BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUELINE FERRAND

Étude de la correspondance entre les frontières dans la représentation conforme

Bulletin de la S. M. F., tome 70 (1942), p. 143-174
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1942__70__143_0>

ÉTUDE DE LA CORRESPONDANCE ENTRE LES FRONTIÈRES DANS LA REPRÉSENTATION CONFORME;

PAR M^lle JACQUELINE FERRAND.

1. Dans un Mémoire précédent (¹) nous avons étudié certaines propriétés de continuité au voisinage du cercle K($|z| = 1$) d'une fonction méromorphe univalente $\zeta = f(z)$ qui représente conformément l'intérieur C de ce cercle sur un domaine simplement connexe Δ (de la variable ζ). Une méthode basée sur la transformation de l'intégrale de Dirichlet par l'inégalité de Schwarz nous a permis d'étudier, dans le sens $C \rightarrow \Delta$, la correspondance entre les frontières, grâce aux notions introduites par M. Carathéodory (²), en montrant d'abord que si z tend vers un point du cercle K, les points d'accumulation de $f(z)$ appartiennent à un bout premier (Primende) de la frontière Γ de Δ. Pour compléter cette étude, il fallait ensuite montrer qu'inversement, si ζ tend vers un bout premier de Γ, son correspondant z tend vers un point unique et déterminé de K. La démonstration de M. Carathéodory faisait intervenir ici le théorème de Fatou, qui n'est pas d'un caractère élémentaire. C'est pourquoi nous avions préféré (Mémoire cité, § 17) nous ramener à la démonstration que M. Montel (³) a donnée pour le cas où le bout premier se réduit à un point accessible, et qui est basée sur l'emploi des majorantes harmoniques.

Nous aurions pu conserver l'unité de méthode en appliquant à cette réciproque une démonstration analogue à celle de la proposition directe : on obtient alors, pour la continuité de la fonction

---

(¹) J. FERRAND, *Étude de la représentation conforme au voisinage de la frontière* (*Annales Éc. Norm. Sup.*, 1942, pp. 43-106).

(²) C. CARATHÉODORY, *Ueber die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete* (*Math. Annalen*, t. 63, 1913, pp. 323-370).

(³) P. MONTEL, *Sur la représentation conforme* (*Journ. de Math.*, 7ᵉ série, t. 3, 1917, p. 1-54.

inverse $z = \varphi(\zeta)$ des résultats analogues à ceux que nous avons établis pour $\zeta = f(z)$, et même plus précis.

C'est ce que nous nous proposons de montrer ici. Pour la clarté et l'autonomie de l'exposé, nous reprendrons brièvement par notre méthode toute la théorie de la correspondance entre les frontières, en renvoyant, pour certaines démonstrations, au Mémoire cité : à tous les résultats connus de cette théorie, nous apporterons une démonstration nouvelle et des précisions d'ordre métrique. Il est remarquable que nous puissions exposer toute cette théorie sans utiliser autre chose que la propriété la plus élémentaire des fonctions holomorphes : l'existence d'une dérivée. Encore cette hypothèse n'est-elle pas entièrement nécessaire, et tous les résultats obtenus par notre méthode s'étendent, par simple modification de coefficients dans les inégalités, aux *transformations à excentricité bornée, ou quasi conformes*, introduites par M. Ahlfors [1], c'est-à-dire aux transformations biunivoques et continûment différentiables $\zeta = f(z)$ d'un domaine C en un domaine Δ qui, à un cercle infiniment petit de centre z_0, contenu dans C, font correspondre dans Δ une ellipse infiniment petite de centre $\zeta_0 = f(z_0)$, d'excentricité bornée par un nombre fixe inférieur à 1. (Il en résulte que la transformation inverse est aussi à excentricité bornée.) Si l'excentricité est nulle, la transformation est conforme.

Posons, en effet, $z = x + iy$, $\zeta = X + iY$:

$$ds^2 = |dz|^2 = dx^2 + dy^2,$$

$$d\sigma^2 = |d\zeta|^2 = dX^2 + dY^2 = E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2.$$

Le rapport $\frac{d\sigma}{ds}$ des arcs élémentaires décrits par ζ et z est compris entre les nombres $\alpha(z)$ et $\beta(z)$ qui mesurent les demi-axes de l'ellipse indicatrice : $Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 = 1$. Le rapport

$$\frac{d\Sigma}{dS} = \sqrt{EG - F^2}$$

des aires élémentaires décrites par ζ et z est égal à $\alpha(z)\,\beta(z)$.

---

[1] L. Ahlfors, *Zur Theorie der Ueberlagerungsflächen* (*Acta Math.*, t. 65, § 24, 1935, p. 185); *voir* également R. Nevanlinna, *Eindentige analytische Funktionen* (Berlin, J. Springer, 1936, p. 343).

L'ellipse indicatrice ayant une excentricité bornée, le rapport $\frac{\alpha(z)}{\beta(z)}$ est uniformément borné dans les deux sens. Donc on a

$$\frac{1}{K}\frac{d\Sigma}{dS} \leqq \frac{d\sigma^2}{ds^2} \leqq K\frac{d\Sigma}{dS},$$

K étant une constante qui devient égale à 1 si la transformation est conforme. Cette inégalité permet, en introduisant le coefficient K, la transformation classique de l'intégrale de Dirichlet.

C. Q. F. D.

En particulier nous montrerons que le théorème de Fatou s'applique à ces transformations. Pour pouvoir leur étendre les résultats établis au Chapitre I du Mémoire cité [avec $\varphi(r) = 1$], il suffit de supposer que la fonction $\sqrt{EG - F^2} = \alpha\beta = U(z)$ (qui remplacera $|f'|^2$ dans les énoncés) est *subharmonique*, ce qui entraîne que sa valeur en un point z_0 quelconque est au plus égale au rapport $\frac{\Sigma(R)}{\pi R^2}$ de l'aire $\Sigma(R)$ décrite par $f(z)$, lorsque z décrit un cercle $|z - z_0| < R$ intérieur à C, à l'aire πR^2 de ce cercle [5] : ceci remplacera en effet au paragraphe 3 le théorème de Bieberbach.

Enfin les résultats les plus précis obtenus au Chapitre II (§§ 16 à 23) resteront valables si nous supposons que cette fonction satisfait au théorème de Koebe, c'est-à-dire si $\frac{U(z)}{U(z_0)}$ est borné inférieurement par un nombre fixe lorsque z décrit le cercle $|z - z_0| \leqq \frac{R}{2}$, le cercle $|z - z_0| < R$ étant intérieur à C.

---

(5) Si la transformation est conforme, cette deuxième hypothèse est une conséquence directe de la première, comme le montre un lemme établi par M. J. Dufresnoy (*Annales Éc. Norm. Sup.*, 1941, § 27, p. 218). Dans le cas général, en reprenant le calcul de M. Dufresnoy, on peut montrer que l'on a

$$\frac{S(R)}{S(r)} \geqq \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{2}{K}} \quad \text{si } R > r,$$

d'autre part

$$\frac{S(r)}{r^2} \to U(z_0) \quad \text{lorsque } r \to 0,$$

d'où, si $K = 1$,

$$\frac{S(R)}{R^2} \geqq U(z_0).$$

Enfin cette méthode permettrait d'étudier directement, sans l'intermédiaire du cercle C, les transformations conformes, ou quasi-conformes, de deux domaines simplement connexes quelconques Δ, Δ' l'un dans l'autre.

2. Reprenons les définitions de M. Carathéodory : nous appellerons *coupure* du domaine Δ un arc simple de Jordan [6] q ayant ses extrémités α, β sur la frontière Γ de Δ et dont tous les autres points sont intérieurs à Δ. Les extrémités de q peuvent n'être pas distinctes, mais il faut alors que Δ possède des points frontières dans les deux domaines en lesquels la courbe fermée q partage le plan.

Nous serons amenés à introduire une notion plus générale que celle de coupure, et que nous proposons d'appeler *séparatrice*. C'est le lieu du point de Δ

$$\sigma(t) = f(t) + ig(t),$$

lorsque t décrit l'intervalle $0 < t < 1$, $f(t)$ et $g(t)$ étant deux fonctions continues dans cet intervalle (mais pas en général aux extrémités), telles que $\sigma(t)$ ne prenne jamais deux fois la même valeur, et que lorsque $t \to 0$ ou lorsque $t \to 1$, la distance du point $\sigma(t)$ à la frontière de Δ tende vers zéro. Si les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ sont continues pour $t = 0$ et pour $t = 1$, on a une coupure ordinaire (sous réserve pour le cas où les extrémités sont confondues) privée de ses extrémités.

Toute portion de la séparatrice décrite par $\sigma(t)$ quand t décrit un segment

$$t_0 \leqq t \leqq t_1 \qquad (0 < t_0 < t_1 < 1)$$

est un arc simple de Jordan.

Première propriété. — *Toute séparatrice (et en particulier toute coupure) partage Δ en deux domaines simplement connexes.*

---

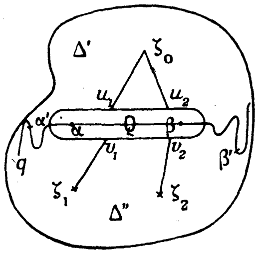
(6) Nous entendons, par arc simple de Jordan, un continu sans point double décrit par un point $\sigma(t) = f(t) + ig(t)$, $f(t)$ et $g(t)$ étant des fonctions continues pour $0 \leqq t \leqq 1$. Il n'est pas nécessaire de supposer les coupures analytiques, comme le fait M. Carathéodory, ni même pourvues de tangentes.

La propriété a été démontrée par Jordan ([7]) dans le cas où Δ est limité par une courbe simple continue fermée, et où la séparatrice q est elle-même un arc simple.

