BULLETIN DE LA S. M. F.

ANDRÉ ROUSSEL

Sur l'approximation locale des fonctions continues

Bulletin de la S. M. F., tome 69 (1941), p. 97-132
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1941__69__97_0>

SUR L'APPROXIMATION LOCALE DES FONCTIONS CONTINUES;

PAR M. ANDRÉ ROUSSEL.

1. Généralités sur l'étude locale des fonctions continues. — Jusqu'à présent on s'est exclusivement borné à étudier l'approximation des fonctions continues les plus générales sur tout un intervalle, avec une approximation d'ordre zéro, c'est-à-dire qu'étant donnée une fonction continue $f(x)$ on cherchait, parmi les fonctions $\varphi(x)$ d'un certain type, celles qui donnaient lieu à l'inégalité

$$|f(x) - \varphi(x)| < \alpha,$$

α désignant un nombre positif donné.

Dans ce travail je me propose d'envisager les fonctions continues à un nouveau point de vue : celui de leur étude locale.

Nous chercherons une représentation approchée de l'accroissement

$$\Delta f = f(x+h) - f(x),$$

l'erreur commise n'étant plus ici inférieure en valeur absolue à une constante donnée (ce qui serait sans intérêt et nous ferait retomber dans le premier point de vue) mais tendant vers zéro avec une certaine rapidité.

D'une façon plus précise nous chercherons à mettre Δf sous la forme

$$(1) \qquad \Delta f = g(x, h) + \varepsilon \varphi(h),$$

$g(x, h)$ désignant une expression nulle avec h, et $\varphi(h)$ une fonction monotone *donnée* telle que $\varphi(0) = 0$, ε une quantité continue variable, tendant vers zéro avec h.

L'intérêt de ce point de vue est qu'il constitue une généralisation naturelle de l'idée fondamentale du calcul différentiel. En effet, si f a une dérivée f' on pourra écrire

$$\Delta f = f'(x)h + \varepsilon h;$$

ici

$$g(x, h) = f'(x)h, \qquad \varphi(h) = h.$$

Revenant à (1) *nous dirons* $g(x, h)$ *représente* Δf à $\varepsilon\varphi(h)$ près. En langage géométrique, en chaque point (x, y) de la courbe C d'équation $y = f(x)$, il passe une courbe Γ définie par l'équation

$$Y = y + g(x, X - x),$$

que nous pourrons *dire tangente* à C d'ordre $\varphi(h)$; l'erreur commise en substituant Γ à C dans le voisinage de x est en effet de la forme

$$\varepsilon\varphi(h).$$

Pour que la représentation (1) *de* Δf *ait de l'intérêt, il est d'ailleurs nécessaire que le terme* $\varepsilon\varphi(h)$ *soit « en général » infiniment petit par rapport à* $g(x, h)$. *En d'autres termes, nous serons conduit à prendre pour* $\varphi(h)$ *une fonction telle que, en désignant par* $\mu(h)$ *le maximum de*

$$|g(x, k)|,$$

quand $|k|$ *varie de* 0 *à* $|h|$, *le rapport*

$$\frac{\varphi(h)}{\mu(h)}$$

tende vers zéro avec h. $g(x, h)$ *jouera ainsi le rôle d'une partie principale.*

Nous sommes ainsi conduit à prendre d'abord pour expression de $\varphi(h)$, et comme étant le choix le plus simple, le *module de continuité* ω de la fonction $f(x)$, c'est-à-dire le maximum de

$$|f(x + k) - f(x)|,$$

quand $|k|$ varie de 0 à $|h|$.

Il résulte en effet de nos travaux antérieurs que l'introduction du module de continuité dans des conditions de tangence ou de contact généralisées permet d'obtenir des résultats très simples et généraux dans de nombreux problèmes.

C'est ainsi que, pour en donner un exemple, nous avons établi que si $\varphi(x)$ désigne une fonction continue telle que (ω désignant son module de continuité)

$$\frac{h}{\omega(h)},$$

tende vers zéro avec h (donc φ n'a pas de dérivée), à toute fonction continue f on peut associer une F (et même une infinité) telle que l'on ait

$$\Delta F = f(x)\Delta\varphi + \varepsilon\omega(h).$$

En chaque point (x_0, y_0) *de la courbe* C

$$y = F(x),$$

il existe donc une courbe Γ

$$y = \alpha\varphi(x) + \beta,$$

avec

$$f(x_0) = \alpha, \qquad F(x_0) - f(x_0)\varphi(x_0) = \beta,$$

tangente à C à $\varepsilon\omega(h)$ près.

Ce résultat très simple et très général (1) n'aurait pas été possible en choisissant une autre forme pour le terme $\varepsilon\omega(h)$.

Nous aurons l'occasion par la suite de mentionner des interventions analogues à la précédente du module de continuité dans des conditions de contact généralisé.

Bien entendu, il peut y avoir intérêt dans de nombreux cas à chercher des représentations de l'accroissement Δf plus précises (on pourrait dire plus fines) et nous ne nous limiterons pas à l'étude de la partie principale $g(x, h)$ qui représente un accroissement de fonction f à $\varepsilon\omega(h)$ près, où $\omega(h)$ représente le *module de continuité* de f.

---

(1) La démonstration repose sur la possibilité d'écrire f sous forme d'une série $\Sigma f_n(u_n\varphi)$ uniformément et absolument convergente, où les u satisfont à une condition de Lipschitz d'ordre (1).

En intégrant terme à terme la série précédente par rapport à φ traitée comme variable indépendante et les u comme des constantes, le résultat obtenu est la fonction F.

Notons que, dans cette théorie, les fonctions dérivables (ou à module de continuité inférieur à celui de φ) jouent le rôle de constantes.

2. Passage de l'approximation zéro à l'approximation locale. — Nous allons maintenant indiquer, comment, dans des cas étendus, en partant de l'approximation finie (nous pouvons dire d'ordre zéro) d'une fonction f, on peut déduire une approximation locale, au sens qui vient d'être défini dans le paragraphe précédent, c'est-à-dire une expression de « la partie principale » de Δf.

Il arrive souvent, en effet, que l'on connaisse une expression

$$\psi(\lambda, x),$$

tendant (dans un intervalle fini) uniformément vers $f(x)$ quand λ tend vers une valeur déterminée (pouvant être infinie), la fonction $\psi(\lambda, x)$ appartenant à un type déterminé de fonctions, étant par exemple analytique.

Par exemple l'intégrale considérée par Weierstrass pour démontrer la possibilité de développer toute fonction continue en série de polynomes, soit

$$(1) \qquad \psi = \frac{1}{\lambda\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-\left(\frac{t-x}{\lambda}\right)^2} dt;$$

ψ tend vers $f(x)$ quand λ tend vers zéro.

Nous écrirons

$$(2) \qquad f(x) = \psi(\lambda, x) + \alpha(\lambda, x).$$

L'étude de l'approximation de f par ψ, donne, théoriquement du moins, une limite supérieure de $|\alpha|$.

On tire de (2)

$$(3) \quad f(x+h) - f(x) = \psi(\lambda, x+h) - \psi(\lambda, x) + \alpha(\lambda, x+h) - \alpha(\lambda, x),$$

$\alpha(\lambda, x)$ tendant uniformément vers zéro quand λ tend vers λ_0, pourvu que x reste dans un certain intervalle; on conçoit qu'on peut remplaçer dans α le paramètre λ par une fonction $u(h)$ tendant vers λ_0 quand h tend vers zéro avec une rapidité assez grande pour que

$$\alpha[u(h), x]$$

tende vers zéro plus rapidement qu'une fonction $\varphi(h)$ donnée à l'avance. En d'autres termes, φ étant donnée, on pourra déterminer u de façon à ce que l'on ait

$$\alpha[u, x] = \varepsilon_1 \varphi(h),$$

$|\varepsilon_1|$ tendant vers zéro avec h. En posant

$$g(x, h) = \psi[u(h), x+h] - \psi[u(h), x],$$

on aura donc

$$\Delta f = g(x, h) + \varepsilon\varphi(h),$$

et $g(x, h)$ sera la partie principale à $\varepsilon\varphi$ près de l'accroissement de $f(x)$. La fonction g ainsi obtenue tendra vers zéro avec h, mais pourra présenter toutefois une discontinuité pour h nul.

