BULLETIN DE LA S. M. F.

PAUL LÉVY

Propriétés intrinsèques des fonctions, et intégrales de Stieltjes

Bulletin de la S. M. F., tome 69 (1941), p. 5-9 (supplément)
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1941__69__s5_0>

COMMUNICATION

FAITE AU COURS DE LA SÉANCE DU 6 décembre 1939.

PROPRIÉTÉS INTRINSÈQUES DES FONCTIONS, ET INTÉGRALES DE STIELTJES;

PAR M. PAUL LÉVY.

Nous dirons qu'une propriété d'une fonction est *intrinsèque* ou qu'une classe de fonctions est *invariante* lorsqu'elles sont invariantes pour toute transformation continue et biunivoque effectuée sur la variable ou l'ensemble des variables. Nous appellerons *type* l'ensemble des fonctions que l'on peut déduire d'une fonction donnée par de telles transformations.

Nous étudierons des fonctions $f(x)$ d'une variable réelle x; $x-0$ et $x+0$ seront considérés comme deux nombres distincts ($x-0<x+0$); nous désignerons par $\Phi(h)$ une fonction paire de h, s'annulant avec h, croissant d'une manière continue avec $|h|$, et augmentant indéfiniment; par $\varphi(y)$ la fonction inverse de $\Phi(h)$, c'est-à-dire la racine positive de $y=\Phi(h)$ (y étant >0); par

$$W[f(x);\, a,\, b,\, l]=W(a,\, b,\, l)$$

la borne supérieure de

$$S=\sum_{k=1}^{n}\Phi[f(x_k)-f(x_{k-1})] \qquad (a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b),$$

sous la condition restrictive que, pour chaque k, ou bien l'on ait $x_k-x_{k-1}=0$, ou bien l'oscillation Osc. $(x_{k-1},\, x_k)$ de $f(x)$ dans $(x_{k-1},\, x_k)$, soit $\leqq l$. C'est une fonction non décroissante de l. Pour $l\geqq$ Osc. $(a,\, b)$ elle a une valeur constante $\overline{V}(a,\, b)$ qui est la Φ-*variation totale* de L. C. Young. Pour $l=0$, elle a une limite $V(a,\, b)$, que nous appellerons la Φ-*variation intégrale;* cette variation a été considérée dans des cas particuliers par A. Denjoy.

Quand on dit qu'une fonction est *à Φ-variation bornée* dans (a, b), il est indifférent de considérer $V(a, b)$ ou $\overline{V}(a, b)$; ces deux expressions sont infinies en même temps, et la condition nécessaire et suffisante pour qu'elles le soient est qu'il existe dans (a, b) au moins un *point singulier*, c'est-à-dire un point x tel que

$$V[\operatorname{Max}(x-\varepsilon, a), \quad \operatorname{Min}(x+\varepsilon, b)] = \infty$$

pour tout $\varepsilon > 0$; un tel point peut être singulier à gauche, à droite, ou des deux côtés.

$V(a, b)$ est une *fonction complètement additive de l'intervalle* (a, b); il en résulte en particulier que

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} &V(a, x+0) - V(a, x-0) \\ &\quad = V(x-0, x+0) = \Phi[f(x+0) - f(x-0)]. \end{aligned}$$

Au contraire, pour $l > 0$, on a seulement la propriété de *convexité*

$$W(a, b, l) \geqq W(a, x, l) + W(x, b, l) \qquad (a < x < b),$$

et par suite, pour $x > a$, $Dx > 0$;

$$\text{(2)} \quad DW(a, x, l) \geqq W(x, x+Dx, l) = \Phi[f(x+Dx) - f(x)],$$

formule qui s'applique notamment si x et $x + Dx$ représentent $x - 0$ et $x + 0$; elle s'applique naturellement à $\overline{V}(a, b)$. On a en tout point

$$\left.\begin{aligned} \lim W(a, x+\varepsilon, l) &= W(a, x+0, l) \\ \lim W(a, x-\varepsilon, l) &= W(a, x-0, l) \end{aligned}\right. \qquad (\varepsilon > 0, \ \varepsilon \to 0).$$

Théorème 1. — *La plus petite classe invariante contenant toutes les fonctions $f(x)$ vérifiant la condition de Lipschitz*

$$\text{(3)} \qquad \Phi[Df(x)] \leqq Dx$$

est la classe des fonctions continues à Φ-variations bornées.