Dans le cas général, il est évident que si ζ_0 est un point fixe de Δ, l'ensemble des points de Δ pouvant être joints à ζ_0 par un arc simple de Jordan intérieur à Δ et ne rencontrant pas la séparatrice q est un domaine simplement connexe Δ'. Il suffit de montrer que l'ensemble Δ'' des points de Δ non situés sur q qui n'ont pas cette propriété est connexe; il en résultera que c'est un domaine simplement connexe. Soient donc ζ_1, ζ_2 deux points de Δ ne pouvant être joints à ζ_0 sans rencontrer q. Nous allons montrer qu'on peut joindre ζ_1, ζ_2 par un arc de Jordan ne rencontrant pas q, donc formé de points de Δ''.

ζ_0, ζ_1, ζ_2 étant intérieurs à Δ, on peut trouver deux arc simples continus $\widehat{\zeta_0\zeta_1}$ et $\widehat{\zeta_0\zeta_2}$ restant à une distance de Γ supérieure à un nombre $d > 0$. D'après la définition des séparatrices, on peut trouver sur q un arc $\widehat{\alpha\beta}$ tel que les points de q n'appartenant pas à $\widehat{\alpha\beta}$ soient distants de Γ de moins de d (*fig.* 1).

Fig. 1.



Soit $\widehat{\alpha'\beta'}$ un arc de q contenant l'arc $\widehat{\alpha\beta}$ (sans extrémité commune). Désignons par δ' la borne inférieure, nécessairement positive, des distances à l'arc $\widehat{\alpha\beta}$ des points de q n'appartenant pas à l'arc $\widehat{\alpha'\beta'}$, et par δ la borne inférieure des distances à Γ des points de l'arc $\widehat{\alpha\beta}$. D'après les propriétés des arcs de Jordan, l'arc $\widehat{\alpha\beta}$ peut être enfermé dans le domaine Q limité par une courbe fermée de Jordan P dont tous les points sont, quel que soit $\varepsilon > 0$, à une

([7]) C. Jordan, *Cours d'Analyse* (Gauthier-Villars, 1893, t. I, § 102).

distance inférieure à ε de l'arc $\widehat{\alpha\beta}$, et n'ayant en commun avec l'arc $\widehat{\alpha'\beta'}$ que deux points σ, σ'. Si nous prenons ε inférieur à δ, à δ', et aux distances des points ζ_0, ζ_1, ζ_2 à l'arc $\widehat{\alpha\beta}$, P sera intérieure à Δ, n'aura en commun avec q que les points σ, σ', et laissera les points ζ_0, ζ_1, ζ_2 à son extérieur.

Les arcs $\widehat{\zeta_0\zeta_1}$ et $\widehat{\zeta_0\zeta_2}$, devant rencontrer q et restant à distance de Γ supérieure à d, ne rencontrent que l'arc $\widehat{\alpha\beta}$ de q; ils rencontrent donc aussi P. Soient u_1 le premier point de rencontre de l'arc $\widehat{\zeta_0\zeta_1}$ avec P, et v_1 le dernier point de rencontre, lorsqu'on va de ζ_0 vers ζ_1. On définit de même les points u_2 et v_2 de l'arc $\widehat{\zeta_0\zeta_2}$. Ces points sont tous distincts de σ, σ' puisque σ, σ' étant des points de q n'appartenant pas à l'arc $\widehat{\alpha\beta}$ ne peuvent être sur les arcs $\widehat{\zeta_0\zeta_1}$ ou $\widehat{\zeta_0\zeta_2}$. Les quatre points u_1, v_1, u_2, v_2 déterminent sur P quatre arcs, dont deux au plus contiennent l'un des points σ, σ'. Or les deux arcs $\widehat{u_1v_1}$ et les deux arcs $\widehat{u_2v_2}$ doivent rencontrer q, sans quoi on pourrait joindre ζ_0 à ζ_1 ou ζ_0 à ζ_2 sans rencontrer q, ils contiennent donc chacun un point σ ou σ'; il en est de même des deux arcs $\widehat{u_1v_2}$ et des deux arcs $\widehat{u_2v_1}$. Il en résulte que les points u_1, u_2 sont sur un même arc $\widehat{\sigma\sigma'}$ de P, et que les points v_1, v_2 sont sur l'autre arc $\widehat{\sigma\sigma'}$ de P. Il existe donc un arc $\widehat{v_1v_2}$ de P ne rencontrant pas q. On peut aller de ζ_1 à ζ_2 par le chemin formé de l'arc $\widehat{\zeta_1v_1}$, de cet arc $\widehat{v_1v_2}$, et de l'arc $\widehat{v_2\zeta_2}$, sans rencontrer q. C. Q. F. D.

Définition. — Des deux domaines Δ', Δ'' en lesquels q divise Δ, celui qui ne contient pas le point ζ_0 sera appelé *domaine séparé* de ζ_0 par q.

DEUXIÈME PROPRIÉTÉ. — *Si deux séparatrices q_1, q_2 n'ont aucun point commun* ([8]), *ou bien les domaines Δ_1, Δ_2, qu'elles séparent de ζ_0 sont sans point commun, ou bien l'un de ces domaines est contenu dans l'autre.*

([8]) Il est inutile d'ajouter : intérieur à Δ, puisqu'une séparatrice n'est formée que de points intérieurs à Δ. Pour des coupures, au contraire, il est bon de préciser : aucun point commun distinct des extrémités.

Soient en effet Δ_1, Δ'_1 les domaines en lesquels q_1 partage Δ, Δ'_1 contenant le point ζ_0; définissons de même Δ_2 et Δ'_2. La séparatrice q_2 est tout entière contenue dans l'un ou l'autre des domaines Δ_1, Δ'_1, puisqu'elle n'a aucun point commun avec q_1, et si ζ, ζ' sont deux points de q_2, on peut aller de ζ en ζ', en suivant l'arc $\widehat{\zeta\zeta'}$ de q_2, sans rencontrer q_1. Si q_2 est dans Δ_1, pour aller de ζ_0 en un point de Δ_2 il faut traverser q_2, donc q_1, et Δ_1 contient Δ_2. De même si q_1 est dans Δ_2, Δ_2 contient Δ_1. Il reste à examiner le cas où q_2 est dans Δ'_1 et q_1 dans Δ'_2 : on peut alors joindre ζ_0 à tout point de Δ_1 sans rencontrer q_2, et à tout point de Δ_2 sans rencontrer q_1 : donc Δ'_1 contient Δ_2, Δ'_2 contient Δ_1 et les domaines Δ_1, Δ_2 sont sans point commun.

C. Q. F. D.

Définition. — Si les domaines Δ_1, Δ_2 sont sans point commun, nous dirons que les séparatrices q_1, q_2 sont *extérieures*. Si Δ_1 contient Δ_2, nous dirons que q_1 *contient* q_2.

Nous appellerons *coupure circulaire* une coupure constituée par un arc de cercle centré sur Γ. Donnons-nous un cercle γ de centre ω sur Γ, de rayon ρ; si ρ est inférieur au demi-diamètre D de Γ, ou si ce diamètre est infini (le diamètre d'un ensemble étant la borne supérieure des distances de deux points de l'ensemble), il y a sur γ des points de Γ. L'intersection de Δ et de la circonférence γ se compose d'un ensemble fini ou dénombrable d'arcs ouverts γ_1, γ_2, ..., γ_n, ... dont chacun, si on lui adjoint ses extrémités, devient une coupure du domaine Δ. Ces arcs sont deux à deux sans point commun.

Si ζ_0 est un point de Δ extérieur au cercle γ (ce qui arrivera sûrement si $\rho < \delta$, δ étant la distance de ζ_0 à la frontière Γ), on ne pourra aller de ζ_0 en un point de Δ intérieur au cercle γ sans rencontrer une de ces coupures au moins. Donc l'ensemble des coupures de rayon ρ contient l'ensemble des coupures de rayon $\rho' < \rho$ et de même centre ω.

γ_1, γ_2, ..., γ_n, ... seront appelées les coupures *portées* par la circonférence γ; ω sera leur centre et ρ leur rayon. Elles sont définies quel que soit ω si $\rho < \frac{D}{2}$, et elles séparent ζ_0 de tout point intérieur à γ si $\rho < \delta$.

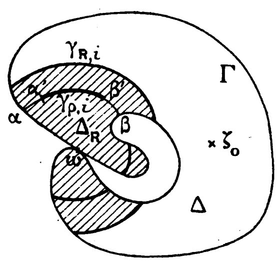
3. Lemme I. — *La représentation conforme de Δ sur C fait correspondre aux coupures circulaires $\gamma_{\rho,i}$, portées par un même cercle de centre ω fixe et de rayon ρ variable, un ensemble de séparatrices $k_{\rho,i}$ de C rectifiables pour une plénitude de valeurs de ρ et dont les longueurs satisfont à l'inégalité*

$$(1) \qquad \int_0^{R} \sum_i \frac{l_i^2(\rho)}{\Theta_i(\rho)} \frac{d\rho}{\rho} < \pi \qquad \left[R < \frac{D}{2}\right],$$

$\Theta_i(\rho)$ étant la mesure en radians de la coupure circulaire $\gamma_{\rho,i}$ et $l_i(\rho)$ la longueur de la coupure correspondante $k_{\rho,i}$. L'intégrale est prise au sens de Lebesgue.

Considérons une coupure $\gamma_{\rho,i}$, d'extrémités α, β (*fig.* 2); ôtons de l'arc $\widehat{\alpha\beta}$ deux petits arcs $\widehat{\alpha\alpha'}$ et $\widehat{\beta'\beta}$ de mesure angulaire $\varepsilon\Theta_i(\rho)$;

Fig. 2.