Nous pouvons appliquer par exemple ces considérations à l'intégrale (1).

$\varphi(h)$ étant donnée, on peut remplacer λ par une fonction holomorphe sauf pour h nul, et l'on pourrait ainsi remplacer les limites $-\infty$ et $+\infty$ de l'intégrale respectivement par $v_1(h)$ et $v_2(h)$, les fonctions v_1 et v_2 étant monotones, holomorphes sauf pour h nul et tendant avec une rapidité assez grande, respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$. La nouvelle intégrale

$$g(x, h) = \frac{1}{u\sqrt{\pi}} \int_{v_1}^{v_2} f(t) \left\{ e^{-\left(\frac{x+h-t}{u}\right)^2} - e^{-\left(\frac{x-t}{u}\right)^2} \right\} dt$$

représentera donc, avec une erreur de la forme $\varepsilon\varphi(h)$, l'accroissement infinitésimal de f. Or notons que g est une fonctions analytique de x et de h (sauf peut-être pour h nul).

On sait même que

$$\frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\left(\frac{x-t}{\lambda}\right)^2} dt$$

est une fonction entière en x. Il résulte que, sauf pour h nul, l'intégrale $g(x, h)$ est une fonction analytique de x et de h, entière en x et $\frac{1}{h}$. L'étude sommaire que nous venons de faire permet déjà de démontrer la proposition suivante qui n'était pas évidente :

$f(x)$ étant une fonction continue quelconque et $\varphi(h)$ une fonction décroissante ([1]) *donnée, nulle avec h, il existe une fonc-*

([1]) Quand h décroît.

tion $g(x, h)$ entière en x et $\frac{1}{h}$ qui représente la partie principale de l'accroissement de f à $\varepsilon\varphi(h)$ près.

En d'autres termes, on aura

$$f(x+h)-f(x)=g(x, h)+\varepsilon\varphi(h),$$

$\varepsilon(x, h)$ étant une quantité tendant vers zéro avec h.

On peut prendre par exemple

$$\varphi(h)=h^n, \qquad \ldots, \qquad \varphi(h)=e^{-\left|\frac{1}{h}\right|}.$$

Nous allons d'ailleurs être conduit à utiliser d'autres méthodes pour obtenir les expressions de la partie principale de l'accroissement infinitésimal d'une fonction continue quelconque, mais il était intéressant d'indiquer dès maintenant le procédé général donné dans ce paragraphe et dont nous venons de voir une application.

3. **Approximation locale d'une fonction par une ligne polygonale d'une infinité de côtés.** — Soit $y=F(x)$ l'équation de la courbe C représentant une fonction continue quelconque : désignons par M un point arbitraire de C. Donnons-nous une fonction continue décroissante $\varphi(h)$, nulle avec h. Nous allons montrer qu'on peut trouver une ligne polygonale P, d'une infinité de côtés s'accumulant en M, de telle sorte que l'erreur commise en remplaçant C par P soit infiniment petite par rapport à $\varphi(h)$. Autrement dit, il existe une fonction $f(x, X)$ représentée graphiquement, quand x étant fixe, X varie, par une ligne polygonale d'une infinité de côtés qui s'accumulent en M et donnent lieu à la relation

$$F(x+h)-F(x)=f(x, x+h)-f(x, x)+\varepsilon\varphi(h), \tag{1}$$

ε tendant vers zéro avec h.

Nous supposerons, pour fixer les idées, que l'on fait tendre h vers zéro par valeurs ayant un signe déterminé, positif, par exemple. Soit

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_n, \quad \ldots \tag{S}$$

une suite décroissante positive dont le terme général tend vers zéro.

Plaçons-nous en un point arbitraire d'abscisse x et considérons une suite S′, décroissante

$$(\mathrm{S}') \qquad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots,$$

dont le terme général tend vers x tout en lui restant supérieur. Soit D′ la ligne polygonale inscrite dans C dont les sommets se projettent aux points de la suite précédente. Considérons deux sommets consécutifs M_i et M_{i+1} correspondant à des valeurs x_i, x_{i+1} de x. En intercalant entre ces deux points des intermédiaires pris sur C, nous pouvons définir une ligne polygonale p_i d'un nombre fini de côtés, d'extrémités M_i et M_{i+1}, telle que l'erreur commise en substituant entre x_i, x_{i+1}, cette ligne polygonale p_i à la courbe C soit moindre en valeur absolue que

$$\varepsilon_i \varphi(x_{i+1} - x_i) \leqq \varepsilon_i \varphi(\mathrm{X} - x) = \varepsilon_i \varphi(h),$$

en posant $\mathrm{X} = x + h$. En effet, divisons l'intervalle (x_{i+1}, x_i) en n parties égales et prenons pour p_i la ligne polygonale dont les sommets se projettent en ces points de division.

Pour toute valeur de X comprise entre x_{i+1} et x_i, le module de l'erreur commise en substituant p_i à C ne dépasse pas

$$2\omega\left(\frac{x_i - x_{i+1}}{n}\right),$$

en désignant par ω le module de continuité [1] de la fonction donnée F. En prenant n assez grand, cette erreur pourra être rendue arbitrairement petite; elle pourra donc être rendue inférieure en valeur absolue au nombre fixe

$$\varepsilon_i \varphi(x_i - x_{i+1}).$$

Considérons alors la ligne polygonale P obtenue en prenant la suite des lignes polygonales partielles p_i ainsi définies. L'erreur commise en substituant P à C sera inférieure en valeur absolue à $\varepsilon_i \varphi(h)$, en désignant par $i - 1$ le rang du terme x_n de la suite S′

(1) Rappelons que le module de continuité d'une fonction F est le maximum de

$$|\mathrm{F}(x+k) - \mathrm{F}(x)|, \qquad \text{pour} \quad |k| \leqq h.$$

qui est immédiatement supérieur à $X = x + h$. Cette erreur a donc bien la forme $\varepsilon\varphi(h)$, où ε désigne une quantité tendant vers zéro avec h, ainsi que nous l'avions annoncé.

Remarques. — 1. Nous aurions évidemment un résultat analogue pour h négatif, en répétant à gauche des opérations analogues à celles que nous venons d'opérer à droite. En combinant les deux, nous définirons une ligne polygonale P′ représentant C avec une erreur de la forme assignée, quel que soit le signe de h, pourvu que $\varphi(h)$ continue à être définie pour h négatif.

2. Il n'est pas nécessaire que la ligne polygonale P′ soit inscrite dans C : il suffirait que ses sommets soient assez voisins de cette courbe. En particulier, nous serons conduit à considérer des lignes P′ de sommets

$$M_1,\quad M'_1,\quad M_2,\quad M'_2,\quad \ldots,\quad M_i,\quad M'_i,\quad M_{i+1},\quad \ldots,$$

où M'_i désigne un point de même ordonnée que M et dont l'abscisse est comprise entre celle de M_i et celle de M_{i+1}.

3. Posons

$$x_i - x = \beta_i.$$

Si nous supposons, par exemple, h positif, les β_i forment une suite positive, décroissante, tendant vers zéro.

D'après ce que nous avons vu plus haut, on peut prendre ces quantités indépendantes de x. Il suffira que

$$\omega(\beta_i - \beta_{i+1}) \leqq \frac{1}{2}\varepsilon'_i\,\varphi(\beta_{i+1}).$$

De proche en proche, on peut toujours satisfaire à ces conditions comme cela résulte du raisonnement très simple employé plus haut [1].

---

[1] Chacun des termes ε_i de la suite primitive (S) pouvant être répété un nombre *fini* de fois dans celle de (ε') pour correspondre aux intervalles de subdivision dans lesquels on a décomposé l'intervalle primitif (x_{i+1}, x_i) ou (β_i, β_{i+1}) correspondant de S′.

La suite des ε' continue donc bien elle aussi à tendre vers zéro.

4. Expression générale de l'accroissement infinitésimal d'une fonction.

Soit une fonction continue $F(x)$ et $\varphi(h)$ une fonction décroissante donnée, nulle avec h. Pour chaque valeur de x substituons à cette fonction la fonction f représentée graphiquement par la ligne polygonale P qui fournit la représentation locale de F ci-dessus définie à $\varepsilon\varphi(h)$ près. A toute représentation analytique de f correspondra une approximation de l'accroissement de F à $\varepsilon\varphi(h)$ près. On obtiendra encore une expression de ce dernier accroissement en remplaçant à son tour le nouvel accroissement

$$f(x, x+h) - f(x, x)$$

[voir formule (1), paragraphe précédent] par une expression approchée à $\varepsilon\varphi(h)$ près, la fonction $f(x, X)$ (ou la ligne polygonale P) jouant seulement un rôle d'intermédiaire.

