BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN DIEUDONNÉ

Sur le socle d'un anneau et les anneaux simple infinis

Bulletin de la S. M. F., tome 70 (1942), p. 46-75
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1942__70__46_0>

SUR LE SOCLE D'UN ANNEAU ET LES ANNEAUX SIMPLES INFINIS ;

PAR M. JEAN DIEUDONNÉ.

INTRODUCTION.

L'étude des algèbres (ou systèmes hypercomplexes) ayant un rang *infini* par rapport à leur corps de base est un sujet qui n'a guère été abordé de façon générale jusqu'ici (1). Sans doute faut-il en voir la raison dans le fait que l'hypothèse connue sous le nom de *condition minimale pour les idéaux*, qui joue un rôle important dans l'étude des algèbres de rang *fini*, perd sa validité lorsqu'on passe aux algèbres de rang infini. Toutefois, quand on examine attentivement les raisonnements de la théorie classique des anneaux où la condition minimale pour les idéaux (à droite ou à gauche) est vérifiée (2), on s'aperçoit que beaucoup d'entre eux ne s'appuient pas sur cette condition elle-même, mais simplement sur le fait qu'*il existe* des idéaux *minimaux* (à droite ou à gauche); ce qui conduit à entreprendre l'étude des anneaux (et en particulier des algèbres de rang infini), où cette nouvelle hypothèse (plus faible que la condition minimale) est vérifiée. Dans l'extension à ces anneaux de la théorie classique, telle qu'elle est communément présentée, il semble à première vue s'élever quelques difficultés; mais on s'aperçoit aisément qu'elles ne sont pas essentielles, et tiennent bien plutôt à la survivance, dans l'étude des systèmes hypercomplexes, des méthodes assez artificielles à l'aide desquelles s'est longtemps développée cette théorie, à l'écart des grands courants de l'Algèbre, et qui ont subsisté (bien que dans

(1) *Voir* une bibliographie de cette question (jusqu'en 1934) dans M. DEURING, *Algebren* (*Ergeb. der Mat.*, t. IV, fasc. 1, 1935, p. 1 et 5).

(2) Les meilleurs exposés de cette théorie sont ceux de Deuring (*loc. cit.*, Chap. I et II) et de B. L. van der Waerden (*Moderne Algebra*, 2e éd., Berlin, Springer, 1940, t. II, Chap. XVI).

une plus faible mesure) jusque dans les exposés modernes suivant les idées de E. Artin et E. Noether. Une de ces survivances est l'usage quelque peu excessif des *idempotents* et des « décompositions de Peirce » où ils interviennent; en fait, on peut s'en passer à peu près complètement, et nous croyons qu'il y a quelque intérêt à le faire, car cela permet de mieux mettre en évidence les idées essentielles de la théorie, dépouillées de tout artifice technique. Entreprise dans cet esprit, et en développant les méthodes que nous avons appliquées aux algèbres de rang fini dans un travail récent ([3]), l'étude des anneaux plus généraux conduit naturellement à la notion de *socle* (gauche ou droit) d'un anneau : nous entendons par là [suivant une terminologie de M. R. Remak ([4]), qui a le premier introduit une notion analogue dans la théorie des groupes finis], la somme de *tous* les idéaux minimaux (à gauche, resp. à droite) de l'anneau considéré. L'analyse de la structure du socle d'un anneau quelconque repose sur celle des anneaux *simples* (possédant des idéaux minimaux), un anneau étant dit simple s'il ne contient aucun idéal bilatère autre que lui-même et (o); on sait que, dans le cas fini, tout anneau simple est un anneau de matrices (d'ordre fini) sur un corps non commutatif en général [second théorème de Wedderburn ([5])]; ce résultat s'étend aux anneaux simples infinis ([6]) dont il est ici question, mais pour parvenir à cette généralisation, il faut (comme toujours quand on passe du fini à l'infini) abandonner la représentation des endomorphismes d'un espace vectoriel par des matrices, et raisonner directement sur ces endomorphismes eux-mêmes ; à notre avis (et suivant en cela l'opinion de N. Bourbaki), il n'y a que des avantages, même dans le cas fini, à cette manière de faire : on se libère ainsi de l'encombrante obligation du choix d'une base dans

---

([3]) J. Dieudonné, *Sur les systèmes hypercomplexes* (*J. de Crelle*, t. 184, 1942, p. 178-192).

([4]) R. Remak, *Über minimale invariante Untergruppen in der Theorie der endlichen Gruppen* (*J. de Crelle*, t. 162, 1930, p. 1-16).

([5]) *Voir* Deuring, *loc. cit.*, p. 18, Satz 3.

([6]) Pour abréger le langage, nous dirons souvent qu'un anneau A est ***fini*** si, considéré comme A-module (à gauche ou à droite), il a une *longueur* finie (c'est-à-dire une suite de Jordan-Hölder formée d'un nombre fini d'idéaux); dans le cas contraire, nous dirons que A est ***infini***. Bien entendu, le terme « anneau fini » n'implique pas nécessairement que l'anneau ait un nombre fini d'éléments.

l'espace vectoriel considéré, et, à manier sans intermédiaire analytique les points et les sous-espaces de cet espace vectoriel, on y gagne un langage et une sorte d'intuition géométriques nullement négligeables, tant dans la recherche que dans l'exposition.

Comme il fallait s'y attendre, alors que le théorème de Wedderburn caractérise (à une isomorphie près) les anneaux simples finis par *deux* invariants [le corps des opérateurs (défini à une isomorphie près) de l'espace vectoriel dont les endomorphismes sont les éléments de l'anneau considéré, et le nombre de dimensions de cet espace], il y a, pour les anneaux simples infinis, une bien plus grande variété de structures possibles; on peut toutefois caractériser complètement les isomorphismes d'un tel anneau sur un autre; cette caractérisation, bien que sans doute connue pour les anneaux simples finis, ne se trouve explicitement nulle part, à ma connaissance.

D'autre part, la forme sous laquelle se présente notre généralisation du théorème de Wedderburn, en suggère une interprétation *topologique*, qu'on obtient en munissant l'espace vectoriel qui intervient dans l'énoncé, d'une topologie définie de la même façon que les *topologies faibles* sur les espaces vectoriels par rapport au corps des nombres réels ou des nombres complexes, dont nous avons développé l'étude dans un travail récent ([7]). En outre, on peut, à l'aide de cette topologie, définir, sur l'anneau simple lui-même cette fois, une topologie qui n'est pas sans analogie avec celles dont W. Krull a muni les groupes des extensions galoisiennes infinies d'un corps commutatif ([8]).

Il faut enfin remarquer que nos méthodes ne peuvent fournir aucun renseignement sur les anneaux ne possédant pas d'idéaux minimaux, ni *a fortiori* sur les anneaux de cette nature qui sont *simples*. Il y a effectivement de tels anneaux simples ([9]), et il serait désirable qu'on pût en aborder l'étude par des méthodes

---

([7]) J. Dieudonné, *La dualité dans les espaces vectoriels topologiques* [*Ann. Éc. Norm. sup.*, (3), t. 59, 1942, p. 107-139].

([8]) W. Krull, *Galoissche Theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen* (*Math. Ann.*, t. 100, 1928, p. 687-698).

([9]) G. Köthe, *Schiefkörper unendlichen Ranges über dem Zentrum* (*Math. Ann.*, t. 105, 1931, p. 15-39, en particulier p. 35 et suiv.).

appropriées, car ces anneaux sont sans doute plus intéressants que ceux que nous considérons ici : ils peuvent en effet posséder un *élément unité*, ce qui n'est *jamais* le cas pour un anneau simple infini ayant des idéaux minimaux.

I. — PRÉLIMINAIRES ([10]).

1. Nous supposerons connues du lecteur les notions fondamentales d'algèbre linéaire ([11]) : modules à droite ou à gauche par rapport à un anneau, sous-modules, modules quotients, représentations (ou applications linéaires), ainsi que celles de *somme* et de *somme directe* de sous-modules d'un module donné. Un module (non réduit à zéro) par rapport à un anneau A (en abrégé : un A-module) est dit *simple* s'il ne contient aucun sous-module autre que lui-même et $\{0\}$; un A-module est dit *complètement réductible* s'il est somme directe de sous-modules simples. Les propriétés fondamentales des modules complètement réductibles sont les suivantes ([12]).

THÉORÈME 1. — *Si un module* M *est somme d'une famille* $(M_\alpha)_{\alpha \in I}$ *de sous-modules simples, il est somme directe d'une sous-famille* $(M_\alpha)_{\alpha \in J}$ *de ces sous-modules* (donc M est *complètement réductible*).

THÉORÈME 2. — *Si un module complètement réductible* M *est somme directe d'une famille* $(M_\alpha)_{\alpha \in I}$ *de sous-modules simples, et si* N *est un sous-module quelconque de* M, *il existe deux parties complémentaires* J, K *de* I, *telles que* N *soit isomorphe à la somme directe* $\sum_{\alpha \in J} M_\alpha$ *et que, si* $N' = \sum_{\alpha \in K} M_\alpha$, M *soit somme directe de* N *et* N'.

([10]) Pour la terminologie et les notations, nous nous conformons aux *Éléments de Mathématique* de N. BOURBAKI (*Actual. Scient. et Ind.*, n^{os} 846, 858 et 916). En particulier, si f est une application d'un ensemble E dans un ensemble F, et M une partie de F, $\overset{-1}{f}(M)$ désigne l'image réciproque de M par f, c'est-à-dire l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) \in M$; si g est une application de F dans un ensemble G, $g \circ f$ désigne l'application composée $x \rightarrow g((f(x))$ de E dans G.

([11]) *Voir* VAN DER WAERDEN, *loc. cit.*, Chap. XV et XVI.

([12]) W. KRULL, *Zur Theorie der allgemeinen Zahlringe* (*Math. Ann.*, t. 99, 1928, p. 51-70, en particulier p. 63-66).

THÉORÈME 3. — *Si un module complètement réductible* M *est somme directe d'une première famille* $(M_\alpha)_{\alpha \in I}$ *de sous-modules simples, et somme directe d'une seconde famille* $(M'_\beta)_{\beta \in J}$ *de sous-modules simples, il existe une application biunivoque* φ *de* I *sur* J *telle que* $M'_{\varphi(\alpha)}$ *soit isomorphe à* M_α *quel que soit* $\alpha \in I$.

Ces théorèmes s'appliquent en particulier aux *espaces vectoriels*, c'est-à-dire aux modules par rapport à un *corps* K, admettant l'élément unité de K comme opérateur unité. Dans un tel espace (à gauche, par exemple) E, les sous-modules simples sont les sous-modules de la forme Kx, où x est un élément quelconque non nul de E; on en conclut, d'après le théorème 1, que E est somme directe d'une famille (Kx_α) de ces sous-modules, les x_α formant ce qu'on appelle une *base* de E; en outre, d'après le théorème 3, deux bases quelconques de E sont *équipotentes*, et pour que deux espaces vectoriels sur un même corps K soient isomorphes, il faut et il suffit qu'ils aient des bases équipotentes.

2. Dans un anneau ([13]) A, un idéal à gauche $\mathfrak{l}$ est dit *minimal* s'il est un A-module à gauche *simple*, c'est-à-dire s'il n'est pas nul et s'il n'existe aucun idéal à gauche contenu dans $\mathfrak{l}$, autre que (o) et $\mathfrak{l}$. Dans ce qui suit, lorsque nous parlerons d'*isomorphie* entre deux idéaux à gauche d'un anneau A, il s'agira toujours d'isomorphie de leurs structures de A-*module à gauche* : autrement dit, si a et a' sont deux éléments qui se correspondent dans une telle isomorphie, xa et xa' se correspondent également, quel que soit $x \in A$.