à l'arc $\widehat{\alpha'\beta'} = \gamma'_{\rho,i}$ restant, complètement intérieur à Δ, la fonction $z = \varphi(\zeta)$ fait correspondre un arc simple $k'_{\rho,i}$ complètement intérieur à C et rectifiable, dont la longueur $l_i(\rho, \varepsilon)$ est donnée par l'intégrale

$$l_i(\rho, \varepsilon) = \int_{\gamma'_{\rho,i}} |\varphi'(\omega + \rho e^{i\theta})| \rho \, d\theta,$$

d'où, par application de l'inégalité de Schwarz,

$$l_i^2(\rho, \varepsilon) \leqq \rho \times \Theta_i(\rho) \times (1 - 2\varepsilon) \times \int_{\gamma'_{\rho,i}} |\varphi'(\omega + \rho e^{i\theta})|^2 \rho \, d\theta,$$

et, en faisant la somme des inégalités analogues pour toutes les valeurs de l'indice i, ρ étant fixé ainsi que ε,

$$\sum_i \frac{l_i^2(\rho, \varepsilon)}{\rho \Theta_i(\rho)} < \int_{\sum_i \gamma'_{\rho,i}} |\varphi'(\zeta)|^2 \rho \, d\theta,$$

enfin par intégration

$$\int_0^R \sum_i \frac{l_i^2(\rho, \varepsilon)}{\rho \Theta_i(\rho)} d\rho < \iint_{\Delta'_R} |\varphi'(\zeta)|^2 \rho \, d\rho \, d\theta,$$

Δ'_R étant l'ensemble balayé par les coupures $\gamma'_{\rho,i}$ lorsque ρ varie de R à o. L'intégrale double du deuxième membre représente l'aire de l'ensemble C'_R correspondant dans C; elle est inférieure à l'aire de C, soit π. L'inégalité ayant lieu quel que soit ε, si ε tend vers zéro en décroissant, le premier membre ne peut que croître; comme il est borné, il a une limite au plus égale à π. La fonction continue $\sum_i \frac{l_i^2(\rho, \varepsilon)}{\Theta_i(\rho)}$ a donc pour limite une fonction sommable. Si l'on remarque qu'en vertu de l'inégalité de Schwarz on a

$$\left[\sum_i l_i\right]^2 \leqq \sum_i \Theta_i \times \sum_i \frac{l_i^2}{\Theta_i},$$

et que d'autre part $\sum_i \Theta_i \leqq 2\pi$, on voit que la fonction

$$L(\rho, \varepsilon) = \sum_i l_i(\rho, \varepsilon)$$

a pour limite une fonction sommable $L(\rho)$ satisfaisant à l'inégalité

$$(1') \qquad \int_0^R \frac{L^2(\rho)}{\rho} d\rho \leqq 2\pi^2.$$

Excepté au plus pour un ensemble de valeurs de ρ de mesure nulle, $L(\rho, \varepsilon)$ a, lorsque ε tend vers zéro, une limite finie; pour une plénitude de valeurs de ρ tous les arcs $k'_{\rho,i}$ ont donc pour limite des arcs $k_{\rho,i}$ rectifiables, dont la somme des longueurs est $L(\rho)$, et dont les extrémités sont sur la frontière K de C. Le lemme I est donc démontré, nous le compléterons plus loin.

4. Corollaires. — *a. L'inégalité* (1′) *montre que, lorsque* $\rho \to 0$, $L(\rho) = \sum_i l_i(\rho)$ *tend approximativement vers zéro.*

Plus précisément, dans tout intervalle $R < \rho < \sqrt{R}$, *il existe au moins une valeur* ρ *pour laquelle* $L(\rho) \leqq \frac{2\pi}{\sqrt{|\log R|}}$.

Aux coupures $\gamma_{\rho,i}$ déterminées par cette valeur de ρ correspondent dans C des séparatrices $k_{\rho,i}$; aux domaines $\Delta_{\rho,i}$ séparés de ζ_0 par les coupures $\gamma_{\rho,i}$ correspondent les domaines $C_{\rho,i}$ séparés de $z_0 = \varphi(\zeta_0)$ par les séparatrices $k_{\rho,i}$.

Soient a_i, b_i les extrémités de $k_{\rho,i}$ sur K; le cercle de centre a_i de rayon $l_i(\rho)$ contient à son intérieur la coupure $k_{\rho,i}$ et l'un des arcs $\widehat{a_i b_i}$ de K, donc si $l_i(\rho)$ est assez petit pour que ce cercle ne contienne pas z_0, il contiendra tout le domaine $C_{\rho,i}$; ceci aura lieu si $l_i(\rho)$ est inférieur à la distance d de z_0 à K. Or, puisque $R < \rho$, les coupures $\gamma_{R,i}$ sont contenues dans l'ensemble de coupures $\gamma_{\rho,i}$, les domaines $C_{R,i}$ correspondants sont contenus dans l'ensemble des domaines $C_{\rho,i}$, donc dans l'ensemble des cercles $|z - a_i| \leqq l_i(\rho)$.

b. Donc, si R *est assez petit, les séparatrices* $k_{R,i}$ *et les domaines* $C_{R,i}$ *qu'elles séparent de* z_0 *dans* C *peuvent être enfermés dans un ensemble de cercles dont la somme des rayons est inférieure à* $\frac{2\pi}{\sqrt{|\log R|}}$

$$\left[\text{ceci aura lieu sûrement si } R < \delta,\ R < \frac{D}{2} \quad \text{et} \quad \frac{2\pi}{\sqrt{|\log R|}} < d\right].$$

Ce résultat permet de donner pour $\varphi(\zeta)$ un module de continuité, en un sens généralisé, soit :

c. Si deux points ζ, ζ' *peuvent être séparés de* ζ_0 *par une même coupure circulaire de rayon* R, *on a*

$$|\varphi(\zeta') - \varphi(\zeta)| < \frac{2\pi}{\sqrt{|\log R|}},$$

dès que R *est assez petit.*

5. Si l'on considère une suite particulière de coupures concentriques emboîtées $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ (c'est-à-dire telles que chacune

contienne les suivantes) dont les rayons $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$ vont en décroissant et tendent vers zéro, les domaines C_n correspondant aux domaines Δ_n qu'elles séparent de ζ_0 sont aussi emboîtés. Le diamètre de C_n étant inférieur à $\frac{2\pi}{\sqrt{|\log \rho_n|}}$ tend vers zéro, donc les fermetures de ces domaines ont en commun un point unique a du cercle K. De même les domaines Δ_n ne peuvent avoir aucun point intérieur commun; l'intersection de leurs fermetures est un continu de points de Γ, que M. Carathéodory appelle *bout premier* Ω.

Définitions. — Nous sommes donc amenés à prendre pour élément de la topologie sur Γ *les bouts premiers définis par une suite de coupures circulaires concentriques et emboîtées dont les rayons tendent vers zéro.* Nous dirons que ces coupures *séparent* Ω de ζ_0, et par extension que toute séparatrice contenant une coupure circulaire qui sépare Ω de ζ_0, *sépare* elle-même Ω de ζ_0. Deux bouts premiers seront *identiques* si toute séparatrice séparant l'un de ζ_0 sépare aussi l'autre.

Montrons que *si deux bouts premiers* Ω, Ω' *ne sont pas identiques, il existe une séparatrice séparant* Ω *de* ζ_0 *et une séparatrice séparant* Ω' *de* ζ_0 *extérieures l'une à l'autre.*

Si les bouts premiers ne sont pas identiques, c'est qu'il existe par exemple une séparatrice χ séparant Ω de ζ_0 et ne séparant pas Ω', donc ne contenant, quel que soit p, aucune coupure circulaire de la suite γ'_p définissant le bout premier Ω', mais contenant pour n assez grand ($\geqq N$) toutes les coupures circulaires de la suite γ_n définissant le bout Ω. Si le point ω, centre commun des coupures γ_n définissant Ω, et le point ω', centre commun des coupures γ'_p définissant Ω', sont distincts, pour n et p assez grands ($n \geqq n_0, p \geqq p_0$) les cercles $|\zeta - \omega| = \rho_n$ et $|\zeta - \omega'| = \rho'_p$ sont extérieurs l'un à l'autre; prenons $n_0 > N$, ou bien il existe une valeur p_1 telle que γ_{n_0} soit extérieure à γ'_{p_1}, et le théorème est démontré, ou bien γ_{n_0} est contenue dans γ'_p (car γ_{n_0} ne peut contenir γ'_p, ce qui entraînerait que χ contient γ'_p) quel que soit $p > p_0$. Ceci n'est pas possible, car les domaines Δ'_p séparés par les coupures γ'_p n'ont en commun aucun point intérieur, donc ne peuvent contenir la coupure fixe γ_{n_0}.

Si les points ω et ω' sont confondus, les coupures γ_n et γ'_p ne peuvent avoir de point commun intérieur à Δ que si elles sont confondues; pour n assez grand ceci n'est plus possible puisque χ contient γ_n et ne contient pas γ'_p. La démonstration s'achève comme précédemment. C. Q. F. D.

Enfin nous dirons qu'une suite de points ζ_p *tend* vers le bout premier Ω défini par les coupures circulaires γ_n si, quel que soit n, il n'existe qu'un nombre fini de points de la suite ζ_p extérieurs au domaine Δ_n séparé de ζ_0 par γ_n.

Nous pourrons alors énoncer le théorème

Théorème I. — *Si le point ζ de Δ tend vers un bout premier Ω de Γ, le point correspondant $z = \varphi(\zeta)$ tend vers un point a bien déterminé de* K, *et l'on a le module de continuité*

$$|z - a| < \frac{2\pi}{\sqrt{|\log R|}},$$

si ζ et Ω peuvent être séparés de ζ_0 par une même eoupure circulaire de rayon R.

Nous n'avons pas démontré qu'à deux bouts premiers distincts correspondaient deux points distincts du cercle K; ceci résultera de l'étude inverse.