5. L'accroissement d'une fonction, développé en série de Fourier. — On sait que les fonctions admettant un développement de Fourier, quoique formant une classe très étendue au point de vue des applications, ne constituent cependant qu'une catégorie particulière de fonctions continues. De là provient l'intérêt du théorème que nous allons maintenant démontrer.

Théorème. — *Pour h de signe déterminé, l'accroissement d'une fonction continue peut se développer en série procédant suivant les sinus des multiples de h, avec une erreur de la forme $\varepsilon\varphi(h)$ où φ désigne une fonction décroissante* (1) *arbitraire donnée à l'avance, nulle avec h et tendant vers zéro avec h.*

On a donc la relation

$$\text{(1)} \qquad F(x+h) - F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \sin nh + \varepsilon\varphi(h),$$

les α étant des fonctions de x.

(1) Quand h décroît.

En effet supposons h de signe déterminé, positif par exemple. Posons

$$g(h) = F(x+h) - F(x),$$

$g(h)$ étant considéré comme une fonction de h, nulle avec h. Appliquons à cette fonction le principe de la ligne polygonale d'une infinité de côtés, s'accumulant à l'origine O, tel qu'il a été exposé au paragraphe 3. Nous pouvons former une fonction $\psi(h)$ telle que

$$g(h) = \psi(h) + \varepsilon\varphi(h).$$

Bien entendu g et ψ dépendent de x, mais seule la variation par rapport à h nous intéresse actuellement.

Nous avons supposé h positif et la fonction ψ se trouve donc définie seulement pour ces valeurs de h; complétons la définition de ψ pour h négatif en prenant la symétrique par rapport à l'origine de la courbe représentant cette fonction $\psi(h)$. Formons la série de Fourier relative à la fonction *impaire* $\psi_1(h)$ ainsi définie. Cette série de Fourier, soit

$$\Sigma \alpha_n \sin nh, \tag{2}$$

ne renferme ni termes constants, ni termes en $\cos nh$. Elle est, de plus, convergente et a pour somme $\psi_1(h)$ pour toute valeur de h non nulle, puisque la fonction ψ_1, d'après la façon dont elle a été formée, varie linéairement dans le voisinage de chaque valeur non nulle de h. Or, pour h nul, $\psi_1(h)$ est aussi nulle ainsi que la série (2) qui a donc encore $\psi_1(h)$ pour somme, et l'on a

$$\psi_1(h) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \sin nh;$$

d'où, pour h positif, la relation (1).

Le calcul des α ne soulève aucune difficulté théorique; pour être effectué il suppose toutefois que l'on connaisse le module de continuité ω de F, ou du moins une limitation supérieure de ce module, nous voulons dire une fonction $\omega(h)$ nulle avec h et telle que

$$\omega(h) \leqq \omega_1(h).$$

Ceci afin de pouvoir effectivement déterminer la ligne polygonale d'une infinité de côtés accumulés en O qui représente la fonction $\psi_1(h)$.

Corollaire. — *Si l'on pose*

$$P(n, p, h) = \frac{nh}{1} - \frac{n^3 h^3}{3!} + \ldots (-1)^{2p-1} \frac{n^{2p-1} h^{2p-1}}{(2p-1)!},$$

on peut à tout entier arbitraire p_0 *faire correspondre la série*

$$\Sigma \alpha_n P(n, p_n, h),$$

où l'on donne à p une valeur convenable (dépendant de n) telle que

$$F(x+h) - F(x) = \Sigma \alpha_n P(n, p_n, h) + A h^{2p_0+1},$$

A *étant une expression qui reste bornée en valeur absolue quand h tend vers zéro par valeur de signe déterminé.*

En effet, la fonction F étant donnée, nous pouvons, en vertu du théorème précédant, écrire

$$F(x+h) - F(x) = \Sigma \alpha_n \sin nh + \varepsilon h^{2p_0+1}.$$

Nous pouvons supposer

$$|h| < 1.$$

Écrivons alors

$$\sin nh = \frac{nh}{1} - \frac{n^3 h^3}{3!} + \ldots (-1)^{p-1} \frac{n^{2p-1} h}{(2p-1)!} + (-1)^p \frac{n^{2p+1} h^{2p+1}}{(2p+1)!} \theta_p,$$

où

$$|\theta_p| < 1.$$

Si nous posons

$$\rho_p = \frac{n^{2p+1}}{(2p+1)!},$$

ρ_p est le terme général d'une série convergente

$$\rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots \quad \rho_p, \quad \ldots,$$

et l'on peut prendre p assez grand (et toujours supérieur à p_0) pour que

$$|\alpha_n \rho_p| < y_n,$$

en désignant par $y_1, y_2, \ldots, y_n$ une série numérique positive donnée à l'avance. On aura donc

$$\alpha_n \sin nh - \alpha_n \mathrm{P}(n, p_n, h) = (-1)^p \alpha_n \rho_{p_n} \theta_{p_n} h^{2p_n+1}.$$

Par suite

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n \sin nh - \alpha_n \mathrm{P}(n, p_n, h)| < y_1 |h|^{2p_1+1} + y_2 |h|^{2p_1+3} + \ldots;$$

la série du second membre est convergente et peut s'écrire

$$(3') \quad |h|^{2p_1+1}[y_1 + y_2 |h^2| + \ldots];$$

en comparant (2) et (3) et tenant compte de ce que

$$p_1 \geqq p_0,$$

on a bien le résultat annoncé.

Application. — Nous allons déterminer effectivement p en fonction de n. On a

$$\frac{\rho_{p+1}}{\rho_p} = \frac{n^2}{(2p+2)(2p+3)}.$$

Résolvons l'inégalité

$$(4) \quad \frac{n^2}{(2p+2)(2p+3)} < \frac{1}{2}.$$

On voit alors qu'on aura

$$\rho_p < n \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}$$

Or l'inégalité (4) aura lieu si l'on prend

$$(5) \quad p \geqq n,$$

et l'on aura

$$(6) \quad |\alpha_n \rho_p \theta_p h^{2p+1}| < |h|^{2p+1} n |\alpha_n| \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} < n\mathrm{M} \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} |h|^{2p+1}.$$

Car, d'après les propriétés des séries de Fourier, il existe un nombre positif M tel que

$$|\alpha_n| < \mathrm{M}.$$

On voit donc, en comparant (3′), (5) et (6), qu'il suffira de prendre

$$p = n + p_0 - 1,$$

car le minimum de cette dernière expression est p_0.

Finalement, nous avons le théorème suivant :

En posant

$$P_n(h) = \frac{nh}{1} - \frac{n^3 h^3}{3\,!} + \ldots (-1)^{n+p_0} \frac{n^{2n+2p_0-3} h^{2n+2p_0-3}}{(2n + 2p_0 - 3)\,!},$$

l'accroissement infinitésimal de toute fonction continue F *peut se mettre sous la forme* (pour h de signe déterminé)

$$F(x+h) - F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n P_n(h) + A h^{2p_0+1},$$

$|A|$ *demeurant bornée quand h tend vers zéro.*

Exemple : prenons $p_0 = 1$. On a ici

$$P_n(h) = \frac{nh}{1} - \frac{n^3 h^3}{3\,!} + \ldots (-1)^{n+1} \frac{n^{2n-1} h^{2n-1}}{(2n-1)\,!},$$

et l'on voit que, dans le cas actuel,

$$F(x+h) - F(x) = \sum_{1}^{+\infty} \alpha_n(x) P_n(h) + A h^3.$$

Remarques sur les résultats précédents. — 1° La restriction qui consiste à imposer à h un signe déterminé est essentielle, au moins en général, comme nous allons le montrer.

Prenons, par exemple, dans la relation (1),

$$\varphi(h) = h,$$

et supposons-la valable quel que soit le signe de h. On en tire immédiatement

$$F(x+h) + F(x-h) - 2F(x) = \varepsilon' h.$$

D'après un théorème connu, F aurait alors une dérivée presque partout. Donc la formule (1) ne peut être valable, pour h de signe quelconque, que pour des fonctions continues particulières pour lesquelles elle n'aurait qu'un intérêt très limité, en raison de l'existence de la dérivée à l'aide de laquelle on obtient d'ailleurs l'expression la plus simple de l'accroissement.

