BULLETIN DE LA S. M. F.

PERRIN.

Sur une relation remarquable entre quelques unes des singularités réelles des courbes algébriques planes

Bulletin de la S. M. F., tome 6 (1878), p. 84-117

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__84_1>

Sur une relation remarquable entre quelques-unes des singularités réelles des courbes algébriques planes; par M. PERRIN.

(Séance du 2 mai 1877.)

Je me propose, dans la première Partie de ce Mémoire, d'établir quelques théorèmes de Géométrie de situation, relatifs à un mode de décomposition des contours fermés dont le principe a été indiqué pour la première fois, à ma connaissance, par M. Jordan, dans une Communication faite à la Société mathématique, le 8 mars 1876. Dans la seconde Partie, j'appliquerai les résultats obtenus à l'étude d'un système particulier de courbes algébriques que l'on peut imaginer comme défini par une courbe algébrique plane donnée, de degré et de classe quelconques; et je montrerai comment cette étude conduit naturellement à la relation mentionnée dans le titre de ce Mémoire, et qui consiste dans l'égalité suivante :

$$m + i_1 + 2\tau'_1 = n + k_1 + 2\delta'_1,$$

où i_1 est le nombre des inflexions réelles d'une courbe algébrique plane de degré m et de classe n, k_1 le nombre de ses rebroussements réels, τ'_1 le nombre de ses tangentes doubles isolées (tangentes doubles réelles dont les deux points de contact sont imaginaires conjugués), δ'_1 le nombre de ses points isolés (points doubles où les deux tangentes sont imaginaires conjuguées).

Cette relation remarquable, d'où l'on déduit immédiatement comme cas particuliers tous les théorèmes antérieurement connus relatifs à la réalité des inflexions des cubiques, ainsi qu'un nombre en quelque sorte illimité de théorèmes analogues pour les courbes de degré supérieur, a été énoncée pour la première fois en 1876 par M. Klein, lequel en a donné, dans les *Mathematische Annalen* (t. X), une démonstration fondée, dans certaines de ses parties, sur des inductions très-plausibles assurément, mais non d'une rigueur absolue; il y a donc, ce semble, quelque intérêt à montrer que l'on est conduit au même résultat par une voie toute différente, bien que d'ailleurs la démonstration qui sera donnée ci-après soit plus longue que celle de M. Klein, et non entièrement à l'abri d'objections du même genre.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORÈMES RELATIFS AUX CONTOURS FERMÉS.

Indice d'un contour. — Soit un contour fermé de forme quelconque, assujetti à cette seule condition de n'avoir aucun point à l'infini. Appelons *sens positif* l'un des deux sens opposés dans lesquels ce contour peut être parcouru en partant de l'un quelconque de ses points; ce sera d'ailleurs celui des deux que l'on voudra, et, dans les figures qui suivront, il sera désigné par des flèches. Ceci posé, nous pouvons décomposer le contour donné en un certain nombre de contours élémentaires, en procédant de la manière suivante : à partir d'un point arbitraire A, nous marchons dans le sens positif jusqu'au premier point double B qui se présente : en B, nous quittons la branche sur laquelle nous avions cheminé pour marcher, toujours dans le sens positif, sur l'autre branche qui passe en B, et cela jusqu'à ce que nous arrivions à un second point double C; nous faisons de même en C, et ainsi de suite, jusqu'à ce que nous soyons revenu au point A de départ. Prenant un second point de départ A′ dans une des parties du contour qui n'ont pas été déjà parcourues, nous obtenons de la même manière un deuxième contour élémentaire, et ainsi de suite. Il est visible que ces divers contours élémentaires ne peuvent se recouper l'un l'autre, et qu'aucun d'eux, pris isolément, ne peut posséder de point double. Chacun d'eux sépare donc sur le plan deux régions, dont l'une lui est *intérieure* et l'autre *extérieure*. J'appellerai éléments *positifs* ceux de ces contours élémentaires qui sont tels, qu'en les parcourant dans le sens positif on ait *à sa gauche* la région qui leur est intérieure, et à sa droite la région extérieure; éléments *négatifs* ceux pour lesquels l'inverse a lieu. Si la décomposition d'un contour C a fourni p éléments positifs et p' éléments négatifs, le nombre $p-p'$ sera l'*indice* du contour C.

Au lieu d'un contour unique C, on peut considérer un groupe formé de tel nombre qu'on voudra de contours fermés se croisant entre eux d'une manière quelconque; pourvu que chacun d'eux satisfasse à la condition de ne point passer par l'infini, rien n'empêchera de lui attribuer un sens positif déterminé, et, en appliquant le mode de décomposition indiqué ci-dessus, on obtiendra une certaine valeur entière, positive, négative ou nulle, pour l'indice du groupe donné.

Si l'on change le sens positif sur la totalité des contours qui forment un groupe, il est évident que l'indice de ce groupe changera simplement de signe. Si l'on n'effectue ce changement de sens que sur quelques-uns des contours composants, il n'en sera plus de même; le théorème que nous allons établir permet de trouver ce que devient l'indice dans cette hypothèse.

Théorème I. — *L'indice d'un groupe formé de plusieurs contours est égal à la somme algébrique des indices de ces contours, considérés chacun isolément avec le même sens positif qui leur est attribué dans le groupe.*

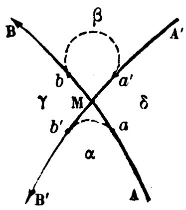
Pour le démontrer, soient G, G′ deux groupes formés chacun d'un nombre quelconque de contours, et dont les indices respectifs sont i et i'. Supposons-les décomposés en leurs contours élémentaires : soient $c_1\, c_2 \ldots c_m$ ceux du groupe G, $c'_1\, c'_2 \ldots c'_n$ ceux du groupe G′. Au lieu de superposer le groupe G′ au groupe G pour faire la décomposition en tenant compte à la fois de tous les points de croisement de G avec G′ et de tous les points doubles de G′, nous pouvons ne superposer d'abord au groupe G que le contour élémentaire c'_1, pour étudier la nature des modifications qui en résultent dans le produit de la décomposition en éléments, de manière à tenir compte seulement des points doubles de G et de ceux des points de croisement de G et de G′ qui appartiennent à ce contour c'_1; nous pourrons ensuite superposer au nouveau système de contours élémentaires ainsi obtenu le contour c'_2, et ainsi de suite jusqu'au dernier c'_n; et il est clair que le mode final de décomposition auquel nous serons arrivé donnera précisément les mêmes contours élémentaires que donnerait la décomposition directe de l'ensemble des groupes G et G', puisqu'il aura été tenu compte successivement de tous les points de croisement de G et de G', et que par le fait même de l'introduction *successive* des contours c'_1 c'_2 ... c'_n tous les points doubles spéciaux à G' sont traités comme ils doivent l'être d'après les conventions faites. Commençons donc par superposer au groupe G le contour élémentaire c'_1; par le même raisonnement que ci-dessus, nous arriverons au résultat cherché en combinant d'abord avec c'_1 l'un des contours élémentaires de G, par exemple c_1, puis avec l'ensemble des contours élémentaires provenant de cette combinaison le deuxième contour c_2, et ainsi de suite. Et comme, toutes les fois qu'il y a lieu de combiner un contour élémentaire avec un groupe d'autres contours, il est permis, sans changer le résultat, d'introduire *successivement* ces divers contours, en se bornant à ceux qui coupent le premier (puisque les autres ne peuvent modifier en rien la décomposition), il est clair qu'il suffira, pour obtenir le résultat de la superposition des deux groupes G et G', de répéter un nombre fini de fois (au plus égal au nombre des points de croisement de G et de G') l'opération qui consiste à décomposer en contours élémentaires le groupe simple formé par la superposition de deux contours élémentaires. Il suffit alors de prouver que dans cette dernière opération la somme algébrique des indices n'est pas changée, pour que le théorème I se trouve démontré.

Soient donc ω, ω' deux contours élémentaires, leur ensemble divise le plan en quatre sortes de régions, savoir :

α régions intérieures à ω et à ω',
β » extérieures à ω et à ω',
γ » intérieures à ω et extérieures à ω',
δ » extérieures à ω et intérieures à ω'.

Soient M (*fig.* 1) un des points de croisement des contours ω, ω', AMB, A'MB' les deux branches appartenant respectivement à ces contours. Les quatre régions que limitent ces branches appartiennent évidemment aux quatre genres α, β, γ, δ; α et β étant opposés par le sommet, ainsi que γ et δ, comme l'indique la *fig.* 1. Si ω et ω' sont tous deux des éléments positifs, il faudra, par définition, puisque α et γ sont à l'intérieur de ω, α et δ à l'intérieur de ω', que le sens positif sur le contour ω soit AMB, et sur ω', A'MB', comme l'indiquent les flèches. Dès lors la décomposition donnera d'une part la portion de contour AMB', de l'autre la portion A'MB;

Fig. 1.



la même chose ayant lieu à tous les autres points de croisement, où la même figure s'appliquerait identiquement, on voit que les divers contours élémentaires qui résulteront de la décomposition de l'ensemble de ω et de ω' seront ceux qui limitent les régions α et les régions β. Si ω et ω' sont tous deux négatifs, il suffit de supposer les flèches retournées et le résultat est le même. Mais, si ω et ω' sont de signe contraire, par exemple si ω est positif et ω' négatif, on devra supposer retournée seulement la flèche A'MB', en sorte que les portions de contour fournies par la décomposition seront AMA', B'MB; et par suite les divers contours élémentaires seront ceux qui limitent les régions γ et les régions δ; et de même si ω était négatif et ω' positif.

