BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES DUFRESNOY

Remarques sur les fonctions méromorphes dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé

Bulletin de la S. M. F., tome 70 (1942), p. 40-45

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1942__70__40_0>

REMARQUES SUR LES FONCTIONS MÉROMORPHES DANS LE VOISINAGE D'UN POINT SINGULIER ESSENTIEL ISOLÉ;

Par M. Jacques Dufresnoy.

Nous nous proposons de montrer que l'on peut étendre aux fonctions méromorphes dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé certaines propriétés qu'Ahlfors a obtenues (¹) pour les fonctions méromorphes dans tout le plan fini. Nous serons conduit à utiliser des résultats que nous avons établis antérieurement (²) en reprenant la théorie d'Ahlfors.

Voici une proposition qui généralise le *grand théorème de Picard.*

Soient, sur la sphère complexe, $q \geqq 3$ *domaines* D_i *simplement connexes et disjoints (dont certains peuvent se réduire à des points) à chacun desquels est associé un entier* μ_i *supérieur à* 1 *et tel que* $\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right) > 2$. *Soient, d'autre part, une fonction* $w = f(z)$ *méromorphe dans le domaine* $r_0 < |z| < \infty$ *et* Σ *la surface de Riemann décrite, sur la sphère complexe, par les valeurs* w *de cette fonction. Alors, si* $z = \infty$ *est un point singulier pour* $f(z)$, *la surface* Σ *présente, sur l'un des domaines* D_i *au moins, une infinité de disques ayant moins de* μ_i *feuillets.*

Donnons plusieurs démonstrations, intéressantes à des titres divers.

1. Supposons qu'il existe une fonction $w = f(z)$ méromorphe dans le domaine $r_0 < |z| < \infty$ et dont la surface de Riemann Σ ne satisfasse pas à la propriété énoncée. Faisons le changement de

(¹) *Acta mathematica*, 65, 1935, p. 157-194.

(²) *Ann. Éc. Norm. sup.*, 58, 1941, p. 179-259. Ce Mémoire sera désigné dans la suite par [1].

variable $z = e^t$. La fonction $f(z)$ est transformée en une fonction $F(t)$ méromorphe dans le domaine $\mathcal{R}t > \log r_0$ et dont la surface de Riemann ne satisfait pas non plus à cette même propriété. Une substitution homographique effectuée sur la variable t ramènerait au cas d'une fonction $\Phi(\tau)$ méromorphe dans le cercle $|\tau| < 1$. Pour cette dernière, on sait [3] que l'on a

$$\frac{|\Phi'(0)|}{1+|\Phi(0)|^2} < B,$$

où B dépend seulement des domaines D_i et de la quantité $\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)$. On en déduit aussitôt

$$(\mathcal{R}t - \log r_0)\frac{|F'(t)|}{1+|F(t)|^2} < B,$$

d'où

$$|z|\log\frac{|z|}{r_0}\,\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} < B.$$

L'aire sphérique $4\pi\, S(r_1, \infty)$ de la portion de Σ correspondant au domaine $r_1 < |z| < \infty\,(r_1 > r_0)$ est donc finie; en effet,

$$S(r_1, \infty) = \frac{1}{\pi}\iint_{\rho > r_1}\left[\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}\right]^2 \rho\, d\rho\, d\theta < 2B^2\int_{r_1}^{\infty}\frac{d\rho}{\rho\log^2\frac{\rho}{r_0}} = \frac{2B^2}{\log\frac{r_1}{r_0}}.$$

La proposition se trouve ainsi démontrée, car il résulte de $S(r_1, \infty) < \infty$ que $z = \infty$ n'est pas une singularité essentielle. Ce dernier point peut s'établir, entre autres, de la façon suivante.

Soit $L(r)$ la longueur sphérique de la courbe C_r décrite par w lorsque z décrit la circonférence $|z| = r$. On sait [4] que

$$L^2(r) \leqq 8\pi^2 r\frac{dS(r_1, r)}{dr}.$$

La fonction $S(r_1, r)$ étant bornée, il existe une suite de r_i tendant vers ∞ et telle que $L(r_i)$ tende vers 0. On peut en extraire une suite partielle, de façon que les courbes C_{r_i} soient toutes intérieures à une même petite calotte de la sphère complexe. L'aire de la portion de surface de Riemann comprise entre deux telles

---

(3) [1], Théorème I, p. 223.