La démonstration est immédiate; si $f(x)$ est à Φ-variation bornée, $\xi = \overline{V}(a, x)$ est une fonction croissante de x, sauf dans les intervalles où $f(x)$ est constant, et, d'après (2), $f(x)$, considéré comme fonction de ξ, vérifie la condition de Lipschitz. La réciproque est évidente.

En supposant maintenant que $\Phi(h)$ vérifie la condition restrictive

$$\text{(4)} \qquad \Phi(h+k) \geqq \Phi(h) + \Phi(k) \qquad (hk > 0),$$

et introduisant des transformations discontinues, on a :

Théorème 2. — *Pour que $f(x)$ puisse être mis sous la forme $f_1[g(x)]$,*

$\xi = g(x)$ étant une fonction monotone et telle que

$$|g(b) - g(a)| \leqq m,$$

et $f_1(\xi)$ étant une fonction définie pour tout ξ compris entre $g(a)$ et $g(b)$, et vérifiant la condition de Lipschitz

$$\Phi[\mathrm{D}f_1(\xi)] \leqq \mathrm{D}\xi,$$

il faut et il suffit que $\overline{\mathrm{V}}(a, b) \leqq m$.

Ce théorème se démontre comme le précédent; mais, après avoir défini ξ par $\xi = g(x) = \overline{\mathrm{V}}(a, x)$, il faut observer que $f(x)$ n'est une fonction de ξ bien définie dans tout l'intervalle $[g(a), g(b)]$ que si l'on peut interpoler dans les intervalles $[g(x-0), g(x+0)]$. Cette interpolation est sûrement possible, sans que la condition de Lipschitz cesse d'être vérifiée, si (4) est vérifié, et dans ce cas seulement. Le théorème **2** a été indiqué par L. C. Young sous une forme légèrement différente qui n'implique pas l'interpolation entre $g(x-0)$ et $g(x+0)$, de sorte que la condition (4) n'intervient pas dans ce théorème de L. C. Young (qui comprend naturellement notre théorème **1**).

Intégrales de Stieltjes. — Soient u et v deux fonctions de x, $u(x \pm 0)$ et $v(x \pm 0)$ étant bien définis dans (a, b). Posons

$$\mathrm{S}_r = \sum_1^n u(\xi_i)[v(x_i) - v(x_{i-1})],$$

$$\mathrm{S}_g = \sum_1^n \frac{u(x_{i-1}) + u(x_i)}{2}[v(x_i) - v(x_{i-1})]$$

$$[a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,\ x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i,\ x_i - x_{i-1} \leqq m].$$

Si l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_a^b u\,dx$$

peut être définie comme limite de S_r, cette limite existant sous la seule condition $\lim m = 0$, nous dirons que $u\,dv$ est *intégrable* R (Riemann); si I peut être défini comme limite de S_g, nous dirons que $u\,dv$ est *intégrable* G (géométriquement; cela revient, si u et v sont continus, à considérer l'aire qui correspond à I comme limite de celle obtenue en remplaçant la courbe lieu du point u, v par une ligne brisée inscrite).

Il peut arriver que $u\,dv$ soit intégrable G sans être intégrable R; en effet, $u\,du$ est toujours intégrable G et peut n'être pas intégrable R). (*Cf.* A. Denjoy, *C. R. Acad. Sc.*, t. **196**, p. 838).

Théorème fondamental de L. C. Young. — *Si* $\Phi(h)$ *et* $\Psi(h)$ *sont tels que leurs fonctions inverses* $\varphi(y)$ *et* $\psi(y)$ *vérifient la condition*

$$(4) \qquad \int_1^\infty \varphi\left(\frac{1}{t}\right)\psi\left(\frac{1}{t}\right)dt < \infty,$$

pour que $u\,dv$ *soit intégrable* R, *il suffit que* u *et* v *soient respectivement à* Φ*-variation bornée et à* Ψ*-variation bornée.*

