BULLETIN DE LA S. M. F.

BERTRAND GAMBIER

Système d'équations aux dérivées partielles d'ordre cinq vérifié par la surface générale de translation

Bulletin de la S. M. F., tome 71 (1943), p. 1-19

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1943__71__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SYSTÈME D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE CINQ VÉRIFIÉ PAR LA SURFACE GÉNÉRALE DE TRANSLATION;

Par M. B. Gambier.

1. Nous lisons dans l'ouvrage de Sophus Lie et Georg Scheffers, *Geometrie der Berührungstransformationen* (Leipzig, 1896, p. 384, lignes 19, 20, 21) :

« Schliesslich geben wir noch ohne Beweis an, dass *alle* Translationsflächen überhaupt als die Integralflächen einer gewissen partiellen Differentialgleichung *vierter* Ordnung definiert werden können. »

Cette phrase termine le paragraphe apprenant à former l'équation aux dérivées partielles du second ordre vérifiée par les surfaces de translation dont on donne *a priori* le cône directeur des tangentes de la courbe C et de la courbe Γ engendrant la surface par leur translation; les auteurs se sont bornés à la phrase recopiée plus haut, sans aucune espèce d'indication sur les faits géométriques ou analytiques qui leur ont suggéré cette idée. Or le résultat qu'ils annoncent n'est pas exact.

En réalité, *la surface générale de translation est la solution générale d'un système de deux équations aux dérivées partielles, d'ordre cinq, obtenu en exprimant que les deux équations suivantes, algébriques en* λ', *de degré* 4 *et* 5 *respectivement, ont deux solutions communes. Les surfaces, plus* *spéciales, admettant deux réseaux de translation, sont la solution générale du système des quatre équations, encore d'ordre cinq, obtenues en exprimant que l'équation du degré 5 en A′ admet les quatre racines de l'équation de degré 4. Enfin, les surfaces admettant* ∞^1 *réseaux sont la solution générale du système de cinq équations d'ordre quatre obtenu en égalant à zéro les coefficients de l'équation de degré 4 en A′ (et ces cinq équations se réduisent en réalité à trois).*

Indiquons les notations :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l}
\alpha = \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \qquad \beta = \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \qquad \gamma = \dfrac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2}, \qquad \delta = \dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}, \\
p,\ q,\ r,\ s,\ t \text{ notations usuelles de Monge-Ampère;} \\
\mathrm{P} = \dfrac{\alpha s - \beta r}{rt - s^2}, \qquad \mathrm{Q} = \dfrac{\delta s - \gamma t}{rt - s^2}, \\
\mathrm{P}_1 = \dfrac{\alpha t + \beta s - 2\gamma r}{rt - s^2}, \qquad \mathrm{Q}_1 = \dfrac{\delta r + \gamma s - 2\beta t}{rt - s^2}; \\
\mathrm{H} = \dfrac{\mathrm{D}(q, \mathrm{Q})}{\mathrm{D}(x, y)}, \qquad \mathrm{N} = \dfrac{\mathrm{D}(p, \mathrm{P})}{\mathrm{D}(y, x)}, \qquad \mathrm{L} = \dfrac{\mathrm{D}(p, \mathrm{Q}_1)}{\mathrm{D}(x, y)} + \dfrac{\mathrm{D}(q, \mathrm{P}_1)}{\mathrm{D}(y, x)}; \\
\mathrm{K} = \dfrac{\mathrm{D}(q, \mathrm{Q}_1)}{\mathrm{D}(x, y)} + \dfrac{\mathrm{D}(p, \mathrm{Q})}{\mathrm{D}(x, y)}, \qquad \mathrm{M} = \dfrac{\mathrm{D}(p, \mathrm{P}_1)}{\mathrm{D}(y, x)} + \dfrac{\mathrm{D}(q, \mathrm{P})}{\mathrm{D}(y, x)}.
\end{array}\right.$$

Les deux équations en A′ sont [1] :

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l}
\mathrm{H}\,\mathrm{A}'^4 + \mathrm{K}\,\mathrm{A}'^3 + \mathrm{L}\,\mathrm{A}'^2 + \mathrm{M}\,\mathrm{A}' + \mathrm{N} = 0, \\
(s + t\mathrm{A}')\left[\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}\mathrm{A}'^4 + \dfrac{\partial \mathrm{K}}{\partial x}\mathrm{A}'^3 + \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial x}\mathrm{A}'^2 + \dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial x}\mathrm{A}' + \dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}\right] \\
\quad - (r + s\mathrm{A}')\left[\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}\mathrm{A}'^4 + \dfrac{\partial \mathrm{K}}{\partial y}\mathrm{A}'^3 + \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial y}\mathrm{A}'^2 + \dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}\mathrm{A}' + \dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial y}\right] = 0.
\end{array}\right.$$