6. Un cas simple, où nous pourrons déterminer une suite de coupures circulaires emboîtées γ_n, est celui où leur centre commun est un *point accessible* α de Γ, c'est-à-dire l'extrémité d'un arc de Jordan Λ, issu de ζ_0, dont tous les points autres que α sont intérieurs à Δ. On dit par extension qu'une coupure sépare α de ζ_0 si elle sépare de ζ_0 tout point α' suffisamment voisin de α sur Λ. Parmi les coupures $\gamma_{\rho,i}$ de centre α, de rayon ρ, qui séparent α de ζ_0, il y en a une qui contient toutes les autres puisque ces coupures sont sans point commun et ne peuvent être extérieures : nous la désignerons par γ_ρ. Si $\rho' < \rho$, $\gamma_{\rho'}$ est contenue dans l'une des coupures $\gamma_{\rho,i}$, et cette coupure doit séparer ζ_0 de α, elle est donc identique à γ_ρ ou contenue dans γ_ρ. Dans tous les cas $\gamma_{\rho'}$ est contenue dans γ_ρ. La famille des coupures emboîtées γ_ρ détermine un bout premier Ω, auquel correspond un point a du cercle K.

A l'arc Λ correspond dans C un arc de Jordan Γ issu de z_0 aboutissant en a.

Théorème I'. — *A un arc de Jordan* Λ *tracé dans* Δ *aboutissant en un point accessible* α *de* Γ *correspond un arc de Jordan* L *aboutissant en un point déterminé* a *de* K.

Un point accessible n'est bien déterminé que si l'on se donne, avec son support géométrique α, un arc Λ aboutissant en ce point, c'est-à-dire la façon d'approcher α. En effet un même point géométrique α peut être le support de plusieurs points accessibles (et même d'une infinité) s'il est l'extrémité commune de plusieurs arcs issus de ζ_0 et ne pouvant se réduire l'un à l'autre par déformation continue dans Δ. On dit alors que le point α est *multiple*.

Avec les définitions données, les extrémités d'une coupure sont toujours des points accessibles *distincts* de Γ, et des points accessibles *distincts* appartiennent à des bouts premiers *distincts*. Quand nous aurons montré (§ 7) qu'à des bouts premiers distincts correspondent des points distincts de K, nous pourrons énoncer le

Corollaire du théorème I. — *A une coupure de* Δ *correspond une coupure de* C.

Ce résultat permettra de préciser l'énoncé du lemme I, car les séparatrices $k_{\rho,i}$ sont, pour toutes les valeurs de ρ, des coupures de C.

7. L'étude de la correspondance inverse $\zeta = f(z)$ a déjà été faite [Mémoire cité, § 14 et suiv.]. Rappelons brièvement la méthode. On démontre d'abord le lemme

Lemme II. — *Soit* C_r *une coupure circulaire de rayon* r *de* C, *centrée en un point* a *de* K*;* q_r *la séparatrice qui lui correspond dans* Δ*; pour une plénitude de valeurs de* r, q_r *est rectifiable et sa longueur* $\lambda(r)$ *satisfait à l'inégalité*

$$\int_0^R \frac{\lambda^2(r)}{r}\,dr < \pi S, \tag{2}$$

S étant l'aire intérieure du domaine Δ; si cette aire n'est pas finie, on applique l'inégalité en prenant pour $\lambda(r)$ la longueur sphérique de q_r et pour S l'aire sphérique ($S \leqq 4\pi$) du domaine Δ. (Le fait que C soit un cercle au lieu d'un demi-plan ne fait que renforcer l'inégalité.)

Cette inégalité montre que *si* $r \to 0$, $\lambda(r)$ *tend approximativement vers zéro.* On peut donc trouver une suite r_n, tendant vers zéro en décroissant, telle que $\lambda(r_n) \to 0$. Les séparatrices q_{r_n} correspondantes sont emboîtées comme les coupures C_{r_n}, elles sont rectifiables et leurs longueurs tendent vers zéro. On peut donc en extraire une suite partielle q_{n_p} convergeant vers un point unique ω de Γ, c'est-à-dire trouver un point ω et une suite ρ_p tendant vers zéro en décroissant telle que q_{n_p} soit intérieure au cercle $|\zeta - \omega| < \rho_p$. Parmi les coupures de Δ portées par ce cercle et contenant q_{n_p}, il y en a une contenant toutes les autres, nous la désignerons par γ_p. Les coupures γ_p sont emboîtées, elles définissent un bout premier Ω de Γ. A un point z de C, distant de a de moins de r_{n_p}, correspond un point ζ de Δ du domaine Δ_p séparé de ζ_0 par γ_p [dès que r_{n_p} est inférieur à la distance d de $z_0 = \varphi(\zeta_0)$ à K].

Théorème II. — *Donc si une suite z_n de points de* C *tend vers un point a de* K, *les points d'accumulation de la suite correspondante $\zeta_n = f(z_n)$ appartiennent à un bout premier déterminé de* Γ, $\Omega(a)$.

En comparant au théorème I nous voyons que $\Omega(a)$ *coïncide avec l'ensemble des points limites de $f(z)$ lorsque z tend vers a.*

Deux points distincts a, a' de K pouvant toujours être séparés de z_0 par deux coupures circulaires extérieures l'une à l'autre k, k' (il suffit de prendre deux coupures de centres respectifs a, a', de rayons assez petits), il leur correspond des bouts premiers Ω, Ω', pouvant être séparés de ζ_0 par les deux séparatrices q, q' images respectives de k, k', extérieures l'une à l'autre comme k et k' : donc à deux points distincts de K correspondent deux bouts premiers distincts de Γ ([9]). D'autre part puisqu'à un point a correspond un bout premier unique, réciproquement à deux bouts premiers

---

([9]) Ceci résulte aussi du théorème I, car nous avons montré que deux bouts premiers sont toujours distincts ou identiques, et qu'à deux bouts premiers identiques correspond le même point a du cercle K.

distincts correspondent deux points distincts de K. *Il y a donc correspondance biunivoque entre les points de* K *et les bouts premiers de* Γ.

On peut donc préciser l'énoncé du lemme II en remarquant que les séparatrices rectifiables q_r sont des coupures de Δ.

8. Nous sommes maintenant en mesure de montrer que *tout point frontière de* Γ *appartient à un bout premier de* Γ *au moins*. (Ceci n'est pas évident, car il n'est pas possible en général de trouver parmi les coupures concentriques de centre α une suite de coupures emboîtées). Si α est point frontière, il est limite d'une suite ζ_n de points de Δ, à laquelle la transformation $z = \varphi(\zeta)$ fait correspondre une suite z_n de points de C dont tous les points d'accumulation sont sur K. Soit a l'un d'eux, le bout premier $\Omega(a)$ contient le point α. S'il est unique, quelle que soit la suite ζ_n convergeant vers α, α est dit *point simple*. Si α appartient à plusieurs bouts premiers, il est dit *multiple*. M. Carathéodory fait remarquer que la multiplicité d'un point peut avoir la puissance du continu.

Jusqu'à présent nous avons défini les bouts premiers par des suites de coupures circulaires concentriques et emboîtées. Plus généralement *un bout premier peut être défini comme le continu* Ω *commun aux fermetures des domaines* Δ_n *séparés de* ζ_0 *par une suite de coupures* q_n *dont chacune* CONTIENT *la suivante et n'a pas avec elle d'extrémité commune*, *et dont les diamètres tendent vers zéro*.

Soit d_n le diamètre de la coupure q_n; q_n peut être enfermée dans un cercle D_n de rayon d_n. Soit ω l'un des points d'accumulation de la suite des centres de ces cercles, correspondant à une suite partielle de coupures q_{n_p}. En reprenant le raisonnement fait au paragraphe précédent, on peut trouver une suite γ_p de coupures circulaires emboîtées de centre ω telle que γ_p contienne q_{n_p}. Le bout premier Ω défini par les coupures γ_p *contient* le continu Ω. Cette première partie de la démonstration ne suppose pas que les coupures q_n et q_{n+1} ont des extrémités distinctes, et elle s'appliquerait si la suite q_n était une suite de séparatrices emboîtées. La restriction relative aux extrémités va nous permettre de montrer que Ω' est *identique* à Ω (cette restriction est d'ailleurs nécessaire). Aux coupures γ_p correspondent des coupures k'_p de C convergeant vers un point a de K, aux coupures q_n des coupures k_n emboîtées convergeant aussi vers a, car pour n assez grand $(n \geqq n_p)$ q_n est contenue dans γ_p et k_n dans k'_p. q_n et q_{n+1} ayant leurs extrémités distinctes (il suffit de supposer que ce sont des points accessibles distincts), il en est de même de k_n et k_{n+1} ; les extrémités a_n, b_n de k_n et a_{n+1}, b_{n+1} de k_{n+1} déterminent sur K deux arcs $\widehat{a_n\, b_n}$, $\widehat{a_{n+1}\, b_{n+1}}$ emboîtés strictement l'un dans l'autre et contenant le point a. Donc a est strictement intérieur à l'arc $\widehat{a_n\, b_n}$. Si donc on se donne une suite quelconque z_i tendant vers a dans C, il n'y a qu'un nombre fini de points z_i à l'extérieur du domaine séparé de z_0 par k_n, donc il n'y a qu'un nombre fini de points $\zeta_i = f(z_i)$ à l'extérieur du domaine Δ_n séparé de ζ_0 par q_n : autrement dit tous les points limites de $f(z)$ lorsque $z \rightarrow a$ appartiennent au continu Ω : Ω est un bout premier. C. Q. F. D.

9. Le bout premier apparaît donc comme un élément indécomposable. Cependant on peut distinguer sur le continu $\Omega(a)$ plusieurs sortes de points :

1° Les points ω qui sont points limites d'une suite de coupures q_n emboîtées, dont les diamètres tendent vers zéro, définissant le bout; d'après ce que nous avons vu, si ω est un de ces points, on peut aussi définir le bout par une suite de coupures γ_p de centre ω. Ils sont appelés *points principaux*.

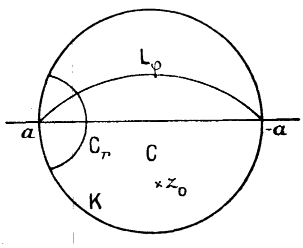
2° Les points qui ne sont pas principaux sont dits *accessoires*.