(4) *Cf.*, par exemple, [1], § 19, p. 208.

courbes C_{r_i} successives tendant vers o, cette portion est, à partir d'un certain r_i, tout entière intérieure à la petite calotte. Autrement dit, les valeurs de $f(z)$, lorsque z est suffisamment grand, sont toutes intérieures à la petite calotte; il résulte alors d'un théorème de Weierstrass que $z = \infty$ n'est pas un point singulier essentiel.

2. Voici une seconde démonstration qui repose essentiellement sur la remarque suivante :

$f(z)$, méromorphe dans le domaine $r_0 < |z| < \infty$, peut toujours se mettre sous forme de la somme d'une fonction $f^\star(z)$ méromorphe dans tout le plan fini et d'une fonction $f_1(z)$ holomorphe dans $|z| > r_0$, point à l'infini compris, avec $f_1(\infty) = 0$. Pour établir cette propriété, on fera un développement de Mittag-Leffler de $f(z)$, mettant les pôles en évidence et faisant apparaître $f(z)$ sous forme de la somme d'une fonction $f_2^\star(z)$ méromorphe dans tout le plan fini et d'une fonction $f_2(z)$ holomorphe dans $r_0 < |z| < \infty$. Un développement de $f_2(z)$ en série de Laurent montre que cette fonction est, à son tour, la somme d'une fonction $f_1^\star(z)$ holomorphe dans tout le plan fini et d'une fonction $f_1(z)$ holomorphe dans $|z| > r_0$, avec $f_1(\infty) = 0$. En posant $f^\star = f_1^\star + f_2^\star$, on trouve bien

$$f(z) = f^\star(z) + f_1(z).$$

Remarquons, en passant, que cette décomposition n'est pas unique; on peut ajouter à $f^\star$ et retrancher de f_1 une fraction rationnelle arbitraire s'annulant à l'infini.

Agrandissons alors les domaines D_i en domaines $D_i^\star$ simplement connexes et disjoints, tels que $D_i^\star$ contienne D_i et tous les points qui en sont distants de moins de ε, ε étant un nombre choisi suffisamment petit pour que ceci soit possible. Le nombre ε étant fixé, il existe un nombre r_1 tel que, pour $|z| > r_1$, on ait

$$|f(z) - f^\star(z)| < \varepsilon.$$

Or, $f^\star(z)$ étant méromorphe dans tout le plan fini et présentant $z = \infty$ comme singularité essentielle, possède une infinité de disques à moins de μ_i feuillets sur l'un au moins des domaines $D_i^\star$ (5).

(5) [1], § 34, p. 229.

En supprimant au besoin un nombre fini d'entre eux, on peut toujours supposer que ces disques correspondent à des valeurs de z satisfaisant à $|z| > r_1$. Il est clair qu'à chacun de ces disques de $f^\star$ situé sur $D_i^\star$ correspond au moins un disque de f situé sur D_i et ayant moins de μ_i feuillets, ce qui achève la démonstration.

3. Une troisième méthode va nous conduire à des résultats plus précis. Considérons la portion de surface de Riemann correspondant à $r_1 < |z| < r$; elle a une aire sphérique égale à $4\pi\,S(r_1, r)$ et un contour de longueur $L(r_1) + L(r)$; soit $\bar{n}_i\,(r_1, r)$ le nombre de disques qu'elle présente sur le domaine D_i, chacun de ces disques étant compté une seule fois quelle que soit sa multiplicité. On sait (6) que l'on a

$$\sum_{i=1}^{q} \bar{n}_i(r_1, r) \geqq (q-2)\,\{\,S(r_1, r) - h[L(r_1) + L(r)]\,\} - 1$$

(en désignant par h une constante dépendant des domaines D_i), soit, en supposant r_1 fixé,

$$\sum \bar{n}_i(r) \geqq (q-2)[S(r) - h\,L(r)] - \text{const.}$$

Dans cette relation, $S(r) = S(r_1, r)$ et les $\bar{n}_i(r) = \bar{n}_i(r_1, r)$ ne sont définis qu'à une constante additive près.

