ANDRÉ ROUSSEL

Sur la détermination des fonctions par leur accroissement infinitésimal

Bulletin de la S. M. F., tome 70 (1942), p. 1-30

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1942__70__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SUR LA DÉTERMINATION DES FONCTIONS PAR LEUR ACCROISSEMENT INFINITÉSIMAL;

PAR M. ANDRÉ ROUSSEL.

Introduction. — Dans un travail précédent, j'ai signalé que l'accroissement d'une fonction continue f pouvait, en tolérant une erreur d'un certain type infinitésimal, être représenté par une fonction $g(x, h)$ possédant certaines propriétés fondamentales simples : c'est ainsi par exemple que l'accroissement de toute fonction continue f peut s'écrire

$$\Delta f = g(x, h) + \varepsilon h^n,$$

g étant une fonction holomorphe en x et h^{-1}. Une telle fonction $g(x, h)$ constitue en quelque sorte une *différentielle généralisée* pour la fonction f, et la possibilité d'obtenir des énoncés simples concernant de telles expressions nous semble à elle seule une raison justifiant leur étude (c'est-à-dire l'étude de l'approximation locale des fonctions). Ce point de vue, prolongement du calcul différentiel, amène inévitablement à aborder le problème inverse : *étant donnée une fonction $g(x, h)$, nulle avec h, existe-t-il une ou plusieurs fonctions de x dont l'accroissement soit égal à $g(x, h)$, avec éventuellement une erreur que nous représenterons par $\varepsilon\omega(h)$, où ω désigne une fonction de h décroissante et nulle avec h?* Pour que la question présente de l'intérêt, il faut naturellement que $\varepsilon\omega(h)$ tende vers zéro avec une rapidité suffisante quand h tend vers zéro. Il est évident que le problème de l'intégration au sens élémentaire revient à prendre

$$g(x, h) = f(x)h \qquad \text{et} \qquad \omega(h) = h.$$

La question que nous venons de poser est très vaste et très importante. Nous l'aborderons dans ce premier travail en donnant un théorème général concernant la possibilité pour g de représenter un accroissement de fonction à εh près. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'une condition de « quasi-additivité » soit satisfaite. Nous nous placerons surtout à ce point de vue dans ce Mémoire et nous indiquerons quelques conséquences de ce théorème fondamental, en particulier concernant la génération de fonctions sans dérivées. Nous esquisserons pour terminer une autre méthode pour traiter le même problème en se plaçant à un point de vue quelque peu différent.

1. Théorème fondamental.

Théorème. — Pour qu'une fonction *donnée* $g(x, h)$, nulle avec h, continue par rapport à l'ensemble des variables x et h quand x reste compris dans un intervalle (a, b) et h dans un intervalle $(-\lambda, +\lambda)$, représente l'accroissement à εh près d'une fonction $f(x)$, il faut et il suffit qu'à tout $\alpha > 0$ on puisse faire correspondre un $\eta > 0$ tel que, si $h_1, h_2, \ldots, h_n$ désignent un nombre *quelconque* de valeurs de h satisfaisant aux conditions

$$|h_i| < \eta \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad |h_1 + h_2 + \ldots + h_n| < \eta,$$

on ait

$$(1) \quad \begin{aligned} &|g(x, h_1) + g(x + h_1, h_2) + \ldots + g(x + h_1 + h_2 + h_{n-1}, h_n) \\ &\quad - g(x, h_1 + h_2 + \ldots + h_n)| \leqq \alpha[|h_1| + |h_2| + \ldots + |h_n|], \end{aligned}$$

pourvu que les valeurs des variables pour lesquelles on prend g restent dans le domaine où cette dernière fonction est définie.

La fonction f est alors définie à une constante additive près..

Plus simplement, les conditions ci-dessus seront satisfaites et il *existera donc une fonction f telle que*

$$f(x + h) - f(x) = g(x, h) + \varepsilon h,$$

si, quels que soient x et h dans le domaine où g est défini, on a, pour tout entier n,

$$(2) \qquad \left| g(x, h) - \sum_{i=1}^{i=n-1} g\left(x + i\frac{h}{n}, \frac{h}{n}\right) \right| < \varepsilon' h,$$

ε' désignant une quantité positive tendant uniformément vers zéro avec h.

La condition précédente, suffisante, est aussi nécessaire : elle correspond au cas où, dans le premier énoncé, on prend

$$h_i = \frac{h}{n}.$$

Il est facile, tout d'abord, de montrer que la condition (1), et par conséquent la condition (2), est nécessaire. Nous aurons, en effet, si g représente à εh près l'accroissement d'une fonction f,

$$(3) \qquad \begin{aligned} &f(x + h_1 + \ldots + h_i) - f(x + h_1 + \ldots + h_{i-1}) \\ &\quad = g(x + h_1 + \ldots + h_{i-1})h_i + \varepsilon_i h_i. \end{aligned}$$

$$(4) \qquad \begin{aligned} &f(x + h_1 + \ldots + h_n) - f(x) \\ &\quad = g(x + h_1 + \ldots + h_n) + \varepsilon(h_1 + \ldots + h_n). \end{aligned}$$

Ajoutons membre à membre les n relations (3), puis de la relation obtenue retranchons membre à membre la relation (4), nous en déduirons une inégalité du type (1), compte tenu du fait que nous supposons dans

$$(\mathrm{E}) \qquad f(x + h) - f(x) = g(x, h) + \varepsilon h$$

le terme ε tendre uniformément vers zéro.

Nous allons maintenant établir que la condition de l'énoncé, que nous pouvons prendre sous la forme (2), en apparence la plus restrictive, est bien suffisante. Montrons d'abord que s'il existe une fonction f satisfaisant à (E), elle est unique à une constante additive près. Supposons en effet qu'il existe deux fonctions f_1 et f_2 qui satisfont à

$$\begin{aligned} &(\mathrm{E}_1) \qquad f_1(x + h) - f_1(x) = g(x, h) + \varepsilon_1 h \\ &(\mathrm{E}_2) \qquad f_2(x + h) - f_2(x) = g(x, h) + \varepsilon_2 h \end{aligned} \qquad (a \leqq x \leqq b).$$

Nous pouvons supposer, en outre, en ajoutant à chacune des deux fonctions f_1 et f_2 une constante convenable, que l'on a, par exemple, $f_1(a) = f_2(a)$. Posons

$$\varphi(x) = f_2(x) - f_1(x);$$

d'après (E_1) et (E_2), nous avons

$$(5) \qquad \varphi(x+h) - \varphi(x) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)h = \varepsilon' h,$$

ε' tendant uniformément vers zéro avec h.