Les propriétés des idéaux à gauche minimaux dont nous nous servirons ci-dessous sont les suivantes :

Si $\mathfrak{l}$ est un idéal à gauche minimal de A, a un élément quelconque de A, $\mathfrak{l}a$ est nul ou est un idéal à gauche *isomorphe* à $\mathfrak{l}$; dans ce dernier cas, l'application $x \to xa$ de $\mathfrak{l}$ sur $\mathfrak{l}a$ est un isomorphisme. Il en résulte que, si l'on n'a pas $\mathfrak{l}^2 = (o)$, il existe $a \in \mathfrak{l}$

([13]) Les anneaux que nous considérons peuvent être munis d'*opérateurs* α ayant les propriétés $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$, et $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$ quels que soient x et y dans l'anneau. Lorsqu'on parle de sous-groupes additifs de A (et en particulier d'idéaux de A), il doit alors être sous-entendu qu'il s'agit de sous-groupes *stables* pour tous les opérateurs de A.

tel que $\mathfrak{l}a = \mathfrak{l}$, d'où $\mathfrak{l}^2 = \mathfrak{l}$ (on peut donc distinguer les idéaux à gauche minimaux en *nilpotents* et en *idempotents*). Dans ce cas, il existe $e \in \mathfrak{l}$ tel que $a = ea$, et l'on en conclut $(x - xe)a = 0$ quel que soit $x \in \mathfrak{l}$, d'où $x = xe$, et en particulier $e^2 = e$. L'existence d'un tel idempotent dans $\mathfrak{l}$ entraîne que tout endomorphisme de $\mathfrak{l}$ (considéré comme A-module) est de la forme $x \to xb$, où $b \in \mathfrak{l}$, car si φ est un tel endomorphisme, et $\varphi(e) = b$, on a, pour tout $x \in \mathfrak{l}$, $\varphi(x) = \varphi(xe) = x\varphi(e) = xb$ [14].

De la même manière, si $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{l}'$ sont deux idéaux à gauche minimaux isomorphes, et si $\mathfrak{l}$ est idempotent, on voit que tout homomorphisme de $\mathfrak{l}$ dans $\mathfrak{l}'$ (qui est nécessairement identiquement nul ou un isomorphisme sur $\mathfrak{l}'$) est de la forme $x \to xb'$, où $b' \in \mathfrak{l}'$. D'autre part, on a $\mathfrak{l}\mathfrak{l}' = (0)$ si $\mathfrak{l}$ est nilpotent, $\mathfrak{l}\mathfrak{l}' = \mathfrak{l}'$ si $\mathfrak{l}$ est idempotent, car, si φ est un isomorphisme de $\mathfrak{l}$ sur $\mathfrak{l}'$, on a $\mathfrak{l}\mathfrak{l}' = \mathfrak{l}\varphi(\mathfrak{l}) = \varphi(\mathfrak{l}^2)$, d'après la définition d'un isomorphisme.

II. — SOCLE D'UN ANNEAU.

3. Étant donné un anneau quelconque A, nous appellerons *socle gauche* de A la *somme de tous les idéaux à gauche minimaux* de A. On définit de même le socle *droit* de A; dans ce qui suit, nous parlerons surtout du socle gauche de A, que nous appellerons simplement le socle de A. S'il n'y a aucun idéal à gauche minimal dans A, le socle de A se réduit à 0; nous supposerons désormais qu'on n'est pas dans ce cas.

---

(14) On peut, pour obtenir ce résultat, se passer de l'introduction de l'idempotent e, en procédant de la manière suivante : les endomorphismes du A-module $\mathfrak{l}$ forment un *corps* K, et, si l'on désigne par δ_a l'endomorphisme $x \to xa$ de $\mathfrak{l}$, pour $a \in \mathfrak{l}$, les δ_a forment un *idéal à gauche* dans K, car si φ est un endomorphisme de $\mathfrak{l}$, on a $\varphi(xa) = x\varphi(a)$, autrement dit $\varphi \circ \delta_a = \delta_{\varphi(a)}$. L'idéal formé par les δ_a est donc nul ou égal à K, puisque K est un corps, et la première éventualité est à rejeter, puisqu'il existe $a \in \mathfrak{l}$ tel que $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}a$.

Pour montrer de même que tout homomorphisme de $\mathfrak{l}$ sur un idéal isomorphe $\mathfrak{l}'$ est de la forme $x \to xb'$, il suffit de remarquer qu'on a $\mathfrak{l}\mathfrak{l}' = \mathfrak{l}'$, donc qu'il existe $b'_0 \in \mathfrak{l}'$ tel que $\mathfrak{l}b'_0 = \mathfrak{l}'$, et que $x \to xb'_0$ est par suite un isomorphisme de $\mathfrak{l}$ sur $\mathfrak{l}'$. Soit alors φ un isomorphisme de $\mathfrak{l}$ sur $\mathfrak{l}'$, ψ l'isomorphisme réciproque. L'application $x \to \psi(xb'_0)$ est un automorphisme de $\mathfrak{l}$, donc il existe $a \in \mathfrak{l}$ tel que $xa = \psi(xb'_0)$, ou encore $xb'_0 = \varphi(xa)$; mais si l'on pose $y = xa$, il existe $c \in \mathfrak{l}$ tel que $x = yc$ (puisque $x \to xa$ est un automorphisme de $\mathfrak{l}$); d'où identiquement en $y \in \mathfrak{l}$, $\varphi(y) = y(cb'_0) = yb'$, avec $b' \in \mathfrak{l}'$.

Si $\mathfrak{l}_0$ est un idéal gauche minimal de A, nous dirons que la somme des idéaux à gauche minimaux *isomorphes à* $\mathfrak{l}_0$ est un *pied* du socle de A.

Proposition 1. — *Tout pied du socle d'un anneau* A *est un idéal bilatère de* A, *somme directe d'idéaux à gauche minimaux isomorphes de* A. *Le socle de* A *est un idéal bilatère de* A, *somme directe de ses pieds.*

Soit en effet $\mathfrak{a}$ un pied du socle de A; d'après sa définition et le théorème 1, $\mathfrak{a}$ est somme directe d'une famille $(\mathfrak{l}_\alpha)$ d'idéaux à à gauche minimaux de A, tous isomorphes; $\mathfrak{a}$ est évidemment un idéal à gauche de A; d'autre part, pour tout $x \in A$, $\mathfrak{l}_\alpha x$ est nul ou isomorphe à $\mathfrak{l}_\alpha$, donc contenu dans $\mathfrak{a}$; par suite, $\mathfrak{a}$ est idéal à droite de A. Désignons maintenant par $(\mathfrak{a}_\lambda)$ la famille des pieds distincts du socle S de A; il est clair que S est la somme des $\mathfrak{a}_\lambda$. D'autre part, si $\mathfrak{b}_\lambda$ est la somme des pieds $\mathfrak{a}_\mu$ différents de $\mathfrak{a}_\lambda$, on a $\mathfrak{a}_\lambda \cap \mathfrak{b}_\lambda = (o)$: en effet, dans le cas contraire, cette intersection serait un idéal à gauche de A, somme directe d'idéaux à gauche minimaux, d'après le théorème 2; si $\mathfrak{l}$ est un de ces idéaux minimaux, il serait (toujours d'après le th. 2) d'une part isomorphe à un idéal minimal contenu dans $\mathfrak{a}_\lambda$, d'autre part isomorphe à un idéal minimal contenu dans un $\mathfrak{a}_\mu$, différent de $\mathfrak{a}_\lambda$, ce qui est absurde. Il en résulte que S est bien la *somme directe* des $\mathfrak{a}_\lambda$.

4. La proposition 1 ramène l'étude du socle d'un anneau à celle des pieds de ce socle.

Proposition 2. — *Si* $\mathfrak{a}$ *est un pied du socle de* A, *la somme des idéaux à gauche minimaux nilpotents contenus dans* $\mathfrak{a}$ *est un idéal bilatère* $\mathfrak{b}$ *de* A, *tel que* $\mathfrak{b}\mathfrak{a} = (o)$.

En effet, il est clair que $\mathfrak{b}$ est un idéal à gauche de A; d'autre part, si $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{a}$ est un idéal minimal nilpotent, $\mathfrak{l}x$ est contenu dans $\mathfrak{a}$ pour tout $x \in A$ et est nilpotent, car $(\mathfrak{l}x)(\mathfrak{l}x) = \mathfrak{l}(x\mathfrak{l})x \subset \mathfrak{l}^2 x = (o)$; donc $\mathfrak{b}$ est bilatère. D'après le théorème 1, $\mathfrak{b}$ est somme directe d'idéaux minimaux nilpotents et isomorphes $\mathfrak{l}_\alpha$; on a donc $\mathfrak{l}_\alpha \mathfrak{l} = (o)$ quels que soient $\mathfrak{l}_\alpha$ et l'idéal minimal $\mathfrak{l}$ contenu dans $\mathfrak{a}$, ce qui entraîne $\mathfrak{b}\mathfrak{a} = (o)$.

Il peut se faire que $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, donc que $\mathfrak{a}^2 = (o)$; nous supposerons désormais qu'on n'est pas dans ce cas. Alors (th. 2), $\mathfrak{a}$ est somme directe de $\mathfrak{b}$ et d'un idéal à gauche $\mathfrak{c} \neq (o)$, somme directe d'idéaux à gauche minimaux isomorphes et *idempotents*. On notera que $\mathfrak{b}$ ne peut contenir aucun idéal minimal idempotent, puisque $\mathfrak{b}^2 = (o)$. D'autre part, $\mathfrak{b}$ est l'*annihilateur à gauche* de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{a}$; cet annihilateur est en effet un idéal à gauche dans A (puisque c'est l'intersection de $\mathfrak{a}$ et de l'annihilateur à gauche de $\mathfrak{a}$ *dans* A); il est somme directe d'idéaux à gauche minimaux (th. 2), et si $\mathfrak{l}$ est un de ces idéaux, il est nécessairement nilpotent, puisque $\mathfrak{l}\mathfrak{a} = (o)$, donc il est contenu dans $\mathfrak{b}$.

Proposition 3. — *Si* $\mathfrak{r}$ *est l'annihilateur à droite de* $\mathfrak{a}$ *dans* A, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{r} = (o)$.

En effet, $\mathfrak{a}$ étant un idéal bilatère de A, il en est de même de $\mathfrak{r}$, donc de $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{r}$; si l'on avait $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{r} \neq (o)$, il contiendrait un idéal à gauche minimal $\mathfrak{l}$ (th. 2); si $\mathfrak{l}_0$ est un idéal minimal idempotent contenu dans $\mathfrak{a}$, on aurait donc $\mathfrak{l}_0\mathfrak{l} = \mathfrak{l}$, contrairement à la définition de $\mathfrak{r}$.

Proposition 4. — *Tout idéal à gauche dans l'anneau* $\mathfrak{a}$ *est aussi un idéal à gauche dans l'anneau* A.