Propriétés. — Les points principaux du bout $\Omega(a)$ apparaissent comme *l'ensemble limite minimum de $f(z)$ lorsque z décrit un arc de Jordan* L *aboutissant en a.*

En effet, à L correspond dans Δ un chemin rencontrant toutes les coupures séparant le bout premier Ω de ζ_0, donc ayant des points aussi voisins que l'on veut de tout point ω. Si en particulier $\Omega(a)$ possède un point accessible α, ce point est l'extrémité d'un arc de Jordan A auquel correspond dans C un arc de Jordan L aboutissant en a : l'ensemble des points principaux se réduit au point α.

Dans le Mémoire cité nous avons montré, en utilisant le théorème de Kœbe, que *ce minimum était atteint effectivement* *pour tous les arcs* L *situés dans un secteur angulaire d'approximation ayant pour sommet* a, *bissecté par le rayon* Oa *et d'ouverture* $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$, *quel que soit* $\varepsilon > 0$. Sans utiliser le théorème de Kœbe (afin de pouvoir étendre le résultat aux transformations quasi-conformes) nous allons montrer que *ce minimum est atteint sur les arcs de cercle* $L_\varphi\left[\operatorname{Arg}\frac{a-z}{a+z} = \varphi\right]$ *pour une plénitude de valeurs de* φ *dans l'intervalle* $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ (*fig.* 3).

Fig. 3.



On se ramène par la transformation $w = \dfrac{a-z}{a+z}$ à la représentation $[\zeta = F(w)]$ sur Δ, du demi-plan droit $D[Rw > 0]$ au voisinage de $w = 0$; les arcs L_φ se transforment en les demi-droites $\operatorname{Arg} w = \varphi$.

Soit $\lambda(r)$ la longueur de l'image dans Δ du demi-cercle $|w| = r$ contenu dans D. On a l'inégalité [Mémoire cité, § 14, inégalité (19)]

$$\int_0^R \lambda^2(r)\frac{dr}{r} \leqq \pi\Sigma(R),$$

$\Sigma(R)$ étant l'aire décrite par $f(z)$ quand z décrit le demi-cercle $|w| = R$ contenu dans D, inférieure à l'aire totale Σ de Δ. Soit $e_{\varepsilon,R}$ l'ensemble des valeurs de r de l'intervalle $0 < r < R$ pour lesquelles $\lambda(r) \geqq \varepsilon$, et $E_{\varepsilon,R,\varphi}$ l'ensemble des points de Δ correspondant aux points d'intersection de la demi-droite $\operatorname{Arg} w = \varphi$ avec l'ensemble des cercles $|w| = r$ dont les rayons r appartiennent à $e_{\varepsilon,R}$. L'ensemble $e_{\varepsilon,R}$ est mesurable, puisque la fonction $\lambda(r)$ l'est. Sa mesure logarithmique $m(\varepsilon, R)$ satisfait à l'inégalité

$$m(\varepsilon, R) = \int_{e_{\varepsilon,R}} \frac{dr}{r} \leqq \frac{S(R)}{\varepsilon^2}.$$

L'ensemble $E'_{\varepsilon, R, \varphi}$ est rectifiable, et sa longueur est

$$\mu(\varepsilon, R, \varphi) = \int_{e_{\varepsilon, R}} \left| \frac{d\zeta}{dw} \right| dr;$$

en vertu de l'inégalité de Schwarz, on a

$$\mu^2(\varepsilon, R, \varphi) < \int_{e_{\varepsilon, R}} \left| \frac{d\zeta}{dw} \right|^2 r\,dr \times \int_{e_{\varepsilon, R}} \frac{dr}{r}$$

d'où

$$\mu^2(\varepsilon, R, \varphi) < \frac{S(R)}{\varepsilon^2} \int_{e_{\varepsilon, R}} \left| \frac{d\zeta}{dw} \right|^2 r\,dr.$$

En intégrant par rapport à φ, on a

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \mu^2(\varepsilon, R, \varphi)\,d\varphi < \frac{S(R)}{\varepsilon^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \int_e \left| \frac{d\zeta}{dw} \right|^2 r\,dr\,d\varphi.$$

Mais l'intégrale double du deuxième membre représente une aire, qui est inférieure à l'aire $S(R)$ et ne lui est égale que si $e_{\varepsilon, R}$ est identique à l'intervalle $0 < r < R$.

On a donc l'inégalité

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \mu^2(\varepsilon, R, \varphi)\,d\varphi < \frac{S^2(R)}{\varepsilon^2}.$$

Si R tend vers zéro, ε restant fixe, $S(R)$ tend vers zéro, donc $\mu(\varepsilon, R, \varphi)$ tend vers zéro pour une plénitude de valeurs de φ. [$\mu(\varepsilon, R, \varphi)$ est une fonction non décroissante de R pour ε et φ fixés.] Donnons à ε une suite de valeurs ε_n tendant vers zéro en décroissant. Les plénitudes correspondantes ont en commun une plénitude P de valeurs de φ sur laquelle $\mu(\varepsilon, R, \varphi)$ tend vers zéro, quel que soit $\varepsilon > 0$ fixe. Considérons une demi-droite $\operatorname{Arg} w = \varphi$, φ appartenant à cette plénitude, et sur cette demi-droite une suite de points w_n tendant vers a, de manière que la suite ζ_n correspondante dans Δ ait une limite α. Posons $|w_n| = r_n$. Ou bien r_n n'appartient pas à $E_{\varepsilon, r_n, \varphi}$, et alors $\lambda(r_n) < \varepsilon$; ou bien r_n appartient à $E_{\varepsilon, r_n, \varphi}$, et alors ζ_n est distant de moins de $\mu(\varepsilon, r_n, \varphi)$ d'un point $\zeta'_n = F(w'_n)$, tel que $|w'_n| = r'_n < r_n$ et $\lambda(r'_n) < \varepsilon$. Faisons tendre r_n vers zéro : la coupure du domaine Δ que nous venons de définir, image selon les cas du demi-cercle $|w| = r_n$ ou du demi-cercle $|w| = r'_n$ de D, et qui a une longueur inférieure à ε, sera, pour r_n assez petit, contenue dans le cercle $|\zeta - \alpha| < 2\varepsilon$ puisqu'elle passe par ζ_n qui tend vers α, ou par le point ζ'_n qui, étant infiniment voisin de ζ_n, tend aussi vers α.

Donc, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe des coupures séparant Ω de ζ_0 contenues dans le cercle $|\zeta - \alpha| < 2\varepsilon$. Parmi les coupures circulaires portées par la circonférence de ce cercle et séparant Ω de ζ_0, il y en a une qui contient toutes les autres, soit γ_ε. Donnons à ε une suite de valeurs ε_n tendant vers zéro en décroissant. La suite des coupures γ_{ε_n} correspondantes converge vers α, ce qui montre que α est un point principal.

C. Q. F. D.

L'ensemble des points principaux du bout premier $\Omega(a)$ est identique au continu d'accumulation de $f(z)$ lorsque $z \to a$ sur l'un des arcs L_φ de la plénitude trouvée [10].

---

[10] M. G. Choquet me fait remarquer que, dans toute homéomorphie $\zeta = f(z)$ du cercle C et du domaine Δ, si $f(z)$ a même continu d'accumulation Π lorsque z tend vers un point a de la circonférence K sur deux chemins L_1, L_2 distincts, le continu d'accumulation Π' de $f(z)$ lorsque z tend vers a sur un chemin quelconque L aboutissant en a et « compris » entre L_1 et L_2, est contenu dans Π. Il en résulte, dans le cas présent, que l'ensemble des points principaux du bout premier $\Omega(a)$ est le continu d'accumulation de $f(z)$ lorsque z tend vers a sur un chemin quelconque L situé dans un angle d'approximation de sommet a (car un tel chemin peut toujours être compris entre deux arcs L_φ, $L_{\varphi'}$ de la plénitude trouvée).

Ce théorème très important peut donc être établi sans utilisation du théorème de Kœbe, donc sans supposer l'analycité de la fonction $f(z)$. Nous pouvons l'énoncer :

Théorème. — *Dans toute transformation quasi-conforme de C en Δ, l'ensemble des points principaux du bout premier $\Omega(a)$ est le continu limite de $f(z)$ lorsque z tend angulairement vers le point a.*

D'autre part, on peut montrer que, pour une plénitude de points a du cercle, les bouts premiers correspondants possèdent un point accessible par un arc de Jordan rectifiable.

Dans tous les cas où le bout premier $\Omega(a)$ possède un point accessible α, ce point est la limite unique de $f(z)$ lorsque z tend vers a dans un angle d'approximation.

Ces considérations permettent d'étendre le théorème de Fatou aux transformations quasi-conformes.

10. *Notions topologiques.* — La topologie sur Γ est ainsi parfaitement déterminée : les ***éléments*** en sont les bouts premiers ; les portions de fontières, séparées par des coupures, joueront le rôle d'*intervalles*, car il leur correspond des arcs du cercle K. Un *segment* sera un intervalle auquel on a adjoint les deux bouts premiers contenant respectivement (comme points accessibles) les extrémités de la coupure séparant cet intervalle; les ensembles *ouverts* seront la réunion d'une infinité dénombrable d'intervalles, les ensembles complémentaires étant dits *fermés*. Toutes ces notions sont invariantes par représentation conforme.

Il faut bien remarquer que cette topologie ne coïncide pas avec l'empreinte sur Γ de la topologie ordinaire du plan ζ. Un bout premier est déterminé par ses *voisinages* dans Δ, c'est-à-dire les domaines Δ_n séparés d'un point fixe ζ_0 intérieur à Δ par les coupures définissant le bout. Un même point géométrique frontière α peut appartenir à plusieurs bouts premiers.