Soit X une valeur quelconque de la variable x dans (a, b). Divisons l'intervalle (a, X) en n intervalles partiels (x_i, x_{i+1}). Nous aurons évidemment

$$(6) \qquad \varphi(X) - \varphi(a) = \sum_{i=0}^{i=n-1} [\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)].$$

Or, d'après (5), nous pouvons écrire

$$\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i) = \varepsilon'_i(x_{i+1} - x_i),$$

et l'on tire de (6)

$$|\varphi(X) - \varphi(a)| \leqq \sum_{i=0}^{n-1} |\varepsilon'_i| (x_{i+1} - x_i) \leqq \beta \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = \beta(X - a),$$

en désignant par β le plus grand des $|\varepsilon'_i|$. Or, nous pouvons, en vertu de la convergence uniforme vers zéro de ε', prendre nos intervalles (x_i, x_{i+1}) assez petits pour que β soit inférieure à un nombre positif quelconque $\frac{\alpha}{X - a}$ donné à l'avance. On aura donc, en remarquant que $\varphi(a)$ est nul,

$$|\varphi(X)| < \alpha,$$

d'où, α étant un nombre positif arbitraire,

$$\varphi(X) = 0,$$

quel que soit X dans (a, b). On a bien, comme nous l'avons annoncé,

$$f_1(x) = f_2(x).$$

Pour construire une fonction (nécessairement continue) satisfaisant à (E), nous procéderons de la façon suivante : divisons (a, b) en n intervalles partiels *égaux*

$$(a, x_1), \quad \ldots, \quad (x_{i-1}, x_i), \quad \ldots, \quad (x_{n-1}, b).$$

Soit $f_n(x)$ la fonction continue ainsi définie :

$$(7) \quad \begin{cases} f_n(a) = 0, & \\ f_n(x) = g(a, x - a) & a \leqq x \leqq x_1, \\ f_n(x) = g(a, x_1 - a) + g(x_1, x - x_1) & x_1 \leqq x \leqq x_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots, \\ f_n(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=p-1} g(x_{i-1}, x_i - x_{i-1}) + g(x_p, x - x_p) & x_p \leqq x \leqq x_{p+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots, \\ f_n(b) = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} g(x_{i-1}, x_i - x_{i-1}). & \end{cases}$$

A chaque entier n est associée une fonction f_n ; nous obtenons ainsi une suite de fonctions

$$(8) \qquad f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x), \quad \ldots.$$

Je dis que les fonctions de la suite (8) *sont également continues.* Pour établir ce point, cherchons une limite supérieure de

$$|\Delta f_n| = |f_n(x + h) - f_n(x)|.$$

Posons

$$(9) \qquad \omega(h) = \max_{\substack{a \leqq x \leqq b \\ |k| \leqq h \leqq \lambda}} |g(x, k + \delta) - g(x, \delta)|.$$

Quand x varie dans (a, b), k de $-h$ à $+h$ et δ de $-\lambda$ à $+\lambda$. $\omega(h)$ est une fonction continue de h, décroissante quand h décroît, nulle pour h nul. Soit (x_{i-1}, x_i) l'intervalle de la décomposition de (a, b) correspondant à f_n auquel x appartient. Supposons, pour fixer les idées, l'accroissement h positif. Si

$$h < x_i - x,$$

on a évidemment, d'après (8) et (9),

$$|\Delta f_n| \leqq \omega(h).$$

Dans le cas contraire, désignons par (x_{j-1}, x_j) celui des intervalles de décomposition qui contient la valeur $x+h$

$$x_{j-1} \leqq x+h \leqq x_j \qquad (j > i).$$

Nous aurons

$$\begin{aligned}\Delta f_n &= f_n(x_i) - f_n(x) \\ &+ \sum_{p=i}^{p=j-2} \{f_n(x_{p+1}) - f_n(x_p)\} + f_n(x+h) - f_n(x_{j-1}),\end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire, d'après (8),

$$(10) \quad \begin{aligned}\Delta f_n &= g(x_{i-1}, x_i - x_{i-1}) - g(x_i, x - x_{i-1}) \\ &+ \sum_{p=i}^{p=j-2} g(x_p, x_{p+1} - x_p) + g(x_{j-1}, x+h-x_{j-1}).\end{aligned}$$

Mais nous pouvons écrire, en vertu de la condition (2) satisfaite par hypothèse,

$$(11) \quad \sum_{p=i}^{p=j-2} g(x_p, x_{p+1} - x_p) = g(x_i, x_j - x_i) + \varepsilon(x_j - x_i),$$

ε désignant un nombre variable tendant vers zéro uniformément avec

$$x_j - x_i.$$

Or

$$(12) \qquad x_j - x_i < h; \qquad x_i - x < h.$$

Tenant compte de (9), (10), (11) et (12), on peut écrire

$$(13) \qquad |\Delta f_n| \leqq \omega(h) + \omega(2h) + \varepsilon h + \omega(h),$$

ε étant un nombre variable, indépendant de la fonction f_n considérée, et tendant uniformément vers zéro avec h. L'inégalité (13), vraie dans tous les cas, prouve l'égale continuité des fonctions de la suite (8).

Les fonctions f_n sont en valeur absolue bornées dans leur ensemble. En effet, puisque $f_n(a) = 0$, on a, d'après (13),

$$|f_n(x)| = |f_n(x) - f_n(a)| \leqq \omega_1(x-a) \leqq \omega_1(h-a),$$

en posant

$$\omega_1(h) = 2\omega(h) + \omega(2h) + Ah,$$

A désignant une limite supérieure de $|\varepsilon|$. Il en résulte donc, d'après un théorème bien connu d'Ascoli, que les fonctions $f_n(x)$ ont au moins une « fonction d'accumulation $f(x)$ continue », et que l'on peut extraire de la suite (8) une nouvelle suite

$$(14) \qquad \overline{f_1}(x), \ \overline{f_2}(x), \ \ldots, \ \overline{f_n}(x), \ \ldots$$

convergeant uniformément vers $f(x)$. Il résultera d'ailleurs de remarques ultérieures que $f(x)$ est unique et que l'extraction de la suite (14) est inutile.

Nous allons montrer que la fonction $f(x)$ ainsi définie admet $g(x, h)$ pour accroissement infinitésimal à εh près. Reportons-nous, en effet, à l'expression (10) de Δf_n : compte tenu de (11), nous pouvons écrire

$$(15) \quad \begin{aligned} \Delta\overline{f_n} = {} & g(x_{i-1}, x_i - x_{i-1}) - g(x_{i-1}, x - x_{i-1}) \\ & + g(x_i, x_j - x_i) + g(x_{j-1}, x + h - x_{j-1}) + \varepsilon(x_j - x_i), \end{aligned}$$

x et h étant fixés, quand n tend vers l'infini, $\Delta\overline{f_n}$ tend vers Δf; d'autre part

$$x_i - x_{i-1}, \quad x - x_{i-1} \quad \text{et} \quad x + h - x_{j-1}$$

tendent simultanément vers zéro tandis que $x_j - x_i$ tend vers h et x_i vers x. En passant à la limite dans (15), on aura

$$\Delta f = g(x, h) + \varepsilon_1 h.$$

Nous venons donc de démontrer l'existence (et l'unicité, d'après la remarque faite au début) d'une fonction f admettant $g(x, h)$ pour accroissement infinitésimal à εh près, en supposant seulement la condition (2) de l'énoncé satisfaite. L'existence de f, jointe au fait que la condition (1) de l'énoncé est nécessaire et entraîne donc comme conséquence que $g(x, h)$ satisfait aussi à (1), donc que (2) entraîne (1).