L'interprétation de A′ est aisée, car $(1,\ \mathrm{A}',\ p + q\mathrm{A}')$ sont les paramètres directeurs de la tangente à l'une des deux courbes de translation issues du point (x, y, z); l'autre racine commune, que nous appellerons B′, fournit la tangente analogue et la surface est déterminée par les formules paramétriques suivantes, où a, b

[1] Si l'on désigne par E le premier membre $\mathrm{HA}'^4 + \ldots + \mathrm{N}$ de la première équation (2), la seconde peut s'écrire $\dfrac{\mathrm{D}(p + q\mathrm{A}', \mathrm{E})}{\mathrm{D}(x, y)} = 0$, le déterminant Jacobien étant calculé en y regardant provisoirement A′ comme un paramètre indépendant de x et y.

sont les paramètres, A et A_1 des fonctions de a, et B, B_1 de b

$$(3)\quad \begin{cases} x = a + b, \qquad y = A + B, \qquad z = A_1 + B_1; \\ A' = \dfrac{dA}{da}, \qquad B' = \dfrac{dB}{db}, \qquad A'_1 = p + qA', \qquad B'_1 = p + qB'. \end{cases}$$

Si la surface est connue, on calcule A' (dans le cas d'un seul réseau, ou de deux réseaux) comme solution commune des équations (2); A' est ainsi calculée à partir de z et des dérivées de z en x, y jusqu'à l'ordre cinq; l'équation $A' = \text{const.}$ définit successivement toutes les courbes de l'une des familles de translation (ainsi obtenues comme courbes de contact de la surface et d'un cyclindre convenablement choisi). Si la surface admet ∞^1 réseaux, tout cylindre circonscrit fournit une courbe de contact, qui, par translation convenable, engendre la surface.

2. Les formules (3) définissent la surface de translation générale, au moyen de quatre fonctions arbitraires d'un argument (A et A_1 fonctions de a, et B, B_1 de b). Les dérivées partielles de tout ordre de z en x, y (quand on a éliminé a, b de façon que z soit exprimé uniquement avec x et y) peuvent aussi s'exprimer au moyen de A, A', ..., A_1, A'_1, ..., B, B', ..., B_1, B'_1, ... On a, en effet,

$$(4)\quad dx = da + db, \qquad dy = A'\,da + B'\,db, \qquad dz = A'_1\,da + B'_1\,db.$$

En portant ces valeurs dans $dz = p\,dx + q\,dy$ et égalant les coefficients de da, db, on a les relations du premier ordre

$$\text{I} \qquad p + qA' = A'_1, \qquad p + qB' = B'_1,$$

dont la signification géométrique est évidente. En différentiant I suivant la même méthode, on a

$$dp + A'\,dq + qA''\,da = A''_1\,da, \qquad dp + B'\,dq + qB''\,db = B''_1\,db,$$

on remplace dp par $r\,dx + s\,dy$, dq par $s\,dx + t\,dy$, puis dx, dy par leurs valeurs (4), de sorte que nous obtenons les relations

$$\text{II} \qquad \begin{cases} r + 2sA' + tA'^2 + qA'' = A''_1, \\ r + s(A' + B') + tA'B' = 0, \\ r + 2sB' + tB'^2 + qB'' = B''_1, \end{cases}$$

que nous cataloguons II_1, II_2, II_3; la signification géométrique de II_2 est évidente : *les tangentes aux courbes du réseau sont conjuguées.* L'application répétée de la méthode revient au fond à dériver en a ou en b une suite de relations

$$F(\ldots, Z, \ldots, A', A'', \ldots, B', B'', \ldots, A'_1, A''_1, \ldots, B_1 \ldots),$$

où Z est une fonction exprimée en x et y; la dérivée par rapport à a donne

$$\sum \frac{\partial F}{\partial Z}\left(\frac{\partial Z}{\partial x} + A'\frac{\partial Z}{\partial y}\right) + \ldots + \frac{\partial F}{\partial A'}A'' + \frac{\partial F}{\partial A''}A''' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial A'_1}A''_1 + \ldots = 0,$$

de même pour b.

