E. LUCAS

Sur les suites de Farey

Bulletin de la S. M. F., tome 6 (1878), p. 118-119
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__118_0>

Sur les suites de Farey; par M. Édouard Lucas [1].

(Séance du 21 novembre 1877.)

Considérons les suites

$$
\begin{array}{l}
1,\ 1,\\
1,\ 2,\ 1,\\
1,\ 3,\ 2,\ 3,\ 1,\\
1,\ 4,\ 3,\ 5,\ 2,\ 5,\ 3,\ 4,\ 1,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}
$$

telles que chacune d'elles s'obtient en intercalant dans la précédente la somme de deux termes consécutifs, dans leur intervalle. On a les propriétés suivantes :

1° Le nombre des termes de la $n^{\text{ième}}$ suite est égal à $2^{n-1}+1$;

2° La somme des termes de la $n^{\text{ième}}$ suite est égale à $3^{n-1}+1$;

3° La somme des termes pris avec les signes alternés est $1-3^{n-2}$ pour $n \geqq 2$;

4° Les deux plus grands termes de la $n^{\text{ième}}$ suite ont pour rang

$$2^{n-2}+1 \pm 2^{n-1}$$

et pour valeur

$$\frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}-(1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}.$$

5° Le terme de la $n^{\text{ième}}$ suite, dont le rang est

$$2^{n-2}+1 \pm [2^{n-3}-2^{n-4}+2^{n-5}\ldots-(-1)^p 2^{n-p}],$$

est égal, en supposant $p \geqq 2$, à

$$\frac{(1+\sqrt{5})^{p+1}-(1-\sqrt{5})^{p+1}}{2^{p+1}\sqrt{5}}.$$

6° Le terme de la $n^{\text{ième}}$ suite dont le rang est

$$2^{n-2}+1 \pm [2^{n-2}-2^{n-3}+2^{n-4}-\ldots+(-1)^p 2^{n-p}]$$

est égal, en supposant $p \geqq 3$, à

$$\frac{(1+\sqrt{5})^{p-1}+(1-\sqrt{5})^{p-1}}{2^{p-1}}.$$

---

(1) *Voir* le Mémoire de M. Halphen dans le précédent volume, p. 170.

7° Enfin nous rappellerons cette intéressante propriété signalée par M. Halphen : la $n^{\text{ième}}$ suite et chacune des suivantes contiennent le nombre n autant de fois qu'il y a d'entiers inférieurs et premiers à n.

On généralise les résultats précédents, en remplaçant la première suite 1, 1 par deux nombres quelconques a et b, et en faisant l'intercalation convenue.