Cela posé, nous allons montrer que f peut être définie comme limite de suites de fonctions plus générales que la suite (14). Considérons une suite de décompositions de (a, b) en intervalles partiels, la loi de décomposition étant astreinte seulement à la condition suivante : le nombre des intervalles augmente indéfiniment, chacun d'eux tendant vers zéro. Soit

$$(a,\ x_1),\quad \ldots,\quad (x_{i-1},\ x_i),\quad \ldots,\quad (x_{n-1},\ b)$$

l'une de ces décompositions en n intervalles. Associons-lui une fonction $\varphi_n(x)$ définie par les équations (7), où les x désignent maintenant les extrémités des nouveaux intervalles. La fonction $g(x,\ h)$ satisfaisant, comme nous l'avc is établi, aux conditions (1), on démontre que les fonctions de la nouvelle suite

$$(16) \qquad \varphi_1(x),\quad \ldots,\quad \varphi_n(x),\quad \ldots$$

sont également continues et, en module, bornées dans leur ensemble; la démonstration est calquée sur celle donnée précédemment pour les fonctions de la suite (8). Il en résulte de même l'existence d'une fonction d'accumulation qui admet $g(x,\ h)$ pour accroissement infinitésimal, s'annule pour $x = a$ et qui se confond donc avec $f(x)$. On voit, en outre, que les fonctions des suites (8) ou des suites plus générales (16) convergent uniformément vers $f(x)$. S'il n'en était pas ainsi, en effet, on pourrait extraire de (16) une nouvelle suite infinie

$$(17) \qquad \overline{\varphi_1}(x),\quad \ldots,\quad \overline{\varphi_n}(x),\quad \ldots$$

qui ne convergerait pas vers $f(x)$, mais qui convergerait vers une autre fonction $f_1(x)$, puisque les éléments de (17) sont des fonctions également continues et bornées dans leur ensemble. On aurait d'ailleurs $f_1(a) = 0$. Les raisonnements déjà faits s'appliqueraient encore ici, et f_1 admettrait g pour accroissement et se confondrait avec f, contrairement à notre dernière hypothèse. Par conséquent, il n'existe pas de suite telle que (17), et les fonctions φ convergent uniformément vers f. Soit alors X une valeur quelconque de la variable x; on a

$$f(\mathrm{X}) = \lim \varphi_n(\mathrm{X}),$$

ou encore, en désignant $(x_{p-1},\ x_p)$ l'intervalle de la décomposition de $(a,\ b)$ associée à $\varphi_n(x)$ qui contient X

$$f(\mathrm{X}) = \lim \left\{ \left(\sum_{i=1}^{i=p} g(x_{i-1},\ x_i - x_{i-1}) \right) + g(x_{p-1},\ \mathrm{X} - x_{p-1}) \right\}.$$

L'accolade du second membre admet une limite qui est indépendante de la loi de décomposition de (a, b) en intervalles partiels, pourvu que le nombre de ces derniers augmente indéfiniment, chacun d'eux tendant vers zéro. On peut, en particulier, diviser l'intervalle (a, X) en intervalles partiels soumis à la seule condition précédente, et l'on voit que la fonction f qui admet l'accroissement infinitésimal donné g sera défini par un processus analogue à celui de l'intégration classique d'une différentielle

$$\psi(x)\,dx.$$

Nous pouvons alors, pour représenter l'opération qui permet de passer de $g(x, h)$ à la fonction f, employer le symbole classique de l'intégration, et poser

$$f(x) = \int_a^x g(t, dt)$$

(f est alors celle des fonctions cherchées qui s'annule pour $x = a$); ou encore

$$f(x) = \int g(x, dx) + \mathrm{C}.$$

Avant d'aller plus loin, il y a lieu de faire des remarques importantes.

1° On peut se restreindre, ce qu'il y a lieu souvent de faire, à considérer des accroissements h de la variable x de signe donné. Les conditions (1) ou (2) de l'énoncé, supposées vraies, seulement dans ce cas, entraînent encore la même conclusion, comme le montre immédiatement notre raisonnement. La relation

$$\Delta f = g(x, h) + \varepsilon h$$

peut alors n'être vraie que pour les accroissements h ayant le signe considéré.

2° Supposons plus généralement que $g(x, h)$ satisfasse à une condition de la forme

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} g\left(x + i\frac{h}{n}, \frac{h}{n}\right) - g(x, h) \right| < \varepsilon\omega(h), \tag{18}$$

$\omega(h)$ désignant une fonction continue décroissante quand h décroît, nulle avec h, et ε une quantité tendant uniformément vers zéro avec cette variable. On démontre encore l'existence d'une fonction f admettant la fonction donnée $g(x, h)$ comme accroissement infinitésimal, l'erreur commise étant de la forme

$$\varepsilon\omega(h),$$

c'est-à-dire que l'on a une relation de la forme

$$f(x+h) - f(x) = g(x, h) + \varepsilon'\omega(h). \tag{19}$$

Le raisonnement est le même que ci-dessus : la condition (18) assure l'égale continuité des fonctions $f_n(x)$ définies par des relations du type (7), et une fonction d'accumulation des f_n est la fonction f figurant au premier membre de (19). Mais ici cette fonction peut ne pas être unique ; supposons en effet que le quotient

$$\frac{\omega(h)}{h} \tag{20}$$

tende vers l'infini quand h tend vers zéro. Posons

$$F(x) = f(x) + u(x),$$

où u désigne une fonction satisfaisant à une condition de Lipschitz d'ordre un. On a

$$\Delta F = g(x, h) + \left[\varepsilon + \frac{\Delta u}{\omega(h)}\right]\omega(h).$$

Puisque

$$|\Delta u| < M|h|,$$

le crochet du second membre, en vertu de l'hypothèse faite sur le rapport (20), tend aussi vers zéro avec h. Par contre, on montrerait facilement, en suivant la marche du raisonnement général qui a été fait, que si $\omega(h)$ est une fonction de h tendant vers zéro au moins aussi rapidement que h, il existe une fonction f et une seule dont $g(x, h)$ représente l'accroissement infinitésimal à $\varepsilon\omega(h)$ près ; il en est ainsi, par exemple, si $\omega(h) = h^n$ (n entier positif), ou encore

$$\omega(h) = e^{-\left|\frac{1}{h}\right|}.$$

Si $\omega(h)$ tend vers zéro moins vite que h, le cas le plus simple et le plus intéressant est celui où

$$\omega(h) = \max|g(x, k)|; \qquad |k| \leqq h \qquad (a \leqq x \leqq b);$$

car, en général, $g(x, h)$ sera de l'ordre de grandeur de $\omega(h)$ et le terme complémentaire $\varepsilon\omega(h)$ sera en général négligeable par rapport à $g(x, h)$.

