$

formons le produit des membres correspondants, et intégrons, en multipliant par $e^{-\frac{x^2}{k}}$, de $-\infty$ à $+\infty$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^mB^n}{m!\,n!}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{k}}H_n(x+y)H_n(x+z)\,dx$$
$$=e^{2Ay+2Bz-(A^2+B^2)}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{k}+2(A+B)x}\,dx$$
$$=\sqrt{k\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{A^{p+r}B^{q+r}(1-k)^{\frac{1}{2}(p+q)}(2k)^r}{p!\,q!\,r!}H_p\left(\frac{y}{\sqrt{1-k}}\right)H_q\left(\frac{z}{\sqrt{1-k}}\right).$$

Cherchons aux deux membres les coefficients de A^mB^n qui doivent être identiques. Alors

$$p+r=m\qquad q+r=n\qquad [r=0,1,2,\ldots,\min(m,n)],$$

et l'on trouve que

$$(46)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{k}}H_m(x+y)H_n(x+z)\,dx$$
$$=\sqrt{k\pi}(1-k)^{\frac{m+n}{2}}\sum_{r=0}^{\min(m,n)}\left(\frac{2k}{1-k}\right)^r r!\binom{m}{r}$$
$$\times\binom{n}{r}H_{m-r}\left(\frac{y}{\sqrt{1-k}}\right)H_{n-r}\left(\frac{z}{\sqrt{1-k}}\right).$$

Si nous faisons dans (44), $a=c=1-k$, $b=-k$ $\left(\text{et si } k<\frac{1}{2}\right)$, on pourra écrire que ([10])

$$(47)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{k}}H_m(x+y)H_n(x+z)\,dx$$
$$=\sqrt{k\pi}\,H_{m,n}(\xi,\eta)$$
$$=\sqrt{k\pi}\,H_{m,n}\left(\frac{1-k}{1-2k}y+\frac{k}{1-2k}z,\ \frac{k}{1-2k}y+\frac{1-k}{1-2k}z\right).$$

([10]) Par polynome d'Hermite à deux variables, nous entendons ici le polynome qui appartient à la forme quadratique spécialisée pour chaque formule. Si le déterminant de la forme est nul, comme pour (49), le polynome est

On peut encore généraliser la formule de Nielsen, d'une façon analogue à (46). Nous obtenons alors la relation

$$(48)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{k}}(x+iu)^m(x+iv)^n\,dx$$
$$= \sqrt{k\pi}\,k^{\frac{m+n+1}{2}}\left(\frac{i}{2}\right)^{m+n}\sum_{r=0}^{\min(m,n)}(-2)^r r!\binom{m}{r}$$
$$\times\binom{n}{r}\mathrm{H}_{m-r}\left(\frac{u}{\sqrt{k}}\right)\mathrm{H}_{n-r}\left(\frac{v}{\sqrt{k}}\right)$$

ou

$$(49)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{k}}(x+iu)^m(x+iv)^n\,dx = \sqrt{k\pi}\left(\frac{i}{2}\right)^{m+n}\overline{\mathrm{H}}_{m,n}(\zeta,\zeta),$$
$$\text{où}\quad \zeta = k(u+v).$$

On trouve de même la formule

$$(50)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{k}}(x+iu)^m\mathrm{H}_n(x+iv)\,dx$$
$$= \mathrm{I}_{m,n}^{(k)}(u,v) = \sqrt{k\pi}\,i^{m+n}\frac{k^{\frac{m}{2}}(k-1)^{\frac{n}{2}}}{2^m}\sum_{r=0}^{\min(m,n)}\left(-\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a-1}}\right)^r r!\binom{m}{r}$$
$$\times\binom{n}{r}\mathrm{H}_{m-r}\left(\frac{u}{\sqrt{k}}\right)\mathrm{H}_{n-r}\left(\frac{v}{\sqrt{k-1}}\right).$$

Cette dernière relation permet de retrouver la formule d'inversion (35) des polynomes d'Hermite. En effet, la formule (35) résulte du calcul de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}x^n\mathrm{H}_{n-2r}(x)\,dx = \mathrm{I}_{m,n}^{(1)}(0,0) = \sqrt{\pi}\,\frac{n!}{2^{2r}r!}.$$

donc

$$h_r^{(n)} = \frac{1}{2^n}\,\frac{n!}{r!}\,\frac{1}{(n-2r)!},$$

---

désigné par $\overline{\mathrm{H}}_{m,n}$. Ce cas limite ainsi que la généralisation de ces équations fonctionnelles pour le produit de n polynomes d'Hermite ont été traités dans dans mon récent travail : *Équations intégrales pour les polynomes d'Hermite à une et plusieurs variables*, etc., sous presse dans les *Annali d. R. Sc. Norm. Sup. di Pisa.* (Ajouté à la correction des épreuves.)