Montrons d'abord que si $\mathfrak{l}$ est un idéal à gauche minimal *de* A, contenu dans $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{l}$ est aussi un idéal à gauche *minimal dans l'anneau* $\mathfrak{a}$. En effet, soit $\mathfrak{m}$ un idéal à gauche *dans l'anneau* $\mathfrak{a}$, contenu dans $\mathfrak{l}$ et $\neq (o)$; on a, par hypothèse, $\mathfrak{a}\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m} \subset \mathfrak{l}$; mais $\mathfrak{a}\mathfrak{m}$ est un idéal à gauche *dans* A, et il ne peut être nul, d'après la proposition 3; comme $\mathfrak{l}$ est minimal, $\mathfrak{a}\mathfrak{m} = \mathfrak{l}$, d'où $\mathfrak{m} = \mathfrak{l}$.

Il en résulte que $\mathfrak{a}$ est identique à son socle, et que celui-ci est réduit à un seul pied; en outre, tout idéal minimal $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{a}$ est identique à un idéal minimal *de* A, car on a $\mathfrak{a}\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ et $\mathfrak{a}\mathfrak{m} \neq (o)$ d'après la proposition 3, donc $\mathfrak{a}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}$ est idéal à gauche de A. Tout idéal de $\mathfrak{a}$ étant somme directe d'idéaux minimaux (th. 2), la proposition est démontrée.

5. Proposition 5. — *Si* $\mathfrak{d}$ *est l'annihilateur à droite de* $\mathfrak{c}$ *dans* A, *on a* $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{d} = (o)$.

En effet, on a $\mathfrak{b}(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{d})\subset\mathfrak{b}\mathfrak{a}=(o)$, donc $\mathfrak{a}(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{d})=(o)$, et par suite $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{d}\subset\mathfrak{a}\cap\mathfrak{r}=(o)$.

Proposition 6. — *Tout idéal à gauche de l'anneau* $\mathfrak{r}$ *est aussi un idéal à gauche de l'anneau* A.

En effet, si $\mathfrak{g}$ est un tel idéal, il suffit, d'après la proposition 4, de faire voir que $\mathfrak{g}$ est un idéal *dans l'anneau* $\mathfrak{a}$, ce qui est immédiat puisque $\mathfrak{r}\mathfrak{g}\subset\mathfrak{g}$ par hypothèse, et $\mathfrak{b}\mathfrak{g}\subset\mathfrak{b}\mathfrak{a}=(o)$.

III. — ANNEAUX SIMPLES ET ANNEAUX QUASI-SIMPLES.

6. On dit qu'un anneau A est *simple* s'il ne ne contient aucun idéal *bilatère* autre que lui-même et (o). Un tel anneau peut ne posséder aucun idéal minimal (à gauche ou à droite); mais, s'il en possède un, il est nécessairement identique à son socle, et celui-ci ne comporte qu'un seul pied, d'après la proposition 1. En outre, comme la somme $\mathfrak{b}$ des idéaux minimaux nilpotents de A est un idéal bilatère de A, on a nécessairement $\mathfrak{b}=$ A ou $\mathfrak{b}=(o)$. Dans le premier cas, on a $A^2=(o)$; il y a identité entre sous-groupes (additifs) et idéaux de A, et pour que A soit un anneau simple, il faut et il suffit que son groupe additif soit simple. Laissant de coté ce cas sans intérêt, nous supposerons désormais que A n'est pas nilpotent : alors A est *somme directe d'idéaux à gauche minimaux*, *tous isomorphes*, et ne contient aucun idéal à gauche nilpotent [cette dernière condition étant (compte tenu des autres) équivalente à la suivante : l'annihilateur à gauche de A se réduit à zéro].

Plus généralement, lorsqu'un anneau A est somme directe d'idéaux à gauche minimaux, isomorphes deux à deux, et dont un au moins est idempotent, nous dirons qu'il est *quasi-simple à gauche* ; il est alors identique à un pied de son socle. Inversement, la proposition 4 montre qu'un pied non nilpotent du socle d'un anneau *quelconque* est un anneau quasi-simple à gauche; et la proposition 6 montre qu'un anneau quasi-simple à gauche est somme directe de son annihilateur à gauche, et d'un idéal à gauche qui est un anneau *simple*.

7. Pour étudier de façon plus approfondie la structure d'un anneau quasi-simple à gauche (et en particulier d'un anneau simple), nous nous servirons du fait que l'annihilateur à droite d'un tel anneau A est *nul*, d'après la proposition 3. Désignons alors par Γ l'anneau des *endomorphismes* de A, considéré comme A-module à gauche. A tout $x \in A$ correspond l'endomorphisme $y \to yx$ de A, que nous désignerons par δ_x; en outre, la relation $\delta_x = \delta_y$ entraîne $x = y$, car elle signifie $z(x - y) = 0$ pour tout $z \in A$. Comme on a évidemment $\delta_{xy} = \delta_y \circ \delta_x$, on voit que l'application $x \to \delta_x$ est un *isomorphisme* de l'anneau *opposé* A^0 de A dans l'anneau Γ. Nous allons examiner ce qu'est le sous-anneau B de Γ, image de A^0 par cet isomorphisme.

Nous utiliserons pour cela les propositions suivantes : 1° si A est un anneau quelconque, M un A-module à gauche *simple*, l'anneau des endomorphismes de M est un *corps* K (en général non commutatif); 2° si N est un A-module à gauche complètement réductible, somme directe d'une famille (M_α) de modules simples *isomorphes* deux à deux, l'anneau des endomorphismes de N est isomorphe à l' *anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel à droite* E sur un corps K isomorphe au corps des endomorphismes d'un quelconque des M_α [15]. Il résulte en outre de la démonstration de la seconde de ces propositions que E possède une base (e_α) par rapport à K, correspondant biunivoquement à l'ensemble des M_α, de sorte qu'aux endomorphismes de N dans M_α correspondent biunivoquement les endomorphismes de E dans $e_\alpha K$.

Appliquons ce qui précède au cas où A est un anneau *quasi simple à gauche*, et où N est identique à A, considéré comme A-module à gauche. Alors, si A est somme directe de la famille d'idéaux à gauche minimaux (I_α), l'anneau d'endomorphismes Γ est isomorphe à l'anneau des endomorphismes $\mathcal{L}(E)$ d'un espace

---

[15] Van der Waerden, *loc. cit.*, p. 153-157. La démonstration de la seconde de ces propositions n'est faite que pour un module de longueur *finie*, et les endomorphismes sont représentés par des matrices; mais il est très aisé de généraliser la démonstration au cas qui nous importe ici : les matrices finies de la démonstration de van der Waerden sont remplacées par des matrices *infinies*; le seul point à vérifier est que, dans chacune des *colonnes* d'une de ces matrices, il n'y a qu'un nombre *fini* d'éléments non nuls; ce qui se fait en remarquant que, si une représentation d'un module simple M dans un module simple M' est nulle pour un $x \neq 0$, elle est *identiquement nulle*.

vectoriel à droite E sur un corps K (isomorphe au corps des endomorphismes d'un $\mathfrak{l}_\alpha$), E possédant une base (e_α) qui correspond biunivoquement à l'ensemble des $\mathfrak{l}_\alpha$. En outre, l'opposé A^0 de A est isomorphe à un sous-anneau B′ de $\mathcal{L}(E)$.

Cherchons ce qui dans B′ correspond à un idéal à gauche minimal non nilpotent $\mathfrak{l}_\alpha$ de A : c'est un idéal à droite minimal $\mathfrak{r}_\alpha$ de B′, formé d'endomorphismes de E dans $e_\alpha K$. Or, tout endomorphisme de E dans $e_\alpha K$ est de la forme $x \to e_\alpha x'(x)$, où x' est une *forme linéaire* bien déterminée, définie dans E ; à la somme de deux endomorphismes de cette nature correspond la somme des formes linéaires correspondantes; donc à l'idéal à droite $\mathfrak{r}_\alpha$ correspond un *sous-groupe additif* E′ de l'espace *dual* E^* de E (ensemble des formes linéaires sur E). On sait que E^* est un espace vectoriel *à gauche* sur K; nous allons voir que E′ est un *sous-espace vectoriel* de E^*. En effet, pour tout endomorphisme du A-module $\mathfrak{l}_\alpha$, il existe $a \in \mathfrak{l}_\alpha$ tel que l'endomorphisme δ_a de A dans $\mathfrak{l}_\alpha$, restreint à $\mathfrak{l}_\alpha$, soit l'endomorphisme donné (n° 2); pour tout $\lambda \in K$, il existe donc un endomorphisme v_λ de E dans $e_\alpha K$, appartenant à $\mathfrak{r}_\alpha$, tel que $v_\lambda(e_\alpha) = e_\alpha\lambda$; si alors u est un endomorphisme de E dans $e_\alpha K$, appartenant à $\mathfrak{r}_\alpha$, de la forme $x \to e_\alpha x'(x)$, l'endomorphisme $v_\lambda \circ u$ appartient à $\mathfrak{r}_\alpha$, et n'est autre que $x \to e_\alpha \lambda x'(x)$; donc, si $x' \in E'$, on a $\lambda x' \in E'$ pour tout $\lambda \in K$.

Considérons maintenant un idéal à gauche $\mathfrak{l}_\beta$ distinct de $\mathfrak{l}_\alpha$; on sait qu'il existe $b \in \mathfrak{l}_\beta$ tel que $\mathfrak{l}_\beta = \mathfrak{l}_\alpha b$; il lui correspond dans B′ un endomorphisme w de E dans $e_\beta K$, et l'idéal à droite $\mathfrak{r}_\beta$ correspondant à $\mathfrak{l}_\beta$ est l'ensemble des endomorphismes $w \circ u$, où u parcourt $\mathfrak{r}_\alpha$; on peut toujours supposer (en multipliant au besoin les e_β par des constantes convenables) que $w(e_\alpha) = e_\beta$; il en résulte que $\mathfrak{r}_\beta$ est formé des endomorphismes $x \to e_\beta x'(x)$, où x' parcourt le *même* sous-espace vectoriel E′ du dual E^* de E.

8. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème fondamental suivant, qui détermine la structure d'un anneau quasi-simple à gauche quelconque.

Théorème 4. — *Soit* A *un anneau quasi-simple à gauche*, K *le corps des endomorphismes d'un quelconque des idéaux à gauche minimaux de* A. *L'anneau* A *est isomorphe à l'opposé* *de l'anneau* $\mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{E}')$ *formé des endomorphismes* u *d'un espace vectoriel à droite* E *sur le corps* K, *tels que :* 1° $u(\mathrm{E})$ *ait un nombre fini de dimensions;* 2° $\overset{-1}{u}(\mathrm{o})$ *soit l'intersection d'un nombre fini d'hyperplans* $\overset{-1}{x'_i}(\mathrm{o})$, *où les* x'_i *sont des formes linéaires appartenant à un sous-espace vectoriel* E' *du dual* E^* *de* E. *En outre, toute base de* E *a même puissance que tout ensemble d'idéaux à gauche minimaux dont* A *est somme directe.*

En premier lieu, il est immédiat que tout endomorphisme u appartenant à l'anneau B' possède bien les deux propriétés de l'énoncé; en effet, tout élément de A appartient à la somme d'un nombre fini de $\mathfrak{l}_\alpha$, donc u appartient à la somme d'un nombre fini de $\mathfrak{r}_\alpha$, autrement dit, est de la forme $x \to \sum_i e_{\alpha_i} x'_i(x)$; donc $u(\mathrm{E})$ est contenu dans le sous-espace de E ayant pour base les e_{α_i}, et $\overset{-1}{u}(\mathrm{o})$ contient l'intersection des $\overset{-1}{x'_i}(\mathrm{o})$, donc est lui-même intersection d'un nombre fini d'hyperplans $\overset{-1}{y'_j}(\mathrm{o})$, où les y'_j sont des combinaisons linéaires des x'_i [16].