3° Le théorème reste vrai quand on suppose dans les hypothèses les conditions (1), vraies seulement pour certaines valeurs particulières de x et de h. Considérons, comme ci-dessus, une suite S_n de décompositions de (a, b) en intervalles partiels telle que tous tendent vers zéro quand leur nombre n augmente indéfiniment. Il serait facile de voir encore en reprenant nos raisonnements que l'on peut pour assurer la validité du théorème, se borner à prendre pour accroissement h les valeurs de la forme $x_p - x_q$, x_p et x_q désignant deux points de subdivision quelconque d'une même S_n, les valeurs de x étant prises en ces points.

Application. — Prenons pour $g(x, h)$ une expression de la forme

$$(21) \qquad g(x, h) = \sum \{A_p(x)[\cos p(x+h) - \cos px] \\ + B_p(x)[\sin p(x+h) - \sin px]\}.$$

On suppose bien entendu la convergence quels que soient x et X de la série de Fourier

$$\sum_1^\infty (A_p \cos pX + B_p \sin pX);$$

pour simplifier l'écriture, nous supposons que dans l'expression de g tous les coefficients B sont nuls.

Formons l'expression

$$\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} g\left(x + i\frac{h}{n}, \frac{h}{n}\right) - g(x, h).$$

Nous pouvons écrire

$$(23) \qquad \Delta = \sum_{p=1}^{\infty} \delta_p,$$

en posant

$$
\begin{aligned}
(24)\ \delta_p = & \left[A_p\left(x+\frac{h}{n}\right) - A_p(x)\right]\left[\cos p\left(x+\frac{2h}{n}\right) - \cos p\left(x+\frac{h}{n}\right)\right], \\
& + \left[A_p\left(x+\frac{2h}{n}\right) - A_p(x)\right]\left[\cos p\left(x+\frac{3h}{n}\right) - \cos p\left(x+\frac{2h}{n}\right)\right], \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
& + \left[A_p\left(x+\frac{n-1}{n}h\right) - A_p(x)\right]\left[\cos p(x+h) - \cos p\left(x+\frac{n-1}{n}h\right)\right].
\end{aligned}
$$

Supposons maintenant que les fonctions A admettent chacune une dérivée première continue dans l'intervalle considéré. Nous avons évidemment

$$(25) \qquad |\delta_p| < \sum_{i=1}^{p-1} pi\frac{|h|^2}{n^2} M_p = \frac{n-1}{n} p M_p h^2 < p M_p h^2,$$

en désignant par M_p le maximum de $|A'_p|$ dans (a, b). Si donc nous supposons que la série

$$\sigma = \sum_{p=1}^{\infty} p M_p$$

est convergente, nous avons, d'après (23) et (25),

$$|\Delta| < \sigma h^2,$$

et $g(x, h)$ est l'accroissement infinitésimal d'une fonction. En résumé, s'il existe deux séries positives convergentes de termes généraux respectivement représentés par α_p et β_p, telles que

$$(26) \qquad |A'_p| < \frac{\alpha_p}{p}, \qquad |B'_p| < \frac{\beta_p}{p},$$

l'expression (21) est l'accroissement infinitésimal (à εh près) d'une fonction $f(x)$, que nous pouvons représenter symboliquement par

$$f(x) = \int g(x, dx).$$

En langage géométrique, en chaque point de la courbe C

$$y = f(x),$$

il existe une courbe C′

$$Y = y + \sum A_m \cos mX + B_m \sin mX$$

qui lui est tangente en (x, y), en entendant par là que l'erreur commise en substituant C′ à C dans le voisinage du point (x, y) est infiniment petite par rapport à la différence $X - x$.

Cela posé, nous pouvons tirer d'autres conclusions de l'étude de δ_p. *Supposons qu'à partir d'un certain rang toutes les fonctions* A_p, B_p *soient monotones*, croissantes par exemple. L'application du lemme d'Abel à δ_p montre immédiatement que l'on a

$$(27) \qquad -2\left[A_p\left(x + \frac{n-1}{n}h\right) - A_p(x)\right] < \delta_p < 2\left[A_p\left(x + \frac{n-1}{n}h\right) - A_p(x)\right].$$

(Nous supposons encore ici tous les B nuls, pour simplifier l'écriture). Donc, d'après (23),

$$(28) \quad -2\sum\left\{A_p(x+h) - A_p(x)\right\} < \Delta < 2\sum\left\{A_p(x+h) - A_p(x)\right\},$$

en supposant la série

$$\sum A_p(x)$$

convergente dans (a, b). Si cette série est uniformément convergente, sa somme est une fonction continue $u(x)$ manifestement monotone, et nous aurons d'après (28)

$$(29) \qquad \Delta < 2\,|\,u(x+h) - u(x)\,|.$$

Si en particulier la série des dérivées

$$\sum A'_p(x)$$

est uniformément convergente dans (a, b), la fonction u admet elle-même *partout* une dérivée continue (autrement elle admet presque partout une dérivée), et l'on a

$$|u(x+h)-u(x)| < \mathrm{M}\,|h|,$$

M étant un nombre fixe; d'où, d'après (29),

$$|\Delta| < 2\mathrm{M}\,|h|.$$

Dans ces conditions *l'expression* (21) *pour* $g(x, h)$ *représente un accroissement de fonctions à* $2\mathrm{M}h$ *près.*

Il est évident qu'on pourrait généraliser les résultats précédents et considérer plus généralement des expressions de la forme

$$g(x, h) = \sum \mathrm{A}_n(x)[\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x)].$$

Nous allons donner un exemple intéressant de considérations de ce genre. Posons

$$(30) \qquad g(x, h) = \sum_{n=0}^{+\infty} b^n(x) \left\{ \cos[\pi a^n (x+h)] - \cos(\pi a^n x) \right\},$$

où a désigne un entier positif impair, b une fonction de x, monotone dans un certain intervalle et telle que

$$0 < b < 1, \qquad ab > 1 + \frac{3\pi}{2}.$$

Si nous formons pour la fonction g définie par (30) l'expression (21) de Δ, on voit immédiatement que le raisonnement précédent peut être repris et que l'on a

$$|\Delta| < |u(x+h) - u(x)|,$$

en posant ici

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n(x) = \frac{b(x)}{1-b(x)}.$$

Si nous supposons que b admet une dérivée continue, on voit que

$$|\overline{\Delta}| < \mathrm{M}\,|h|,$$

et *l'expression* (30) *est l'accroissement infinitésimal à* $\mathrm{M}h$ près d'une fonction $f(x)$, et même d'une infinité de fonctions. [Il en serait de même si l'on pouvait diviser l'intervalle où varie x en un nombre fini d'intervalles partiels tels que dans chacun b reste monotone tout en satisfaisant aux deux conditions (31)]. Or, les conditions (31) entraînent que le rapport

$$\frac{g(x, h)}{h}$$

n'a, pour aucune valeur de x, une limite quand h tend vers zéro, car la fonction de Weierstrass

$$\sum b^n \cos \pi a^n \mathrm{X}$$

n'a, en vertu de (31), de dérivée pour aucune valeur de X.