Le système d'ordre III est

$$\left(\alpha = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\ \beta = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y},\ \gamma = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2},\ \delta = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right),$$

$$\mathrm{III}\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha + 3\beta A' + 3\gamma A'^2 + \delta A'^3 + 3sA'' + 3tA'A'' + qA''' = A'''_1, \\ \alpha + \beta(2A' + B') + \gamma(A'^2 + 2A'B') + \delta A'^2 B' + sA'' + tA''B' = 0, \\ \alpha + \beta(2B' + A') + \gamma(B'^2 + 2A'B') + \delta A'B'^2 + sB'' + tB''A' = 0, \\ \alpha + 3\beta B' + 3\gamma B'^2 + \delta B'^3 + 3sB'' + 3tB'B'' + qB''' = B'''_1. \end{array}\right.$$

Toute relation ainsi obtenue est accompagnée de celle que l'on obtient en remplaçant $A_i^{(j)}$ par $B_i^{(j)}$ sans modifier les autres expressions (z et ses dérivées en x, y). Cela va nous permettre de n'écrire que trois des cinq relations d'ordre 4

$$\left(\alpha_1 = \frac{\partial^4 z}{\partial x^4},\ \beta_1 = \ldots,\qquad \varepsilon_1 = \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right),$$

$$\mathrm{IV}\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 + 4\beta_1 A' + 6\gamma_1 A'^2 + 4\delta_1 A'^3 + \varepsilon_1 A'^4 + 6\beta A'' + 12A'A''\gamma \\ \qquad + 6A'^2A''\delta + 4sA''' + t(3A''^2 + 4A'A''') + qA'''' = A''''_1, \\ \alpha_1 + \beta_1(3A' + B') + 3\gamma_1(A'^2 + A'B') + \delta(A'^3 + 3A'^2B') \\ \qquad + \varepsilon_1 A'^3 B' + 3\beta A'' + 3\gamma A'(A' + B') + 3\delta A'A''B' \\ \qquad\qquad + sA''' + tB'A''' = 0, \\ \alpha_1 + 3\beta_1(A' + B') + \gamma_1(A'^2 + 4A'B' + B'^2) + 2\delta_1 A'B'(A' + B') \\ \qquad + \varepsilon_1 A'^2B'^2 + \beta(A'' + B'') + 2\gamma(A''B' + A'B'') \\ \qquad\qquad + \delta(A'^2B'' + A''B'^2) + tA''B'' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

La méthode classique consiste à former assez d'équations pour éliminer les fonctions inconnues : on y arrive sûrement ici, puisque l'ordre N fournit N + 1 équations nouvelles et n'introduit que 4 expressions $A^{(N)}$, $A_1^{(N)}$, $B^{(N)}$, $B_1^{(N)}$ nouvelles. Nous pouvons même remarquer que $A_1^{(N)}$ ne figure que dans l'équation cataloguée $(N)_1$, et $B_1^{(N)}$ dans l'équation $(N)_{N+1}$; nous gardons donc les équations $(N)_2, \ldots (N)_N$ en nombre $(N-1)$, qui n'introduisent que $A^{(N-1)}$ et $B^{(N-1)}$ comme fonctions nouvelles à ajouter à celles qui figuraient dans les équations gardées suivant le même principe de l'ordre 2 à l'ordre $N-1$.

Le groupe I n'a donné aucune équation; II a donné une équation II_2 avec les fonctions A', B'; III a donné deux équations contenant A', B', A'', B'' et ainsi de suite; donc de II inclus à (N) inclus, nous avons $1+2+\ldots+(N-1)$ ou $\frac{N(N-1)}{2}$ équations, renfermant les $2(N-1)$ fonctions $A', A'', \ldots A^{(N-1)}, B', B'', \ldots B^{(N-1)}$; la différence $\frac{N(N-1)}{2} - 2(N-1)$ vaut $\frac{(N-4)(N-1)}{2}$; négative pour $N=2$, $N=3$, nulle pour $N=4$, elle devient positive et égale à 2 pour $N=5$; la conclusion à tirer, puisque la surface dépend de *quatre* fonctions arbitraires d'un argument, est que *la surface ou bien satisfera à deux équations d'ordre* 5 (et bien entendu à celles qui en résultent par dérivation en x et y), *ou bien vérifiera une équation d'ordre* 4 : le raisonnement énumératif n'exclut pas en effet la possibilité que les 6 équations obtenues jusqu'à l'ordre 4, avec 6 fonctions $A', A'', A''', B', B'', B'''$ admettent une combinaison d'où ces fonctions auraient disparu : seul le calcul complet montrera que cette circonstance ne se présente pas.