Pour établir la réciproque, remarquons d'abord que, si $e \neq \mathrm{o}$ est un vecteur quelconque de E, les endomorphismes $x \to e x'(x)$, où x' appartient à E', appartiennent à B' (et forment d'ailleurs un idéal à droite minimal de cet anneau). En effet, on a $e = \sum_\alpha e_\alpha \lambda_\alpha$ (somme étendue à un nombre fini d'indices α); pour tout $x' \in \mathrm{E}'$, l'application $x \to e x'(x) = \sum_\alpha e_\alpha(\lambda_\alpha x'(x))$ appartient bien à B'.

Donnons-nous alors un endomorphisme u de E tel que $\mathrm{V} = u(\mathrm{E})$ ait un nombre fini p de dimensions; l'ensemble des formes linéaires $x' \in \mathrm{E}^*$ telles que $\overset{-1}{u}(\mathrm{o}) \subset \overset{-1}{x'}(\mathrm{o})$ forme un sous-espace

---

(16) Nous utilisons ici le résultat suivant : *si* $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ *sont* n *formes linéaires indépendantes, tout hyperplan contenant l'intersection des* $\overset{-1}{x'_i}(\mathrm{o})$ *est de la forme* $\overset{-1}{x'}(\mathrm{o})$, *où* x' *est une combinaison linéaire des* x'_i. Ce théorème se démontre aisément par récurrence sur n [*voir* le théorème 1 du Mémoire *La dualité*. etc., cité dans la note (7)].

vectoriel V' à p dimensions de E^*; si l'on suppose que $\overset{-1}{u}(o)$ est l'intersection d'un nombre fini d'hyperplans $\overset{-1}{x'_i}(o)$ tels que $x'_i \in E'$, on a $V' \subset E'$ (16).

Soit alors W un sous-espace de E supplémentaire de $\overset{-1}{u}(o)$; restreint à W, u est un isomorphisme de W sur V; soit $c_1, \ldots, c_p$ une base de W, $c'_1, c'_2, \ldots, c'_p$ la base « orthogonale » de V', c'est-à-dire la base telle que $c'_i(c_j) = 0$ si $i \neq j$ et $c'_i(c_i) = 1$. Il est immédiat que u n'est autre que l'endomorphisme $x \to \sum_{i=1}^{p} u(c_i)\, c'_i(x)$, ce qui prouve, en vertu de la remarque antérieure, que $u \in B'$, et achève la démonstration.

Si maintenant on se donne arbitrairement le corps K, l'espace vectoriel à droite E sur K et le sous-espace E' (non réduit à 0) du dual E^* de E, il est facile de voir, inversement, que $\mathcal{F}(E, E')$ est bien un anneau *quasi-simple à droite*. Tout d'abord, c'est un anneau, car si u et v appartiennent à $\mathcal{F}(E, E')$, et $w = u + v$, on a $w(E) \subset u(E) + v(E)$, donc $w(E)$ a un nombre fini de dimensions, et $\overset{-1}{w}(o) \supset \overset{-1}{u}(o) \cap \overset{-1}{v}(o)$, donc $\overset{-1}{w}(o)$ est intersection d'un nombre fini d'hyperplans $\overset{-1}{x'_i}(o)$, où les $x'_i \in E'$ (16); on a donc $u + v \in \mathcal{F}(E, E')$, et l'on montre de même que $u \circ v \in \mathcal{F}(E, E')$.

Pour tout $e \neq 0$ de E, les endomorphismes $x \to e x'(x)$, où x' parcourt E', appartiennent à $\mathcal{F}(E, E')$ et forment un idéal à droite minimal de $\mathcal{F}(E, E')$; deux quelconques de ces idéaux sont isomorphes, et le raisonnement du théorème 4 prouve que $\mathcal{F}(E, E')$ est la *somme* de tous ces idéaux; il est donc identique à un pied de son socle (droit), et comme E' n'est pas réduit à 0, les idéaux minimaux de $\mathcal{F}(E, E')$ ne sont pas tous nilpotents, ce qui établit la proposition.

9. Cherchons maintenant comment se caractérisent les anneaux $\mathcal{F}(E, E')$ qui sont *simples*. Il faut et il suffit pour cela que l'annihilateur à droite de $\mathcal{F}(E, E')$ soit nul, autrement dit, qu'il n'existe aucun endomorphisme $u \neq 0$ de $\mathcal{F}(E, E')$, tel que $v(u(x)) = 0$ pour tout $x \in E$ et tout $v \in \mathcal{F}(E, E')$; cela peut encore s'exprimer en disant que l'intersection de tous les sous-espaces $\overset{-1}{v}(o)$ doit se réduire à 0. Or, d'après le théorème 4, cette intersection

est aussi celle de tout les hyperplans $\overset{-1}{x'}(o)$, où x' parcourt E'; donc :

Proposition 7. — *Pour qu'un anneau* $\mathfrak{F}(E, E')$ *soit simple, il faut et il suffit que* E' *satisfasse à la condition :*

(D) *La relation* « *pour tout* $x' \in E'$, $x'(x) = o$ » *entraîne* $x = o$.

On conclut aisément de là, comme cas particulier, *le second théorème de Wedderburn*, donnant la structure d'un anneau simple de longueur finie : en effet, si cette longueur est n, E est un espace à n dimensions, et le seul sous-espace E' du dual E^* qui satisfasse à (D) est E^* lui-même; il en résulte que $\mathfrak{F}(E, E')$ est alors l'anneau $\mathcal{L}(E)$ de *tous* les endomorphismes de E ([17]).

Au contraire, lorsque E a une infinité de dimensions, la condition (D) peut être satisfaite par des sous-espaces de E^* *distincts* de E^* : c'est là la source de la diversité des structures des anneaux simples infinis; nous y reviendrons au paragraphe 5.

10. Nous nous limiterons désormais au cas où $\mathfrak{F}(E, E')$ est *simple*, c'est-à-dire où E' satisfait à la condition (D). Tout $x \in E$ définit sur E' une *forme linéaire* $x' \to x'(x)$, et, si $x \neq o$, il résulte de (D) que cette forme linéaire n'est pas identiquement nulle; on peut donc *identifier* E à un sous-espace du *dual* E'^* de E'. Avec cette convention, on a la proposition suivante.

Proposition 8. — *L'anneau opposé de l'anneau simple* $\mathfrak{F}(E, E')$ *est un anneau simple, isomorphe à* $\mathfrak{F}(E', E)$.

([17]) Ayant le *second* théorème de Wedderburn, il est aisé d'en déduire le *premier*, qui donne la structure d'un anneau A satisfaisant à la condition minimale pour les idéaux à gauche, et ne contenant pas d'idéaux minimaux nilpotents. En effet, chaque pied du socle S de A est alors simple, et S est un idéal bilatère de A, somme directe d'un nombre fini d'idéaux bilatères qui sont des anneaux simples de longueur finie. S admet donc un élément unité e; montrons que $S = A$, ce qui établit le premier théorème de Wedderburn. En effet, dans le cas contraire, pour tout $x \notin S$, $xe \in S$, donc $x - xe \neq o$ annulerait e à gauche, l'annihilateur à gauche de e ne serait pas nul. D'autre part, cet annihilateur n'a que o en commun avec S, mais comme c'est un idéal à gauche $\neq (o)$, il devrait contenir un idéal minimal non contenu dans S, ce qui contredit la définition de S. On notera que ce résultat est le seul endroit où un raisonnement analogue à la « décomposition de Peirce » soit nécessaire.

Il résulte en particulier de cette proposition que tout anneau simple A, possédant des idéaux à gauche minimaux, possède aussi des idéaux à droite minimaux (et *vice-versa*) et est *complètement réductible* aussi bien comme A-module à gauche que comme A-module à droite.

Pour démontrer la proposition 8, nous ferons d'abord la remarque suivante : tout sous-espace vectoriel de E à un nombre *fini* de dimensions est intersection d'hyperplans $\overset{-1}{x'}(\mathrm{o})$, où les $x' \in \mathrm{E}'$. Cela résulte du théorème cité dans la note ([16]), en intervertissant les rôles de E et de E′, ce qui est licite quand la condition (D) est remplie, d'après la remarque du début de ce numéro.

Considérons alors un endomorphisme $u \in \mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{E}')$; pour tout $x' \in \mathrm{E}'$, on a $\overset{-1}{u}\big(\overset{-1}{x'}(\mathrm{o})\big) \supset \overset{-1}{u}(\mathrm{o})$, donc $x' \circ u = y'$ est une forme linéaire appartenant à E′. L'application $x' \rightarrow x' \circ u$ de E′ dans lui-même ainsi définie est une application linéaire, que nous appellerons l'endomorphisme *transposé* de u, et noterons u^* ([18]). Posons $u(\mathrm{E}) = \mathrm{V}$, et désignons par V′ le sous-espace des $x' \in \mathrm{E}'$ tels que $\overset{-1}{u}(\mathrm{o}) \subset \overset{-1}{x'}(\mathrm{o})$. Nous allons montrer d'abord que $u^*(\mathrm{E}') = \mathrm{V}'$. En effet, si l'on pose $y' = x' \circ u$, la relation $u(x) = \mathrm{o}$ entraîne $y'(x) = \mathrm{o}$, donc $\overset{-1}{u}(\mathrm{o}) \subset \overset{-1}{y'}(\mathrm{o})$, et par suite $y' \in \mathrm{V}'$. Inversement, soit $y' \in \mathrm{V}'$, et soit x_0 un point de E n'appartenant pas à l'hyperplan $\mathrm{H} = \overset{-1}{y'}(\mathrm{o})$; V est somme directe de $u(\mathrm{H})$ et de $u(x_0)\mathrm{K}$; d'après la remarque ci-dessus il existe $x' \in \mathrm{E}'$ tel que $x'(x) = \mathrm{o}$ pour tout $x \in u(\mathrm{H})$, et $x'\big(u(x_0)\big) = y'(x_0)$; on en conclut aussitôt qu'on a $y' = x' \circ u$.

Montrons en second lieu que l'ensemble des $x \in \mathrm{E}$ tels que, pour tout $x' \in \overset{-1}{u^*}(\mathrm{o})$, on ait $x'(x) = \mathrm{o}$, est identique à V. En effet, $x' \in \overset{-1}{u^*}(\mathrm{o})$ signifie qu'on a $x'\big(u(x)\big) = \mathrm{o}$, quel que soit $x \in \mathrm{E}$, ou encore que $\overset{-1}{u^*}(\mathrm{o})$ est l'ensemble des éléments x' de E′ tels que $u(\mathrm{E}) \subset \overset{-1}{x'}(\mathrm{o})$; comme $u(\mathrm{E})$ a un nombre fini de dimensions, la remarque du début prouve que l'intersection des hyperplans $\overset{-1}{x'}(\mathrm{o})$, pour $x' \in \overset{-1}{u^*}(\mathrm{o})$, est identique à $u(\mathrm{E})$.

([18]) Lorsque $\mathrm{E}' = \mathrm{E}^*$, cette notion coïncide avec la définition usuelle du transposé d'un endomorphisme de E.