Revenons au cas où ω et ω' sont tous deux positifs et donnent par conséquent 2 pour somme de leurs indices. Toutes les régions α fourniront des contours élémentaires positifs : car chacune d'elles étant intérieure à ω, et s'appuyant par un ou plusieurs arcs sur le contour de ω, peut être considérée comme obtenue en retranchant de l'aire intérieure à ω un certain nombre de segments; c'est en quelque sorte une réduction de l'aire intérieure à ω obtenue par contraction partielle de son contour, sans que le sens général de ce contour soit altéré. Quant aux régions β, il y en a une qui comprend toute la partie du plan extérieure à l'ensemble de la figure formée par ω et ω'; il est clair que le contour élémentaire que fournit la limite de cette région comprend dans son intérieur les aires intérieures à ω et ω'; il est donc de même signe, c'est-à-dire positif. Mais toutes les autres régions β fourniront des éléments négatifs; car, si l'on imagine par exemple que toutes les régions α, γ et δ soient couvertes d'une teinte foncée, les régions β dont il s'agit se présenteront comme des trous isolés, de teinte claire à leur intérieur, en sorte que leur contour devant être parcouru dans un sens tel que l'intérieur de ω et de ω', c'est-à-dire la teinte foncée, soit à gauche, l'intérieur de ces régions sera à droite.

L'indice du groupe de contours fourni par la décomposition sera donc

$$\alpha + 1 - (\beta - 1) \quad \text{ou} \quad \alpha - \beta + 2.$$

Si ω et ω' étaient tous deux négatifs, ce qui donnerait -2 pour somme de leurs indices, on verrait de la même manière que l'indice après la décomposition est

$$-(\alpha + 1) + (\beta - 1) \quad \text{ou} \quad \beta - \alpha - 2.$$

Si, enfin, ω et ω' étaient de signe contraire, ce qui donnerait zéro pour somme algébrique de leurs indices, on verrait, par un raisonnement analogue à celui qui a été fait ci-dessus pour les régions α, que toutes les régions γ donnent des éléments de même signe que ω, toutes les régions δ des éléments de même signe que ω'; en sorte que l'indice du groupe après la décomposition est égal à

$$\pm(\gamma - \delta).$$

Pour que le théorème I soit établi dans tous les cas, il suffit donc de montrer que l'on a nécessairement.

$$\alpha = \beta, \quad \gamma = \delta.$$

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$ les régions de genre α, et de même $b_1, b_2, \ldots, b_\beta$, $c_1, c_2, \ldots, c_\gamma$, $d_1, d_2, \ldots, d_\delta$ celles de genres β, γ, δ. Désignons par $(a_p c_q)$ l'arc qui sépare la région a_p de la région c_q, et de même pour les autres. Si Δ est le nombre des points de croisement des contours ω et ω', il est évident que le contour ω se compose de $\frac{\Delta}{2}$ arcs (ad) alternant avec $\frac{\Delta}{2}$ arcs (bc); et de même le contour ω'

de $\frac{\Delta}{2}$ arcs (ac) alternant avec $\frac{\Delta}{2}$ arcs (bd). Formons une table à double entrée où les colonnes verticales, au nombre de α, correspondraient aux α régions a_1, a_2, ..., rangées dans un certain ordre que nous déterminerons tout à l'heure, et les lignes horizontales, en nombre γ, aux γ régions c_1, c_2, ..., et plaçons, dans celles des cases de ce tableau auxquelles ils correspondent par leurs indices, les $\frac{\Delta}{2}$ arcs (ac). Je dis qu'il est possible de ranger les α régions a_1, a_2, ... dans un ordre tel, qu'en prenant successivement chacune des colonnes verticales du tableau qui leur correspondent, toutes les cases occupées, dans l'une de ces colonnes, se trouvent, à l'exception d'*une* et d'*une seule,* sur des lignes dont aucune autre case ne soit occupée dans les colonnes précédentes. Tout d'abord, puisque les régions α et γ réunies composent la totalité de l'aire A intérieure au contour ω, et que cette aire est d'un seul tenant, il est toujours possible d'aller de l'une quelconque à une autre quelconque des régions α sans sortir de A, c'est-à-dire en traversant une série de régions alternativement des genres α et γ, et que l'on peut supposer toutes distinctes les unes des autres (car si une même région paraissait à deux places différentes dans cette série, on pourrait supprimer le passage par toutes les régions intermédiaires, et obtenir ainsi une série plus simple où la région en question ne figurerait plus qu'une fois). De plus la série, ainsi simplifiée, et ne contenant plus que les régions qu'il est *nécessaire* de traverser, est unique et déterminée; car, s'il en existait une seconde, si par exemple on pouvait aller de a_1 à a_2 en passant soit par c_1, soit par c_2, un circuit fermé traversant la série des régions a_1, c_1, a_2, c_2, a_1 serait tout entier à l'intérieur de A, et comprendrait cependant, à son intérieur, au moins une région de genre β ou δ, c'est-à-dire non comprise dans A; le contour ω ne serait donc pas simple, contrairement à l'hypothèse. Dès lors, si ayant affecté la première colonne verticale du tableau à l'une quelconque des régions α prise arbitrairement, a_1 par exemple, on a soin, dans l'affectation des colonnes suivantes aux autres régions α, de ne jamais prendre une quelconque a_p de ces régions avant d'avoir pris toutes celles qu'il est *nécessaire* de traverser pour aller de a_1 en a_p sans sortir de A, il est clair que, parmi les cases pleines de la colonne affectée à a_p, il s'en trouvera une où figurera l'arc (a_p, c_q), c_q étant la dernière de la série des régions α et γ qu'il faut traverser pour aller de α_1 en a_p; et que, sur la même ligne horizontale, définie par cette région c_q, il y aura dans les colonnes précédentes *au moins une* autre case occupée, savoir par l'arc (a_m, c_q), a_m étant l'avant-dernière région de la série dont il vient d'être question. De plus, la même circonstance ne pourra se présenter pour deux des cases pleines de la colonne a_p; car on pourrait alors passer de a_p, par l'intermédiaire de deux régions distinctes c_q et c_r, à deux régions a_m et a_n, et de celles-ci rejoindre par des circuits convenables, où ne figure pas a_p, la région initiale a_1, puisque, dans l'ordre adopté, a_m et a_n viennent l'une et l'autre après a_1 et avant a_p. Il existerait donc deux séries distinctes, au moins partiellement, de régions α et γ par lesquelles on pourrait passer de a_1 en a_p, ce qui a été démontré inadmissible.

Le tableau étant supposé construit de cette manière, il est visible que, parmi les cases pleines qu'introduit la $p^{\text{ième}}$ colonne, une et une seule vient se placer sur une des lignes qui ont déjà une ou plusieurs des $p-1$ colonnes précédentes; les autres viennent se placer sur des lignes nouvelles. Si donc $n_1\ n_2\ \ldots\ n_\alpha$ sont respectivement les nombres de cases pleines de la première, de la deuxième, ..., de la dernière colonne, le nombre total γ des lignes horizontales du tableau sera

$$n_1 + (n_2 - 1) + (n_3 - 1) + \ldots + (n_\alpha - 1) \quad \text{ou} \quad \Sigma n - (\alpha - 1).$$

Mais Σn est le nombre total des cases pleines du tableau, c'est-à-dire $\frac{\Delta}{2}$; il vient donc

$$\gamma = \frac{\Delta}{2} - (\alpha - 1) \quad \text{ou} \quad \Delta = 2(\alpha + \gamma - 1).$$

On peut raisonner d'une manière tout à fait analogue pour les arcs (ad), (bc), (bd), et obtenir de même les relations

$$\begin{aligned} \Delta &= 2(\alpha + \delta - 1) \\ &= 2(\beta + \gamma - 1) \\ &= 2(\beta + \delta - 1). \end{aligned}$$

La comparaison de ces diverses relations donne

$$\alpha = \beta, \quad \gamma = \delta,$$

comme il avait été annoncé; ce qui démontre le théorème I.