Ce que nous venons de dire s'applique avec encore plus de force en prenant pour $\varphi(h)$ une puissance de h d'exposant au moins égal à 2; prenons cet exposant égal à 2 pour fixer les idées. On aura

$$F(x+h) + F(x-h) - 2F(x) = \varepsilon' h^2,$$

la fonction F serait alors linéaire.

2° Revenons à la formule (1). On peut écrire

$$\sin nh = \cos nx[\sin n(x+h) - \sin nx] - \sin nx[\cos n(x+h) - \cos nx].$$

D'où

$$\Delta F = \sum_{n=1}^{+\infty} \{a_n \Delta \cos nx + b_n \Delta \sin nx\} + \varepsilon\varphi(h),$$

avec

$$a_n = -\alpha_n \sin nx, \qquad b_n = \alpha_n \cos nx$$

6. L'approximation locale déduite de l'intégrale de Poisson. — Nous pouvons supposer sans nuire à la généralité que la fonction continue $f(x)$ que nous étudions a pour période 2π. Soit alors l'intégrale de Poisson

$$(1) \qquad U_P = U(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\alpha - \theta) + r^2} f(\theta)\, d\theta.$$

On sait que, si l'on pose

$$x = r\cos\alpha, \qquad y = r\sin\alpha,$$

l'intégrale (1), considérée comme fonction de x et de y, est harmonique par rapport à ces variables.

D'autre part, U tend vers $f(\alpha)$ quand r tend vers R supposé fixe. Nous allons appliquer à U les considérations du paragraphe (1). Pour cela il est nécessaire de reprendre brièvement l'étude de cette intégrale classique, en précisant la façon dont elle tend vers $f(x)$ quand r tend vers R.

Soit C un cercle de centre O et de rayon R, Ox un axe polaire, M le point courant du cercle de coordonnées polaires R et θ; P le point dont les coordonnées polaires sont r et α, et enfin P_0 le point de C d'angle polaire α. Désignons par

$$d\tau_P$$

l'angle dont est vu du point $P(r, \alpha)$ l'arc de courbe ds du cercle C qui entoure le point M. On a facilement

$$d\tau_P = \frac{R \cos \widehat{OMP}}{PM} d\theta = \frac{R[R - r\cos(\alpha - \theta)]}{R^2 - 2Rr\cos(\alpha - \theta) + r^2} d\theta.$$

Posons maintenant

$$\psi(\theta) = \frac{1}{\pi} f(\theta) - \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta. \tag{2}$$

On peut écrire

$$U_P = \int_0^{2\pi} \psi(\theta)\, d\tau_P. \tag{3}$$

Quand r tend vers R, le point $P(r, \alpha)$ tend vers le point $P_0(R, \alpha)$ et, d'après la théorie de l'intégrale de Poisson, U_P tend vers $f(\alpha)$, quantité d'ailleurs différente de

$$U(R_0, \alpha) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \psi(\theta)\, d\theta.$$

Posons alors

$$W(r, \alpha) = \int_0^{2\pi} [\psi(\theta) - \psi(\alpha)]\, d\tau_P. \tag{4}$$

Cette intégrale (4) *est continue au point* P_0.

Quand P tend vers P_0 en restant intérieur à $C (r < R)$, on a

$$W_P = U_P - 2\pi\,\psi(\alpha);$$

en passant à la limite

$$W_{P_0} = f(\alpha) - 2\pi\,\psi(\alpha),$$

d'où

$$W_P - W_{P_0} = U_P - f(\alpha).$$

Donc, pour avoir une limite supérieure de

$$|U_P - f(\alpha)|,$$

tout revient à trouver une limite supérieure de

$$|W_P - W_{P_0}|.$$

C'est le but que nous nous proposons maintenant.

Soit $M_1 M_2$ un arc de cercle C, moindre qu'un quart de circonférence, ayant son milieu en P_0. Nous désignerons sa mesure par 2η. Il détermine sur C deux arcs que nous désignerons par Γ_1, Γ_2 dont l'ensemble forme toute la circonférence C. Le plus petit sera désigné par Γ_1 ; il sera donc identique à $M_1 M_2$ et sa mesure sera 2η. Nous pourrons écrire

$$W_1 = \int_{\Gamma_1} [\psi(\theta) - \psi(\alpha)]\, d\tau_P,$$

$$W_2 = \int_{\Gamma_2} [\psi(\theta) - \psi(\alpha)]\, d\tau_P,$$

et

$$W = W_1 + W_2.$$

Or, en désignant par $\omega(h)$ le module de continuité de $f(x)$, on trouve, en vertu de (2),

$$|W_1| < \frac{1}{\pi}\omega(\eta)\int_{\Gamma} |d\tau_P| < 2\omega(\eta).$$

Par suite

$$(5) \qquad |W_1(r, \alpha) - W_1(R, \alpha)| < 4\omega(\eta).$$

Étudions maintenant W_2. En posant, pour simplifier,

$$\psi(\theta) - \psi(\alpha) = \psi_1(\theta),$$

il vient

$$(6) \qquad W_2(r, \alpha) - W_2(R, \alpha) = \int_{\Gamma_2} \psi_1(\theta)(d\tau_P - d\tau_{P_0}).$$

Or

$$d\tau_P = \frac{R[R - r\cos(\alpha - \theta)]}{R^2 - 2Rr\cos(\alpha - \theta) + r^2}\, d\theta,$$

$$d\tau_{P_0} = \frac{d\theta}{2};$$

il vient facilement

$$d\tau_P - d\tau_{P_0} = \frac{R^2 - r^2}{2\overline{PM}^2}\, d\theta < R\frac{R - r}{PM_1^2}\, d\theta.$$

Or

$$PM_1 > R \sin \eta,$$

d'où

$$(7) \qquad d\tau_P - d\tau_{P_0} < \frac{R-r}{R \sin^2 \eta} d\theta < 2 \frac{R-r}{R \eta^2} d\theta.$$

Or, d'après (2), on a, en désignant par A un nombre positif tel que

$$|f(\theta)| \leqq A,$$

$$(8) \qquad |\psi_1(\theta)| \leqq 2 |\psi(\theta)| \leqq \frac{3A}{\pi}.$$

Et (6) nous donne, en tenant compte de (7) et de (8),

$$(9) \qquad |W_2(r, \alpha) - W_2(R, \alpha)| < \frac{3A}{\pi} \times 2 \frac{R-r}{R\eta^2} \times 2\pi = \frac{12A}{R\eta^2} \overline{P_0 P},$$

car $P_0 P = R - r$.

Finalement, en tenant compte de (5) et de (9), nous trouvons

$$|W(r, \alpha) - W(R, \alpha)| < 4\omega(\eta) + \frac{12A}{R} \frac{R-r}{\eta^2},$$

ou

$$(10) \qquad |U(r, \alpha) - f(\alpha)| < 4\omega(\eta) + \frac{12A}{R} \frac{R-r}{\eta^2}.$$

Posons

$$4\omega(\eta) = \frac{\varepsilon}{2};$$

en remarquant que $\omega(\eta)$ est une fonction, décroissante quand η décroît, nulle avec η, nous aurons

$$\eta = \omega_{-1}\left(\frac{\varepsilon}{8}\right),$$

en désignant par $\omega_{-1}(h)$ la fonction inverse de $\omega(h)$ qui, elle aussi est décroissante avec h et nulle pour h nul. Posons maintenant

$$(11) \qquad \frac{12A}{\eta^2}\left(1 - \frac{R}{r}\right) = \frac{\varepsilon}{2} \qquad \left(\lambda = \frac{r}{R}\right),$$

d'où

$$(12) \qquad 1 - \lambda = \frac{\varepsilon \omega_{-1}^2\left(\frac{\varepsilon}{8}\right)}{24A}.$$

Considéré comme fonction de ε, le numérateur de (12) est une fonction qui décroît avec cette variable et s'annule avec elle. On a donc

$$\varepsilon = g(1-\lambda), \tag{13}$$

g désignant la fonction inverse du second membre de (12). Quand λ tend vers 1, le second membre de (13) tend vers zéro en décroissant. Compte tenu de (10), (11), et (13), nous aurons

$$\left| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\lambda^2}{1-2\lambda\cos(\alpha-\theta)+\lambda^2} f(\theta)\,d\theta - f(\alpha) \right| < g(1-\lambda). \tag{14}$$