On en conclut que, pour tout $u \in \mathcal{F}(E, E')$, on a $u^* \in \mathcal{F}(E', E)$. D'une manière symétrique, on définit le transposé d'un endomorphisme $u' \in \mathcal{F}(E', E)$; on vérifie aisément que le transposé v du transposé u^* de u n'est autre que u lui-même; en effet, on a identiquement $x' \circ u = x' \circ v$ quel que soit $x' \in E'$; cela signifie que $x'(u(x) - v(x)) = 0$ quels que soient x et x', c'est-à-dire, d'après (D), que $u(x) = v(x)$ quel que soit x. Il résulte de là que l'application $u \to u^*$ est une application *biunivoque* de $\mathcal{F}(E, E')$ *sur* $\mathcal{F}(E', E)$. Enfin, on a $(u + v)^* = u^* + v^*$, et $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$; donc $u \to u^*$ est un isomorphisme de $\mathcal{F}(E, E')$ sur l'anneau opposé de $\mathcal{F}(E', E)$, ce qui achève la démonstration.

IV. — INTERPRÉTATIONS TOPOLOGIQUES.

11. Les résultats que nous avons obtenus au paragraphe 3, et les raisonnements par lesquels nous y sommes parvenus, font apparaître une étroite analogie entre la théorie que nous venons d'exposer et celle de la *dualité faible* dans les espaces vectoriels topologiques (sur le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes) [7]. On peut, comme nous allons le voir, pousser cette analogie plus loin, et couvrir d'un vêtement topologique les théorèmes d'algèbre qui précèdent.

Considérons donc un espace vectoriel à droite E sur un corps K (commutatif ou non), et un sous-espace vectoriel E′ du dual E^* de E, soumis à la condition (D); il revient au même, d'ailleurs, de se donner un espace vectoriel à droite E sur K, un espace vectoriel à gauche E′ sur K, et une *forme bilinéaire* $B(x, x')$ définie dans $E \times E'$ (à valeurs dans K), satisfaisant aux deux conditions :

(D_I) La relation « quel que soit $x \in E$, $B(x, x') = 0$ » entraîne $x' = 0$.

(D_{II}) La relation « quel que soit $x' \in E'$, $B(x, x') = 0$ » entraîne $x = 0$.

On appelle *topologie faible* sur E, définie par E′, et l'on désigne par $\sigma(E, E')$, la topologie *la moins fine* sur E, compatible avec la structure de groupe de E, et pour laquelle les *formes linéaires* $x \to B(x, x')$ soient *continues* dans E (le corps K étant muni de la topologie *discrète*). Si (pour abréger le langage) l'on identifie la forme linéaire $x \to B(x, x')$ et l'élément $x' \in E'$, il est clair que chacun des hyperplans $\overset{-1}{x'}(0)$ doit être un *voisinage de zéro* dans E; et réciproquement, la base de filtre $\mathfrak{B}$ engendrée par ces hyperplans (c'est-à-dire l'ensemble des intersections d'un nombre fini de ces hyperplans) est formée de voisinages de zéro dans toute topologie de groupe sur E rendant les formes linéaires x' continues; donc, c'est un système fondamental de voisinages de zéro dans la topologie $\sigma(E, E')$. Il résulte immédiatement de (D_{II}) que l'intersection de tous ces voisinages se réduit à zéro, autrement dit, $\sigma(E, E')$ est une topologie *séparée*. On définit, bien entendu, de façon symétrique, la topologie faible $\sigma(E', E)$ sur E'.

On peut alors dérouler toute une théorie analogue à celle de la dualité faible; la plupart des démonstrations données dans cette dernière sont encore valables pour les propriétés correspondantes que nous considérons ici ([19]).

En premier lieu, les seules formes linéaires définies dans E, et continues pour la topologie $\sigma(E, E')$ sont les formes $x' \in E'$.

L'adhérence, dans E, d'un sous-espace vectoriel quelconque M, est l'intersection des hyperplans fermés (et ouverts) $\overset{-1}{x'}(0)$ qui contiennent M. En effet, cette intersection est un sous-espace vectoriel fermé, donc contient $\overline{M}$; d'autre part, si $x_0 \in E$ n'est pas adhérent à M, il existe un voisinage V de zéro, intersection d'un nombre fini d'hyperplans $\overset{-1}{x'_i}(0)$, tel que $x_0 + V$ ne rencontre pas M, et par conséquent que $x_0 \notin M + V$; on en conclut qu'il existe un hyperplan contenant $M + V$ et ne contenant pas x_0; un tel hyperplan contenant V, est de la forme $\overset{-1}{x'}(0)$ ([16]), avec $x' \in E'$.

([19]) Cette théorie et celle de la dualité faible sont d'ailleurs deux cas particuliers d'une théorie générale qu'il est aisé de développer pour des espaces vectoriels sur un *corps topologique* K.

Étant donnés deux espaces vectoriels E, E' sur K, et une forme bilinéaire $B(x, x')$ satisfaisant à (D_I) et (D_{II}), la topologie $\sigma(E, E')$ sera la moins fine des topologies de groupe sur E rendant continues les formes linéaires $x \to B(x, x')$. On obtient un système fondamental de voisinages de zéro dans $\sigma(E, E')$ de la façon suivante : pour un voisinage donné U de zéro dans K, et un nombre fini quelconque d'éléments $x'_i \in E'$, on considère l'ensemble des $x \in E$ tels que $B(x, x'_i) \in U$ pour tous les x'_i; ces ensembles forment le système fondamental de voisinages demandé. On en déduit aisément que $\sigma(E, E')$ rend continue dans $K \times E$ la fonction $(\lambda, x) \to x\lambda$.

En particulier, tout sous-espace vectoriel de E à un nombre *fini* de dimensions est *fermé*; il est d'ailleurs *discret* pour la topologie induite sur lui par $\sigma(E, E')$ ([20]).

Cette dernière propriété nous permet de donner l'interprétation topologique du théorème 4 :

Proposition 9. — *L'anneau simple* $\mathcal{F}(E, E')$ *est formé des endomorphismes* u *de* E, *continus pour la topologie* $\sigma(E, E')$, *et tels que* $u(E)$ *ait un nombre fini de dimensions.*

12. La topologie $\sigma(E, E')$, et la proposition 9, vont nous permettre de définir une topologie *sur l'anneau* $\mathcal{F}(E, E')$. Considérons, en effet, sur $\mathcal{F}(E, E')$, la *topologie* $\mathcal{C}$ *de la convergence uniforme :* si V est un voisinage de zéro dans E [pour la topologie $\sigma(E, E')$], un voisinage U(V) de zéro dans $\mathcal{F}(E, E')$ pour la topologie $\mathcal{C}$, sera formé des endomorphismes $u \in \mathcal{F}(E, E')$ tels que $u(E) \subset V$; les U(V) forment un système fondamental de voisinages de zéro dans la topologie $\mathcal{C}$, lorsque V parcourt un système fondamental de voisinages de zéro dans E.

La topologie $\mathcal{C}$ est évidemment séparée; elle est compatible avec la structure de groupe additif de $\mathcal{F}(E, E')$; montrons qu'elle est aussi compatible avec sa structure d'*anneau*. Il suffit pour cela d'établir que la fonction $u \circ v$ des deux variables u, v est continue, ou encore qu'elle est continue pour $u = v = 0$, et que, pour tout u_0 fixé, les fonctions $u_0 \circ v$ et $v \circ u_0$ sont continues pour $v = 0$. Or,

(20) Dans le cas général où K est un corps topologique quelconque, les propriétés précédentes sont encore valables, sauf la dernière, qu'il faut remplacer par la suivante : un sous-espace vectoriel à n dimensions de E est isomorphe au produit K^n [pour la topologie induite par $\sigma(E, E')$].

Nous laissons au lecteur le soin de poursuivre le développement de la théorie pour un corps topologique K quelconque, en la calquant sur le cas où K est le corps des nombres réels ou des nombres complexes; ce qui remplace alors le théorème de Hahn-Banach est le fait que tout sous-espace vectoriel fermé pour la topologie $\sigma(E, E')$ est l'intersection d'hyperplans fermés; à l'aide de cette propriété, on généralise aisément les théorèmes 6 à 14 du Mémoire cité dans la note (7). En particulier, on définit, comme ci-dessus au n° 10, le transposé u^* d'un endomorphisme *continu* quelconque de E, et l'on montre qu'il est continu pour la topologie $\sigma(E', E)$.

étant donné un voisinage arbitraire V de zéro dans E, la condition $v(E) \subset V$ entraîne $v(u_0(E)) \subset V$ quel que soit u_0, ce qui prouve la continuité de $v \circ u_0$ au point $v = 0$, et celle de $u \circ v$ pour $u = v = 0$; d'autre part, pour un u_0 donné, $\overset{-1}{u_0}(V)$ contient $\overset{-1}{u_0}(0)$, et ce dernier est un voisinage de zéro dans E; si l'on prend v tel que $v(E) \subset \overset{-1}{u_0}(0)$, on aura $u_0(v(E)) = \{0\} \subset V$, d'où la continuité de $u_0 \circ v$ pour $v = 0$.

La topologie $\mathcal{T}$ vient d'être définie en partant de la représentation de l'anneau simple $\mathcal{F}(E, E')$ comme anneau d'endomorphismes; mais elle peut l'être aussi de manière *intrinsèque*. En effet, le raisonnement du théorème 4 prouve que tout voisinage V de zéro dans E, intersection d'un nombre fini d'hyperplans $\overset{-1}{x'}(0)$, est de la forme $\overset{-1}{u_0}(0)$, où $u_0 \in \mathcal{F}(E, E')$; il en résulte que le voisinage correspondant U(V) dans $\mathcal{F}(E, E')$ est identique à l'ensemble des v tels que $u_0 \circ v = 0$. Autrement dit, on a un système fondamental de voisinages de zéro pour la topologie $\mathcal{T}$ en prenant les idéaux à droite *annihilateurs à droite des éléments de* $\mathcal{F}(E, E')$.

13. Cherchons les adhérences des idéaux à gauche et des idéaux à droite dans l'anneau $\mathcal{F}(E, E')$, pour la topologie $\mathcal{T}$.

Proposition 10. — *Dans l'anneau* $\mathcal{F}(E, E')$, *tout idéal à gauche est fermé pour la topologie* $\mathcal{T}$.

En effet, d'après le théorème 4 et la proposition 8, tout idéal à gauche $\mathfrak{l}$ de $\mathcal{F}(E, E')$ est formé des endomorphismes u tels que $\overset{-1}{u}(0)$ contienne un sous-espace vectoriel donné H de E, ou encore tels que $u(H) = \{0\}$. Soit w adhérent à $\mathfrak{l}$; pour tout $u_0 \in \mathcal{F}(E, E')$, il doit exister $u \in \mathfrak{l}$ tel que $u_0 \circ (w - u) = 0$, c'est-à-dire $u_0 \circ w = u_0 \circ u$, et l'on a $u_0 \circ u \in \mathfrak{l}$; il faut donc que $u_0 \circ w \in \mathfrak{l}$ pour tout u_0, c'est-à-dire $u_0(w(H)) = \{0\}$. Or, cela n'est possible que si $w(H) = \{0\}$, car pour tout $x \neq 0$ de E, on peut trouver un $u_0 \in \mathcal{F}(E, E')$ tel que $u_0(x) \neq 0$ [conséquence de la condition (D_{II})].

PROPOSITION 11. — *Dans l'anneau* $\mathscr{F}(E, E')$, *l'adhérence d'un idéal à droite* $\mathfrak{r}$ *est l'annihilateur à droite de l'annihilateur à gauche de* $\mathfrak{r}$ [21].