Cette condition n'est évidemment pas nécessaire; on peut en effet facilement former deux fonctions d'un même type, u et u', et une fonction v, telles que $u\,dv$ soit intégrable R, et que $u'\,dv$ ne soit même pas intégrable G. L'intégrabilité dépend donc, non seulement des propriétés intrinsèques de u et de celles de v, mais de la manière dont les valeurs de x réalisant les maxima et minima de u sont placées par rapport à celles qui réalisent les maxima ou minima de v. Pour écarter ce dernier élément, il suffit de poser le problème sous la forme suivante : deux fonctions u et v étant dites *associables* (R ou G) si $u\,dv$ est intégrable (R ou G), *définir par des caractères intrinsèques la classe des fonctions* v *associables à toutes les fonctions* u *d'une classe invariante donnée.*

Quoique je ne puisse rien affirmer, M. Bouligand m'ayant encouragé à vous communiquer dans leur état actuel mes idées sur ce sujet, j'ajoute que, dans cet ordre d'idées (c'est-à-dire si l'on ne fait intervenir que les propriétés intrinsèques des fonctions u et v considérées séparément), je crois que le théorème de L. C. Young est le meilleur possible. On pourrait alors énoncer les théorèmes suivants :

a. Pour que v *soit asssociable* (R *ou* G) *dans* (a, b) *à toutes les fonctions à* Φ*-variations bornées, il faut et il suffit qu'il existe une fonction* $\Psi(h)$ *dont la fonction inverse vérifie* (5) *et telle que* v *soit à* Ψ*-variation bornée dans* (a, b).

b. Pour que v *soit associable* (R *ou* G) *dans tout intervalle* (a', b') *intérieur à* $(a+0, b-0)$ *à toutes les fonctions du même type que* u, *il faut et il suffit qu'il existe deux fonctions* $\Phi(h)$ *et* $\Psi(h)$, *dont les fonctions inverses vérifient* (5), *et telles que* u *et* v *soient respectivement à* Φ*-variation bornée et à* Ψ*-variation bornée dans tout intervalle* (a', b') *intérieur à* $(a+0, b-0)$.

Peut-être aussi peut-on obtenir des énoncés un peu différents en liant $\Phi(h)$ et $\Psi(h)$ par la relation $\varphi(y)\psi(y)=y$. Alors, pour que u soit associable dans (a, b) à toutes les fonctions v à Ψ-variations bornées, il serait nécessaire et suffisant que, l tendant vers zéro, $W(a, b, l)$ tende assez vite vers zéro; la condition précise serait peut-être

$$\int_0^1 W(a, b, l)\frac{dl}{l} < \infty.$$

Si un tel énoncé est exact, il est préférable à l'énoncé *a* en ce sens qu'il est directement applicable, et ne se contente pas de ramener le problème à un autre.

On remarque que, si les énoncés *a* et *b* sont exacts sous la forme même que nous avons indiquée, cela implique que la distinction entre les deux modes d'intégrabilité que nous considérons disparaisse lorsqu'il s'agit de savoir si v est associable à toutes les fonctions d'une certaine classe invariante.

Ces recherches ont été entreprises dans le but de comparer le champ d'application de la notion classique d'intégrale avec celui de l'intégrale stochastique que j'ai introduite dans une Note récente (*C. R. Acad. Sc.*, 16 octobre 1939). A ce point de vue, je ne puis que donner comme probable le résultat suivant : si $\varphi(y)\psi(y)=y$, si pour n'importe quel intervalle intérieur à (a, b), u est à Φ-variation intégrale bornée et non nulle, et v à Ψ-variation intégrale bornée et non nulle, le cas général est celui où $u\,dv$ n'est pas intégrable au sens classique, mais est stochastiquement intégrable. L'expression *cas général* devrait être comprise dans le sens du calcul des probabilités : on introduirait le hasard dans la définition d'une fonction $\xi(x)$ continue et croissante; $u(x)=u_0[\xi(x)]$ est alors une fonction du même type qu'une fonction donnée $u_0(x)$ et choisie au hasard dans ce type; les propriétés énoncées auraient alors une probabilité unité; du moins en serait-il ainsi sous certaines conditions restrictives imposées à la loi de probabilité dont dépend le choix de la relation entre x et ξ.