THÉORÈME II. — *Si un groupe de contours fermés possède k points de rebroussement (de première espèce), mais ne possède pas de point d'inflexion, on peut sur tous les contours qui composent le groupe choisir le sens positif de manière à avoir la convexité tournée toujours vers sa droite quand on marche dans ce sens positif; soit p l'indice du groupe dans cette hypothèse. Le nombre n de tangentes que l'on peut mener au groupe d'un point compris à la fois dans l'intérieur de r contours élémentaires positifs et de r' contours élémentaires négatifs sera*

$$n = k + 2p - 2(r - r'),$$

et en particulier la classe N *du groupe, c'est-à-dire le nombre de ses tangentes parallèles à une direction quelconque, sera*

$$N = k + 2p.$$

Pour le démontrer, je m'appuierai sur le lemme suivant :

Si un contour fermé possède k points de rebroussement (de première espèce), sans point double ni point d'inflexion, le nombre des tangentes qu'on peut lui mener d'un point *intérieur* est k, et d'un point extérieur $k + 2$ ou $k - 2$, suivant que la convexité du contour est tournée vers l'extérieur ou vers l'intérieur.

Ce lemme peut être considéré comme évident; car, à l'inspection d'un contour fermé quelconque, sans point double ni point d'inflexion, on aperçoit immédiatement la possibilité d'amener ce contour par déformation continue, en y conservant le même nombre de points de rebroussement, sans y introduire ni point d'inflexion ni point double, et sans passer, par un point donné quelconque M, à une forme régulière et symétrique, par rapport à un centre de figure; et il est clair que, dans une telle déformation, le nombre des tangentes qu'on peut mener du point M au contour ne saurait varier. Et, si M était un point pris à l'intérieur du contour primitif, on peut le choisir comme centre de figure du contour régulier obtenu par déformation, auquel cas les seules tangentes issues de M sont les k tangentes de rebroussement qui y concourent; d'ailleurs, si l'on sort du contour, le nombre des tangentes augmente ou diminue évidemment de deux, selon que la convexité est tournée vers l'extérieur ou vers l'intérieur.

Ce lemme étant admis, considérons un groupe de contours sans point d'inflexion, mais possédant k points de rebroussement et δ points doubles. Soit M (*fig.* 1) l'un quelconque de ces points doubles. Le sens positif ayant été choisi, comme l'indiquent les flèches, de manière à avoir toujours la convexité tournée vers sa droite, la décomposition en éléments donnera les deux portions de contours élémentaires AMB', A'MB. Introduisons les deux très-petits arcs ab', $a'b$, de manière à remplacer les deux portions anguleuses de contours élémentaires aMb', $a'Mb$ par des arcs dont la courbure varie d'une manière continue; cela étant fait pour tous les points doubles du groupe tels que M, tous les contours élémentaires seront devenus des contours ordinaires à courbure continue, sans point double ni point d'inflexion, et à chacun desquels nous pourrons appliquer le lemme précédent. Soit δ' le nombre des points doubles pour lesquels les deux points de rebroussement a', b se trouvent appartenir à un élément positif, δ'' le nombre de ceux pour lesquels ces points appartiennent à un élément négatif. Soient p' et p'' le nombre des éléments positifs et négatifs, k' et k'' les nombres de points de rebroussement primitifs du groupe qui se trouvent respectivement placés, après la décomposition, sur ces deux catégories d'éléments. D'après le lemme, si un point est intérieur à r éléments positifs et à r' éléments négatifs, le nombre des tangentes qu'on pourra mener de ce point à l'ensemble des éléments du groupe sera

$$k' + 2\delta' + 2(p' - r) + k'' + 2\delta'' - 2(p'' - r'),$$

puisque les éléments positifs ont leur convexité tournée vers l'extérieur et les négatifs vers l'intérieur. Mais, en vertu des relations

$$\begin{aligned} k' + k'' &= k, \\ \delta' + \delta'' &= \delta, \\ p' - p'' &= p, \end{aligned}$$

ce nombre se réduit à

$$k + 2\delta + 2p - 2(r - r').$$

Mais, en introduisant à chacun des δ points doubles, tels que M, les deux arcs très-petits ab', $a'b$, nous avons évidemment augmenté de 2δ le nombre des tangentes que l'on peut mener à l'ensemble du groupe d'un point quelconque non situé dans l'une des petites régions $Ma'b$, c'est-à-dire en réalité d'un point quelconque du plan, puisque ces régions peuvent être supposées aussi petites qu'on voudra. Le nombre n des tangentes issues d'un point quelconque est donc bien

$$n = k + 2p - 2(r - r'),$$

ce que l'on peut encore écrire

$$n = k + 2(s - s'),$$

s et s' étant respectivement les nombres d'éléments positifs et négatifs auxquels le point considéré est extérieur.

Si, en particulier, le point considéré est à l'infini, il est extérieur à tous les éléments, et l'on a pour la classe du groupe

$$N = k + 2p.$$

Théorème III. — *Soit un groupe de contours fermés, sans points d'inflexion, mais avec k points de rebroussement (de première espèce) et δ points doubles. Supposons-le décomposé en éléments, le sens positif ayant été choisi partout de manière que la convexité soit tournée vers la droite. Soient μ le nombre de couples que l'on peut former avec deux éléments extérieurs l'un à l'autre et de même signe, μ' le nombre de couples que l'on peut former avec deux éléments extérieurs l'un à l'autre et de signe contraire. Soient de même ν et ν' les nombres de couples que l'on peut former en associant respectivement un élément* positif *ou un élément* négatif *avec un point de rebroussement non situé à l'intérieur de cet élément (un point de rebroussement situé* sur *le contour d'un élément devant être regardé comme situé à son intérieur ou à son extérieur, suivant que cet élément sera positif ou négatif). — Le nombre des tangentes doubles du groupe de contours sera*

$$\tau = 4(\mu - \mu') + 2(\nu - \nu') + \frac{k(k+1)}{2} + \delta.$$

On peut simplifier cette expression de τ, en la réduisant à son premier et à son dernier terme, à la condition de compter chaque point de rebroussement à la fois comme un point double et comme un demi-élément *positif*.

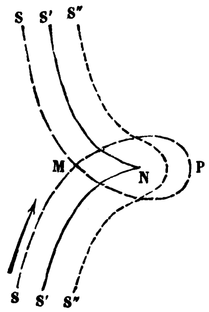
Je me borne ici à donner l'énoncé de ce théorème, que je n'aurai pas occasion d'appliquer dans la suite de ce Mémoire.

Déformation d'un groupe de contours. — Étant donné un groupe de contours fermés, on peut le modifier par déformation continue d'une infinité de manières. Dans tout ce qui va suivre, je supposerai toujours que la loi de déformation adoptée satisfait à cette condition, qu'en passant de l'un quelconque des groupes au groupe infiniment voisin, chaque élément infiniment petit de contour se déplace du même côté par rapport au sens positif adopté; ou, ce qui revient au même, que les divers contours successifs, obtenus par déformation continue, n'aient pas de courbe enveloppe. Si, en partant d'un contour ou d'un groupe de contours donné, on passe à un nouveau contour ou groupe de contours, en transportant tous les éléments du premier *vers la droite,* par rapport à un observateur qui le parcourrait dans le sens positif, je dirai que le nouveau groupe a été obtenu par déformation *positive;* la déformation sera dite *négative* dans le cas contraire.

Il peut arriver, en déformant un contour donné, qu'on soit amené forcément à un contour qui possède un point de rebroussement : c'est ce qui arrivera, par exemple, si le contour primitif possède une boucle simple, et que la déformation tende à resserrer cette boucle indéfiniment. Dès lors, en vertu de la convention admise pour la loi de déformation, si l'on continue la déformation dans le même sens après avoir rencontré le contour qui possède un point de rebroussement, on arrivera à des contours qui, dans la région correspondante, ne posséderont plus ni point double ni point de rebroussement. De même on peut, en déformant convenablement un contour donné, faire apparaître à volonté, sur une portion de contour qui ne présentait rien de particulier, un point de rebroussement, suivi, dans les déformées suivantes, d'une boucle qui l'enveloppera en se dilatant de plus en plus. J'appellerai *points critiques* de la déformation les points de rebroussement, introduits volontairement ou non, qui satisfont à cette condition, d'être enveloppés par une boucle lorsqu'on passe aux déformées du contour particulier sur lequel ils existent, dans l'un des deux sens possibles de déformation.

Soient S, S′, S″ (*fig.* 2) trois contours consécutifs obtenus par déformation continue, celui S′ intermédiaire présentant en N un point critique. Si le sens positif est tel que l'indique la flèche, il résulte de la convention adoptée que S' et S'' se déduisent de S par déformation positive. Mais, en décomposant les contours S, S', S'' en contours élémentaires, il est visible que l'on obtiendra, toutes choses égales d'ailleurs pour les autres parties des contours, un

Fig. 2.