Remarquons d'abord que, d'après la démonstration du théorème 4, tout idéal à droite $\mathfrak{r}$ de $\mathscr{F}(E, E')$ est formé des endomorphismes u tels que $u(E) \subset H$, où H est un sous-espace vectoriel quelconque de E. Si w est adhérent à $\mathfrak{r}$, pour tout $u_0 \in \mathscr{F}(E, E')$, il doit exister $u \in \mathfrak{r}$ tel que $u_0 \circ w = u_0 \circ u$; en particulier, si $u_0 \circ u = 0$ pour tout $u \in \mathfrak{r}$, on doit avoir $u_0 \circ w = 0$, donc w appartient bien à l'idéal à droite $\mathfrak{r}'$ annihilateur à droite de l'annihilateur à gauche de $\mathfrak{r}$. D'ailleurs l'annihilateur à gauche de $\mathfrak{r}$ est l'idéal à gauche formé des u_0 tels que $H \subset \overset{-1}{u_0}(0)$; donc $\mathfrak{r}'$ est formé des u tels que $u(E) \subset \overset{-1}{u_0}(0)$ pour tous les u_0 précédents; d'après ce qu'on a vu au n° 11, cette condition équivaut à $u(E) \subset \overline{H}$, $\overline{H}$ étant l'adhérence de H pour la topologie $\sigma(E, E')$. Cela étant, montrons que tout $w \in \mathfrak{r}'$ est adhérent à $\mathfrak{r}$; remarquons pour cela que, si u_0 est quelconque dans $\mathscr{F}(E, E')$, pour tout $x \in \overline{H}$, il existe $y \in H$ appartenant à $x + \overset{-1}{u_0}(0)$, puisque $\overset{-1}{u_0}(0)$ est un voisinage de zéro dans E. Décomposons $w(E)$ en somme directe de $w(E) \cap \overset{-1}{u_0}(0)$ et d'un sous-espace vectoriel V à un nombre fini de dimensions; soit $c_1, \ldots, c_p$ une base de V, et pour chaque indice i, soit $d_i \in H$ tel que $c_i - d_i \in \overset{-1}{u_0}(0)$; V est image biunivoque par w d'un sous-espace U à p dimensions; soit $b_1, \ldots, b_p$ la base de U telle que $w(b_i) = c_i$; U et $\overset{-1}{w}\left(\overset{-1}{u_0}(0)\right)$ sont supplémentaires; si l'on prend $u(x) = 0$ pour $x \in \overset{-1}{w}\left(\overset{-1}{u_0}(0)\right)$ et $u(b_i) = d_i$, on a bien $u(E) \subset H$ et $u_0 \circ (w - u) = 0$.

14. Comme nous venons de le voir, il y a *correspondance biunivoque* entre *sous-espaces vectoriels* de E et *idéaux à droite* de $\mathscr{F}(E, E')$; à tout sous-espace vectoriel *fermé* correspond un

---

(21) L'analogie entre l'opération topologique qui consiste à prendre l'adhérence d'un ensemble, et l'opération algébrique par laquelle, à un idéal à droite, on fait correspondre l'annihilateur à droite de son annihilateur à gauche, a déjà été signalée par M. M. Hall [*A type of algebraic closure* (*Ann. of Math.*, t. 40, 1939, p. 360)], qui a étudié les algèbres de rang fini où tous les idéaux à droite sont « fermés » au sens de cette opération.

idéal à droite *fermé*; à l'intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels correspond l'intersection des idéaux correspondants; enfin, à la *somme* de deux sous-espaces H, H′ correspond la *somme* des idéaux à droite correspondants. Pour voir ce dernier point, il suffit de remarquer que $H+H'$ est aussi une somme directe $H+H''$, avec $H''\subset H'$; si $u(E)\subset H+H''$, et si $k(x)$, $k''(x)$ sont les composants de $x\in H+H''$ dans H et H″ respectivement, on a, pour tout $x\in E$, $u(x)=k(u(x))+k''(u(x))$, et $k(u(E))\subset H$, $k''(u(E))\subset H''\subset H'$. En particulier, à un sous-espace de dimension finie p correspond un idéal à droite de longueur p.

15. En général, l'espace vectoriel E, muni de la topologie $\sigma(E, E')$, n'est pas *complet* pour la structure uniforme qui se déduit de cette topologie de groupe. En effet, si l'on considère les éléments de E comme des formes linéaires sur E′, la topologie $\sigma(E, E')$ n'est autre que la topologie de la *convergence simple* pour ces formes. Les éléments du *complété* $\hat{E}$ de E sont donc des limites de formes linéaires sur E′, c'est-à-dire de nouveau des formes linéaires sur E′ ou encore des éléments du *dual* E'^* (dont E est considéré comme un sous-espace). Nous allons voir en fait que E'^*, muni de la topologie $\sigma(E'^*, E')$, est identique au complété $\hat{E}$. Il suffit de prouver que E est *partout dense* dans E'^*; en d'autres termes, si $u\in E'^*$, et si x'_i $(1\leq i\leq p)$ sont p éléments quelconques de E′ (qu'on peut supposer linéairement indépendants), il faut prouver qu'il existe $x\in E$ tel que $B(u-x, x'_i)=0$ pour $1\leq i\leq p$, ou encore, si l'on pose $B(u, x'_i)=\lambda_i$, que les p équations $B(x, x'_i)=\lambda_i$ ont une solution commune; or, c'est là une proposition élémentaire d'Algèbre linéaire ([22]).

Cherchons maintenant le complété de l'anneau $\mathcal{F}(E, E')$, muni de la topologie $\mathcal{T}$. Soit $\mathfrak{G}$ un filtre de Cauchy sur $\mathcal{F}(E, E')$; si,

---

([22]) Ce résultat s'étend immédiatement au cas où K est un corps topologique complet quelconque. On peut chercher de même quand E est *localement précompact* (c'est-à-dire admet un voisinage de zéro précompact); si E a un nombre fini de dimensions, il est nécessaire et suffisant pour cela que K soit localement compact. Au contraire, si E a une infinité de dimensions, il ne peut être localement précompact pour la topologie $\sigma(E, E')$ que si K est un corps *compact*, donc *fini* (ayant un nombre fini d'éléments); dans ce cas, E, muni de la topologie $\sigma(E, E')$, est *précompact*, son complété est donc *compact*.

pour $x \in \mathrm{E}$, et pour un ensemble $\mathrm{M} \in \mathfrak{G}$, on désigne par $\mathrm{M}(x)$ l'ensemble des $u(x)$, où u parcourt M, les $\mathrm{M}(x)$, lorsque M parcourt $\mathfrak{G}$, forment une base de filtre de Cauchy sur E, qui a donc une limite $u_0(x) \in \hat{\mathrm{E}}$; u_0, étant limite uniforme d'applications linéaires continues de E dans $\hat{\mathrm{E}}$, est une application linéaire continue de E dans $\hat{\mathrm{E}}$; d'ailleurs, comme E est partout dense dans $\hat{\mathrm{E}}$, et que toute fonction linéaire continue dans E est uniformément continue, elle se prolonge par continuité en une fonction linéaire continue dans $\hat{\mathrm{E}}$; autrement dit, les éléments du complété de $\mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{E}')$ peuvent être identifiés à des *endomorphismes continus* de $\hat{\mathrm{E}}$ [pour la topologie $\sigma(\hat{\mathrm{E}}, \mathrm{E}')$]. Nous allons voir qu'en fait l'anneau $\mathcal{E}(\hat{\mathrm{E}}, \mathrm{E}')$ de *tous* ces endomorphismes est identique au complété de $\mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{E}')$, ce qui revient à prouver que $\mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{E}')$ est *partout dense* dans $\mathcal{E}(\hat{\mathrm{E}}, \mathrm{E}')$ (ce dernier étant muni de la topologie de la convergence uniforme). En effet, soit f un endomorphisme continu de $\hat{\mathrm{E}}$, u_0 un élément quelconque de $\mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{E}')$, prolongé par continuité à $\hat{\mathrm{E}}$; comme $\overset{-1}{u_0}(0)$ est un voisinage de zéro dans $\hat{\mathrm{E}}$, un supplémentaire de $\overset{-1}{u_0}(0)$ a un nombre fini de dimensions; on peut donc mettre $f(\mathrm{E})$ sous la forme de la somme directe de son intersection avec $\overset{-1}{u_0}(0)$ et d'un sous-espace U à un nombre fini de dimensions; si $b_1, \ldots, b_p$ est une base de U, il existe $c_1, c_2, \ldots, c_p$ appartenant à E et tels que $u_0(b_i - c_i) = 0$ puisque $\overset{-1}{u_0}(0)$ est un voisinage de zéro et que E est partout dense dans $\hat{\mathrm{E}}$. Cela étant, U est image biunivoque par f d'un sous-espace V à p dimensions de E; soient d_i les éléments de base de V tels que $f(d_i) = b_i$; si l'on prend $v(d_i) = c_i$, et $v(x) = 0$ dans le sous-espace fermé $\overset{-1}{f}\big(\overset{-1}{u_0}(0)\big)$, supplémentaire de V, on aura bien $u_0\big(f(x) - v(x)\big) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$, et v appartient à $\mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{E}')$.

16. Par le même procédé que ci-dessus, on peut définir sur $\mathcal{F}(\mathrm{E}', \mathrm{E})$ une topologie $\mathcal{C}'$ analogue à $\mathcal{C}$. Par passage d'un endomorphisme de $\mathcal{F}(\mathrm{E}', \mathrm{E})$ à son transposé, cette topologie est transportée sur une topologie $\mathcal{C}_0$, compatible avec la structure d'anneau de $\mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{E}')$; on a d'ailleurs immédiatement une définition intrinsèque de cette topologie : un système fondamental

de voisinages de zéro pour la topologie $\mathcal{T}_0$ est formé des *annihilateurs à gauche* des éléments de $\mathcal{F}(E, E')$. Pour cette topologie, tout idéal à droite de $\mathcal{F}(E, E')$ est fermé; l'adhérence d'un idéal à gauche est l'annihilateur à gauche de son annihilateur à droite.

Le *complété* de $\mathcal{F}(E, E')$ muni de la topologie $\mathcal{T}_0$, est formé, d'après ce qui précède, des transposés des endomorphismes de E^* continus pour la topologie $\sigma(E^*, E)$, c'est-à-dire des endomorphismes de E, continus pour la topologie $\sigma(E, E^*)$: mais ce sont là *tous* les endomorphismes de E par définition. On peut d'ailleurs montrer directement que $\mathcal{F}(E, E')$, muni de la topologie $\mathcal{T}_0$, est *partout dense* dans l'anneau $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E, muni de la topologie analogue à $\mathcal{T}_0$ [c'est-à-dire ayant pour système fondamental de voisinages de zéro les annihilateurs à gauche, dans $\mathcal{L}(E)$, des éléments de $\mathcal{F}(E, E')$]. En effet, soit f un endomorphisme quelconque de E, u_0 un élément quelconque de $\mathcal{F}(E, E')$; soit U un sous-espace fermé supplémentaire du sous-espace $u_0(E)$ à un nombre fini de dimensions; si l'on prend $v(x) = f(x)$ pour $x \in u_0(E)$, $v(x) = 0$ dans U, v appartient à $\mathcal{F}(E, E')$, et l'on a $(f - v) \circ u_0 = 0$. En repassant aux transposés, on observera que ce raisonnement fournit une démonstration plus simple du fait que le complété de $\mathcal{F}(E, E')$ pour la topologie $\mathcal{T}$ est $\mathcal{E}(\hat{E}, E')$ (n° 15).