Pour d'autres applications de ces relations nous renvoyons à quelques-uns de nos travaux récemment publiés ([11]).

III. — Les polynomes de Laguerre.

6. Le polynome de Laguerre est défini par les formules

$$(51)\qquad L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\,\frac{d^n(x^{n+\alpha}e^{-x})}{dx^n} = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n+\alpha}{n-r}\frac{x^r}{r!},$$

la fonction génératrice est

$$(52)\qquad \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}\exp\left(\frac{tx}{t-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n^{(\alpha)}(x)\qquad [\exp(z) = e^z],$$

le développement étant valable pour $|t| < 1$.

Ce sont des polynomes orthogonaux dans l'intervalle $(0, +\infty)$, par rapport au poids $e^{-x}x^\alpha$:

$$(53)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} e^{-x}x^\alpha L_m^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{pour } m \neq n \\ \dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}, & \text{pour } m = n \end{cases} \\ &\qquad (\alpha > -1). \end{aligned}\right.$$

Pour trouver les coefficients du développement de x^n en série de polynomes de Laguerre, d'après la formule (4), nous devons calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x^{n+\alpha}e^{-x}L_k^{(\alpha)}(x)\,dx = \frac{1}{k!}\int_0^{\infty} x^n\,\frac{d^k(e^{-x}x^{k+\alpha})}{dx^k}\,dx,$$

qui s'écrit, d'après (3), de la façon suivante

$$(-1)^k\binom{n}{k}\int_0^{\infty} x^{n+\alpha}e^{-x}\,dx\,(= -1)^k\binom{n}{k}\Gamma(n+\alpha+1),$$

([11]) E. Feldheim. *a. Sur une équation intégrale singulière* (*Bull. Sc. math.*, t, 61, 1937; *b. loc. cit.* sous ([7]); *c. Résolution de quelques équations fonctionnelles au moyen de polynomes d'Hermite* (*Bull. Sc. math.*, t. 62, 1938); *d. Applicazioni dei polinomi di Hermite a qualche problema di calcolo delle probabilità* (*Giornale dell' Instituto Ital. degli Attuari*, t. XV, Anno VIII-1937, p. 303-327). *e. Polynomes d'Hermite et inversion des transformations de Gauss et de Laplace* (*Rendic. del Semin. Mat. della R. Univ. di Roma*, 4ᵉ série, vol. II, 1938).

de sorte que

$$(54) \qquad \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} L_k^{(\alpha)}(x),$$

qui est à confronter à la seconde formule (51) : *les polynomes* $L_n^{(\alpha)}(x)$ *et* $\frac{x^n}{n!}$ *sont des polynomes inverses.*

Pour le changement d'unité, nous trouvons la relation suivante, analogue à (34), relative aux polynomes d'Hermite ([12])

$$(55) \qquad \lambda^n L_n^{(\alpha)}\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda - 1)^{n-k} \binom{n+\alpha}{n-k} L_k^{(\alpha)}(x).$$

Si $\lambda \to 0$, on retrouve la formule d'inversion (54).

Le développement du produit de deux polynomes de Laguerre d'indices différents en série de polynomes de Laguerre a été traité dans notre travail cité sous ([7]), et aussi par M. G. N. Watson, qui a établi au moyen de la fonction génératrice la relation suivante

$$(56) \quad L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{r=|m-n|}^{m+n} \frac{(-1)^{m+n-r} 2^{m+n-r} r!}{(r-m)!\,(r-n)!\,(m+n-r)!} \times {}_3F_2\left(\begin{matrix} \alpha+r+1, & \frac{1}{2}(r-m-n), & \frac{1}{2}(r-m-n-1) \\ & r-m+1, \quad r-n+1 & \end{matrix}\right) L_r^{(\alpha)}(x),$$