Or, en désignant par $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots; b_1, \ldots, b_n, \ldots$, les constantes de Fourier de la fonction $f(\theta)$, l'intégrale figurant dans (14) peut s'écrire, comme il est bien connu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha), \tag{15}$$

λ étant supposé différent de 1. L'intégrale (14) est d'ailleurs une fonction holomorphe de α dans la bande

$$\operatorname{Log}\lambda < v < -\operatorname{Log}\lambda \qquad (\alpha = u + iv),$$

car le dénominateur de l'expression figurant sous le signe intégral s'annule pour

$$\alpha = \theta + 2k\pi \pm i \operatorname{Log}\lambda.$$

D'après (14) et (15) nous pourrons donc écrire, en revenant à la variable x,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n [a_n \cos nx + b_n \sin nx] + \mu\, g(1-\lambda),$$

μ étant une fonction de λ et x qui reste en valeur absolue inférieure à un. Nous pouvons donc écrire, en donnant à x un accroissement h,

$$\Delta f = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n [a_n \Delta \cos nx + b_n \Delta \sin nx] + \mu_1\, g(1-\lambda), \tag{16}$$

et, en posant

$$\mu_1 = \mu(x+h, \lambda) - \mu(x, \lambda),$$

μ_1 reste inférieure à 2 en valeur absolue.

Soit alors $\varphi(h)$ une fonction continue donnée, qui décroît quand h décroît et s'annule avec h. Considérons la relation

$$(17)\qquad 2g(1-\lambda)=\varphi(h).$$

h étant donné, en vertu de la monotonie de g, l'équation

$$g(u)=\frac{1}{2}\varphi(h)$$

admet une racine u qui décroît et tend vers zéro quand h décroît, et l'égalité (17) est équivalente à

$$(18)\qquad \lambda=1-u(h)=v(h).$$

Donc, d'après (16),

$$\Delta f=\sum_{n=1}^{+\infty}\{v(h)\}^n[a_n\Delta\cos nx+b_n\Delta\sin nx]+\nu\,\varphi(h),$$

ν étant une quantité variable inférieure à 1 en module.

Notons que le résultat précédent subsiste si l'on remplace l'expression (18) trouvée pour λ par une fonction tendant vers un plus rapidement. On pourra ainsi supposer v analytique.

Il est à remarquer que f peut n'être pas développable en série de Fourier. Nous aboutissons donc au théorème suivant :

Soit $f(x)$ une fonction continue de période 2π et $\varphi(h)$ une fonction continue qui décroît et s'annule en même temps que h. On peut écrire

$$f(x+h)-f(x)=g(x,h)+\nu\,\varphi(h),$$

en posant

$$g(x,h)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda^n[a_n\Delta\cos nx+b_n\Delta\sin nx],$$

λ désignant une fonction de h qui ne dépend que du module de continuité de f et de φ, les a_n et les b_n étant les constantes de Fourier de $f(x)$, l'expression $g(x,h)$ étant holomorphe sur l'axe réel, sauf peut-être pour h nul, le nombre ν restant inférieur à 1 en valeur absolue quand h tend vers zéro.

Application. — Nous allons, dans un cas particulier étendu, former explicitement $g(x, h)$. Nous supposerons que f satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre un, c'est-à-dire que l'on a

$$|f(x+h)-f(x)| \leqq K|h| \qquad (K, \text{ const. positive})$$

et nous prendrons

$$\varphi(h) = h^2.$$

Nous pourrons donc prendre

$$\omega(h) = K|h|.$$

Il y a lieu de remarquer que f est développable ici en série de Fourier, mais il n'en est pas moins intéressant de former $g_1(x, h)$ en raison de l'analyticité de cette fonction.

Nous poserons donc

$$4K\eta = \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où

$$\eta = \frac{\varepsilon}{8K}.$$

La relation

$$\frac{12A}{\eta^2}(1-\lambda) = \frac{\varepsilon}{2}$$

donne immédiatement alors

$$\sqrt[3]{1536AK^2}\sqrt[3]{1-\lambda} = \varepsilon = g(1-\lambda),$$

et, en faisant

$$2g(1-\lambda) = h^2,$$

il vient

$$\lambda = 1 - \frac{h^6}{12288AK^2} = 1 - \frac{h^6}{B}.$$

L'expression suivante, holomorphe sur l'axe réel, sauf pour h nul,

$$g_1(x, h) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{h^6}{B}\right)^n [a_n \Delta \cos nx + b_n \Delta \sin nx]$$

représente l'accroissement

$$f(x+h)-f(x),$$

avec une erreur de la forme

$$\nu h^2,$$

le nombre ν restant inférieur à un en valeur absolue.

Remarque. — Revenons au cas général et prenons

$$\eta = h^p,$$

p étant un entier positif;
puis

$$\lambda = 1 - h^{2p}\,\omega(h^p).$$

Nous aurons

$$4\,\omega(\eta) + 12\,\mathrm{A}\,\frac{1-\lambda}{\eta^2} = (4 + 12\,\mathrm{A})\,\omega(h^p);$$

il résulte de l'inégalité (10) que l'expression

$$\Sigma\,\lambda^n(h)\,\{ a_n\,\Delta\cos nx + b_n\,\Delta\sin nx \}$$

représentera l'accroissement infinitésimal de $f(x)$ avec une erreur de la forme

$$\mathrm{M}\,\omega(h^p),$$

M restant borné en valeur absolue.

On remarquera que l'intervention du module de continuité ω dans l'évaluation de l'erreur permet d'aboutir à des résultats simples. Nous retrouvons ici un cas particulier d'un phénomène général, déjà signalé au début de ce travail, et sur lequel nous reviendrons ultérieurement.

7. Représentation générale de l'accroissement d'une fonction. — Soit

$$y = \mathrm{F}(x)$$

une fonction continue.

$\varphi(h)$ désigne une fonction décroissante donnée, nulle avec h. En chaque point d'abscisse x, substituons à F la ligne polygonale P, définie au paragraphe 3, qui la représente à $\varepsilon\varphi(h)$ près. Nous allons employer, pour représenter analytiquement P, un procédé très voisin de celui utilisé par M. Lebesgue dans une démonstration célèbre du théorème de Weierstrass relatif à l'approximation d'une fonction continue par un polynome.

Soient

$$x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_n,\quad \ldots$$

les abscisses des sommets de P. Les x_i forment une suite monotone (décroissante par exemple) tendant vers x. Nous poserons

$$x_n = x + \beta_n \qquad (\beta_n > 0),$$

les β_n pouvant être pris indépendants de x.

Considérons la somme

$$\psi(X) = F(x_1) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \times [x_{i+1} - x_i + |X - x_{i+1}| - |X - x_i|].$$

On voit immédiatement que pour $X \geqq x_1$ on a

$$\psi(X) = F(x_1),$$

et pour

$$X \leqq x_n,$$
$$\psi(X) = F(x_n);$$

et, en remplaçant successivement X par les termes de la suite (x_n), on voit que pour

$$x_n \leqq X \leqq x,$$

$\psi_n(X)$ est représentée graphiquement par P.

Donc, en désignant par $f(x, X)$ la fonction de X représentée par P, on aura pour

$$x \leqq X \leqq x_1,$$
$$f(x, X) = \lim_{n=\infty} \psi_n(X).$$

Il en résulte immédiatement que l'on a

$$f(x, X) = F(x_1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{F(x_{n+1}) - F(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \times [x_{n+1} - x_n + |X - x_{n+1}| - |X - x_n|].$$

En posant

$$X = x + h, \qquad x_n = x + \beta_n, \qquad \alpha_n = \frac{1}{2} \frac{F(x + \beta_{n+1}) - F(x + \beta_n)}{\beta_{n+1} - \beta_n},$$

et, en remarquant que $f(x, x) = F(x)$ et

$$F(x + h) - F(x) = f(x, x + h) - f(x, x) + \varepsilon\varphi(h),$$

on déduit le théorème suivant de ce qui précède :

$\varphi(h)$ étant une fonction décroissante [1], *continue, nulle avec h donnée à l'avance, mais quelconque, on peut, pour h positif, mettre l'accroissement infinitésimal de* $F(x)$ *sous la forme*

$$F(x+h)-F(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n[\beta_n-\beta_{n+1}+|h-\beta_{n+1}|-|h-\beta_n|]+\varepsilon\,\varphi(h),$$

ε désignant une quantité tendant vers zéro avec h, et les β des constantes.