Remarquons que nous avons pu définir tous les bouts premiers au moyen du système particulier de voisinages que constituent les domaines Δ_n séparés de ζ_0 par des coupures circulaires, ce système est donc une *base* de notre topologie.

Notions métriques. — Après avoir défini sur Γ une *topologie*, nous allons définir une *métrique* invariante par représentation conforme : ce sera l'angle conforme, ou mesure conforme (la mesure harmonique en est le quotient par 2π) :

Définition. — *L'angle conforme sous lequel on voit du point ζ_0 dans Δ un ensemble* E *de bouts premiers de* Γ, *soit* $m(\zeta_0, E, \Delta)$, *est la mesure de l'ensemble e des points correspondants du cercle* K *lorsqu'au point ζ_0 correspond le centre du cercle* $\mathcal{C}$.

Les seuls ensembles que l'on sache pratiquement mesurer sont les ensembles de Borel; puisqu'il y a correspondance topologique de Γ avec K, les ensembles mesurables B de bouts premiers seront les ensembles pouvant être définis par une infinité dénombrable d'opérations de réunion ou intersection portant sur une famille dénombrable d'ensembles ouverts et fermés, donc pouvant être définis au moyen de familles dénombrables de coupures.

Comparons cette définition de la mesure conforme à celle qu'en a donnée M. Ostrowski ([11]), basée sur le théorème suivant :

L'ensemble des points frontières de Δ contenus dans un ensemble ouvert $\mathcal{O}$ quelconque, s'il n'est pas vide, est mesurable et de mesure positive.

Il semble qu'avec notre définition cet énoncé n'ait plus de sens : en effet un bout premier qui posséderait des points dans $\mathcal{O}$ et des points extérieurs à $\mathcal{O}$ devrait-il ou non être compté dans l'ensemble E considéré, puisque nous avons défini la mesure conforme uniquement pour des ensembles de bouts premiers ? Pour résoudre cette difficulté, étudions de plus près la démonstration de M. Ostrowski : on se place d'abord dans le cas où $\mathcal{O}$ est un cercle, qu'on peut supposer être le cercle $|\zeta| < 1$. La fonction $f\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)e^{i\theta}\right]$ est une fonction analytique, donc mesurable de θ. L'ensemble des valeurs de θ pour lesquelles $\left|f\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)e^{i\theta}\right]\right| < 1$ est un ensemble ouvert, donc mesurable et de mesure positive s'il n'est pas vide. Si $n \to \infty$, $f\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)e^{i\theta}\right]$ a, d'après le théorème de Fatou, une limite pour une plénitude de valeur de θ, que M. Ostrowski appelle $f(e^{i\theta})$; l'ensemble des valeurs de θ pour lesquelles $|f(e^{i\theta})| < 1$ est mesurable.

C. Q. F. D.

Nous avons démontré ailleurs (Mémoire cité, § 8) le théorème de Fatou pour les fonctions décrivant une aire bornée, et montré qu'une plénitude de rayons $\theta = \text{const.}$ du cercle $\mathcal{C}$ avaient pour images, dans Δ, des arcs de Jordan rectifiables. Nous savons donc que $f\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)e^{i\theta}\right]$ a, sur cette plénitude, une limite lorsque $n \to \infty$, θ restant fixe, et cette limite est un point accessible de Γ. Le théorème démontré par M. Ostrowski est donc en réalité le suivant :

L'ensemble des bouts premiers ayant un point accessible intérieur à un ensemble ouvert $\mathcal{O}$ est mesurable et de mesure positive.

([11]) A. Ostrowski, *Zur Randverzerrung bei konformer Abbildung* (*Prace Math. Fiz.*, t. 44, Varsovie, 1936, p. 413).

Sans faire intervenir le théorème de Fatou ni négliger d'ensembles de mesure nulle (dont la contexture est toujours très délicate), les résultats que nous avons obtenus permettent d'énoncer le théorème plus précis :

THÉORÈME. — *L'ensemble des bouts premiers ayant au moins un point principal intérieur à un ensemble ouvert $\mathcal{O}$ est mesurable*-B *et de mesure positive s'il n'est pas vide.*

Il suffit d'après les remarques de M. Ostrowski, de considérer le cas où $\mathcal{O}$ est le cercle (U) : $|\zeta| < 1$.

Soit Ω un bout premier possédant un point principal ω dans U et ζ_0 un point quelconque de Δ extérieur à U. Ω peut être séparé de ζ_0 par une coupure circulaire de centre ω, de rayon aussi petit que l'on veut, donc intérieure à U; cette coupure est elle-même contenue dans l'une des coupures de γ_i portées par la circonférence de U. Ω est donc séparé de *tout* point extérieur à U par l'ensemble des coupures γ_i, et réciproquement on peut montrer que si un bout premier possède cette propriété, il a au moins un point principal intérieur à U.

Les coupures γ_i sont au plus en infinité dénombrable; les points de Δ extérieurs à U forment un ensemble dénombrable de domaines simplement connexes si la circonférence U rencontre Γ. L'ensemble E des bouts premiers considérés apparaît comme l'intersection d'une famille dénombrable d'ensembles ouverts de bouts premiers, c'est donc un ensemble mesurable-B. Si l'on prend pour $\mathcal{O}$ un ensemble ouvert quelconque, E apparaît comme la réunion d'une famille dénombrable de tels ensembles, c'est donc encore un ensemble mesurable-B. De plus E contient l'ensemble des bouts premiers dont tous les points (principaux ou accessoires) sont intérieurs à $\mathcal{O}$, ensemble ouvert, et par conséquent de mesure positive s'il n'est pas vide.

On pourrait d'ailleurs varier l'énoncé en considérant les ensembles de bouts premiers ayant tous leurs points, ou l'un au moins de leurs points, ou tous leurs points principaux, ou l'un au moins de leurs points principaux, dans un ensemble ouvert ou fermé donné : tous ces ensembles sont mesurables-B.

11. De l'inégalité (2) du paragraphe 7, on peut déduire un module de continuité pour $f(z)$ au voisinage de K du même ordre

que celui qui a été donné pour la fonction inverse $\varphi(\zeta)$ au paragraphe 5 :

Si deux points z, z' peuvent être séparés d'un point z_0 dans C *par une même coupure circulaire de rayon* R *assez petit* (*soit* $R < d^2$, *d étant la distance de z_0 au cercle* K), *les points correspondants $\zeta = f(z)$, $\zeta' = f(z')$ peuvent être séparés du point $\zeta_0 = f(z_0)$ par une même coupure de* Δ *rectifiable et de longueur inférieure à* $\sqrt{\frac{2\pi S}{|\log R|}}$.

Ce module de continuité est valable même sur la frontière, en considérant, au lieu de points, des bouts premiers.

Pour l'améliorer, sans faire d'hypothèse supplémentaire sur Γ, il faut employer une méthode statistique (lemme de Cartan-Ahlfors, *voir* Mémoire cité, § 1). On peut ainsi montrer que, *pour une plénitude de points a du cercle* K, *les points ζ, ζ' correspondant dans* Δ *à deux points z, z' de* C *intérieurs au cercle* $|z - a| < R \left[R < \frac{d}{2}\right]$ *peuvent être séparés du point $\zeta_0 = f(z_0)$ par une même coupure de* Δ *de longueur inférieure à* $M\sqrt{R}$, *la constante* M *dépendant* (*en général*) *du point a.*

En effet si $\lambda(r, a)$ désigne la longueur de la séparatrice q_r de Δ image de la coupure circulaire C_r de C portée par le cercle $|z - a| = r$, on a (*voir* Mémoire cité, § 14)

$$\int_0^R \lambda^2(r, a)\frac{dr}{r} < \pi\mu(R, a), \tag{3}$$

$\mu(R, a)$ désignant l'aire intérieure du domaine Δ_R correspondant au domaine D_R formé des points de C intérieurs au cercle $|z - a| < R$.

D'après le lemme de Cartan-Ahlfors, si Δ a une aire intérieure finie, pour une plénitude de points a, le rapport $\frac{\mu(R, a)}{R}$ reste borné lorsque $R \to 0$. Il est donc inférieur, quel que soit R, à une constante $m(a)$.

De l'inégalité

$$\int_R^{2R} \lambda^2(r, a)\frac{dr}{r} \leqq 2\pi R\, m(a), \tag{3'}$$

on déduit que, dans l'intervalle $R < r < 2R$, il existe au moins une valeur de r pour laquelle

$$\lambda^2(r, a) \leqq 2\pi r\, m(a) < 4\pi \mathrm{R}\, m(a).$$

Donc si z et z' sont intérieurs au domaine C_R, ζ et ζ' sont intérieurs au domaine Δ_r limité par la coupure q_r de longueur

$$\lambda(r, a) < 2\sqrt{\pi \mathrm{R}\, m(a)} = \mu\sqrt{\mathrm{R}},$$

domaine qui ne contient pas z_0 si C_{2R} ne le contient pas, ce qui arrivera sûrement si $2\mathrm{R} < d$, d étant toujours la distance de z_0 à K. C. Q. F. D.