([12]) *Note ajoutée à la correction des épreuves.* — Le présent Mémoire a été rédigé au début de 1938, et présenté pour publication en juin 1938. Au mois de septembre de la même année, M. A. ERDÉLYI a publié la Note : *On certain Hankel transforms* (*Quarterly Journ. of Math.*, t. 9, 1938, p. 196-198) qui contient la formule (55). Pour la démonstration, l'auteur renvoie à un de ses travaux sur les fonctions de Whittaker (*Math. Zeits.*, t. 42, 1936, p. 125-143). Les polynomes d'Hermite étant des cas particuliers de ces dernières, cette remarque vaut aussi pour la relation (34). A cette occasion, il y a lieu de remarquer que, depuis la rédaction de cet article, plusieurs publications ont parues sur les polynomes orthogonaux. Vu l'intérêt qui s'est montré dans les derniers temps, envers les problèmes de ce genre, nous croyons qu'il ne sera pas inutile d'avoir rassemblé ici dans un article un grand nombre de résultats touchant à ce domaine.

Nous remarquons ici encore que le développement du produit de deux (ou plusieurs) polynomes de Laguerre a été traité par notre méthode dans une Note de M. A. Erdélyi, se rattachant à notre travail cité sous ([7]), et publiée au même endroit que ce dernier.

${}_3F_2$ désignant une fonction hypergéométrique de 3^e^ ordre dans laquelle la variable est l'unité.

Notre raisonnement utilise la formule d'inversion (54). La relation (51) permet d'écrire, en faisant usage du théorème de multiplication de Cauchy que

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned} L_m^{(\alpha)}(x)\,L_n^{(\alpha)}(x) &= \sum_{r=0}^{m+n}(-1)^r A^{(m,n,\alpha)}\frac{x^r}{r!},\\ A_r^{(m,n,\alpha)} &= \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\binom{m+\alpha}{m-r+k}\binom{n+\alpha}{n-k}. \end{aligned}\right.$$

En remplaçant $\frac{x^r}{r!}$ par sa valeur tirée de (54), il vient

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned} L_m^{(\alpha)}(x)\,L_n^{(\alpha)}(x) &= \sum_{s=m-n}^{m+n}(-1)^s B_s^{(m,n,\alpha)} L_s^{(\alpha)}(x),\\ B_s^{(m,n,\alpha)} &= \sum_{r=0}^{m+n}(-1)^r\binom{r+\alpha}{r-s}A_r^{(m,n,\alpha)}\\ &= \sum_{r=s}^{m+n}\sum_{k=0}^{r}(-1)^r\binom{k}{r}\binom{r+\alpha}{r-s}\\ &\quad\times\binom{m+\alpha}{m-r+k}\binom{n+\alpha}{n-k}. \end{aligned}\right.$$

On aura ici $B_s^{(m,n,\alpha)} \equiv 0$, si $s < m-n$.

Notre méthode n'étant pas liée à la fonction génératrice, elle est plus générale et, possédant la relation d'inversion, peut être appliquée à tout polynome. Dans certains cas le calcul des coefficients devient assez simple.

Cherchons maintenant le développement de la dérivée d'ordre k des polynomes de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$, en série de ces polynomes.

Il est connu que

$$(59)\qquad \frac{d^k[L_n^{(\alpha)}(x)]}{dx^k} = (-1)^k L_{n-k}^{(\alpha+k)}(x).$$

En se rappelant la relation

$$(60)\qquad L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{r=0}^{n}\binom{r+\alpha-\beta-1}{r}L_{n-r}^{(\beta)}(x),$$

(59) et (60) donnent

$$\frac{d^k[\mathrm{L}_n^{(\alpha)}(x)]}{dx^k}=(-1)^k\sum_{r=0}^{n-k}\binom{n-r-1}{k-1}\mathrm{L}_r^{(\alpha)}(x).$$

Les formules (51) et (61) donnent lieu à l'identité

$$\sum_{s=r}^{n-k}(-1)^{r+s}\binom{n+\alpha}{n-k-s}\binom{s+\alpha}{s-r}\equiv\binom{n-r-1}{k-1}, \tag{62}$$

quel que soit α, et $k=1, 2, 3, \ldots, n-r$; $r=0, 1, 2, \ldots, n-1$.