En posant

$$\omega(x, h) = \max |g(x, k)|, \qquad |k| \leqq |h|,$$

le rapport

$$\frac{\omega(x, h)}{|h|}$$

augmente indéfiniment quand h tend vers zéro, car

$$\frac{\omega(x, h)}{|h|} \geqq \left|\frac{g(x, h)}{h}\right|,$$

et il résulte des propriétés de la fonction considérée que le second membre de cette inégalité peut prendre, pour h tendant vers zéro par valeurs convenables, des valeurs arbitrairement grandes [1]. On aura donc

$$\mathrm{M}h = \mathrm{M}\frac{h}{\omega(x, h)}\omega(x, h) = \varepsilon\,\omega(x, h).$$

On aura ainsi

$$\Delta f = \sum b^n \Delta \cos(\pi a^n x) + \lambda h,$$

avec

$$|\lambda| < \mathrm{M},$$

ce qui montre que la fonction f elle aussi n'admet de dérivée pour aucune valeur de h.

---

[1] La fonction $\omega(x, h)$ étant monotone (décroissante avec h).

En langage géométrique on peut dire que la fonction

$$y = f(x)$$

admet, en chacun de ses points, une fonction de Weierstrass tangente en ce sens généralisé que nous avons déjà eu l'occasion de rencontrer : l'erreur commise en chaque *point est infiniment petite par rapport au module de continuité en ce point*. La théorie que nous venons d'exposer permet donc, à partir des fonctions de Weierstrass, d'engendrer une infinité d'autres fonctions sans dérivées, et nous offre un exemple intéressant de cette généralisation de la notion de tangence. Le fait que les fonctions considérées ne sont pas entièrement déterminées par la donnée de leur accroissement infinitésimal, comme nous l'avons déjà signalé à la fin du paragraphe précédent, ne diminue pas l'intérêt de cette théorie. Elle consiste à classer les fonctions d'après l'ordre de grandeur de leur « module de continuité » ω (c'est-à-dire du maximum de Δf pour un accroissement $|k| \leqq |h|$), et une fonction f_1 jouera par rapport à une fonction f_2 un rôle analogue à celui d'une constante si

$$\frac{\omega_1(h)}{\omega_2(h)}$$

tend vers zéro avec h.

2. **Transformation du théorème fondamental.** — Soit $g(x, h)$ une fonction continue nulle avec h dont nous nous proposons de chercher si elle peut être considérée comme l'accroissement infinitésimal, à εh près, de l'accroissement d'une fonction. Nous supposons que la fonction g admet des dérivées partielles des deux premiers ordres continues, sauf peut-être quand h est nul. On peut toujours théoriquement faire cette hypothèse; dans un mémoire antérieur, nous avons en effet démontré l'existence d'une fonction g entière en x et h^{-1} représentant l'accroissement d'une fonction donnée f avec une erreur d'un ordre infinitésimal arbitraire donné à l'avance.

Soit alors un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires Ou et Ov. Prenons sur Ou les points d'abscisses x et $x + h$. Nous supposerons, pour fixer les idées, h de signe déterminé, positif par exemple. Nous désignerons par $L(n, x, h)$

la ligne brisée dont les sommets successifs sont les points du plan (u, v) de coordonnées

$$\left(x, \frac{h}{n}\right), \qquad \left(x + \frac{h}{n}, \frac{h}{n}\right), \qquad \ldots, \qquad \left(x + \frac{n-1}{n} h, \frac{h}{n}\right),$$

et nous considérerons le contour fermé, que nous désignerons par $\Gamma(n, x, h)$, constitué par les lignes suivantes :

1° la ligne $L(n, x, h)$;

2° la portion de la droite

$$u + v = x + h,$$

comprise entre les points d'ordonnées $\frac{h}{n}$ et h;

3° la portion de parallèle à Ov comprise entre les points de coordonnées (x, h) et $\left(x, \frac{h}{n}\right)$.

Nous aurons aussi à envisager le contour fermé $\Lambda(n, x, h)$ qui sera constitué à son tour par les lignes suivantes :

1° la ligne $L(n, x, h)$;

2° la portion de la droite

$$u + v = x + h$$

comprise entre les points d'ordonnées $\frac{h}{n}$ et $x + h$ (ce dernier point est situé sur Ov);

3° la portion de l'axe des v comprise entre les points d'ordonnées $x + h$ et x;

4° la portion de la droite

$$u + v = 0$$

comprise entre les points d'abscisses 0 et x;

5° enfin le segment de droite parallèle à l'axe des v qui joint les points d'ordonnées zéro et $\frac{h}{n}$.

On voit alors immédiatement que l'on a

$$(32) \quad \sum_{i=0}^{n-1} g\left(x + i\frac{h}{n}, \frac{h}{n}\right) - g(x, h) = \int_\Gamma \frac{\partial f}{\partial v}(du + dv)$$

et

$$(33) \quad \sum_{i=0}^{n-} g\left(x + i\frac{h}{n}, \frac{h}{n}\right) - g(x, h) = g(o, x+h) - g(o; x) + \int_\Lambda \frac{\partial f}{\partial v}(du + dv),$$

les contours Γ et Λ étant décrits dans le sens direct. En effet les intégrales curvilignes qui figurent aux seconds membres de ces relations sont nulles le long de toute parallèle à la droite

$$u + v = o,$$

et d'autre part l'intégrale $\int_0^k g'_v(u, v)\, dv$ a un sens; elle est d'ailleurs égale à $g(u, k) - g(u, o)$, c'est-à-dire à $g(u, k)$, car nous continuerons toujours, bien entendu, à supposer $g(u, o) = o$.

Nous désignerons maintenant respectivement par (s_n) et (S_n) les domaines limités par les contours Γ et Λ. Il est naturel de songer à transformer les intégrales curvilignes en des intégrales doubles étendues à (s_n), (S_n).