élément négatif de plus pour le contour S que pour les deux autres, à cause de la présence de la boucle MP; donc, en passant de S à S'', l'indice du contour *augmente* d'une unité. Si la flèche était retournée, S aurait un élément *positif* de plus que S' et S'' : l'indice *diminuerait* donc d'une unité en passant de S à S''; mais, comme alors ce passage proviendrait d'une déformation *négative*, on peut énoncer, comme général, le résultat suivant :

Théorème IV. — *Lorsque, en déformant d'une manière continue un groupe de contours, on passe volontairement ou non par un point critique de déformation, l'indice du groupe augmente ou diminue d'une unité, suivant que l'on a opéré par voie de déformation positive ou négative.*

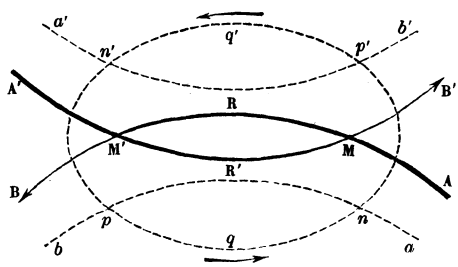
Je vais maintenant établir la proposition suivante :

Théorème V. — *Toute déformation continue, au cours de laquelle on ne passe par aucun point critique, n'altère pas l'indice.*

Tout d'abord, puisque les opérations qui servent à obtenir l'indice ne dépendent que du nombre et de la position relative des points doubles du groupe, il est clair que toute déformation qui n'altère ni le nombre ni la position relative de ces points doubles sur les divers contours composant le groupe ne peut altérer l'indice. Examinons maintenant ce qui se passe, s'il survient une modification : 1° dans le nombre; 2° dans la position relative.

Premier cas. — Il suffit d'examiner le cas où un point double disparaît; le cas où il apparaît s'y ramènerait en considérant la déformation inverse. Chaque point double M, étant produit par le croisement de deux branches C et C', ne fait, pendant la déformation, que se déplacer sur chacune des deux branches, en marchant toujours du même côté, par rapport à la position variable de l'autre. Il ne peut donc disparaître qu'en venant se confondre avec un autre point double M', provenant aussi du croisement de C avec C', ces deux branches devenant tangentes. Si C et C' sont une seule et même branche, M et M' sont un seul et même point, et l'on trouve, comme cas particulier, le passage par un point critique. Laissant de côté ce cas particulier, qui a fait l'objet du théorème IV, nous n'avons à examiner que le cas où deux branches distinctes C, C', d'abord croisées, viennent à se décroiser par l'effet de la déformation. Si elles sont de même sens, c'est-à-dire si le sens positif est le même pour les deux branches sur l'élément infinitésimal qui leur est commun à l'instant du contact, on voit immédiatement, en faisant la figure, que la décomposition en contours élémentaires, faite *avant* et *après* le contact, fournit dans l'un et l'autre cas deux portions de contours élémentaires placées exactement de la même manière, par rapport au reste du groupe, en sorte que l'indice est évidemment le même. Si les deux branches qui se décroisent sont de sens contraire (*fig.* 3), soient

Fig. 3.



AMRM'B, A'M'R'MB' ces deux branches avant le contact, et ab, $a'b'$ ce qu'elles sont devenues par déformation (négative d'après la figure) après le contact qui les a décroisées. Avant le contact, la décomposition en éléments donne :

Un élément positif........	MRM′R′M
Une portion d'élément....	AMB′
Une portion d'élément....	A′M′B

Après le contact, la décomposition donnerait les deux portions d'éléments ab, $a'b'$, qui sont disposées tout autrement, par rapport au reste du groupe, en sorte que la comparaison n'est pas possible. Mais, si nous introduisons l'ovale $np'n'p$, qui équivaut à un élément positif, nous aurons, d'après le théorème I, augmenté l'indice d'une unité ; en tenant compte de cet ovale, la décomposition fournit :

Un élément positif............	$pqnp$
Un élément positif............	$p'q'n'p'$
Une portion d'élément.........	$anp'b'$
Une portion d'élément.........	$a'n'pb$

Ces deux dernières portions étant disposées, par rapport au reste du groupe, exactement comme les portions AMB′, A′M′B, on voit que la décomposition, après le contact, fournit deux éléments positifs, soit un de plus qu'avant le contact ; mais il en a été introduit précisément un ; l'indice du groupe est donc bien le même avant et après le décroisement des deux branches, c'est-à-dire n'a pas été altéré par la disparition des deux points doubles considérés.

Deuxième cas. — Soient M, M′ deux points doubles provenant du croisement d'une branche C″ par deux autres branches C, C′, et soit M celui des deux qui se présente le premier, quand on marche sur C″ dans le sens positif. Si par déformation continue du groupe on amène ces deux points à intervertir leurs positions respectives sur C″, il faudra qu'il y ait eu un moment où ils ont coïncidé ; il a donc fallu qu'un troisième point double M″, provenant du croisement des branches C′ et C, ait traversé la branche C″ en passant de sa droite à sa gauche, ou inversement. Dès lors on voit sans peine, en faisant la figure, que tout est symétrique pour les trois branches C, C′, C″, et que sur chacune d'elles il y a eu au même moment interversion de deux points doubles consécutifs, le passage se faisant par un point triple. Considérons le petit triangle curviligne que forment les trois branches C, C′, C″, avant et après le passage par le point triple. Le sens positif sur ces trois branches peut être tel, que les trois côtés du triangle se fassent suite (en sorte que le triangle fournisse à lui seul, par la décomposition, un élément positif ou négatif), ou que deux seulement se fassent suite, le troisième étant de sens inverse. Dans ce second cas, on voit immédiatement, en faisant une figure, que la décomposition *avant* et *après* le passage par le point triple fournit trois portions d'éléments disposées exactement de la même manière, par rapport au reste du groupe de contours, en sorte que l'indice reste évidemment invariable. Il n'en est pas de même dans le premier cas, où le triangle forme un élément à lui seul; mais, par un artifice analogue à celui que j'ai employé plus haut, c'est-à-dire en introduisant un ovale de sens convenable, qui enveloppe entièrement le petit triangle, il est facile de faire en sorte que la décomposition, avant et après le passage, fournisse des portions d'éléments disposées de la même manière, par rapport au reste du groupe, en sorte qu'il suffise de comparer le nombre et le sens des éléments complets obtenus, et de tenir compte de l'ovale introduit, pour vérifier que l'indice reste bien invariable.

Si deux des branches C, C′, C″ appartiennent à un même contour sur lequel elles se font suite, l'interversion des points doubles sur la troisième peut coïncider avec la production d'un point critique : on vérifierait alors aisément que la variation de l'indice est uniquement celle qui serait due à la production du point critique, en sorte que le théorème V est vrai dans tous les cas.

Dislocation d'un groupe de contours. — Imaginons qu'en opérant par déformation continue sur un groupe donné de contours on soit arrivé à un groupe tel, qu'en une même région extrêmement petite ω passent deux branches distinctes A et A′. D'après le sens de ces branches, soient α et α' les arcs qui, sur ces deux branches respectivement, *se dirigent* vers ω, β et β' les arcs qui s'en éloignent; en sorte qu'en décrivant le groupe dans le sens positif, β fait suite à α sur une même branche A, β' à α' sur une autre branche A′. En continuant la déformation, rien n'empêche de disposer des éléments d'arcs infiniment petits dans la région ω, de manière que l'arc β'_1, provenant de la déformation de β', fasse suite non plus à l'arc α'_1 provenant de la déformation de α',.

mais à l'arc α_1 provenant de la déformation de α; et que de même β_1 fasse suite à α'_1; en sorte que les deux branches primitives, constituées par la soudure deux à deux de quatre demi-branches, aient fait place à deux nouvelles branches constituées par la soudure de ces mêmes quatre demi-branches, prises deux à deux de la seule seconde manière possible, et cela en respectant la condition que j'ai admise pour toute loi de déformation. Néanmoins, comme il y a dans cette opération quelque chose de plus que dans la déformation, telle que je l'avais considérée jusqu'ici, je la désignerai sous le nom de *dislocation;* j'appellerai *point de dislocation* le point de soudure, à partir duquel la déformation, dans un sens ou dans l'autre, donne les quatre demi-branches soudées deux à deux suivant les deux modes opposés.

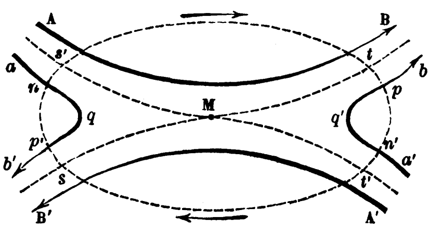
Comme exemple simple de point de dislocation, on peut citer le *centre* d'un système d'hyperboles homothétiques et concentriques : quand on passe d'une des deux séries d'hyperboles à la série conjuguée, le passage se fait par l'ensemble des deux asymptotes, et il y a ce que j'ai appelé *dislocation du système,* le point de dislocation étant le centre.

Toute dislocation a pour résultat d'augmenter ou de diminuer d'une unité le nombre des contours distincts dont se compose le groupe. Supposons, en effet, que les deux branches $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ fassent partie d'un même contour; en le parcourant dans le sens positif, on décrira successivement les arcs $\alpha\beta\alpha'\beta'\alpha$. Après la dislocation, β' fait suite à α et β à α' au voisinage du point de dislocation; dans le reste du plan, les liaisons entre les branches n'ont pas été modifiées : α' fait donc suite à β, et α à β'. Nous obtenons donc, en marchant toujours dans le sens positif, les deux contours distincts $\alpha\beta'\alpha$, $\alpha'\beta\alpha'$, c'est-à-dire un contour distinct de plus; et si l'on avait considéré le sens de déformation inverse, on aurait eu deux contours distincts avant la dislocation, et un seul après.