12. Nous allons voir que le module de continuité de la fonction $\varphi(\zeta)$ peut être amélioré sans utiliser le lemme de Cartan-Ahlfors. Reprenons la démonstration de l'inégalité (1). L'intégrale du premier membre

$$\int_0^{\mathrm{R}} \sum_i \frac{l_i^2(\rho)}{\theta_i(\rho)} \frac{d\rho}{\rho}$$

est inférieure à l'aire $S(R)$ de l'ensemble ouvert C_R correspondant à l'ensemble des points de Δ intérieurs au cercle $|\zeta - \omega| < \mathrm{R}$. Cette aire est limitée d'une part par les coupures $k_{\mathrm{R},i}$ images des coupures circulaires $\gamma_{\mathrm{R},i}$, d'autre part par certains arcs de K; on peut trouver une inégalité isopérimétrique entre cette aire et la longueur totale $L(R)$ des $k_{\mathrm{R},i}$ (rectifiables pour une plénitude de valeurs de R). Cette inégalité serait précise et facile à établir si K était une droite et C l'un des demi-plans limités par K : en effet on compléterait la figure par symétrie par rapport à K. En réunissant C_R avec son symétrique C'_R, on obtient, par adjonction de leurs arcs frontières communs portés par K, une famille dénombrable de domaines limités uniquement par les coupures $k_{\mathrm{R},i}$ et leurs symétriques $k'_{\mathrm{R},i}$ (*fig.* 4). Si, de ces coupures, nous supprimons celles qui sont contenues dans une autre, de façon à rendre les domaines constituants de $C_R + C'_R$ simplement connexes, l'aire augmente et la longueur totale du contour diminue. Pour chaque domaine simplement connexe limité par une coupure $k_{\mathrm{R},i}$ et sa symétrique, on a, entre son aire $2s_i$ et la longueur $2l_i$ de son contour, l'inégalité isopérimétrique

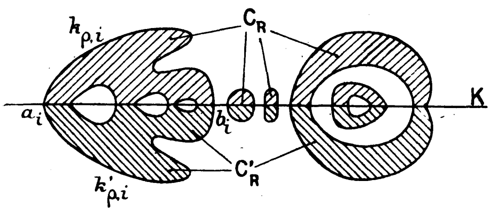
$$4\pi \times 2s_i \leqq (2l_i)^2 \qquad \text{d'où} \qquad 2\pi s_i \leqq l_i^2.$$

Faisons la somme de ces inégalités. On en déduit

$$2\pi S(R) \leqq \sum_i l_i^2(R) \leqq \left(\sum_i l_i\right)^2,$$

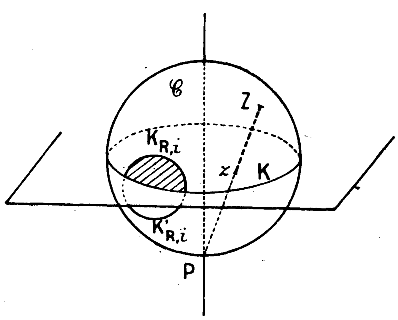
l'égalité n'étant obtenue que s'il n'y a qu'une coupure $k_{R,i}$ et si c'est un demi-cercle centré sur K.

Fig. 4.



L'inégalité isopérimétrique frontière obtenue, soit $2\pi S(R) \leqq L^2(R)$, serait encore valable si C était un domaine concave, mais elle ne l'est pas (du moins sous une forme aussi simple) pour un cercle ou un domaine convexe. Pour tourner cette difficulté, nous allons faire la projection stéréographique du cercle C sur la sphère Σ qui l'admet pour grand cercle, à partir d'un des pôles P de ce cercle : Δ sera mis ainsi en correspondance conforme avec la

Fig. 5.



calotte hémisphérique $\mathcal{C}$ limitée par K (*fig.* 5). Les coupures $\gamma_{R,i}$ de Δ ont pour images des séparatrices $K_{R,i}$ de $\mathcal{C}$, rectifiables pour une plénitude de valeurs de R et dont la longueur sphérique totale $\mathcal{L}(\mathrm{R})$ satisfait à l'inégalité

$$(4) \qquad \int_0^{\mathrm{R}} \frac{\mathcal{L}^2(\rho)}{\rho}\, d\rho < \mathfrak{S}(\mathrm{R}).$$

$\mathfrak{S}(\mathrm{R})$ étant l'aire sphérique de l'ensemble ouvert $\mathcal{C}_{\mathrm{R}}$ correspondant à Δ_{R}. Pour trouver une inégalité entre $\mathcal{L}(\mathrm{R})$ et $\mathfrak{S}(\mathrm{R})$, on procède, comme dans le cas du demi-plan, en complétant $\mathcal{C}_{\mathrm{R}}$ par son symétrique $\mathcal{C}'_{\mathrm{R}}$ par rapport au plan du cercle K. De l'inégalité isopérimétrique sur la sphère ([12]) $\mathrm{S}(4\pi - \mathrm{S}) \leqq \mathrm{L}^2$, on déduit ainsi l'inégalité isopérimétrique frontière ([13])

$$(5) \qquad \mathfrak{S}(2\pi - \mathfrak{S}) \leqq \sum \mathcal{L}_i^2(\mathrm{R}) \leqq \mathcal{L}^2(\mathrm{R}).$$

On a, d'autre part,

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\mathfrak{S}}{d\mathrm{R}} &= \int_{\sum_i \gamma_{\mathrm{R},i}} \frac{4\,|\varphi'|^2}{[1+|\varphi|^2]^2}\, \mathrm{R}\, d\theta, \\ \mathcal{L}_i^2(\mathrm{R}) &= \left[\int_{\gamma_{\mathrm{R},i}} \frac{2\,|\varphi'|\,\mathrm{R}\,d\theta}{[1+|\varphi|^2]}\right]^2 \leqq \mathrm{R}\,\Theta_i(\mathrm{R}) \int_{\gamma_{\mathrm{R},i}} \frac{4\,|\varphi'|^2\,\mathrm{R}\,d\theta}{[1+|\varphi|^2]^2}; \end{aligned} \right.$$

d'où

$$(7) \qquad \frac{\left[\sum_i \mathcal{L}_i(\mathrm{R})\right]^2}{\sum_i \Theta_i(\mathrm{R})} \leqq \sum_i \frac{\mathcal{L}_i^2(\mathrm{R})}{\Theta_i(\mathrm{R})} \leqq \mathrm{R}\,\frac{d\mathfrak{S}}{d\mathrm{R}};$$

en comparant (6) et (7) on obtient $\left(\text{car} \sum_i \Theta_i \leqq 2\pi\right)$

$$\frac{d\mathfrak{S}(\mathrm{R})}{\mathfrak{S}(2\pi - \mathfrak{S})} \geqq \frac{1}{2\pi}\,\frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}},$$

d'où, par intégration, si $\mathrm{R} < \mathrm{R}_0$,

$$(8) \qquad \frac{\mathfrak{S}(\mathrm{R})}{2\pi - \mathfrak{S}(\mathrm{R})} : \frac{\mathfrak{S}(\mathrm{R}_0)}{2\pi - \mathfrak{S}(\mathrm{R}_0)} \leqq \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}_0}.$$

([12]) Le calcul qui suit est l'extension à la frontière d'un lemme établi par M. J. Dufresnoy (*Annales Ec. Nor. Sup.*, 1941, § 27, p. 218) auquel nous avons déjà fait allusion [Note (5)].

([13]) L'égalité n'est obtenue que si $\mathcal{C}_{\mathrm{R}} + \mathcal{C}'_{\mathrm{R}}$ se réduit à une calotte limitée par un cercle orthogonal à K, donc si, dans C, l'ensemble des coupures $k_{\mathrm{R},i}$ se réduit à une coupure formée d'un arc de cercle orthogonal à K.

Prenons $R_0 \leqq \frac{\delta}{2}$ [δ étant la distance du point ζ_0 à Γ] : C_R laisse à son extérieur le cercle $|\zeta - \xi_0| < \frac{\delta}{2}$, intérieur à Δ, auquel correspond sur $\mathcal{C}$ un domaine d'aire positive. Donc $2\pi - \mathcal{S}(R_0)$ est positif, non nul, et l'on obtient une inégalité de la forme

$$(9) \qquad \frac{\mathcal{S}(R)}{2\pi - \mathcal{S}(R)} < mR, \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{S}(R) < 2\pi m R,$$

m étant une constante qui ne dépend que du domaine Δ, ou plus précisément des distances respectives δ et d des points ζ_0 et $z_0 = \varphi(\zeta_0)$ aux frontières Γ et K, et du diamètre D du continu Γ, l'inégalité étant valable dès que $R < \frac{D}{2}$ et $R < \frac{\delta}{2}$. En comparant à (4), on obtient

$$(10) \qquad \int_R^{2R} \mathcal{L}^2(\rho) \frac{d\rho}{\rho} \leqq 2\pi \mathcal{S}(2R) < 8\pi^2 m R,$$

on en déduit que, dans tout intervalle $R < \rho < 2R$, il existe au moins une valeur de ρ telle que $\mathcal{L}(\rho) < \sqrt{16\pi^2 m R}$. Mais la longueur sphérique sur la calotte $\mathcal{C}$ est supérieure à la longueur euclidienne de l'arc correspondant dans C. On a donc

$$(11) \qquad L(\rho) < M\sqrt{R} \qquad [M = \sqrt{16\pi^2 m}].$$

Théorème. — *Si deux points ζ, ζ' peuvent être séparés de ζ_0 par une même coupure circulaire de rayon* R, *leurs correspondants z, z' peuvent être séparés de $z_0 = \varphi(\zeta_0)$ par une même coupure de longueur inférieure à $M\sqrt{R}$, donc $|z - z'| < 2M\sqrt{R}$,* M étant une constante ne dépendant que de d, δ, D, et l'inégalité étant valable dès que $R < \frac{\delta}{2}$ et $R' < \frac{D}{2}$.

Ce module de continuité est valable même sur la frontière, en considérant des bouts premiers au lieu de points. Il est uniforme, et valable pour toute coupure, contrairement au module analogue obtenu pour $f(z)$.

13. Ce module peut être amélioré si l'on connaît des précisions sur les mesures $\Theta_i(R)$ des coupures $\gamma_{R,i}$ qui constituent l'intersection du cercle $\gamma(|\zeta - \omega| = R)$ avec Δ.

Supposons par exemple que tous ces arcs soient inférieurs à π. Des inégalités (6) et (7), on déduit

$$(9') \qquad \frac{d\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}(2\pi-\mathfrak{S})} \geqq \frac{1}{\pi}\frac{dR}{R}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\mathfrak{S}(R)}{2\pi-\mathfrak{S}(R)} < mR^2,$$

et on a le module de continuité MR au lieu de $M\sqrt{R}$, ce qui est le meilleur possible. Ceci a lieu en particulier si le domaine est convexe.