V. — ISOMORPHISMES D'ANNEAUX SIMPLES.

17. Soient A et B deux anneaux simples (ayant des idéaux minimaux) isomorphes. Il est clair que le corps des endomorphismes d'un idéal à gauche minimal de A est isomorphe à celui d'un idéal à gauche minimal de B; si l'on tient compte en outre du théorème 3, on voit que A et B sont respectivement isomorphes à deux anneaux $\mathcal{F}(E, E'_1)$, $\mathcal{F}(E, E'_2)$, correspondant au *même* espace vectoriel E et à deux sous-espaces vectoriels E'_1, E'_2 du dual E^* de E [satisfaisant à la condition (D)]. La recherche de tous les isomorphismes de A sur B revient donc à celle de tous les isomorphismes de $\mathcal{F}(E, E'_1)$ sur $\mathcal{F}(E, E'_2)$; ces derniers sont donnés par le théorème suivant :

THÉORÈME 5. — *Tout isomorphisme de* $\mathcal{F}(E, E'_1)$ *sur* $\mathcal{F}(E, E'_2)$ *est de la forme* $u \to f \circ u \circ f^{-1}$, *où* f *est un di-automorphisme de l'espace vectoriel* E [c'est-à-dire une application biunivoque de E sur lui-même telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(x\lambda) = f(x)\lambda^\sigma$, où $\lambda \to \lambda^\sigma$ est un *automorphisme* du corps K].

Soit (e_α) une base de E, et désignons par $\mathfrak{r}_\alpha$ l'idéal à droite minimal de $\mathcal{F}(E, E'_1)$ formé des endomorphismes u tels que $u(E) \subset e_\alpha K$. A l'idéal $\mathfrak{r}_\alpha$ (pour un α déterminé) correspond, par l'isomorphisme $u \to \overline{u}$ considéré, un idéal à droite minimal $\overline{\mathfrak{r}_\alpha}$ de $\mathcal{F}(E, E'_2)$, formé d'endomorphismes $\overline{u}$ tels que $\overline{u}(E) \subset \overline{e_\alpha}K$, $\overline{e_\alpha}$ étant un certain élément $\neq 0$ que nous choisissons arbitrairement dans un $\overline{u}(E) \neq \{0\}$ $(\overline{u} \in \overline{\mathfrak{r}_\alpha})$.

Pour tout $\lambda \in K$, considérons les endomorphismes $u \in \mathfrak{r}_\alpha$ tels que $u(e_\alpha) = e_\alpha\lambda$; si v est un second endomorphisme ayant la même propriété, on a $u(e_\alpha) - v(e_\alpha) = 0$; il en résulte que $u - v$ appartient à l'annihilateur à gauche de $\mathfrak{r}_\alpha$; donc $\overline{u} - \overline{v}$ appartient à l'annihilateur à gauche de $\overline{\mathfrak{r}_\alpha}$, ce qui entraîne $\overline{u}(\overline{e_\alpha}) = \overline{v}(\overline{e_\alpha})$; si l'on désigne par $\overline{e_\alpha}\lambda^\sigma$ la valeur commune de tous les $\overline{u}(\overline{e_\alpha})$ pour les u tels que $u(e_\alpha) = e_\alpha\lambda$, l'application $\lambda \to \lambda^\sigma$ est un *automorphisme* du corps K, car on vérifie immédiatement que $(\lambda + \mu)^\sigma = \lambda^\sigma + \mu^\sigma$, $(\lambda\mu)^\sigma = \lambda^\sigma\mu^\sigma$.

Soit maintenant x un élément quelconque $\neq 0$ de E, $\mathfrak{r}_x$ l'idéal à droite minimal formé des endomorphismes $u \in \mathcal{F}(E, E'_1)$ tels que $u(E) \subset xK$. On sait qu'il existe un $v_x \in \mathfrak{r}_x$ tel que $v_x(e_\alpha) = x$; si l'on a aussi $w_x(e_\alpha) = x$, $v_x - w_x$ appartient à l'annihilateur à gauche de $\mathfrak{r}_\alpha$, donc $\overline{v_x}(\overline{e_\alpha}) = \overline{w_x}(\overline{e_\alpha})$; nous désignerons par $f(x)$ la valeur commune $\overline{x}$ des $\overline{v_x}(\overline{e_\alpha})$; l'idéal $\overline{\mathfrak{r}_x}$ correspondant à $\mathfrak{r}_x$ dans $\mathcal{F}(E, E'_2)$ n'est autre que l'ensemble des endomorphismes de E appartenant à cet anneau et tels que $\overline{u}(E) \subset \overline{x}K$. Il est immédiat qu'on a $f(x+y) = f(x) + f(y)$; d'autre part, pour tout $\lambda \in K$, si $u \in \mathfrak{r}_\alpha$ est tel que $u(e_\alpha) = e_\alpha\lambda$, on a $v_x\big(u(e_\alpha)\big) = x\lambda$, donc $f(x\lambda) = f(x)\lambda^\sigma$. Enfin, comme (e_α) est une base de E, il en est de même des $f(e_\alpha)$, puisque les idéaux à droite correspondant aux $\mathfrak{r}_\alpha$ ont pour somme directe $\mathcal{F}(E, E'_1)$; donc f est un *di-automorphisme* de E.

Cela étant, l'application $u \to f^{-1} \circ \overline{u} \circ f$ est visiblement un isomorphisme de $\mathcal{F}(E, E'_1)$ sur un anneau $\mathcal{F}(E, E'_3)$, ayant la propriété suivante : dans la correspondance biunivoque entre idéaux à droite et sous-espaces vectoriels de E (n° 14), les sous-espaces vectoriels qui correspondent à deux idéaux homologues par l'isomorphisme considéré sont les *mêmes* pour ces deux anneaux. Or, soit $x \to e_\alpha x'(x)$ un élément quelconque de $\mathfrak{r}_\alpha$, $x \to e_\alpha \overline{x'}(x)$ l'endomorphisme correspondant dans $\mathcal{F}(E, E'_3)$; les annihilateurs à droite de ces deux éléments correspondent respectivement aux hyperplans $\overset{-1}{x'}(o)$ et $\overset{-1}{\overline{x'}}(o)$; ces deux hyperplans sont donc les mêmes, ce qui entraîne $\overline{x'} = \rho x'$ avec $\rho \in K$; ρ est indépendant de x', car si y' et x' sont linéairement indépendants, et $\overline{y'} = \rho' y'$, on doit avoir

$$\overline{x'} + \overline{y'} = \tau(x' + y'),$$

ce qui implique nécessairement $\rho = \rho' = \tau$; enfin, d'après la définition de f, on a $\overline{x'}(e_\alpha) = x'(e_\alpha)$, donc $\rho = 1$; l'isomorphisme $u \to f^{-1} \circ \overline{u} \circ f$ est l'isomorphisme identique.

C. Q. F. D.

On observera que le di-automorphisme f de l'énoncé n'est défini qu'à une *homothétie* près $x \to x\rho$; on pouvait le prévoir *a priori*, car si h désigne cette homothétie [qui est un di-automorphisme, puisque $(x\lambda)\rho = (x\rho)(\rho^{-1}\lambda\rho)$], on a $h \circ u \circ h^{-1} = u$ quel que soit l'endomorphisme u de E.

On notera aussi que la démonstration du théorème 5 s'applique à des anneaux *quasi-simples* (à droite) $\mathcal{F}(E, E'_1)$ et $\mathcal{F}(E, E'_2)$.

Soit B un sous-anneau de l'anneau $\mathcal{E}(E, E')$ des endomorphismes de E, continus pour $\sigma(E, E')$, contenant l'anneau $\mathcal{F}(E, E')$. Montrons que $\mathcal{F}(E, E')$ est le *socle* (droit) de B. En effet, tout idéal à droite minimal de $\mathcal{F}(E, E')$ est idéal à droite dans $\mathcal{E}(E, E')$, donc dans B, et par suite idéal à droite minimal de B. D'autre part, soit $\mathfrak{r}$ un idéal à droite minimal de B, et $u \neq o$ un élément de $\mathfrak{r}$; $u(E)$ n'est pas réduit à o, donc il existe $x \in E$ tel que $u(x) \neq o$; si l'on prend $v \in \mathcal{F}(E, E')$ tel que $v(E) = xK$, $u \circ v$, qui appartient à $\mathfrak{r}$, est un élément de $\mathcal{F}(E, E')$, donc $\mathfrak{r}$ contient l'idéal à droite minimal de $\mathcal{F}(E, E')$ engendré par $u \circ v$, ce qui entraîne qu'il est nécessairement identique à cet idéal, d'où la proposition.

Si alors B_1 est un sous-anneau de $\mathcal{E}(E, E'_1)$, contenant $\mathcal{F}(E, E'_1)$, B_2 un sous-anneau de $\mathcal{E}(E, E'_2)$, contenant $\mathcal{F}(E, E'_2)$, tout isomorphisme de B_1 sur B_2 est nécessairement un isomorphisme de

$\mathcal{F}(E, E'_1)$ sur $\mathcal{F}(E, E'_2)$, donc de la forme $u \rightarrow f \circ u \circ f^{-1}$, où f est un di-automorphisme de E. Il en est ainsi en particulier de tout isomorphisme de $\mathcal{E}(E, E'_1)$ sur $\mathcal{E}(E, E'_2)$, et plus particulièrement, de tout *automorphisme* de $\mathcal{L}(E) = \mathcal{E}(E, E^*)$.

18. On sait qu'un anneau simple de longueur *finie* $\mathcal{F}(E, E^*)$ est déterminé à une isomorphie près par cette longueur n (nombre de dimensions de E) et le corps K des opérateurs de E. Il n'en est pas de même pour le cas des anneaux simples infinis, où il y a une multitude de structures non isomorphes deux à deux, correspondant à un *même* corps K et un *même* espace vectoriel E sur K; le théorème 5 va nous permettre de nous rendre compte des possibilités qui se présentent à cet égard.

Auparavant, nous démontrerons une proposition auxiliaire, qui présente d'ailleurs par elle-même un certain intérêt.

Proposition 12. — *Si un espace vectoriel* E *sur un corps* K *a une base infinie* B, *toute base du dual* E^* *de* E *a une puissance au moins égale à celle de l'ensemble* $\mathfrak{P}(B)$ *des parties de* B.

On sait que E^* est isomorphe au produit K^B d'une famille d'espaces vectoriels à gauche identiques à K, l'ensemble d'indices étant B. Considérons dans K^B le sous-espace vectoriel A engendré par l'ensemble F des points dont toutes les coordonnées sont égales à 0 ou à 1; F est équipotent à $\mathfrak{P}(B)$; nous allons voir que toute base de A a une puissance au moins égale à celle de $\mathfrak{P}(B)$, ce qui, en vertu du théorème 2, démontrera la proposition.

D'après le théorème 1, on peut supposer qu'une base de A est formée de points (a_α) de F; tout autre point $a \in F$ s'écrit donc sous la forme $a = \sum_\alpha \lambda_\alpha a_\alpha$, la somme étant étendue à un nombre fini d'indices. Pour chacune des coordonnées ξ_β de a dans K^B, on a donc $\xi_\beta = \sum_\alpha \lambda_\alpha \xi_{\alpha\beta}$, et les λ_α sont bien déterminés en fonction des ξ_β et $\xi_{\alpha\beta}$ par ce système d'une infinité d'équations linéaires; un tel système est par suite équivalent à un système formé d'un nombre fini de ces équations (égal au nombre des λ_α). Or, les coefficients ξ_β et $\xi_{\alpha\beta}$ sont tous égaux à 0 ou 1, et appartiennent par suite au corps *premier* P contenu dans K (et identique, comme on sait, au corps des rationnels ou à celui des classes mod. p, où p est un nombre premier); il en résulte que les λ_α *appartiennent à* P. Or, P est *dénombrable*; l'ensemble des combinaisons linéaires des a_α, à coefficients dans P, est équipotent à l'ensemble produit de P et de l'ensemble Φ des parties *finies* de l'ensemble des a_α; il est par suite équipotent à Φ, donc aussi à la base (a_α); comme il contient F, la proposition est démontrée.