Pour étudier l'influence qu'exerce une dislocation sur l'indice du groupe, il convient de distinguer divers cas, suivant la position relative des deux branches qui existent dans une même région très-petite avant la dislocation.

Premier cas. — Les deux branches passent tangentiellement l'une à côté de l'autre, sans se couper, et sont de sens inverse (*fig.* 4). Soient AB, A'B' les deux branches; si les flèches sont disposées comme sur la *fig.* 4, la dislocation ne peut être obtenue que par voie de déformation positive, et elle fournit les deux nouvelles branches *ab'*, *a'b*, le passage se faisant nécessairement par un contour avec point double M, qui est le point de dislocation. La décomposition du contour, avant la dislocation, fournit les deux portions d'éléments AB, A'B'. Ajoutons au contour, après la dislocation, l'ovale *npn'p'*, qui équivaut à un élément négatif, et diminue par suite l'indice d'une unité; la décomposition donnera les deux portions d'éléments *anp'b'*, *a'n'pb*, respectivement situées par rapport au reste du groupe comme les portions d'éléments AB, A'B'; puis les deux éléments négatifs *nqp'n*, *n'q'pn'*. En tenant

Fig. 4.



compte de l'ovale ajouté, on voit que l'indice du groupe a été diminué d'une unité par cette dislocation, que j'appellerai du *premier genre*.

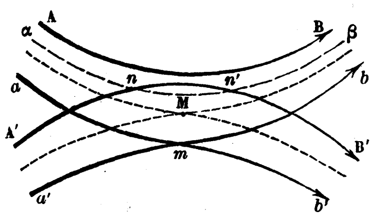
Si les flèches avaient été tournées dans le sens inverse sur les branches AB, A'B', la dislocation n'aurait pu être obtenue que par voie de déformation négative, mais l'indice du groupe aurait évidemment *augmenté* d'une unité. C'est ce que l'on voit encore en partant des branches *ab'*, *a'b*, comme groupe primitif.

Il est à remarquer que, dans ce premier genre de dislocation, il ne passe, en chaque point du plan infiniment voisin du point de dislocation, qu'*une seule* branche appartenant à l'un quelconque des groupes obtenus par déformation (abstraction faite, bien entendu, des branches autres que celles sur lesquelles agit la dislocation).

Deuxième cas. — Les deux branches passent tangentiellement l'une à côté de l'autre sans se couper, et sont de même sens (*fig.* 5).

Ici la dislocation peut être obtenue à volonté par déformation positive ou négative, et elle fournit deux branches ab', $a'b$, qui se coupent sous un certain angle; le point M de dislocation est le premier point double qui se présente, c'est-à-dire l'origine de la

Fig. 5.



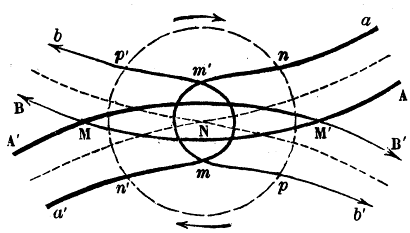
série des points doubles, tels que m, appartenant aux divers groupes déformés consécutifs. Dans cette dislocation, que j'appellerai du *deuxième genre,* il est clair que la décomposition en éléments, avant et après la dislocation, fournit deux portions d'éléments semblablement placées par rapport au reste du groupe, en sorte qu'il n'y a aucune variation dans l'indice.

La (*fig.* 5) convient évidemment aussi au troisième cas, celui où les deux branches du groupe primitif se coupent sous un certain angle. Elle convient encore, avec une légère modification, au quatrième cas, celui où les deux branches se croisent doublement, et sont de même sens : il suffit de supposer que AB soit légèrement déplacé en $\alpha\beta$, de manière à croiser A'B' en deux points n, n'; le point M de dislocation est alors le point où les deux points doubles n, n' viennent se confondre en un seul point double, qui reste unique dans les groupes déformés suivants; et la décomposition en éléments montre toujours que l'indice n'est pas altéré par la dislocation.

D'ailleurs, dans les divers cas que nous venons d'examiner et auxquels s'applique la *fig.* 5, il passe, en chaque point du plan infiniment voisin du point de dislocation, *deux* et seulement deux branches appartenant à l'un quelconque des groupes déformés; cette circonstance peut donc être regardée comme caractérisant la dislocation du deuxième genre, qui n'amène aucune variation dans l'indice.

Troisième cas. — Il ne nous reste évidemment plus à examiner qu'un dernier cas, celui où les deux branches AB, A′B′ (*fig.* 6) se croisent doublement et sont de sens inverse. Si les flèches sont disposées comme sur la *fig.* 6, la dislocation ne peut être obtenue qu'en procédant par voie de déformation positive; et l'on se trouve conduit aux deux branches $am'mb'$, $a'mm'b$, qui se

Fig. 6.



croisent doublement et sont de sens inverse, et sont par conséquent disposées l'une par rapport à l'autre comme l'étaient les branches primitives AB, A′B′. Le point N de dislocation résulte de la réunion en un seul des deux points doubles, M, M′, qui se séparent ensuite de nouveau en m, m'. Effectuons maintenant la décomposition en éléments. Avant la dislocation, nous obtenons :

Une portion d'élément........	AM′B′
» »	A′MB
Un élément négatif...........	MM′M

Après la dislocation et en ayant soin d'ajouter l'ovale $npn'p'$ qui équivaut à un élément négatif et diminue par suite l'indice d'une unité, nous obtenons :

Une portion d'élément........	$anpb'$
» »	$a'n'p'b$
Un élément négatif...........	$mpn'm$
» »	$m'p'nm'$
» positif...........	$mm'm$.

Les portions d'éléments, avant et après la dislocation, sont semblablement disposées par rapport au reste du groupe; il n'y a donc à tenir compte que des éléments complets et de l'ovale ajouté; on en conclut immédiatement que cette dislocation, que j'appellerai du troisième genre, a *augmenté* l'indice d'une unité. On verrait sans peine que l'indice aurait été au contraire diminué d'une unité, si la dislocation du troisième genre avait été obtenue par voie de déformation négative.

D'ailleurs, à l'inspection de la *fig.* 6, il est visible qu'en chaque point infiniment voisin du point de dislocation passent *trois* branches appartenant à l'un quelconque des groupes déformés consécutifs.

En résumant les considérations qui précèdent, nous sommes autorisés à énoncer le théorème suivant :

Théorème VI. — *Une dislocation obtenue par voie de déformation positive fait varier l'indice du groupe de* — 1, *zéro ou* + 1, *suivant qu'elle est du premier, du deuxième ou du troisième genre, c'est-à-dire suivant que le nombre des branches appartenant aux divers groupes déformés consécutifs et passant par un même point quelconque infiniment voisin du point de dislocation est* 1, 2 *ou* 3. *L'inverse a lieu si la dislocation est obtenue par voie de déformation négative.*

SECONDE PARTIE.

APPLICATION AU SYSTÈME DES ISOMORPHIQUES D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE PLANE.

Définition de l'isomorphique. — J'appellerai *isomorphique* d'une courbe plane U le lieu des points d'où l'on voit la courbe U sous un même angle imaginaire donné, cet angle étant défini comme celui que font entre elles deux droites imaginaires conjuguées données.

Pour éclaircir cette définition et faciliter l'intelligence des développements qui vont suivre, il est indispensable de rappeler ici brièvement quelques principes relatifs aux éléments imaginaires que l'on a à considérer en Géométrie.

On sait qu'il existe deux genres de droites imaginaires : 1° celles qui possèdent un point réel unique à distance finie; 2° celles dont le point réel unique est à l'infini. Chaque droite du premier genre peut être caractérisée géométriquement par l'*excentricité*, par l'*orientation* et par le *sens* (de parcours) de l'une quelconque des ellipses homothétiques et concentriques dont elle serait l'une des asymptotes, l'autre asymptote ayant pour indicatrice la même ellipse, mais parcourue en sens inverse. J'appellerai cette ellipse (dont les dimensions absolues sont d'ailleurs indéterminées) l'*indicatrice* du couple de droites imaginaires; son centre, qui est le point réel unique de ces deux droites, sera dit leur *ombilic*. On vérifie aisément :

1° Que les équations de deux droites conjuguées du premier genre, en coordonnées cartésiennes, rapportées à deux diamètres conjugués de leur indicatrice, se réduisent à la forme

$$y = \pm mx\sqrt{-1}$$

m étant le rapport des deux diamètres dirigés suivant les axes de coordonnées;

2° Que, pour que deux droites imaginaires du premier genre fassent entre elles un angle réel, il faut et il suffit que leurs indicatrices soient semblables et de même sens (c'est-à-dire que m ait la même valeur et le même signe quand on rapporte respectivement les équations des deux droites aux axes de leurs indicatrices); l'angle des deux droites est alors la différence d'orientation de leurs indicatrices : d'où il résulte que, pour que l'angle des deux droites soit nul, c'est-à-dire pour qu'elles soient parallèles, il faut et il suffit que les deux indicatrices soient semblables, de même sens et semblablement placées;

3° Que, pour que deux droites aient leurs bissectrices *réelles* (ou du moins à coefficient angulaire réel), il faut et il suffit que leurs indicatrices soient semblables et de sens contraire; les directions des bissectrices coïncident alors avec celles des bissectrices des axes homologues des deux indicatrices.