Moins strictement, si $\Theta(R)$ désigne le plus grand de ces arcs, on a

$$\sum \mathcal{L}_i^2(R) \leqq \Theta(R) \times R\frac{d\mathfrak{S}}{dR},$$

$$\frac{d\mathfrak{S}(R)}{2\pi-\mathfrak{S}(R)} \geqq \frac{1}{\Theta(R)}\frac{dR}{R},$$

$$(9'') \qquad \frac{\mathfrak{S}(R)}{2\pi-\mathfrak{S}(R)} < \frac{\mathfrak{S}(R_0)}{2\pi-\mathfrak{S}(R_0)} \times e^{\int_R^{R_0}\frac{2\pi\,d\rho}{\rho\Theta(\rho)}}.$$

Si l'intégrale $\int_\varepsilon^{R_0} \frac{\Theta(\rho)-\pi}{\rho\Theta(\rho)}\,d\rho$ reste bornée supérieurement ($< m'$) lorsque $\varepsilon \to 0$, on en déduit encore $\mathfrak{S}(R) < mm'R^2$ et le module de continuité associé $M'R$.

Remarquons que l'ordre de grandeur des limitations obtenues est le même que pour celles que l'on peut déduire de la première inégalité d'Ahlfors (*voir* Mémoire cité, § 38); mais nos résultats font intervenir la fonction elle-même, et non son logarithme, et ils apportent quelques précisions nouvelles [14]. De l'inégalité (11) on déduit le

Théorème. — *La mesure conforme de l'ensemble* E_R *des bouts premiers de* Γ *séparés de* ζ_0 *par l'une au moins des coupures portées par un cercle de rayon* R *assez petit est bornée uniformément par un nombre de la forme* $k\sqrt{R}$.

Il n'est pas nécessaire de supposer le centre du cercle sur Γ : car ou bien le cercle ne coupe pas Γ et l'ensemble considéré est

(14) Ces résultats et leurs conséquences sont applicables aux transformations quasi-conformes, à condition de remplacer R par $R^{\frac{1}{k}}$ [*voir* § 1, note (5)].

vide, ou bien ce cercle contient au moins un point ω de Γ, et on le remplace par le cercle $|\zeta - \omega| < 2R$ qui contient le premier et, pour R assez petit, laisse ζ_0 à son extérieur, auquel on applique les résultats précédents. On a $k = 2M$.

Si Δ *est un domaine convexe, la mesure de l'ensemble* E_R *est inférieure à* kR.

14. Ce dernier résultat peut se déduire des inégalités connues pour la mesure harmonique. En effet si Δ est convexe (auquel cas Γ est une courbe de Jordan), d'après le *principe de l'agrandissement du domaine* (*voir* Mémoire cité, § 28), l'angle conforme, sous lequel on voit de ζ_0 dans Δ, un arc $\widehat{\alpha\beta}$ de Γ, est au plus égal à l'angle conforme sous lequel on voit de ζ_0 le segment $\alpha\beta$ dans le demi-plan limité par la droite $\alpha\beta$ et contenant ζ_0, soit

$$m(\zeta_0, \widehat{\alpha\beta}, \Delta) \leqq 2 \left| \arg \frac{\zeta_0 - \alpha}{\zeta_0 - \beta} \right|.$$

Si les points α, β sont dans un même cercle de rayon R centré sur Γ en un point ω tel que $|\zeta_0 - \omega| \geqq \delta$, on a

$$2 \left| \arg \frac{\zeta_0 - \alpha}{\zeta_0 - \beta} \right| < 4 \arcsin \frac{R}{\delta} < 2\pi \frac{R}{\delta}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Dans le cas général, en supposant seulement que Δ *ne contient pas à son intérieur le point à l'infini*, le module de continuité peut se retrouver par application de la *deuxième inégalité fondamentale relative à la mesure conforme* (*voir* Mémoire cité, § 28), la mesure conforme au point ζ_0 de Δ de l'ensemble Γ_R des points accessibles de Γ intérieurs au cercle $|\zeta - \omega| < R$ centré en un point ω de Γ est limitée par

$$m(\zeta_0, \Gamma_R, \Delta) \leqq 8 \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{R}{|\zeta_0 - \omega|}} < 4\pi \sqrt{\frac{R}{\delta}}.$$

Γ_R n'est pas tout à fait l'ensemble E_R considéré dans notre théorème : mais commençons par appliquer le principe de l'agrandissement du domaine : la mesure conforme de E_R est inférieure à la mesure, dans le domaine Δ'_R formé des points de Δ non séparés de ζ_0 par les coupures de centre ω et de rayon R, de ceux de ces arcs-coupures qui limitent Δ'_R. En appliquant à Δ'_R l'inégalité précédente, on a le résultat voulu.

Il serait intéressant de savoir si l'on peut encore démontrer ce résultat par la méthode de la mesure conforme quand Δ contient le point à l'infini.

Remarquons qu'au sens de la topologie, que nous avons définie sur Γ, l'ensemble E_R des bouts premiers séparés de ζ_0 par l'une au moins des coupures $\gamma_{R,i}$ est un ensemble ouvert. Il contient l'ensemble E'_R des bouts premiers possédant au moins un point principal intérieur au cercle $|\zeta - \omega| < R$.

15. L'intérêt de ces résultats est de montrer l'existence d'ensembles de points qui ont, quel que soit le domaine simplement connexe Δ les admettant comme points-frontières, une mesure conforme nulle dans ce domaine. [La nullité de la mesure conforme ne dépend pas du point ζ_0.] Si en effet on peut recouvrir un ensemble e de points par une famille dénombrable de cercles dont la somme des racines carrées des rayons est inférieure à ε, la mesure conforme de l'ensemble E des bouts premiers, ayant au moins *un point principal* dans e, est inférieure à $k\varepsilon$, d'après les résultats du paragraphe 13. En abrégeant on peut énoncer le

Théorème. — *Un ensemble de $\sqrt{R}$ mesure nulle (au sens de Hausdorff) est toujours de mesure conforme nulle dans un domaine simplement connexe à la frontière duquel il appartient.*

De même :

Un ensemble de mesure linéaire nulle est toujours de mesure conforme nulle dans un domaine simplement connexe et convexe à la frontière duquel il appartient.

En particulier si l'ensemble e est réduit à un point, on a le

Théorème. — *L'ensemble E des bouts premiers contenant un point principal donné ω est de mesure conforme nulle.*

Ce dernier théorème est d'ailleurs une simple conséquence du corollaire (b) établi au paragraphe 4. En effet si ω est le point considéré, tout bout premier Ω admettant ω comme point principal est séparé de ζ_0 par l'une des coupures $\gamma_{R,i}$ au moins quel que soit R assez petit : le point a correspondant à Ω sur K appartient à l'un au moins des arcs $\widehat{a_i b_i}$ de K; or la réunion de ces arcs peut être enfermée dans une famille de cercles dont la somme des rayons est inférieure à $\frac{2\pi}{\sqrt{|\log R|}}$, donc aussi petite qu'on le veut.

C. Q. F. D.

L'ensemble E considéré contient l'ensemble E′ des bouts premiers admettant ω comme point accessible. On peut donc énoncer :

L'ensemble des points a du cercle K *extrémités de chemins* L *sur lesquels $f(z)$ a une limite unique ω donnée est de mesure nulle quel que soit ω.*

On reconnaît la deuxième partie du théorème de Fatou.

La limitation locale obtenue pour la mesure conforme ne peut être améliorée si l'on ne fait aucune hypothèse supplémentaire sur Δ, car l'égalité est obtenue lorsque Δ est formé des points du plan n'appartenant pas à une demi-droite donnée d'origine ω [dans ce cas $\Theta(R) \equiv 2\pi$]. Mais il serait intéressant de savoir si la limitation globale peut être améliorée et si l'on peut trouver une condition suffisante moins stricte pour qu'un ensemble de points soit de mesure conforme nulle dans tout domaine simplement connexe l'admettant dans sa frontière.

Dans l'énoncé abrégé des théorèmes précédents, il faut toujours sous-entendre par mesure conforme d'un ensemble e la mesure de l'ensemble E des bouts premiers possédant des points *principaux* dans e. En vertu du théorème de Fatou, on peut d'ailleurs se réduire à l'ensemble E′ (contenu dans E) des bouts premiers possédant un point accessible dans e. *Mais ces théorèmes seraient faux si l'on ajoutait à l'ensemble* E, *l'ensemble* E″ *des bouts premiers possédant un point accessoire dans e.* Il est impossible de trouver des conditions suffisantes indépendantes du domaine Δ pour que E″ soit toujours de mesure nulle, puisque, *même dans le cas où e est réduit à un point* ω, *il se peut que* E″ *soit de mesure positive* : remarquons d'abord que, dans ce cas, l'ensemble $F = E + E''$ est fermé (au sens topologique), car il correspond à l'ensemble f des points a du cercle K qui sont limites d'une suite z_n de points de C telle que $f(z_n) \to \omega$. Donc si F′ est de mesure positive, il contient des intervalles. Or M. Denjoy ([15]) a construit un domaine limité par un continu indécomposable Γ, dont tous les bouts premiers sont identiques à Γ. Quel que soit le point ω choisi sur Γ, F est alors identique à l'ensemble de tous les bouts premiers, f est identique au cercle K, et E″ est une plénitude de F. D'autre part M. G. Choquet m'a signalé des exemples qu'il a construits où Γ est un continu décomposable dont tous les bouts premiers, sans être identiques, contiennent un même point ω (qui ne sera, d'après notre théorème, que point accessoire pour une plénitude d'entre eux).

Ces exemples montrent l'impossibilité annoncée.

(Manuscrit reçu le 21 janvier 1943.)

([15]) A. Denjoy, *C. R. Acad. Sc.*, 183, 1941, p. 17.