

# BULLETIN DE LA S. M. F.

S MANDELBROJT

## Sur un théorème de M. Whittaker

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 69 (1941), p. 1-2 (supplément)

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1941\\_\\_69\\_\\_s1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1941__69__s1_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1941, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## COMMUNICATION

FAITE AU COURS DE LA SEANCE DU 24 MAI 1939.

---

SUR UN THÉORÈME DE M. WHITTAKER;

PAR M. S. MANDELBRÖJT.

---

En 1923, j'ai démontré le théorème suivant : Si  $\sum a_{\lambda_n} z^{\lambda_n} = f(z)$  est méromorphe sur le cercle de convergence et y admet  $k$  pôles, on a

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) \leq k.$$

Plusieurs auteurs ont généralisé ce théorème (MM. Pólya, Ostrowski, Obreschcoff, Jungen, Tsuji, Wilson, etc.). Dernièrement M. J. M. Whittaker a démontré, dans le même ordre d'idées, le théorème suivant (*The Journal of the London Math. Society*, vol. XIII, n° 52, octobre, 1938, p. 295) :

Si  $f(z)$  n'admet sur le cercle de convergence que  $k$  points singuliers tous isolés non critiques, on a

$$\overline{\lim} \frac{\lambda_n}{n} \leq k,$$

c'est-à-dire que la limite supérieure de la moyenne des quantités  $\lambda_{n+1} - \lambda_n$  ne dépasse pas  $k$ .

Or, en analysant la méthode employée par M. Whittaker, j'ai remarqué qu'on peut énoncer un théorème plus précis, que voici :

Si  $f(z) = \sum a_{\lambda_n} z^{\lambda_n}$  n'admet sur le cercle de convergence supposé de rayon un que  $k$  points singuliers, tous isolés, non critiques, et si  $\alpha$  désigne la longueur d'un arc sur lequel sont situés tous ces points on a, en désignant par  $\mu_n^{(p)}$  la suite des  $\lambda_n$  vérifiant l'égalité

$$\lambda_n \equiv p \left[ \text{mod } E \left( \frac{2\pi}{\alpha} \right) \right] \quad (1),$$

---

(1)  $E(x)$  désigne la partie entière de  $x$ .

où  $p$  est un entier inférieur à  $\frac{2\pi}{\alpha}$ ,

$$\overline{\lim} \frac{\mu_n^{(p)}}{n} \leq K \left[ \frac{2\pi}{\alpha} \right].$$

M. Whittaker se base sur le lemme suivant : Si

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \quad (0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_k < 2\pi)$$

sont les arguments des singularités (le rayon de convergence étant supposé égal à  $un$ ), on a, en écrivant  $f(z) = \sum a_n z^n$ ,

$$a_n = g(n) + b_n, \quad \overline{\lim} |b_n|^{\frac{1}{n}} < 1,$$

où  $g(z)$  est une fonction entière qui peut se mettre sous la forme

$$g(z) = \sum_{s=1}^k e^{-i\alpha_s z} h_s(z),$$

chaque fonction  $h_s(z)$  étant d'ordre  $un$  et du type minimum, donc, telle que, quel que soit  $\delta > 0$ , l'inégalité

$$(1) \quad |h_s(n)| > e^{-\delta n}$$

soit vérifiée pour des entiers positifs formant une suite de densité  $un$ .

Si nous posons

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{2\pi}{\alpha} \right] = \omega, \quad g(\omega\zeta + p) &= g_p(\zeta), \quad h_s(\omega\zeta + p) = h_{p,s}(\zeta), \\ \omega\alpha_s &= \alpha'_s, \quad e^{-ip\alpha_s} h_{p,s}(\zeta) = h_{p,s}^*(\zeta), \end{aligned}$$

[nous prenons  $\alpha_1 = 0$  ( $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_k \leq \alpha$ )], on voit que

$$g_p(\zeta) = \sum_{s=1}^k e^{i\alpha'_s \zeta} h_{p,s}^*(\zeta),$$

chaque fonction  $h_{p,s}^*(\zeta)$  jouissant encore de la propriété (1). Il suffit maintenant de continuer le raisonnement de M. Whittaker, en y remplaçant  $g(n)$  par  $g_p(n) = g(\omega n + p)$ .