En raison de ces relations remarquables, on peut désigner les droites imaginaires du premier genre par le nom de *hémiellipses* ou droites hémielliptiques. Si l'ellipse indicatrice devient un cercle, les hémiellipses correspondantes deviennent des hémicercles, c'est-à-dire ce que l'on appelle souvent des droites isotropes du premier et du second système; et l'on aperçoit immédiatement que l'angle compris entre deux droites isotropes du même système doit être absolument indéterminé.

Les droites imaginaires du second genre, dont le point réel est à l'infini, ont toujours leur coefficient angulaire réel, et leur équation, rapportée à des axes convenables, peut toujours être ramenée à la forme

$$y = \pm n\sqrt{-1},$$

où n est une constante.

Ici les deux droites conjuguées sont parallèles entre elles. Je désignerai, pour abréger, les droites imaginaires du deuxième genre sous le nom de droites *hémitropes*.

Cela posé, soit donnée une courbe algébrique U de classe m et de degré n, et que je supposerai tout d'abord, pour simplifier les raisonnements, n'être pas tangente à la droite de l'infini, n'avoir aucune droite hémitrope pour asymptote, et enfin n'avoir aucun foyer multiple. Si d'un point réel quelconque M à distance finie on mène les n tangentes à la courbe U, les unes seront réelles, les autres formeront des couples de droites hémielliptiques. Si le point réel M est pris à l'infini, les n tangentes seront les unes réelles, les autres hémitropes, conjuguées par couples, mais toutes auront le même coefficient angulaire réel. Il en résulte que, si l'on considère tous les points réels d'où l'on peut mener à U deux tangentes hémielliptiques conjuguées ayant pour indicatrice une certaine ellipse ε définie comme excentricité, mais d'orientation variable, le lieu de ces points sera une courbe I ne possédant aucun point réel à l'infini. D'ailleurs, de tous les points de I, on verra U sous un même angle imaginaire, celui que forment entre elles les deux asymptotes de ε; I sera donc par définition une isomorphique de U. Si maintenant on fait varier l'excentricité de l'ellipse ε depuis zéro jusqu'à 1, c'est-à-dire l'ellipse elle-même depuis la forme circulaire jusqu'à la forme infiniment aplatie, on obtiendra toutes les isomorphiques possibles de U comme formant un système continu, depuis celle qui correspond à une indicatrice circulaire et qui se réduit évidemment aux n foyers de U, jusqu'à celle qui comprend tous les points réels d'où l'on peut voir la courbe U sous un angle nul, et qui se compose par conséquent de la courbe U elle-même, de ses tangentes d'inflexion, de ses tangentes doubles et de la droite de l'infini, comptées chacune un certain nombre de fois.

Ainsi que nous venons de le voir, aucune des isomorphiques du système, si ce n'est la dernière qui comprend U, ne possède de point réel à l'infini. Et, en effet, il est facile de s'assurer, par divers procédés sur lesquels il est inutile d'insister, que le degré d'une isomorphique est $2n(n-1)$, et que ses seuls points à l'infini sont les points circulaires, comptés chacun $n(n-1)$ fois. [Si la droite de l'infini était g fois tangente à U, le degré des isomorphiques serait $2(n-1)(n-g)$.] Chaque isomorphique se compose donc, quant à ses régions réelles, d'un nombre fini de contours dont aucun ne passe par l'infini; nous pouvons donc lui appliquer la notion de l'indice, tel qu'il a été défini dans la première partie de ce Mémoire. Et puisque l'isomorphique correspondant à une indicatrice circulaire se réduit à n points distincts, les foyers de U, l'isomorphique immédiatement consécutive, correspondant à une indicatrice d'excentricité infiniment petite, se composera de n contours fermés infiniment petits et distincts, enveloppant chacun un des n foyers; son indice sera donc n, pourvu que l'on choisisse le sens positif sur chacun de ces contours, de manière qu'il forme un élément positif.

Je dis maintenant que les isomorphiques successives peuvent être considérées comme se déduisant les unes des autres par déformation ou dislocation, dans le sens que j'ai attaché précédemment à ces deux mots, c'est-à-dire qu'elles ne peuvent avoir d'enveloppe réelle; car, s'il existait une telle enveloppe, de l'un quelconque de ses points on pourrait mener à la courbe U deux tangentes hémielliptiques infiniment peu différentes (correspondant aux deux isomorphiques infiniment voisines qui passeraient en ce point); il appartiendrait donc soit à la courbe réelle U, soit à l'une de ses tangentes hémielliptiques d'*inflexion* ou *doubles,* et, puisqu'il est réel par hypothèse, il serait soit un point isolé de U, soit l'ombilic de l'une des tangentes imaginaires d'inflexion ou doubles de U. Mais les points isolés et les ombilics de tangentes d'inflexion et doubles sont en nombre fini et ne peuvent former une courbe continue; il ne saurait donc exister d'enveloppe réelle pour le système des isomorphiques.

Il résulte de ce qui précède que, pour obtenir l'indice de la dernière isomorphique (en appelant ainsi l'isomorphique qui correspondrait à une indicatrice infiniment aplatie, et qui différerait par suite infiniment peu de la courbe réelle U augmentée de ses tangentes d'inflexion et doubles et de la droite de l'infini), il suffira de tenir compte des points critiques et des points de dislocation de premier et de troisième genre qui peuvent exister dans le système des isomorphiques. Mais nous allons voir que ces points critiques et de dislocation ont une signification géométrique très-simple relativement à U.

Théorème VII. — *Tout point critique du système des isomorphiques de* U *est un point isolé de* U, *ainsi que tout point de dislocation du troisième genre; et réciproquement tout point isolé de* U *est un point critique ou un point de dislocation du troisième genre du système des isomorphiques de* U, *suivant que ses deux tangentes ne sont pas ou sont en même temps des tangentes d'inflexion. D'autre part, tout point de dislocation du premier genre est l'ombilic d'un couple d'asymptotes hémielliptiques de* U, *et réciproquement.*

En effet, soit d'abord M un point double ordinaire sur l'une des isomorphiques de U : de ce point, on peut mener à U deux couples de tangentes hémielliptiques dont les indicatrices sont semblables, mais non en général semblablement placées. Il pourra toutefois arriver, comme cas particulier (se présentant un nombre limité de fois dans une série continue de points doubles des isomorphiques successives), qu'elles soient semblablement placées; mais il n'y a aucune raison pour que les *points de contact* de ces deux couples de tangentes coïncidentes soient également coïncidents : dans les cas particuliers dont il s'agit, M sera par conséquent l'ombilic d'un couple de *tangentes doubles* hémielliptiques de U. Mais, si M est en même temps un point de rebroussement de l'isomorphique, ou un point de dislocation dans le système des isomorphiques successives, il est aisé de voir que la coïncidence a lieu nécessairement, tant pour l'orientation des indicatrices que pour les points de contact des deux couples de tangentes : dans le premier cas, parce que, les deux points composants du point double étant consécutifs, sont liés directement par la loi de continuité, ainsi que les couples de tangentes qui en sont issues; dans le second, parce que la même liaison existe indirectement entre ces deux points composants, par l'intermédiaire des branches de l'isomorphique infiniment voisine, comme on peut le voir sur l'une quelconque des *fig.* 4, 5 et 6 : par exemple, sur la *fig.* 4, M, considéré comme appartenant à la branche St, est lié par la loi de continuité au point S, celui-ci au point p' (comme points correspondants sur deux isomorphiques consécutives), le point p' au point n (comme infiniment voisins sur une même isomorphique), ce dernier au point S', et enfin S' au point M considéré comme appartenant à la branche St'. Et il est clair que cette liaison indirecte ne peut être établie entre les deux points composants du point double d'une isomorphique donnée, que dans le seul cas où ce point joue le rôle de point de dislocation du système.

Il est donc prouvé que les points de dislocation et les points de rebroussement sont les seuls points qui puissent être les ombilics de couples de tangentes hémielliptiques *coïncidentes deux à deux* et ayant aussi leurs points de contact coïncidents, et qu'ils sont effectivement des ombilics de couples de ce genre. La seule exception à la première partie de cette règle serait fournie par le cas doublement particulier où les deux couples de tangentes *doubles* hémielliptiques auraient leurs points de contact coïncidents, comme cela peut arriver aussi accidentellement pour des tangentes doubles réelles.