On peut ajouter que, lorsque la puissance de K est *au plus égale à celle de* $\mathfrak{P}(B)$, toute base de K^B est *équipotente à* $\mathfrak{P}(B)$; en effet, dans le cas contraire, K^B aurait une puissance strictement supérieure à celle de $\mathfrak{P}(B)$; mais K^B est alors équipotent à une partie de $[\mathfrak{P}(B)]^B$, donc $[\mathfrak{P}(B)$ étant équipotent à $2^B]$, K^B est équipotent à une partie de $2^{B\times B}$; or, $B \times B$ est équipotent à B, donc K^B est équipotent à $\mathfrak{P}(B)$ ([23]).

19. Revenons à l'étude des anneaux simples $\mathcal{F}(E, E')$, en cherchant d'abord quels sont les sous-espaces vectoriels E′ du dual E^* qui satisfont à la condition (D). Dans le cas fini, nous avons remarqué que E^* seul est dans ce cas; au contraire, si E a une base infinie (e_α), et si e'_α désigne la forme linéaire telle que $e'_\alpha(e_\alpha) = 1$, $e'_\alpha(e_\beta) = 0$ pour $\beta \neq \alpha$, le sous-espace E'_0 de E^* ayant

([23]) Il en résulte que, si une base d'un espace vectoriel E sur un corps K est équipotente à l'ensemble des parties $\mathfrak{P}(B)$ d'un ensemble B, et si la puissance de K est au plus égale à celle de cette base, E est isomorphe à K^B. En particulier, la droite numérique, considérée comme espace vectoriel sur le corps des rationnels, a une base (base de Hamel) ayant la puissance du continu; il existe donc une correspondance biunivoque entre les nombres réels et les suites (r_n) de nombres rationnels, de sorte que, si (r_n) correspond à x et (s_n) à y, $(r_n + s_n)$ correspond à $x + y$, et $(q r_n)$ à qx pour tout nombre rationnel q. Bien entendu, cette démonstration d'existence de semblables correspondances s'appuie sur l'axiome du choix; il serait intéressant d'en déterminer explicitement au moins une (si possible).

Comme autre conséquence de la proposition 12, appliquée lorsque K est un corps fini, on voit que l'espace E, muni de la topologie $\sigma(E, E')$, est partout dense dans son complété, qui est équipotent à $\mathfrak{P}[\mathfrak{P}(E)]$, d'après ce qu'on a vu au n° 15; en outre, ce complété est alors *compact*. On retrouve de cette manière un résultat de M. B. Pospišil [*A remark on bicompact spaces* (*Ann. of Math.*, 38, 1937, p. 845)]; M. L. Schwartz m'avait d'ailleurs communiqué, en 1941, une démonstration de ce résultat très analogue à celle que nous déduisons de la proposition 12.

pour base les e'_α satisfait évidemment à (D); ici, non seulement E'_0 n'est pas identique à E^*, mais il ne lui est pas isomorphe, en vertu de la proposition 12.

Nous avons ainsi un exemple d'un sous-espace E' de E^* satisfaisant à (D) et ayant une base équipotente à celles de E. Mais on peut aussi avoir des sous-espaces E' satisfaisant à (D) et dont une base a une puissance *strictement inférieure* à celle des bases de E. On en a un exemple lorsque E est un *produit* K^B; E peut alors être considéré comme le dual d'un espace F, ayant une base équipotente à B; tout élément de E étant ainsi identifié à une forme linéaire $\xi \rightarrow x(\xi)$ sur F, les éléments de F peuvent être identifiés aux formes linéaires $x \rightarrow x(\xi)$ sur E; F est donc un sous-espace du dual E^*, qui vérifie évidemment la condition (D), et dont une base a une puissance strictement inférieure à celle d'une base de E, d'après la proposition 12.

20. A tout di-automorphisme f de E, donnant un isomorphisme de $\mathcal{F}(E, E'_1)$ sur $\mathcal{F}(E, E'_2)$, correspond, dans E^*, le di-automorphisme f^* « transposé » de f, qui n'est autre que l'application $x' \rightarrow (x' \circ f^{-1})^\sigma$, ainsi qu'on le vérifie aussitôt; on a $E'_2 = f^*(E'_1)$, donc E'_1 et E'_2 doivent tout d'abord être des espaces vectoriels isomorphes, c'est-à-dire (th. 3) avoir des bases équipotentes; comme nous venons de voir qu'il existe des sous-espaces E'_1, E'_2 satisfaisant à (D) et dont les bases ne sont pas équipotentes, on a là une première raison de l'existence d'anneaux simples non isomorphes et correspondant au même espace E.

D'autre part, comme f^* est un di-automorphisme de E^* tout entier, il transforme un sous-espace supplémentaire de E'_1 dans E^* en un sous-espace supplémentaire de E'_2; donc, non seulement E'_1 et E'_2 doivent être isomorphes, mais encore avoir des supplémentaires isomorphes. Par exemple, si E'_1 et E'_2 sont des sous-espaces contenant le sous-espace E'_0 défini au n° 19, et dont les supplémentaires dans E^* ont tous deux un nombre fini de dimensions, E'_1 et E'_2 sont isomorphes, mais $\mathcal{F}(E, E'_1)$ et $\mathcal{F}(E, E'_2)$ ne peuvent être isomorphes que si les supplémentaires de E'_1 et E'_2 ont même nombre de dimensions. En particulier, il n'y a aucun sous-espace E' autre que E^* tel que $\mathcal{F}(E, E')$ soit isomorphe à $\mathcal{F}(E, E^*)$ [on peut le voir aussi autrement en remarquant, d'après le n° 14, que $\mathcal{F}(E, E^*)$ est le *seul* anneau simple correspondant à E et dont les idéaux à droite soient *tous* fermés pour la topologie $\mathfrak{T}$].

Mais ce n'est pas tout. Considérons par exemple le cas où la puissance du corps K est au plus égale à celle d'une base B de l'espace vectoriel E. Alors l'ensemble des di-automorphismes f de E a une puissance au plus égale à celle de $\mathfrak{P}(B)$, puisque l'ensemble de toutes les applications de E dans E est équipotent à $\mathfrak{P}(E)$, et E équipotent à $K \times B$, donc à B. Si l'on prend par exemple pour E' un hyperplan de E^* [satisfaisant à (D), c'est-à-dire partout dense pour la topologie $\sigma(E^*, E)$], l'ensemble des transformés $f^*(E')$ par les transposés de tous les di-automorphismes f de E, a une puissance au plus égale à celle de $\mathfrak{P}(B)$. Mais comme le dual E^{**} de E^* a une base équipotente à $\mathfrak{P}[\mathfrak{P}(B)]$, l'ensemble de tous les hyperplans de E^* est équipotent à $\mathfrak{P}[\mathfrak{P}(B)]$, et il en est de même de l'ensemble des hyperplans satisfaisant à (D) [puisque l'ensemble des hyperplans fermés pour $\sigma(E^*, E)$ est équipotent à E, donc à B].

On en conclut que, si l'on range dans une même classe d'équivalence les anneaux $\mathcal{F}(E, E')$ isomorphes, l'ensemble de ces classes correspondant aux E' qui sont des hyperplans de E^*, a déjà une puissance égale à celle de $\mathfrak{P}[\mathfrak{P}(B)]$.

21. Dans la théorie classique des anneaux simples de longueur finie, on sait qu'on fait jouer un grand rôle aux systèmes d'*idempotents* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ d'un tel anneau A, tels que $c_i c_j = 0$ pour $i \neq j$, que Ac_i soit un idéal à gauche minimal et que A soit somme directe de ces idéaux. On peut se demander de même si, dans un anneau simple quelconque $\mathcal{F}(E, E')$, on peut trouver une famille (c_α) d'idempotents tels que $c_\alpha c_\beta = 0$ pour $\beta \neq \alpha$, que l'idéal à droite engendré par c_α soit minimal, et que $\mathcal{F}(E, E')$ soit somme directe de ces idéaux minimaux. On voit aussitôt que cela est équivalent au problème suivant : existe-t-il dans E une base (e_α) telle que E' contienne les formes linéaires e'_α telles que $e'_\alpha(e_\alpha) = 1$, $e'_\alpha(e_\beta) = 0$ pour $\beta \neq \alpha$? Il en est bien ainsi, par exemple, pour l'anneau $\mathcal{F}(E, E^*)$, ou pour l'anneau $\mathcal{F}(E, E'_0)$ défini au n° 19 (E'_0 ayant précisément été défini de manière à satisfaire à la condition précédente). On observera que s'il existe une telle base, la puissance de toute base de E' doit être au moins égale à celle de

toute base de E; par exemple, il n'existe pas d'ensemble d'idempotents ayant la propriété voulue dans l'anneau $\mathcal{F}(E^*, E)$; mais, dans ce cas, nous venons de voir qu'il en existe un dans l'anneau opposé $\mathcal{F}(E, E^*)$.

Nous allons maintenant donner un exemple d'anneau $\mathcal{F}(E, E')$ tel que, *ni dans cet anneau*, *ni dans son opposé*, il n'existe de tels ensembles d'idempotents.

Prenons pour E un *espace de Hilbert* « séparable » (c'est-à-dire dans lequel il existe un ensemble dénombrable partout dense, au sens de la topologie définie par la norme), et prenons $E' = E$, la forme bilinéaire $B(x, x')$ étant le *produit scalaire* (x, x') dans E; les conditions (D_I) et (D_{II}) sont bien satisfaites. Tout revient à montrer qu'il n'existe pas de base (e_α) de E telle que, pour tout α, l'hyperplan engendré par les $e_\beta \neq e_\alpha$ soit *fermé* (pour la topologie de la norme).

Montrons d'abord qu'une base quelconque (e_α) de E *n'est pas dénombrable*. Dans le cas contraire, on pourrait la ranger en une suite et l'orthogonaliser par le procédé de E. Schmidt, ce qui donnerait une base orthogonale dénombrable de E. Or, une telle base (a_n) ne peut exister, car si (λ_n) est une suite de nombres réels $\neq 0$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2$ converge, les points $x_n = \sum_{p=1}^{n} \lambda_p a_p$ forment dans E une suite de Cauchy, qui ne peut converger vers aucune combinaison linéaire d'un nombre fini de a_n; l'ensemble de ces combinaisons ne peut donc être identique à E, qui est complet par hypothèse.

Considérons alors dans E un ensemble dénombrable partout dense A; chacun des éléments de A s'exprime par une combinaison linéaire des e_α, donc l'ensemble dénombrable B des e_α qui interviennent dans toutes ces combinaisons linéaires, engendre, lui aussi, un sous-espace vectoriel partout dense dans E. Or, B ne peut être identique à l'ensemble de tous les e_α, d'après ce qui précède; mais alors, si $e_\alpha \notin B$, l'hyperplan engendré par tous les $e_\beta \neq e_\alpha$ contient le sous-espace engendré par B, et est *a fortiori* partout dense, donc non fermé.

(Manuscrit reçu le 26 octobre 1942.)