IV. — Polynomes particuliers.

7. Nous avons vu les relations analogues (34) et (55), relatives aux polynomes d'Hermite et de Laguerre. Cherchons maintenant les polynomes $\omega_n(x)$ généraux qui satisfont à la relation

$$\lambda^n\omega_n\left(\frac{x}{\lambda}\right)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{A}_k^{(n)}(1-\lambda)^{n-k}\omega_k(x), \tag{63}$$

si

$$\omega_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k^{(n)}x^k. \tag{64}$$

On en déduit que

$$\lambda^n\omega_n\left(\frac{x}{\lambda}\right)=\sum_{k=0}^{n}a_k^{(n)}x^k\lambda^{n-k}.$$

Or

$$\lambda^{n-k}=[1-(1-\lambda)]^{n-k}=\sum_{r=0}^{n-k}(-1)^r\binom{n-k}{r}(1-\lambda)^r,$$

de sorte que

$$\lambda^n\omega_n\left(\frac{x}{\lambda}\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-k}a_k^{(n)}(-1)^r\binom{n-k}{r}x^k,$$

En confrontant cette relation à (63), on aura

$$\mathrm{A}_{n-r}^{(n)}\omega_{n-r}(x)=\sum_{k=0}^{n-r}a_k^{(n)}(-1)^r\binom{n-k}{r}x^k,$$

et, en faisant usage de (64),

$$(65)\quad \left\{ \begin{array}{l} (-1)^{n-s}\binom{n-k}{n-s} a_k^{(n)} = A_s^{(n)} a_k^{(s)} \\ (s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ n=1,\ 2,\ \ldots;\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s). \end{array} \right.$$

Cette relation peut s'écrire sous la forme suivante

$$(66)\qquad (-1)^{n-s}(n-s)!\,A_s^{(n)} = \frac{(n-k)!\,a_k^{(n)}}{(s-k)!\,a_k^{(s)}}.$$

Le second membre doit être indépendant de k, ce qui n'est possible que si

$$(n-k)!\,a_k^{(n)} = b_n c_k,$$

c'est-à-dire

$$a_k^{(n)} = \frac{b_n c_k}{(n-k)!}.$$

Alors

$$A_s^{(n)} = (-1)^{n-s}\frac{b_n}{(n-s)!\,b_s}.$$

En résumé, pour les polynomes

$$(69)\qquad \omega_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_n c_k}{(n-k)!} x^k,$$

on a

$$(70)\qquad \lambda^n \omega_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\frac{b_n}{(n-k)!\,b_k}(1-\lambda)^{n-k}\omega_k(x).$$

Si $\lambda \to 0$, on trouve la formule d'inversion des polynomes (69).

$$(71)\qquad x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\frac{1}{(n-k)!\,c_n b_k}\omega_k(x).$$

Considérons le cas particulier où les développements (69) et (71) ont leurs coefficients identiques. Alors

$$(-1)^n b_n c_n = \frac{1}{(-1)^k b_k c_k}.$$

Ce n'est possible que si les deux membres sont égaux à l'unité (il suffit de prendre $+1$) :

$$c_k = \frac{(-1)^k}{b_k}$$

et

(72)
$$\omega_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{b_n}{(n-k)!\, b_k} x^k.$$

Un exemple très simple est le cas où $b_n = n!$. Alors

$$\omega_n(x) = (1-x)^n,$$

et l'on a

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \omega_k(x) = (1-\overline{\omega})^n,$$

développement symbolique où les puissances de ω doivent être remplacées par les indices correspondants.

Un autre cas particulier est celui où les coefficients de (69) et (71) sont proportionnels

$$\frac{b_n c_k}{(n-k)!} d_k^{(n)} = (-1)^{n-k} \frac{1}{(n-k)!\, b_k c_n},$$

d'où

$$[(-1)^n b_n c_n][(-1)^k b_k c_k] = d_k^{(n)} = g_n g_k.$$

Alors

$$(-1)^n b_n c_n = g_n, \qquad c_n = (-1)^n \frac{g_n}{b_n},$$

(73)
$$\left\{ \begin{aligned} \omega_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{b_n}{(n-k)!\, b_k} g_k x^k, \\ g_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{b_n}{(n-k)!\, b_k} \omega_k(x). \end{aligned} \right.$$

Un exemple des polynomes (73) est formé par les polynomes de Laguerre (51) ([13]). Ici

$$b_n = \Gamma(n+\alpha+1), \qquad g_n = \frac{1}{n!}.$$

([13]) Nous avons montré récemment que les polynomes de Laguerre sont les seuls polynomes orthogonaux qui vérifient (63). (Ajouté le 16-4-40.)