Considérons maintenant en particulier un point critique du système des isomorphiques, c'est-à-dire un point de rebroussement de l'une d'elles, enveloppé par une boucle dans les suivantes. De ce point M on peut mener à U deux couples de tangentes hémielliptiques coïncidentes, et de tout point infiniment voisin deux couples de tangentes hémielliptiques infiniment peu différents, comme nature de l'indicatrice et comme position des points de contact. Mais, d'autre part, ces deux couples coïncidents ne comptent que pour *un* parmi les couples parallèles; car, d'une manière générale, il est clair que les ombilics des n couples parallèles définis par une même indicatrice donnée de forme et d'orientation sont placés en n points distincts d'une même isomorphique, en sorte que, si deux de ces ombilics NN' viennent à coïncider, il n'en sera pas de même en général des ombilics des deux couples parallèles infiniment voisins; c'est-à-dire que la coïncidence des deux ombilics NN' n'empêchera pas que les deux branches de l'isomorphique sur laquelle ils sont situés ne restent distinctes dans quatre directions à partir du point NN'; cette isomorphique devra donc avoir un point double ordinaire en NN' et non un rebroussement. Dès lors, l'ensemble des conditions auxquelles doivent satisfaire les couples de tangentes coïncidentes issues de M exige que M soit le point même de contact, et par conséquent un point isolé du lieu.

Considérons ensuite un point de dislocation M. Si la dislocation est du premier genre, nous avons vu qu'en tout point infiniment voisin de M il passe une seule branche d'isomorphique : donc les deux couples de tangentes coïncidentes issues de M, lesquels comptent pour *deux*, comme nous venons de le voir, parmi les couples parallèles, ne comptent que pour *un* parmi les *n* couples de tangentes que l'on peut mener de M à U : ce qui exige que ces tangentes soient des asymptotes. Si la dislocation est du second genre, les couples coïncidents comptent pour *deux* aussi bien parmi les couples parallèles que parmi ceux qu'on peut mener de M, ce qui exige (à cause de la coïncidence des points de contact) que ce soient des couples de tangentes d'inflexion. Enfin, si la dislocation est du troisième genre, les couples coïncidents comptent pour *deux* parmi les couples parallèles, et pour *trois* parmi ceux qu'on peut mener de M ; ce qui exige que M soit un point isolé de U et que les deux tangentes hémielliptiques de U en ce point soient en même temps des tangentes d'inflexion.

Réciproquement, l'ombilic d'un couple d'asymptotes ou de tangentes d'inflexion hémielliptiques de U est nécessairement, d'après ce qui précède, point double sur une certaine isomorphique, et en même temps point de dislocation du système des isomorphiques ; et, puisqu'une asymptote ne compte que pour *une* parmi les tangentes qu'on peut mener à U de l'un quelconque de ses points à distance finie, il faut bien qu'en tout point infiniment voisin du point de dislocation il ne passe qu'*une* branche d'isomorphique, c'est-à-dire que la dislocation soit du premier genre. De même les tangentes en un point isolé de U devant compter chacune pour *une* parmi les tangentes parallèles, et pour *deux* parmi les tangentes qu'on peut mener de ce point à U, il faut que ce point isolé soit, sur l'isomorphique à laquelle il appartient, un point de telle nature qu'il y passe une branche d'isomorphique *de moins* qu'en tout point infiniment voisin, c'est-à-dire que ce soit un point critique ou un point de dislocation du troisième genre.

Le théorème VII est donc entièrement démontré, et nous voyons de plus que tout point de dislocation du deuxième genre est l'ombilic d'un couple de tangentes d'inflexion de U et réciproquement, à moins que le point d'inflexion ne soit en même temps point isolé.

Il est d'ailleurs sans intérêt de discuter ici les cas particuliers qui peuvent résulter, par exemple, de la coïncidence d'une tangente d'inflexion avec une asymptote, ou de l'existence de tangentes d'ondulation hémielliptiques ; on vérifierait facilement que ces cas particuliers donnent lieu à des dislocations plus complexes, mais équivalant toujours, comme influence sur l'indice, à la superposition de deux des genres simples de dislocation dont nous venons de trouver la signification géométrique.

En tenant compte des définitions données ci-dessus et des divers théorèmes précédemment établis, nous obtenons immédiatement le théorème suivant :

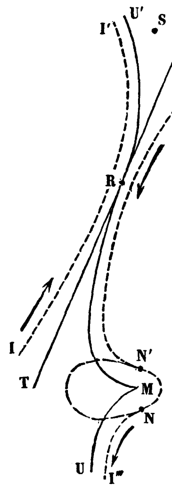
Théorème VIII. — *Le sens positif étant choisi partout de manière que les isomorphiques successives, à partir de l'ensemble des n foyers, se déduisent les unes des autres par déformation* positive, *l'indice de la dernière isomorphique sera*

$$n + \delta'_1 - m_2$$

en désignant par δ'_1 *le nombre des points isolés de* U *et par* $2m_2$ *le nombre de ses asymptotes imaginaires (hémielliptiques, puisque nous avons supposé qu'il n'en existait pas d'hémitropes).*

Étudions la forme de la dernière isomorphique. Puisqu'elle se compose de tous les points réels d'où l'on peut mener à U deux tangentes hémielliptiques à indicatrice infiniment aplatie, elle suit à distance infiniment petite la courbe U, mais toujours du côté de sa concavité ; elle la quitte donc en chaque point réel d'inflexion, pour suivre la tangente d'inflexion jusqu'à une distance infiniment grande (*fig.* 7) et rejoindre par un arc situé tout entier à distance infiniment grande et tournant sa convexité vers la droite de l'infini (puisqu'elle ne peut traverser cette droite) une autre tangente d'inflexion, ou une branche infinie de U, ou enfin une tangente double isolée de U. Elle n'a évidemment aucune branche en rapport avec les tangentes doubles réelles de U dont les deux points de contact sont réels ; mais elle possède, de chaque côté de toute tangente double isolée, deux branches distinctes qui suivent cette tangente de part et d'autre jusque vers l'infini, en lui présentant leur convexité, puisqu'au voisinage d'une telle tangente, d'un point réel pris soit d'un côté, soit de l'autre, on doit pouvoir, d'après la loi de continuité, mener à U deux tangentes dont les points de contact soient imaginaires conjugués, et qui diffèrent infiniment peu d'une droite réelle. D'après ces considérations, la dernière isomorphique ne peut avoir elle-même d'inflexions réelles qu'au voisinage de chaque point réel M de rebroussement de U;

Fig. 7



et nous pouvons, sans changer son indice, remplacer l'arc compris entre les deux points d'inflexion qu'elle y possède par un arc de même sens de courbure que le reste de l'isomorphique, en introduisant (*fig.* 7) deux rebroussements N, N'. La classe de l'isomorphique ainsi modifiée, c'est-à-dire le nombre de ses tangentes parallèles à une direction quelconque, sera, d'après le théorème II, égale au double de son indice, augmenté du nombre de ses rebroussements, pourvu que le sens positif ait été choisi de manière à avoir la convexité tournée vers la droite. Or cette dernière condition est remplie dans l'hypothèse où nous nous sommes placés précédemment pour calculer l'indice de la dernière isomorphique, puisque nous savons que la courbe U (augmentée de ses tangentes d'inflexion et isolées) s'en déduit par déformation positive, c'est-à-dire en marchant vers la droite. Nous trouvons donc, pour le nombre des tangentes parallèles de la dernière isomorphique modifiée comme il a été dit,

$$2(n + \delta'_1 - m_2) + 2k_1,$$

k_1 étant le nombre des points de rebroussement réels de U.

Examinons maintenant ce que deviennent ces tangentes parallèles, toutes réelles, lorsque l'on passe de la dernière isomorphique à la courbe U. Il suffit évidemment d'examiner l'influence : 1° des points de rebroussement réels de U; 2° des tangentes réelles d'inflexion de U; 3° des asymptotes réelles de U; 4° des tangentes doubles isolées de U; 5° des portions de branches réelles de la dernière isomorphique qui vont se confondre avec la droite de l'infini; car partout ailleurs le passage de la dernière isomorphique à la courbe réelle U se fait immédiatement, sans que le nombre des tangentes réelles, parallèles à une direction donnée, puisse être altéré.

1° A chaque point de rebroussement M (*fig.* 7), il est visible, à l'inspection de la figure, que le passage de la dernière isomorphique (modifiée) à la courbe U fait disparaître *une* tangente réelle, quelle que soit la direction considérée; le nombre de ces tangentes diminue donc de k_1.