Remarques. — 1° On pourrait, un peu plus simplement, représenter la portion de P comprise entre M_1 et M_n [en désignant par M_i le point de $y=F(x)$ ayant pour abscisse x_i] par l'expression

$$(1)\qquad F(x_1)+\sum_{i=1}^{n-1}a_i[X-x_i-|X-x_i|],$$

en posant

$$(2)\qquad a_1=\alpha_1,\qquad \ldots,\qquad a_n=\alpha_n-\alpha_{n-1}.$$

Si $x\leqq X\leqq x_n$, l'expression (1) donnerait la valeur en X de la fonction représentée par la ligne polygonale précédente, le dernier côté $M_{n-1}M_n$ de celle-ci étant supposé prolongé au delà de M_n. Soit y_1 l'ordonnée du point M_1 et considérons la série

$$(3)\qquad y_1+\sum_{i=1}^{+\infty}a_n[X-x_i-|X-x_i|].$$

Supposons toujours X supérieur à x. Il est clair que cette série est convergente et donne en X la valeur de la fonction représentée par la ligne polygonale P. En effet, si n désigne le rang du terme x_i suivant immédiatement X, tous les termes de rang supérieur sont nuls dans la série précédente qui représente, entre x_1 et x_n, la portion de P comprise entre M_1 et M_n. Ce raisonnement ne s'applique plus si l'on fait $X=x$.

(1) Avec h.

On peut cependant, avec une très légère convention, et en choisissant convenablement P, montrer que la série (3) reste convergente dans ce cas et que sa somme est bien égale à $F(x)$.

Supposons, en effet, que l'on prenne pour (P) une de ces lignes ayant des portions horizontales que nous avons définies au paragraphe 3 ([1]). *Nous conviendrons dans* (3) *de grouper les termes de deux en deux pour le calcul.* Si nous remplaçons alors X par x dans la somme

$$y_1 + \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i \{ X - x_i - | X - x_i | \},$$

cette dernière devient égale à l'ordonnée du point où $M_n M_{n+1}$ rencontre la parallèle Oy d'abscisse x. Appliquons alors les conventions que nous venons de faire : la somme des $2p$ premiers termes de la série sera donc égale à $F(x_{2p+1})$. Donc, quand p tend vers l'infini, la somme de la série tend vers la limite de $F(x_{2p+1})$, c'est-à-dire vers $F(x)$.

En posant, comme précédemment,

$$X = x + h, \qquad x_i - x = \beta_i,$$

et tenant compte de ce que (P) est supposé représenter $F(x)$ dans le voisinage de x à $\varepsilon\varphi(h)$ près, on voit que

$$F(x+h) - F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \bar{a}_n \{ h + \beta_n - | h - \beta_n | \} + \varepsilon \varphi(h)$$

pour h positif et avec les conventions que nous avons faites. Il serait facile de montrer que l'on peut, si la fonction F satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre 1, *supprimer les restrictions précédentes et écrire*

$$F(x+h) - F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n [h + \beta_n - | h - \beta_n |] + \varepsilon \varphi(h),$$

les a_i étant ici les nombres définis par (2).

([1]) Les coefficients a figurant dans (3) ne sont plus ceux définis par (1); c'est pourquoi nous les représentons par $\bar{a}$.

2° Soit $g(h)$ une fonction décroissante donnée, nulle avec h. En posant

$$\psi(h) = F(x+h) - F(x);$$

nous pouvons écrire

$$\psi(h) = \psi_1(u) \qquad [u = g(h)];$$

$\psi_1(u)$ est nul avec u. En appliquant à $\psi_1(u)$ pour u nul la méthode de la ligne polygonale d'une infinité de côtés, on voit, sans aucune difficulté, que l'on peut écrire, en conservant les notations déjà employées et en revenant de la variable u à la variable h,

$$\Delta F = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{F(x+\beta_{n+1}) - F(x+\beta_n)}{g(\beta_{n+1}) - g(\beta_n)} \times [g(\beta_n) - g(\beta_{n+1}) + |g(h) - g(\beta_{n+1})| - |g(h) - g(\beta_n)|]$$

avec une erreur de la forme $\varepsilon\varphi(h)$. Cette formule généralise celle donnée au début du paragraphe actuel.

8. **Une généralisation des résultats précédents.** — Étant donnée une fonction continue $F(x)$, dont nous désignerons le module de continuité par ω, nous avons vu qu'à chaque valeur de x on peut associer une suite décroissante S

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots$$

tendant vers x et telle que

$$\omega(x_i - x_{i+1}) \leqq \frac{1}{2} \varepsilon_i \varphi(x_{i+1}),$$

ε_i étant une quantité variable tendant vers zéro et $\varphi(h)$ une fonction décroissante donnée nulle avec h.

Nous allons être amené à introduire des expressions de la forme

$$u_n(X) = F_{n-1}(x_n) + \frac{1}{2} \frac{F(x_{n+1}) - F(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \times [x_{n+1} - x_n + |X - x_{n+1}| - |X - x_n|]$$

et nous supposerons que l'on connaisse une fonction continue

$$u_n(\lambda, X)$$

tendant uniformément vers $u_n(x)$ quand λ tend vers zéro : il suffit pour cela de connaître une fonction $v_n(\lambda, X)$ tendant, dans les mêmes conditions, vers

$$w_n(X) = x_{n+1} - x_n + |X - x_{n+1}| - |X - x_n|.$$

Nous verrons des exemples de telles fonctions.

Posons alors

$$\begin{aligned} F\ (X) - u_1(\lambda_1, X) &= F_1(X), \\ F_1(X) - u_2(\lambda_2, X) &= F_2(X), \\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots, \end{aligned}$$

en prenant

$$\begin{aligned} u_1(X) &= F(x_1) + \frac{1}{2}\frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &\quad \times [x_2 - x_1 + |X - x_2| - |X - x_1|], \\ u_2(X) &= F_1(x_2) + \frac{1}{2}\frac{F_1(x_3) - F_1(x_2)}{x_3 - x_2} \\ &\quad \times [x_3 - x_2 + |X - x_3| - |X - x_2|], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_n(X) &= F_{n-1}(x_n) + \frac{1}{2}\frac{F_{n-1}(x_{n+1}) - F_{n-1}(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \\ &\quad \times [x_{n+1} - x_n + |X - x_{n+1}| - |X - x_n|], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Il serait facile de voir, avec seulement quelques longueurs, que l'on peut déterminer de proche en proche $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$ assez petits pour que $F_n(X)$ tende vers une limite $\psi(X)$ continue et telle que

$$|\psi(X)| < \varepsilon_1 \varphi(X - x) \qquad (\lim \varepsilon_1 = 0).$$

On a donc

$$F(X) = \sum u_n(\lambda_n, X) + \varepsilon \varphi(X - x)$$

et

$$F(x) = \sum u_n(\lambda_n, x).$$

En posant

$$X = x + h,$$

il vient

$$\Delta F = \sum \{ u_n(\lambda_n, x + h) - u_n(\lambda_n, x) \} + \varepsilon \varphi(h)$$

ou encore

$$\Delta F = \sum \frac{1}{2} \frac{F_{n-1}(x_{n+1}) - F_{n-1}(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \{ \varphi_n(\lambda_n, x+h) - \varphi_n(\lambda_n, x) \} + \varepsilon\, \varphi(h).$$

On peut remarquer que

$$\varphi_n(\lambda_n, x+h) - \varphi_n(\lambda_n, x)$$

constitue une approximation de

$$\varpi_n(x+h) - \varpi_n(h) = |h - \beta_{n+1}| - |h - \beta_n| - \beta_{n+1} + \beta_n,$$

où l'on a posé

$$x_n = x + \beta_n,$$

et nous sommes conduit à la proposition suivante :

Si l'on connaît une fonction

$$\varpi_n(\lambda, h)$$

tendant vers

$$\beta_n - \beta_{n+1} + |h - \beta_{n+1}| - |h - \beta_n| = \psi_n(h)$$

quand λ *tend vers zéro, on peut mettre l'accroissement d'une fonction continue donnée* $F(x)$ *sous la forme*

$$\Delta F = \sum \alpha_n\, \varpi_n(\lambda_n, h) + \varepsilon\, \varphi(h),$$

où les β *et les* λ *sont des constantes,* ε *une quantité variable tendant vers zéro avec* h, *les* α *des fonctions de* x *et* $\varphi(h)$ *désignant une fonction continue décroissante donnée arbitrairement, nulle avec* h.