Nous pouvons obtenir des relations analogues pour les polynomes symétriques. Si

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} b_n \frac{c^k}{k!} d_{n-2k} x^{n-2k},$$

alors

$$\lambda^n \varphi_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^\nu \frac{c^\nu}{\nu!} \frac{b_n}{b_{n-2\nu}} (1-\lambda^2)^\nu \varphi_{n-2\nu}(x),$$

d'où, pour $\lambda \to 0$, la formule d'inversion

$$x^n = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^\nu \frac{c^\nu}{\nu!} \frac{1}{d_n b_{n-2\nu}} \varphi_{n-2\nu}(x).$$

Un exemple de ce cas est le polynome d'Hermite, pour lequel

$$b_n = n!, \qquad c_k = -1, \qquad d_n = \frac{1}{n!}.$$

Ajoutons encore quelques mots sur le problème général de l'inversion des polynomes. Si nous considérons le polynome

$$\omega_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k,$$

et si nous prenons la formule d'inversion sous la forme

$$x^k = \frac{1}{a_k^{(n)}} \sum_{r=0}^{k} c_{n-k}^{(n,r)} \omega_r(x),$$

les coefficients $c_k^{(n,r)}$ seront déterminés par les relations

$$\sum_{k=0}^{n-r} c_k^{(n,r)} = \begin{cases} 0, & \text{si } r \neq n, \\ 1, & \text{si } r = n. \end{cases}$$

Considérons un autre cas. En prenant $\omega_n(x)$ sous la même forme que tout à l'heure, soit

$$\lambda^n \omega_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{r=0}^{n} A_r^{(n)} \omega_r(x),$$

où

$$A_r^{(n)}(\lambda) = \sum_{s=0}^{n-r} a_{n-s}^{(n)} b_r^{(n-s)} \lambda^s.$$

La formule d'inversion sera alors la suivante

$$x^k = \sum_{r=0}^{k} b_r^{(k)} \omega_r(x),$$

et les coefficients sont liés par les relations

$$\sum_{k=r}^{n} a_k^{(n)} b_r^{(k)} = 0, \qquad \text{si} \quad r \neq n; \qquad a_n^{(n)} b_n^{(n)} = 1,$$

qui suffisent pour calculer les $b_r^{(k)}$ au moyen des $a_k^{(n)}$.

V. — Les polynomes d'Appell.

8. Les polynomes d'Appell ([14]) sont définis par la relation

$$A'_n(x) = n\, A_{n-1}(x). \tag{74}$$

La théorie générale de ces polynomes nous apprend que les polynomes d'Appell possèdent la fonction génératrice

$$a(h)\, e^{hx} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{h^n}{n!}. \tag{75}$$

Si l'on prend

$$a(h) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \frac{h^n}{n!},$$

on aura, pour $A_n(x)$, le développement

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \gamma_k x^{n-k} = (x+\gamma)^n, \tag{76}$$

([14]) P. Appell, *Sur une classe de polynomes* (*Annales de l'École Norm. sup.* 2e série, vol. 9, p. 1880).

la puissance symbolique ayant la même signification qu'auparavant.

Considérons de même les développements

$$b(h)\,e^{hx}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{B}_n(x)\frac{h^n}{n!},\qquad b(h)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\frac{h^n}{n!},$$

d'où

$$\mathrm{B}_n(x)=(x+\overline{\beta})^n,$$

avec $a(h)\,b(h)=1$. Alors

$$a(h)\,b(h)\,e^{hx}=e^{h(x+\overline{\beta}+\overline{\gamma})}=e^{h\overline{\mathrm{B}}+h\overline{\gamma}}=e^{h(\overline{\mathrm{A}}+\overline{\beta})}=e^{hx}.$$

En formant le développement des deux dernières quantités en séries de x et égalant les coefficients des puissances égales de h, il vient la formule d'inversion de $\mathrm{A}_n(x)$:

$$(77)\qquad x^n=(\overline{\mathrm{A}}+\overline{\beta})^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\beta_{n-k}\,\mathrm{A}_k(x)=\mathrm{B}_n(\overline{\mathrm{A}}).$$