Nous supposerons que l'on déplace légèrement la ligne L en lui imprimant une translation parallèle à l'axe Ov et dirigée vers le haut qui l'amène en L′ de façon à éviter les difficultés pouvant provenir des discontinuités, pour h nul, des dérivées de g. Ce déplacement sera pris assez petit pour que les formules (32) et (33) restent vraies, avec une erreur de la forme εh, ce qui est toujours possible. Cette hypothèse étant faite, nous conserverons les formules précédentes et nous leur appliquerons le théorème de Riemann, ce qui donne immédiatement

$$(34) \quad \sum_{i=0}^{n-1} g\left(x + i\frac{h}{n}, \frac{h}{n}\right) - g(x, h) = \iint_{(s_n)} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) du\, dv,$$

$$(35) \quad \sum_{i=0}^{n-1} g\left(x + i\frac{h}{n}, \frac{h}{n}\right) = g(o, x+h) - g(o, x) + \iint_{(S_n)} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) du\, dv.$$

Il résulte du théorème donné au paragraphe 1 *que si l'on a*

$$(36)\qquad \left|\iint_{(s_n)}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)du\,dv\right|<\varepsilon h,$$

ε *désignant un nombre variable tendant uniformément vers zéro avec* h, *la fonction* $g(x, h)$ *est l'accroissement à* εh *près d'une fonction* $f(x)$. On a d'ailleurs

$$(37)\quad f(x+h)-f(x)=g(o,x+h)-g(o,x)+\lim\iint_{(S_n)}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial v^2}{\partial^2 g}\right)du\,dv,$$

ou encore

$$(37)'\qquad f(x)=C+g(o,x)+\lim_{n=\infty}\iint_{(S'_n)}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)du\,dv,$$

comme on le voit en faisant $h=x$ et $x=o$ dans la formule précédente, S'_n désignant alors le domaine qui est délimité par le contour $\Lambda(n, o, x)$ et C une constante arbitraire dont la valeur donnera $f(o)$.

Il résulte plus généralement de la condition (36) que *la possibilité pour une expression donnée* $g(x, h)$ *de représenter l'accroissement d'une fonction avec une erreur d'un certain ordre infinitésimal est étroitement liée à l'étude de l'intégrale*

$$(38)\qquad I=\iint\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)du\,dv$$

étendue à des domaines fermés dont la frontière en tout ou partie se rapproche de l'axe $v=o$. Nous nous proposons de revenir sur ce point fondamental (1).

(1) C'est ainsi que la condition

$$\left|\iint\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)du\,dv\right|<\varepsilon\,[\,|h|+|k|\,],$$

où l'intégrale double est étendue au parallélogramme déterminé par les droites

$$u+v=x+h+k,\qquad u+v=x+h$$

et

$$u=x+h,\qquad u=x$$

entraine les conclusions précédentes.

Or on conçoit facilement la possibilité de définir directement une fonction φ

Avant d'aller plus loin, remarquons que si la fonction g est définie par la série *uniformément convergente* dans un certain domaine

$$(39) \qquad g(x, h) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(x, h),$$

les g_m désignant des fonctions continues *ainsi que leurs dérivées*, la relation (34) serait remplacée par

$$\sum_{i=0}^{n-1} g\left(x + i\frac{h}{n}, \frac{h}{n}\right) - g(x, h) = \sum_{m=1}^{\infty} \iint_{(s_n)} \left(\frac{\partial^2 g_m}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial^2 g_m}{\partial v^2}\right) du\, dv.$$

Les relations (36) et (37) seraient remplacées par

$$(40) \qquad \left| \sum_{u=1}^{\infty} \iint_{(s_n)} \left(\frac{\partial^2 g_m}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial^2 g_m}{\partial v^2}\right) du\, dv \right| < \varepsilon h,$$

$$(41) \qquad f(x+h) - f(x) = g(0, x+h) - g(0, x)$$

$$+ \lim_{n=\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \iint_{S_n} \left(\frac{\partial^2 g_m}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial^2 g_m}{\partial v^2}\right) du\, dv,$$

les fonctions continues g_m étant supposées nulles avec h.

Remarques. — 1° On peut rendre intuitive l'intervention de l'intégrale I définie par la relation (38), grâce aux considérations

---

telle que

$$\left| \iint \varphi(u, v)\, du\, dv \right| < \varepsilon [\,|h| + |k|\,]$$

et, en posant

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = \varphi(u, v),$$

on pourra prendre

$$g = \int\int_{\Delta} \varphi(u, v)\, du\, dv,$$

Δ étant le domaine compris entre les quatre droites

$$u = 0, \qquad u = x,$$
$$u + v = x, \qquad u + v = x + h$$

et g représentera alors un accroissement infinitésimal à εh près.

suivantes. Soit $f(x)$ une fonction admettant des dérivées continues des deux premiers ordres. Si l'on pose

$$g(x, h) = f(x+h) - f(x),$$

on a

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\, \partial h} - \frac{\partial^2 g}{\partial h^2} = 0. \tag{42}$$

Réciproquement, si une fonction $g(x, h)$ satisfait à l'équation aux dérivées partielles (42) et s'annule avec h, on a

$$g(x, h) = f(x+h) - f(x).$$

On conçoit donc que la possibilité pour une fonction g de représenter un accroissement infinitésimal est liée à une limitation convenable de l'expression

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\, \partial h} - \frac{\partial^2 g}{\partial h^2}$$

au moins « en moyenne », c'est-à-dire à une limitation de I.

2° *Supposons que $g(x, h)$ admette des dérivées partielles continues des deux premiers ordres.* Il est clair que

$$\iint_{(s_n)} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right) du\, dv$$

tend vers

$$\iint_{(s)} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right) du\, dv,$$

quand n tend vers l'infini, s désignant le domaine

$$v \geqq 0, \qquad (u-x)(u+v-x-h) \leqq 0.$$

La condition (36) est toujours satisfaite; son second membre est, en effet, de la forme Mh^2 (M, nombre positif fixe), donc $g(x, h)$ est l'accroissement à εh d'une fonction qui a évidemment pour dérivée $g'_h(x, 0)$.

En passant alors à la limite dans (34), on peut écrire

$$f(x+h) - f(x) = g(x, h) + \iint_{(s)} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right) du\, \partial v. \tag{43}$$

Application. — Supposons que $g(x, h)$ ait la forme

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_p(x)\,\{\sin p(x+h) - \sin px\},$$

la condition (40) devient alors

$$(40)' \qquad \left|\sum_{p=1}^{\infty} \iint_{(S_n)} a'_p(u) \cos p(u+v)\, du\, dv\right| < \varepsilon h.$$

Supposons :

1° Que toutes les dérivées $a'_p(u)$ soient positives à partir d'un certain rang;

2° Qu'à partir d'un certain rang le produit $pa'_p(u)$ décroisse quand p tend vers l'infini.

Le lemme d'Abel appliqué aux sommes

$$\sum_{p=1}^{p=m} pa'_p(u) \cos p(u+v)$$

montre qu'elles sont comprises, quel que soit m, entre deux nombres fixes. Il en résulte donc que l'inégalité (40)′ est satisfaite avec un second membre de la forme Mh^2, où M désigne un nombre fixe.

En résumé, si $g(x, h)$ a la forme indiquée, cette expression est celle d'un accroissement infinitésimal à εh près, pourvu que les deux conditions énoncées ci-dessus soient satisfaites.

Plus généralement si l'on a

$$g(x, h) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(x, h),$$

et si la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 g_m}{\partial x\, \partial h} - \frac{\partial^2 g_m}{\partial h^2}\right)$$

est convergente ou indéterminée, on voit facilement que la condition (40)′ est satisfaite, et g représente alors un accroissement de fonction à εh près.