D'autre part, on sait que

$$L^2(r) \leqq 8\pi^2 r \frac{d\,S(r)}{dr}.$$

---

(6) [1], § 13, p. 200. La surface considérée ici a, en effet, pour caractéristique $\rho = 0$. On peut d'ailleurs supprimer la constante 1 de l'inégalité indiquée, car, dans l'inégalité correspondante (p. 202) de notre Mémoire cité, $(\rho + 1)$ peut être remplacé par $\overset{+}{\rho}$, comme il apparaît aussitôt en reprenant la démonstration.

1° Si $\sum \bar{n}_i \geqq 1$, on a $N' \geqq 1$;

2° Si $\sum \bar{n}_i = 0$, l'ensemble des $\bar{\Sigma}$ est identique à l'ensemble des Σ' et $\sum [\rho(\Sigma') + 1] \leqq \rho + 1$ entraîne $\sum \overset{+}{\rho}(\bar{\Sigma}) = \sum \overset{+}{\rho}(\Sigma') \leqq \overset{+}{\rho}$.

Si $\varphi(x)$ est une fonction positive arbitraire telle que

$$\int^{\infty} \frac{dx}{\varphi^2(x)} < \infty,$$

on a donc

$$L^2(r) = o[\varphi(S)],$$

sauf pour des valeurs exceptionnelles de r pouvant être enfermées dans des intervalles de longueur logarithmique totale finie (7).

Il en résulte que

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{q} \bar{n}_i(r) > (q-2)\,S(r) - o[\varphi(S)],$$

sauf peut-être dans les intervalles exceptionnels considérés. Si $\varphi(x)$ est croissante, cette dernière inégalité peut d'ailleurs se mettre sous la forme équivalente suivante

$$(2) \qquad (q-2)\,S(r) < \sum \bar{n}_i(r) + o\left[\varphi\left(\sum \bar{n}_i\right)\right].$$

De l'inégalité (1) on déduit un *théorème du défaut* semblable à celui qui est relatif aux fonctions méromorphes dans tout le plan fini (8). Il faut remarquer que le défaut δ'_i et l'indice de ramification θ'_i d'un domaine D_i sont des quantités parfaitement définies, bien que les fonctions $S(r)$ et $\bar{n}_i(r)$ ne soient définies qu'à une constante additive près.

---

(7) Pour établir ce résultat, on remarque d'abord que, $\varphi(r)$ étant choisie, il existe une fonction $\varphi_1(r)$ satisfaisant encore à la condition imposée à φ et telle que $\frac{\varphi_1}{\varphi} \to 0$. On peut prendre, par exemple,

$$\frac{1}{\varphi_1^2(r)} = -\frac{d}{dr}\left[\int_r^{\infty} \frac{dt}{\varphi^2(t)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

D'autre part, $L(r) < \varphi_1(S)$, sauf pour un ensemble de valeurs de r sur lequel on a

$$\int \frac{dr}{r} \leqq 8\pi^2 \int \frac{dS}{\varphi_1^2(S)} < \infty.$$

(8) [1], § 21, p. 211.

On pourrait encore intégrer l'inégalité fondamentale et obtenir ainsi, avec les notations usuelles,

$$\sum_{i=1}^{q} \overline{N}_i(r) > (q-2)\,T(r) - O[\sqrt{S \log r}],$$

d'où

(3) $$\sum_{i=1}^{q} \overline{N}_i(r) > (q-2)\,T(r) - o[\varphi(T)],$$

ou bien encore, si φ est croissante,

(4) $$(q-2)\,T(r) < \sum \overline{N}_i(r) + o\left[\varphi\left(\sum \overline{N}_i\right)\right],$$

ces deux dernières inégalités pouvant n'être pas vérifiées pour un ensemble de r exceptionnels sur lequel

$$\int d \log \log r < \infty.$$

On peut déduire de (3) un *théorème du défaut* sous forme intégrale ([9]).

(Manuscrit reçu le 17 octobre 1942).

([9]) *Cf.* [1], § 24, p. 214.