Pour ce qui est du changement d'unité, on peut écrire que

$$\lambda^n\mathrm{A}_n\left(\frac{x}{\lambda}\right)=(x+\lambda\overline{\gamma})^n,$$

et d'une façon symbolique [15]

$$e^{h\lambda\overline{\mathrm{A}}\left(\frac{x}{\lambda}\right)}=e^{h(x+\lambda\overline{\gamma})}=e^{h(x+\lambda\overline{\gamma})}\,e^{h(\overline{\beta}+\overline{\gamma})}=e^{h(x+\overline{\gamma})}\,e^{h(\lambda\overline{\gamma}+\overline{\beta})}=e^{h[\overline{\mathrm{A}}+\overline{\mathrm{B}}(\lambda\overline{\gamma})]},$$

c'est-à-dire

$$(78)\qquad\left\{\begin{aligned}\lambda^n\mathrm{A}_n\left(\frac{x}{\lambda}\right)&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{B}_k(\lambda\overline{\gamma})\,\mathrm{A}_{n-k}(x),\\ \mathrm{B}_k(\lambda\overline{\gamma})&=(\lambda\overline{\gamma}+\overline{\beta})^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{r}\beta_{k-r}\gamma_r\lambda^r.\end{aligned}\right.$$

En appliquant la même méthode pour développer le produit $\mathrm{A}_m(x)\,\mathrm{A}_n(x)$ en série de polynomes d'Appell qui nous a servi

---

([15]) Étant donné que $a(h)\,b(h)=1$, et $a(h)=e^{h\overline{\gamma}}$, $b(h)-e^{h\overline{\beta}}$, nous avons $e^{h(\overline{\beta}+\overline{\gamma})}=1$.

pour le problème analogue relatif aux polynomes de Laguerre, nous trouvons la relation

$$(79)\quad \left\{\begin{aligned} \Lambda_m(x)\,\Lambda_n(x) &= \sum_{k=0}^{m+n} c_k^{(m,n)}\Lambda_k(x),\\ c_k^{(m,n)} &= \sum_{r=k}^{m+n}\sum_{s=0}^{r}\binom{m}{s}\binom{n}{r-s}\binom{r}{k}\gamma_{m-s}\,\gamma_{n-r+s}\,\beta_{r-k}.\end{aligned}\right.$$

Le seul polynome d'Appell qui soit en même temps un polynome orthogonal est, comme il est connu ([16]), le polynome d'Hermite. Alors

$$\beta_k = (-1)^k\gamma_k,$$

et (77) redonne la formule d'inversion (35).

Mentionnons maintenant le lien qui existe entre les polynomes de Laguerre et d'Appell. La relation bien connue

$$(80)\qquad \frac{d}{dx}\,L_n^{(\alpha)}(x) = -\,L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)$$

montre que la suite des polynomes

$$(81)\qquad \omega_k(x) = (-1)^k k!\,L_k^{(n-k+\alpha)}(x) \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ n \text{ fixe})$$

forme une suite de polynomes d'Appell. La formule (51) montre alors que

$$\omega_k(x) = \sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{k}{r}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n-r+\alpha+1)}\,x^{k-r},$$

de sorte que

$$\gamma_r = (-1)^r\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n-r+\alpha+1)},$$

et

$$a(h) = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n-r+\alpha+1)}\,\frac{h^r}{r!} = (1-h)^{n+\alpha}.$$

Ainsi

$$b(h) = (1-h)^{-(n+\alpha)} = \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\binom{-n-\alpha}{r}h^r = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{n+r+\alpha-1}{r}h^r,$$

([13]) J. Shohat, *The relation of the classical orthogonal polynomials to the polynomials of Appell* (*American Journal of Math.*, vol. LVIII, 1936, p. 453-464).

d'où

$$\beta_r = r!\binom{n+r+\alpha-1}{r},$$

et, d'après (77), nous avons une nouvelle formule d'inversion pour les polynomes de Laguerre

$$(82) \qquad \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n+k+\alpha-1}{k} \mathrm{L}_{n-k}^{(k+\alpha)}(x) \qquad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