De même (37) devient

$$(44)\quad f(x+h)-f(x)=g(o,\ x+h)-g(o,\ x)+\iint_S\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)du\,dv,$$

S désignant le domaine compris entre les axes Ou et Ov et les deux parallèles $u+v=x$ et $u+v=x+h$.

3. *Application à une formule classique.* — Les considérations précédentes donnent une démonstration immédiate du résultat classique de Taylor dont elles constituent l'explication la plus profonde. Soit $f(x)$ une fonction ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $n+1$ inclus. Posons

$$g(x,\ h)=\frac{h}{1}f'(x)+\ldots+\frac{h^n}{n\,!}f^{(n)}(x);$$

$g(x,\ h)$ est un accroissement infinitésimal de la fonction f, puisque

$$g'_h(x,\ o)=f'(x).$$

Nous avons donc, d'après (43),

$$(45)\quad f(x+h)-f(x)=\frac{h}{1}f'(x)+\ldots+\frac{h^n}{n\,!}f^{(n)}(x)$$
$$+\iint_{(s)}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)du\,dv.$$

Or ici

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}=\frac{v^{n-1}}{(n-1)\,!}f^{(n+1)}(u).$$

L'expression du reste R_n est donc ici

$$(46)\quad R_n=\frac{1}{(n-1)\,!}\iint_{(s)}v^{n-1}f^{(n+1)}(u)\,du\,dv.$$

Une intégration simple donne immédiatement

$$R_n=\frac{1}{n\,!}\int_x^{x+h}f^{(n+1)}(u)(x+h-u)^n\,du.$$

4. *Un théorème général d'accroissement fini.* — Nous pouvons déduire de la formule (37) une conséquence intéressante.

Nous avons en effet

$$\iint_{(S_n)} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right) du\, dv = S_n \left[\frac{\partial^2 g}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right]_{\substack{u=\xi_n \\ v=\eta_n}},$$

ξ_n, η_n désignant les coordonnées d'un point intérieur à S_n. En désignant, pour abréger, par $\psi(\xi_n, \eta_n)$ le second membre de la formule précédente, la formule (37) montre que

$$\psi(\xi_n, \eta_n)$$

tend vers une limite et que l'on a

$$f(x+h) - f(x) = g(o, x+h) - g(o, x) + S \lim_{n=\infty} \psi(\xi_n, \eta_n),$$

x et h ayant des valeurs déterminées d'ailleurs quelconques. Or, quand n tend vers l'infini, les points (ξ_n, η_n) ont au moins un point d'accumulation (ξ, η) (en général, il y a évidemment une infinité de tels points répartis sur une courbe), et nous pouvons extraire de la suite (ξ_n, η_n) une nouvelle suite (ξ'_n, η'_n) tendant vers le point (ξ, η). Il est clair que l'on a

$$\lim \psi(\xi_n, \eta_n) = \lim \psi(\xi'_n, \eta'_n),$$
$$f(x+h) - f(x) = g(o, x+h) - g(o, x) + S \lim \psi(\xi'_n, \eta'_n).$$

D'autre part, le point (ξ, η) est situé à l'intérieur du domaine S compris entre les axes de coordonnées et les droites

$$u + v = x, \qquad u + v = x + h;$$

d'où le théorème suivant :

Si $g(x, h)$ représente l'accroissement à εh près d'une fonction $f(x)$, on a

$$f(x+h) - f(x) = g(o, x+h) - g(o, x) + S \lim \psi(\xi', \eta')$$

avec

$$\psi(u, v) = \frac{\partial^2 g}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2},$$

quand le point (ξ', η') tend par valeurs appropriées vers un point (ξ, η) appartenant au domaine S. *Il y a lieu de noter que si $\eta \neq o$* (cas général), *on a manifestement*

$$\lim \psi(\xi', \eta') = \psi(\xi, \eta).$$

5. *Changement de point de vue.* — Jusqu'ici nous avons tiré un certain nombre de conséquences du théorème fondamental (§ 1) relatif à la possibilité pour une expression $g(x, h)$ de représenter l'accroissement d'une fonction (avec éventuellement une erreur εh), moyennant une condition de quasi-additivité par rapport à h. On peut cependant étudier le même problème en se plaçant à d'autres points de vue. Nous en indiquerons un et nous l'étudierons brièvement pour terminer le présent travail. Nous partirons de la proposition suivante :

Pour que la fonction continue $g(x, h)$, nulle avec h, soit égale exactement à l'accroissement d'une fonction de x, il faut et il suffit que l'intégrale curviligne

$$\mathcal{J} = \int_\Gamma \{ g(x, h+\lambda) - g(x, h) \} (dx + dh)$$

soit nulle le long de tout contour fermé du plan (x, h), quelle que soit la valeur du paramètre λ :

1° La condition est nécessaire. En effet, si

$$g(x, h) = f(x+h) - f(x),$$

il vient

$$g(x, h+\lambda) - g(x, h) = f(x+h+\lambda) - f(x+h) = \varphi(x+h),$$

et l'intégrale curviligne

$$\int \varphi(x+h)\, d(x+h) = \int \varphi(u)\, du$$

est évidemment nulle le long de tout contour fermé.

2° La condition est suffisante. Supposons $\mathcal{J} \equiv 0$. On a évidemment

$$g(x, h+\lambda) - g(x, h) = \varphi(x+h, \lambda).$$

Faisons $h = 0$; il vient, en tenant compte du fait que $g(x, 0) = 0$,

$$g(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda),$$

d'où

$$g(x, h+\lambda) - g(x, h) = g(x+h, \lambda).$$

En remplaçant dans l'identité précédente x par zéro, h par x et λ par h, il vient donc

$$g(0, x+h) - g(0, x) = g(x, h);$$

et, en posant $f(x) = g(0, x)$, on a bien

$$\Delta f = g(x, h),$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque. — On peut encore donner au théorème précédent la forme équivalente : *pour que la fonction $g(x, h)$ nulle avec h soit l'accroissement d'une fonction, il faut et il suffit que pour tout contour fermé Γ l'intégrale curviligne*

$$\mathcal{J}_1 = \int_\Gamma g(x, h)(dx + dh)$$

demeure invariante quand on fait subir à Γ une translation quelconque parallèle à l'axe des h,

Si nous supposons que g admet des dérivées des deux premiers ordres *continues*, $\mathcal{J}_1$ peut s'écrire

$$\mathcal{J}_1 = \iint_D \int_h^{h+\lambda} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \, \partial t} - \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \right) dx \, dh \, dt,$$

D désignant le domaine intérieur à Γ. On en tire

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \, \partial h} - \frac{\partial^2 g}{\partial h^2} = 0.$$

Nous retrouvons ici, mais à un autre point de vue, l'intervention d'éléments rencontrés aux paragraphes précédents. Dans le cas général, on conçoit que la possibilité pour une fonction g donnée de représenter, avec une erreur d'un certain type infinitésimal, l'accroissement d'une fonction de x, est étroitement liée au comportement de l'intégrale $\mathcal{J}_1$. En particulier, on cherchera à compléter g en lui ajoutant une fonction d'un ordre infinitésimal convenable de façon que l'intégrale $\mathcal{J}_1$ correspondante possède la propriété d'invariance indiquée ci-dessus.