L'expression des α_n est d'ailleurs

$$\alpha_n = \frac{1}{2} \frac{F_{n-1}(x + \beta_{n+1}) - F_{n-1}(x + \beta_n)}{\beta_{n+1} - \beta_n},$$

et les considérations précédentes permettent, théoriquement du moins, de former de proche en proche les α.

On peut prendre, par exemple,

$$w = \frac{1}{\lambda_n \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(t)\, e^{-\left(\frac{t-h}{\lambda_n}\right)^2} dt.$$

L'intérêt de cette représentation de l'accroissement ΔF consiste en ce qu'il sera possible de former ainsi des expressions

$$g(x, h) = \Sigma \alpha_n \psi_n(h)$$

représentant avec une approximation donnée l'accroissement d'une fonction F, qui ne présenteront, sauf peut-être pour h nul, aucune discontinuité, en ce qui concerne les dérivées par rapport à h.

En termes géométriques, et en particulier, la courbe

$$Y = y + g(x, X - x),$$

tangente au sens généralisé à

$$Y = F(X)$$

au point (x, y), admettra une tangente sauf peut-être pour $X = x$.

Ceci nous amène à indiquer une autre façon de représenter un accroissement de fonction d'une façon approchée par une expression $g(x, h)$, ne présentant, sauf peut-être pour h nul, aucune discontinuité en ce qui concerne les dérivées par rapport à h jusqu'à un ordre donné et même pour tous les ordres.

Soit $F(x)$ la fonction continue considérée et $\varphi(h)$ une fonction décroissante avec h, nulle avec celle-ci. Appliquons à la fonction de h

$$\psi(h) = F(x + h) - F(x) \qquad (h > 0)$$

la méthode de la ligne polygonale d'une infinité de côtés s'accumulant à l'origine, comme nous l'avons fait plusieurs fois. Nous mettrons ainsi $\psi(h)$ sous la forme

$$\psi(h) = g_1(x, h) + \varepsilon_1 \varphi(h)$$

et nous pouvons écrire

$$(1) \qquad g_1(x, h) = \sum \frac{1}{2} \frac{F(x + \beta_{n+1}) - F(x + \beta_n)}{\beta_{n+1} - \beta_n} \times [\beta_n - \beta_{n+1} + |h - \beta_{n+1}| - |h - \beta_n|].$$

Si maintenant nous considérons une suite *quelconque*

$$(2)\qquad u_1(h),\quad u_2(h),\quad \ldots,\quad u_n(h),\quad \ldots$$

de fonctions continues décroissantes avec h, et si nous formons la série

$$\sum \frac{1}{2}\,\frac{F(x+\beta_{n+1})-F(x+\beta_n)}{u_n(\beta_{n+1})-u_n(\beta_n)}$$
$$\times\,[u_n(\beta_n)-u_n(\beta_{n+1})+|u_n(h)-u_n(\beta_{n+1})|-|u_n(h)-u_n(\beta_n)|],$$

un raisonnement très simple, calqué sur celui déjà employé précédemment pour l'étude de l'expression (1), montre qu'elle est convergente et représente $\psi(h)$ avec une erreur de la forme

$$\varepsilon\,\varphi(h),\qquad |\varepsilon|\leqq 2\,|\varepsilon_1|.$$

En posant

$$v_n(h)=u_n(\beta_n)-u_n(\beta_{n+1})+|u_n(h)-u_n(\beta_{n+1})|-|u_n(h)-u_n(\beta_n)|,$$

on a d'ailleurs

$$(3)\qquad \begin{cases} v_n(h)=2[u_n(\beta_n)-u_n(\beta_{n+1})] & (h\geqq\beta_n),\\ v_n(h)=2[u_n(h)-u_n(\beta_{n+1})] & (\beta_{n+1}\leqq h\leqq\beta_n),\\ v_n(h)=0 & (0\leqq h\leqq\beta_{n+1}),\end{cases}$$

et l'on peut écrire

$$(4)\qquad \Delta F=g(x,h)+\varepsilon\,\varphi(h),$$

avec

$$(4)\qquad g(x,h)=\Sigma\alpha_n\,v_n(h).$$

Ceci posé, nous pourrons toujours choisir *les u de la suite* (2) *de façon à ce que les v ne représentent aucune singularité au point de vue de l'existence des dérivées jusqu'à un ordre donné* comme nous allons le montrer dans un instant. *Il en résultera la même propriété pour* $g(x,h)$ car, pour h donné différent de zéro et d'après (3), la fonction g est la somme d'un nombre *fini* de termes.

Or, pour que $v(h)$ admette partout des dérivées continues jusqu'à l'ordre p inclus, il faut et il suffit d'après (3) que l'on ait

$$(5) \qquad u_n^{(i)}(\beta_{n+1}) = u_n^{(i)}(\beta_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p);$$

il est évidemment facile de construire des fonctions $u_n(h)$ possédant cette propriété. Soit dans le plan (u, h) une courbe située au-dessus de l'axe des h, sauf aux points d'abscisses β_n et β_{n+1} de cet axe où elle le rencontre et a un contact d'ordre p avec lui. Désignons par

$$u = \mu_n(h)$$

l'équation de C. La fonction

$$u_n(h) = \int_0^h \mu_n(t)\, dt$$

satisfait aux conditions (5).

En particulier, si nous prenons

$$u_n(h) = \int_0^h e^{\frac{-1}{|t-\beta_n||t-\beta_{n+1}|}}\, dt,$$

les conditions (5) sont vérifiées quel que soit i, l'expression (4) *admet par rapport à h des dérivées de tous les ordres, sauf peut-être pour h nul.*

En termes géométriques, on peut énoncer ainsi les résultats précédents : Si, après avoir inscrit dans $\psi(h)$ une ligne polygonale C_1 d'une infinité de côtés s'accumulant à l'origine, de façon à représenter ψ avec une erreur de la forme $\varepsilon_1\ \varphi(h)$, on substitue à C_1 la suite d'arcs de courbes d'équations

$$u - \psi(\beta_n) = \frac{\psi(\beta_{n+1}) - \psi(\beta_n)}{\beta_{n+1} - \beta_n}[u_n(h) - u_n(\beta_n)],$$

les β étant les abscisses des sommets de C_1, on obtient ainsi une nouvelle ligne C qui représente elle aussi $\psi(h)$ avec une erreur de la forme $\varepsilon\ \varphi(h)$, et cela quel que soit le choix des fonctions monotones continues $u_n(h)$ — ce dernier point résultant immédiatement de leur monotonie.

On peut, en outre, déterminer les u_n de façon à ce que les arcs de courbes constituant C se raccordent et possèdent même un contact d'ordre aussi élevé qu'on voudra à leurs extrémités (β_n). Le procédé donné ci-dessus impose à la courbe C des tangentes parallèles à Ox aux points (β_n).

9. Considérations finales. — Pour terminer le présent travail nous indiquerons le principe d'une méthode permettant de rattacher aux considérations qui y sont développées l'étude de la dérivabilité des fonctions d'une variable. Nous établirons le lemme suivant qui, en lui-même, présente d'ailleurs un certain intérêt et sur lequel repose la méthode en question.

Soit $F(x)$ *une fonction continue telle que*

$$F(x+h) - F(x) = \frac{A_1}{1!} h + \ldots + \frac{A_n}{n!} h^n + \varepsilon h^n, \tag{1}$$

les A *étant des fonctions continues de* x *et* ε *une quantité infiniment petite avec* h. *Alors la fonction* F *admet des dérivées successives jusqu'à l'ordre* n *inclus et l'on a*

$$F^{(i)}(x) = A_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Il est d'abord clair que F admet une dérivée première qui sera A_1.