On aurait pu établir des relations analogues pour les polynomes de Jacobi. Mentionnons, avec M. Shohat, que si la fonction $a(h)$ est telle que

$$b(h) = \frac{1}{a(h)} = a(-h)$$

(comme nous l'avons vu pour le polynome d'Hermite), alors

$$\beta_k = (-1)^k \gamma_k,$$

et l'on a les deux formules réciproques

$$(83) \qquad \mathrm{A}_n(x) = (x+\bar{\gamma})^n, \qquad x^n = (\bar{\mathrm{A}} - \bar{\gamma})^n \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

VI. — Les polynomes de Bernoulli.

9. Nous adoptons ici, pour les polynomes de Bernoulli, la définition suivante, basée sur la fonction génératrice

$$(84) \qquad \frac{t}{e^t - 1} e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{B}_n(x) t^n.$$

En dérivant les deux membres par rapport à x, on déduit la relation

$$(85) \qquad \mathrm{B}'_n(x) = \mathrm{B}_{n-1}(x), \qquad \mathrm{B}_n^{(k)}(x) = \mathrm{B}_{n-k}(x),$$

d'où, d'après la formule de Taylor,

$$(86) \qquad \mathrm{B}_n(x+y) = \sum_{s=0}^{n} \mathrm{B}_s(y) \frac{x^{n-s}}{(n-s)!},$$

et ainsi

$$(87)\qquad B_n(x) = \sum_{s=0}^{n} \frac{c_s}{(n-s)!} x^{n-s},$$

$c_s = B_s(0)$ étant des coefficients à déterminer.

Ensuite, d'après (84'),

$$\frac{t}{e^t - 1} e^{t\left(x+\frac{s}{\nu}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\left(x + \frac{s}{\nu}\right) t^n,$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{s=0}^{\nu-1} B_n\left(x + \frac{s}{\nu}\right) \right\} t^n = \frac{t}{e^t - 1} e^{tx} \sum_{s=0}^{\nu-1} e^{\frac{ts}{\nu}} = \nu \sum_{n=0}^{\infty} B_n(\nu x) \left(\frac{t}{\nu}\right)^n,$$

d'où

$$(88)\qquad \sum_{s=0}^{\nu-1} B_n\left(x + \frac{s}{\nu}\right) = \nu^{1-n} B_n(\nu x).$$

En appliquant la formule de composition (86), il vient donc, pour toute valeur entière de ν,

$$(89)\qquad B_n(\nu x) = \sum_{r=0}^{n} \frac{\nu^{r-1} S_{\nu-1}^{(n-r)}}{(n-r)!} B_r(x),$$

$S_{\nu-1}^{(n-r)}$ désignant la somme de la puissance $n - r$ des $\nu - 1$ premiers entiers

$$S_{\nu-1}^{(n-r)} = 1^{n-r} + 2^{n-r} + \ldots + (\nu - 1)^{n-r}.$$

En général nous avons

$$(90)\qquad \lambda^n B_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{r=0}^{n} C_{n-r} B_r(x),$$

avec

$$C_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{c_k}{(m-k+1)!} \lambda^k.$$

Multipliant les deux membres de (84) par $e^t - 1$, et identifiant aux deux membres les coefficients des puissances égales de t, il vient la formule d'inversion connue

$$(91)\qquad \frac{x^n}{n!} = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{(n-r+1)!} B_r(x).$$

Cette formule peut d'ailleurs être retrouvée au moyen de la relation (77), établie pour les polynomes d'Appell. Si nous posons, en effet,

$$\Phi_n(x) = n!\, B_n(x),$$

nous aurons, d'après (85),

$$\Phi'_n(x) = n\Phi_{n-1}(x),$$

analogues à la relation (74), caractérisant les polynomes d'Appell. La formule (76) donne alors, en comparaison avec (87), que

$$\gamma_k = k!\, c_k,$$

et alors

$$a(h) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h^k = \frac{h}{e^h - 1}$$

[qui résulte de (84), en y posant $x = 0$, $t = h$]. Cela montre aussi que le polynome de Bernoulli, donné par (84), est un cas particulier des polynomes d'Appell. Alors

$$b(h) = \frac{1}{a(h)} = \frac{e^h - 1}{h} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{(k+1)!},$$

d'où

$$b_k = \frac{1}{k+1}.$$

La formule (77) nous donne maintenant

$$x^n = (\overline{\Phi} + \overline{\beta})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k!}{n-k+1} B_k(x)$$

ou encore

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k+1)!} B_k(x),$$

identique à (91).