2° Pour apprécier l'influence d'une tangente réelle d'inflexion TT' (*fig.* 7), considérons d'abord le point même d'inflexion R: de ce point on peut mener aux branches de la dernière isomorphique (II', I''I'''), qui sont voisines de TT', quatre tangentes réelles distinctes, lesquelles viennent se confondre avec la tangente d'inflexion TT', quand on passe à la courbe U; mais la tangente d'inflexion compte pour trois seulement parmi les tangentes que l'on peut mener de R à U : il y a donc réduction d'une *unité* dans le nombre total de ces tangentes, par le fait du passage considéré. La même relation a lieu évidemment pour tous les points situés dans l'une des régions TRU, T'RU', car le nombre total de tangentes réelles que l'on peut mener par l'un quelconque S de ces points à la dernière isomorphique ne diffère du nombre correspondant pour le point R qu'en raison des branches d'isomorphique qu'on a pu être forcé de traverser pour aller de R en S, chaque traversée d'une telle branche introduisant ou supprimant deux tangentes réelles, suivant qu'elle se présente par le côté concave ou le côté convexe. Il en est exactement de même si, au lieu de l'isomorphique, on considère cette courbe dans laquelle on a introduit la seule inflexion R et déplacé infiniment peu les diverses branches transversales dont il a été question ci-dessus, de manière à la faire coïncider partiellement avec la courbe U : la différence entre le nombre total des tangentes que l'on peut mener de R et de S, n'étant dû qu'à ces branches transversales, reste évidemment la même; le seul cas où ce ne soit pas évident est celui où, le point S étant pris à l'infini, quelques-unes des branches de la dernière isomorphique qu'il est nécessaire de traverser pour aller de R à S seraient elles-mêmes à distance infiniment grande, parce qu'alors, en passant à la courbe U, ces branches viendraient se confondre avec la droite de l'infini, laquelle ne fait plus partie, à proprement parler, de la courbe U. Mais nous verrons tout à l'heure que, dans ce cas, les deux tangentes réelles que l'on gagne en traversant une telle branche d'isomorphique pour aller de R à un point S situé à l'infini (puisqu'une telle branche tourne nécessairement sa convexité vers la droite de l'infini) sont représentées, quand on passe de la dernière isomorphique à la courbe U, par deux tangentes hémitropes conjuguées de cette dernière; en sorte que, à la condition de compter parmi les tangentes de U parallèles à une direction donnée, non-seulement les tangentes réelles, mais les tangentes hémitropes, il nous est permis de dire que, lorsque l'on passe de la dernière isomorphique à la courbe U, il disparaît i_1 tangentes parallèles à une direction quelconque, i_1 étant le nombre des points réels d'inflexion de U.

3° Pour chaque asymptote réelle, nous pouvons, par un raisonnement analogue à celui qui vient d'être fait pour les tangentes d'inflexion, considérer, au lieu d'un point à l'infini, un point pris à distance finie sur l'asymptote : d'un tel point on peut mener à la dernière isomorphique *deux* tangentes réelles, qui viennent, lors du passage à la courbe U, se confondre avec l'asymptote elle-même, laquelle ne compte que pour *une* parmi les tangentes qu'on peut mener à U du point considéré. Le nombre total des tangentes parallèles diminue donc de m_1, si m_1 est le nombre total des asymptotes réelles de U.

4° Pour chaque tangente double isolée, on voit de même, en prenant sur elle un point quelconque à distance finie, qu'il disparaît deux tangentes; le nombre total des tangentes parallèles diminue donc de $2\tau'_1$, si τ'_1 est le nombre total des tangentes doubles isolées de U.

5° Les portions de branches réelles de la dernière isomorphique qui vont se confondre avec la droite de l'infini n'ont d'autre effet, comme je l'ai annoncé, que de donner naissance à des couples de tangentes hémitropes conjuguées. En effet, d'un point pris à l'infini dans une direction vers laquelle existe une de ces branches de la dernière isomorphique, on peut évidemment mener à cette branche *deux* tangentes réelles qui viennent se confondre avec la droite de l'infini lorsque l'on passe de la dernière isomorphique à la courbe U. Il disparaît donc deux tangentes réelles parmi celles qui émanent du point considéré, c'est-à-dire parmi les tangentes parallèles à la direction qui définit ce point. Mais en même temps ce point peut être considéré comme la position limite d'un point variable des isomorphiques, point variable duquel on pouvait mener à la courbe U deux tangentes hémielliptiques conjuguées, dont l'indicatrice avait une excentricité de plus en plus grande; à la limite, l'indicatrice est infiniment aplatie, et le point limite étant à l'infini est un point d'où l'on peut mener à U deux tangentes hémitropes conjuguées. L'existence des branches dont il s'agit n'exerce donc aucune influence (indépendamment des tangentes d'inflexion ou isolées et des asymptotes auxquelles elles se rattachent) sur le nombre total des tangentes parallèles à une direction donnée, pourvu que parmi ces tangentes on compte les hémitropes aussi bien que les réelles.

En résumé, le passage de la dernière isomorphique (modifiée) à la courbe U fait disparaître

$$k_1 + i_1 + m_1 + 2\tau'_1$$

tangentes parallèles à une direction quelconque. Le nombre des tangentes de U parallèles à une direction quelconque, tant réelles qu'hémitropes, est donc

$$2(n + \delta'_1 - m_1) + 2k_1 - (k_1 + i_1 + m_1 + 2\tau'_1);$$

mais ce nombre n'est autre que la classe n de U, puisque nous avons admis que la droite de l'infini n'est pas tangente à U; nous pouvons donc écrire la relation

$$n = 2(n + \delta'_1 - m_2) + 2k_1 - (k_1 + i_1 + m_1 + 2\tau'_1),$$

laquelle se simplifie, en remarquant que l'on a

$$m_1 + 2m_2 = m,$$

puisque U n'est point tangente à la droite de l'infini et n'a, par hypothèse, aucune asymptote hémitrope, en sorte que son degré m est égal au nombre total $m_1 + 2m_2$ de ses asymptotes tant réelles qu'hémielliptiques. La relation écrite ci-dessus devient dès lors

$$(1) \qquad n + k_1 + 2\delta'_1 = m + i_1 + 2\tau'_1 :$$

c'est précisément celle que je me proposais d'établir.

Il est d'ailleurs facile de faire disparaître les restrictions que j'avais admises, pour la commodité de la démonstration, dans la définition de la courbe U, et de montrer que la relation ci-dessus s'applique d'une manière absolument générale à une courbe algébrique quelconque de degré m et de classe n. Tout d'abord, d'après ce que nous avons vu du rôle que jouent, par rapport à U, les points de dislocation du système de ses isomorphiques, il est clair que rien ne sera changé à la démonstration si deux des foyers viennent à se rapprocher de plus en plus, jusqu'à coïncider en un foyer double, soit qu'un point de dislocation vienne ou non en même temps coïncider avec ce foyer double (c'est-à-dire soit que les tangentes isotropes, issues de ce foyer, jouent le rôle de tangentes doubles, ou de tangentes d'inflexion, ou d'asymptotes). La courbe U peut donc avoir des foyers doubles ou multiples. D'autre part, étant donnée une courbe algébrique plane, tangente à la droite de l'infini ou ayant des asymptotes hémitropes (c'est-à-dire un ou plusieurs points isolés à l'infini), il est évidemment toujours possible d'en déduire, par projection *réelle*, une courbe algébrique U' de même degré et de même classe, ayant le même nombre de singularités réelles (rebroussements, inflexions, points isolés, tangentes isolées), et qui satisfasse à la condition de n'être point tangente à la droite de l'infini et de n'avoir à l'infini aucun point isolé. La relation (1) ayant lieu pour U' sera vraie par cela même pour U.

Si, au lieu de considérer la classe de la dernière isomorphique, nous avions considéré son degré, nous serions arrivé à l'une des formules de Plücker. En effet, le degré de toutes les isomorphiques est, comme il a été dit,

$$2n(n-1).$$

Lorsque l'on passe de la dernière isomorphique à la courbe U, on obtient, outre cette courbe dont le degré est m, la droite de l'infini, comptant évidemment $n(n-1)$ fois (puisque de chaque point de cette droite on peut mener à U n tangentes qui forment, combinées deux à deux dans tous les ordres possibles, $n(n-1)$ couples, dont l'indicatrice est infiniment aplatie); puis les tangentes doubles de U et ses tangentes d'inflexion. Pour voir combien de fois doit compter chaque tangente double, il suffit de considérer une tangente isolée : deux branches de la dernière isomorphique viennent s'y confondre pour devenir ensuite imaginaires; cette tangente compte donc pour deux. Pour les tangentes d'inflexion, il semble, en considérant de même les branches réelles, que chaque tangente ne doive compter que pour une; mais il convient de remarquer que, lorsqu'il s'agit du degré, nous ne pouvons plus négliger les éléments imaginaires, c'est-à-dire, dans l'espèce, les points d'intersection imaginaires que peut fournir la dernière isomorphique au voisinage d'une tangente réelle d'inflexion, lorsqu'on la coupe par une transversale, points d'intersection dont l'aspect des branches réelles ne suffit pas à déceler l'existence. Or, si l'on construit, au voisinage d'un point réel d'inflexion de U, une des isomorphiques négatives (lieu des points d'où l'on peut mener à U deux tangentes *réelles* faisant entre elles un angle constant) correspondant à un angle très-petit, il est facile de vérifier qu'on peut toujours tracer une tangente réelle de U qui rencontre cette isomorphique négative en quatre points réels très-voisins (dont deux confondus au point de contact), ce qui conduit à prendre 3 pour coefficient relatif aux tangentes d'inflexion. On trouverait d'ailleurs immédiatement cette valeur du coefficient, en le déterminant dans un cas particulier, par exemple dans le cas d'une cubique non singulière; et l'on obtient ainsi la relation

$$2n(n-1)=n(n-1)+m+2\tau+3i$$

ou

$$m=n(n-1)-2\tau-3i,$$

c'est-à-dire l'une des relations de Plücker.