Remarque. — Supposons que l'on ait

$$g(x, h) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(x, h),$$

la série figurant au second membre étant uniformément convergente (dans un certain domaine au moins), les g_m étant toutes nulles avec h et possédant des dérivées partielles continues des deux premiers ordres. En posant

$$\mathcal{J}_m = \int_\Gamma \{ g_m(x, h + \lambda) - g_m(x, h) \} (dx + dh),$$

on a

$$\mathcal{J} = \Sigma \mathcal{J}_m,$$

ou encore

$$\mathcal{J} = \sum_{m=1}^{\infty} \iint_D \int_h^{h+\lambda} \left(\frac{\partial^2 g_m}{\partial x \, \partial t} - \frac{\partial^2 g_m}{\partial t^2} \right) dx \, dh \, dt.$$

Chacune des intégrales de la série précédeute peut être interprétée comme une intégrale triple

$$\iiint_V \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \, \partial t} - \frac{\partial^2 g_m}{\partial t^2} \right) dx \, dh \, dt,$$

étendue au volume V de l'espace (x, h, t) compris entre les plans $t = h$, $t = h + \lambda$, et la surface latérale du cylindre droit de base D. En coupant V en tranches par des plans $h = \text{const.}$, l'intégrale triple précédente pourra donc s'écrire

$$\int_{h_1}^{h_2} dh \iint_{D(h)} \left(\frac{\partial^2 g_m}{\partial x \, dt} - \frac{\partial^2 g_m}{\partial t^2} \right) dx \, dt,$$

$D(h)$ désignant le domaine plan découpé dans V par le plan de côté h, et h_1, h_2 les valeurs extrêmes entre lesquelles h varie sur D. Si donc la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} \iint_D \left(\frac{\partial^2 g_m}{\partial x \, \partial t} - \frac{\partial^2 g_m}{\partial t^2} \right) dx \, dt$$

converge uniformément quel que soit D, on aura

$$\mathcal{J} = \int_{h_1}^{h_2} dh \sum \iint_D \left(\frac{\partial^2 g_m}{\partial x \, \partial t} - \frac{\partial^2 g_m}{\partial t^2} \right) dx \, dt,$$

et la fonction

$$g = \sum_{m=1}^{\infty} g_m$$

représentera un accroissement infinitésimal si

$$(47) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \iint_{D} \left(\frac{\partial^2 g_m}{\partial x \, \partial h} - \frac{\partial^2 g_m}{\partial h^2} \right) dx \, dh = 0,$$

quel que soit le domaine D du plan (x, h). Plus particulièrement, il en sera ainsi si la série

$$(48) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 g_m}{\partial x \, \partial h} - \frac{\partial^2 g_m}{\partial h^2} \right)$$

converge uniformément et a pour somme zéro.

On peut tirer de là une remarque intéressante. Remarquons d'abord que si Δ désigne le domaine d'un plan (u, v) compris entre Ov et sa parallèle d'abscisse x, d'une part, entre les droites

$$u + v = x, \qquad u + v = x + h,$$

d'autre part, on a, en désignant par L son contour,

$$(49) \qquad \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial^2 g_m}{\partial u \, \partial v} - \frac{\partial^2 g_m}{\partial v^2} \right) du \, dv$$
$$= \int_{L} \frac{\partial g}{\partial v} (du + dv) = g(x, h) - [g(0, x + h) - g(0, x)].$$

Plaçons-nous dans le cas exprimé par (47) [c'est ce qui a lieu si (48) converge uniformément vers zéro] et prenons pour domaine d'intégration le domaine Δ. D'après (47) et (49), il vient donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{ g_n(0, x + h) - g_n(0, x) - g_n(x, h) \} = 0,$$

ou

$$(50) \qquad g(x, h) = \sum_{n=1}^{\infty} \{ g_n(0, x + h) - g_n(0, x) \}.$$

Exemple. — Si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n\,!} h^n$$

converge uniformément en h et x (dans certains intervalles), on a l'identité

$$(51) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n\,!} h^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!} [(x+h)^n - x^n].$$

Il résulte de (51) que la série

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!} x^n$$

a pour dérivée $f'(x)$. La valeur commune des deux membres de (51) est bien celle de l'accroissement $f(x+h) - f(x)$.

Supposons enfin que si l'on a encore

$$(52) \qquad g = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(x, h),$$

la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 g_m}{\partial x\, \partial h} - \frac{\partial^2 g_m}{\partial h^2} \right),$$

soit uniformément convergente dans un certain domaine. Soit $\psi(x, h)$ sa somme. Posons [1]

$$g_0(x, h) = -\iint_\Delta \psi(u, v)\, du\, dv.$$

On aura

$$(53) \qquad \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 g_m}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial^2 g_m}{\partial v^2} \right) = 0.$$

---

[1] Δ désignant le domaine, déjà rencontré, compris entre les droites $u = 0$, $u = x$, et $u + v = x$, $u + v = x + h$. On voit alors facilement que

$$\frac{\partial^2 g_0}{\partial x\, \partial h} - \frac{\partial^2 g_0}{\partial h^2} = -\psi(x, h).$$

En intégrant terme à terme (53) dans Δ, on aura ici

$$\sum_{m=0}^{+\infty} g_m(x, h) = \sum_{m=0}^{+\infty} \{ g_m(0, x+h) - g_m(0, x) \}. \tag{54}$$

Or $g_0(x, h)$ est une fonction de h, nulle avec cette variable, et qui admet pour $h = 0$ des dérivées continues. En posant

$$\lim_{h=0} \frac{g_0(x, h)}{h} = -l'(x),$$

on aura évidemment

$$g_0(x, h) = -[l(x+h) - l(x)] + \varepsilon h.$$

D'après (54) on peut donc écrire

$$\begin{aligned} g(x, h) &= \sum_{m=1}^{+\infty} g_m(x, h) \\ &= l(x+h) - l(x) + \sum_{m=0}^{+\infty} \{ g_m(0, x+h) - g_m(0, x) \} + \varepsilon h. \end{aligned}$$

Donc, dans ces conditions, $g(x, h)$ représente bien à εh près l'accroissement d'une fonction

$$f(x) = l(x) + \sum_{m=0}^{+\infty} g_m(0, x).$$

Nous avions déjà obtenu le théorème précédent en le rattachant au théorème fondamental du paragraphe 1. Il est à noter que les hypothèses faites sur la série (52) n'entraînent pas nécessairement l'existence de dérivées pour g_m (lorsque $h = 0$), et par suite pour f.

(Manuscrit reçu le 17 décembre 1941.)