Prenons $i = 3$ pour fixer les idées ($n \geqq 3$). Si nous posons

$$\Delta_2 = F(x + h_1 + h_2) - F(x + h_1) - F(x + h_2) + F(x)$$

ou en abrégé

$$\Delta_2 = \Delta_{h_2} \Delta_{h_1} F,$$

et de même

$$\Delta_3 = \Delta_{h_3} \Delta_2 = \Delta_{h_3} \Delta_{h_2} \Delta_{h_1} F,$$

et ainsi de suite, on voit sans peine que

$$\Delta_2 = h_1 h_2 A_2 + h_1 h_2 (h_1 + h_2) \frac{A_3}{2} + \varepsilon_1 h_1^n + \varepsilon_2 h_2^n,$$

$$\Delta_3 = h_1 h_2 h_3 A_3 + \ldots + \varepsilon'_1 h_1^n + \varepsilon'_2 h_2^n + \varepsilon'_3 h_3^n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si, en particulier, nous prenons les trois accroissements égaux à une même valeur h, nous aurons

$$\Delta_2 = F(x+2h) - 2F(x+h) + F(x),$$
$$\Delta_3 = F(x+3h) - 3F(x+2h) + 3F(x+h) - F(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et l'on aura

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} A_2 = \lim\limits_{h=0} \dfrac{\Delta_2}{h^2}, \\ A_3 = \lim\limits_{h=0} \dfrac{\Delta_3}{h^3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Ceci étant dit, il est aisé d'établir notre proposition ([1]). Montrons par exemple que A_2 admet une dérivée égale à A_3, c'est-à-dire que l'on a

$$(3)\qquad A_2(x_0+t) - A_2(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+t} A_3(x)\,dx.$$

Le second membre de la relation à prouver est la limite pour n infini de

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_3\left(x_0 + \frac{k}{n}t\right)\frac{t}{n}.$$

Cette expression a même limite que

$$\sum \frac{\Delta_3}{\frac{t^2}{n^2}},$$

et il suffira de montrer que

$$A_2(x_0+t) - A_2(x_0) = \lim \sum \Delta_3 \frac{n^2}{t^2}.$$

([1]) On sait que si $h^{-p}\Delta^{(p)}F$ tend uniformément vers une limite, la fonction F est dérivable jusqu'à l'ordre p inclus (*voir* à ce sujet et pour les généralisations un important travail de M. A. Marchaud : *Sur les dérivées et les différences des fonctions de variables réelles*. Thèse, Paris, 1927). Il suffirait donc d'invoquer cette proposition pour achever la démonstration.

Nous avons admis implicitement que ε tend uniformément vers zéro.

Or, en écrivant

$$\begin{aligned}\Delta_3 = {} & [F(x+3h) - 2F(x+2h) + F(x+h)] \\ & - [F(x+2h) - 2F(x+h) + F(x)],\end{aligned}$$

on voit immédiatement que la somme figurant au second membre est égale à

$$-\frac{F\left(x_0+\dfrac{2t}{n}\right) - 2F\left(x_0+\dfrac{t}{n}\right) + F(x_0)}{\dfrac{t^2}{n^2}}$$

$$+\frac{F\left(x_0+t+\dfrac{2t}{n}\right) - 2F\left(x_0+t+\dfrac{t}{n}\right) + F(x_0+t)}{\dfrac{t^2}{n^2}},$$

ce qui, en vertu des relations (2), donne bien, à la limite, le résultat annoncé.

Remarque. — Supposons que la formule (1) soit établie seulement pour des valeurs de h de signe déterminé, positif par exemple. Les conclusions précédentes sont encore valables. En effet, le raisonnement précédent prouve que la formule (3) est valable pour t positif. En posant

$$-t = v, \qquad x_0 - v = u,$$

on aura

$$A_2(u+v) - A_2(u) = \int_u^{u+v} A_3\, dx,$$

u et v étant arbitraires, la formule (2) est bien générale. De plus, la formule de Taylor montre alors que (1) est valable quel que soit le signe de h.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé implicitement la continuité des fonctions A.

A titre de complément du lemme précédent, nous allons démontrer le corollaire suivant :

Si l'on sait que l'accroissement d'une fonction F *peut se mettre sous la forme*

$$(4)\quad F(x+h) - F(x) = A_1 h + \frac{A_2}{2!}h^2 + \ldots + \frac{A_n}{n!}h^n + \ldots + \varepsilon\varphi(h),$$

les A_i *étant des fonctions continues de* x, ε *une quantité infiniment petite avec* h, *et* φ *une fonction décroissante avec* h, *tendant vers zéro plus rapidement que toute puissance positive de* h, *la fonction* F *admet des dérivées successives égales aux* A_i, *est analytique, et le nombre* ε *de la formule précédente est nul pourvu que la série qui figure à son second membre soit uniformément convergente par rapport à* x *dans un certain intervalle. La proposition est encore vraie si la relation* (4) *a été établie seulement pour les valeurs de* h *de signe déterminé.*

Nous supposerons x et $x+h$ variant à l'intérieur d'un intervalle fini. Si la série figurant dans le second membre de (4) est uniformément convergente, il en résulte que

$$\left|\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}A_{n+1}(c)\right|$$

tend vers zéro uniformément quel que soit c quand n tend vers l'infini.

Il résulte du lemme précédent que F admet des dérivées de tous les ordres et que

$$F^{(n)}(x) = A_n(x).$$

En vertu de la formule de Taylor, nous avons

$$F(x+h) - F(x) = \frac{A_1}{1}h + \ldots + \frac{A_n}{n!}h^n + R_n$$

avec

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}A_{n+1}(x+\theta h).$$

Mais d'après ce que nous venons de dire, h étant fixé, R tend vers zéro, et l'on aura

$$F(x+h) - F(x) = \frac{A_1}{1!}h + \ldots + \frac{A_n}{n!}h^n + \ldots,$$

ce qui entraîne ε nul et démontre la proposition.

On pourra prendre, par exemple, pour fonction $\varphi(h)$ la fonction ainsi définie

$$\varphi(h) = e^{-\left|\frac{1}{h}\right|}.$$

Ceci posé, indiquons comment on pourrait utiliser les résultats précédents pour l'étude des propriétés de dérivabilité d'une fonction F.

Supposons que l'accroissement ΔF d'une fonction continue soit mis sous la forme

$$\Delta F = g(x, h) + \varepsilon h^n;$$

il résulte du lemme qui vient d'être démontré que si $g(x, h)$ admet des dérivées *par rapport à h* dans un certain intervalle comprenant la valeur zéro, jusqu'à un certain ordre p, la fonction $F(x)$ admet des dérivées des p premiers ordres par rapport à x pourvu que p ne dépasse pas n.

Nous pouvons en effet écrire, d'après la formule de Taylor appliquée à $g(x, h)$,

$$g(x, h) = \frac{h}{1!} A_1 + \ldots + \frac{h^p}{p!} A_p + \varepsilon_1 h^p \qquad (p \leqq n);$$

par conséquent, nous avons bien

$$F^{(i)}(x) = A_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Nous sommes ainsi conduit à l'étude des propriétés de dérivabilité de $g(x, h)$. Renvoyant à un travail ultérieur une étude plus complète, nous nous bornerons ici, pour terminer ce Mémoire, à indiquer le principe d'une méthode générale permettant de traiter ce point.

Soit

$$g(x, h) = \Sigma(a_n \cos nh + b_n \sin nh)$$

le développement de Fourier de la fonction g.

Le problème se ramènera donc à celui de la dérivabilité d'une telle série, ce qui est une question bien connue. Il y a lieu de noter que certains des accroissements infinitésimaux que nous avons envisagés conduisent à une fonction $g(x, h)$ présentant des singularités au point de vue de l'existence des dérivées. Il y aurait lieu, pour appliquer la méthode précédente, d'« arrondir » $g(x, h)$ et de substituer par exemple à g une expression g_1 de la forme

$$g_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x, \theta) \frac{1 - \lambda^2(h)}{1 - 2\lambda(h)\cos(\theta - h) + \lambda^2(h)} d\theta,$$

ou bien

$$g_1 = \frac{1}{\mu\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, t) e^{-\left(\frac{t-h}{\mu}\right)^2} dt,$$

λ désignant une fonction de h décroissante avec h et tendant assez rapidement vers 1 quand h tend vers zéro, et μ désignant de même une fonction monotone tendant avec une rapidité assez grande vers zéro quand h tend vers zéro.