En examinant avec soin la forme des équations successives, nous voyons que III_2 fournit A'' au moyen de A', B' (et bien entendu de dérivées de z), III_3 fournit B''; ensuite IV_2 fournit A''' au moyen des quantités déjà calculées, donc finalement au moyen de A', B'; de même IV_4 fournit B''' en A', B'; IV_3 devient une équation ne contenant plus que A' et B'; nous avons donc épuisé tout ce que peuvent donner III et IV; nous considérons alors V (qui n'a pas été écrit, parce que nous apercevons aisément les résultats qui vont être signalés) : V_2 contient A'''' qui ne figure plus dans V_3, V_4, V_5 [1], donc, puisqu'il s'agit d'éliminer A'''', il

---

[1] V_3 peut s'obtenir en différentiant IV_2 par rapport à b, ce qui ne fait intervenir aucune dérivée nouvelle de la fonction A; donc V_3 contient A''' comme plus haute dérivée de A.

n'y a qu'à négliger cette équation; pour la même raison V_5 est à négliger; en portant dans V_3, V_4 les expressions de A'', B'', A''', B''', nous avons deux équations nouvelles ne contenant plus que A', B'. Conclusion : nous avons quatre relations contenant A', B', à savoir II_2, $\overline{IV}_3$, $\overline{V}_3$, $\overline{V}_4$ (en désignant par $\overline{IV}_3$, $\overline{V}_3$, $\overline{V}_4$ ce que deviennent les équations IV_3, V_3, V_4 obtenues par notre méthode et transformées ensuite par le remplacement de A'', A''', B'', B''' par les valeurs calculées comme il a été expliqué); l'élimination de A', B' entre ces quatre équations est aisée; en effet II_2 est symétrique en A' et B'; $\overline{IV}_3$ aussi; $\overline{V}_3$, $\overline{V}_4$ s'échangent l'une en l'autre en échangeant $A^{(j)}$ avec $B^{(j)}$; comme l'équation II_2 est du premier degré en A' et en B', on forme un système équivalent en tirant B' de II_2, $[B' = -(r + sA') : (s + tA')]$, et remplaçant B' par cette valeur dans $\overline{IV}_3$ (qui cesse alors d'être symétrique en A' et B'), dans $\overline{V}_3$ et $\overline{V}_4$ et éliminant A' entre les trois équations ainsi obtenues; on remarque alors que $\overline{IV}_3$ se transforme en une équation dont le premier membre est un polynome de degré 4 en A' : *en raison de la symétrie, ce polynome qui a* A' *pour racine, a aussi* B' *comme racine;* le premier membre de $\overline{V}_3$ devient un polynome en A' de degré 5 qui admet pour racine A' *et aussi* B' : en effet, en raison de la symétrie, on aurait pu éliminer A' au lieu de B'; en portant la valeur de A', à savoir $-(r + sB') : (s + tB')$ dans $\overline{IV}_3$ on retrouverait le même polynome de degré 4, avec B' comme argument au lieu de A', et $\overline{V}_4$ fournirait le polynome de degré 5 en A' obtenu, dans le calcul qui précède, au moyen de $\overline{V}_3$, sauf remplacement de A' par B'. Conclusion : ***nous avons, comme résultat final, à exprimer que deux polynomes en*** A', ***l'un de degré*** 4, ***l'autre de degré*** 5, ***ont deux racines communes; les coefficients de ces polynomes s'expriment au moyen des dérivées d'ordre*** 2, 3, 4 ***pour le premier,*** 2, 3, 4, 5 ***pour le second.*** La méthode du plus grand commun diviseur fournit sans effort les deux conditions précises; on peut faire l'objection que, en toute rigueur, nous avions à éliminer une seule inconnue A entre 3 équations $\overline{IV}_3$, $\overline{V}_3$, $\overline{V}_4$ réduites comme il a été dit à ne contenir que A'; nous avons transformé la question, en exprimant que *deux* de ces équations (au lieu de *trois*) ont *deux* racines communes (au lieu d'*une*), mais le système obtenu ne se décompose pas en plusieurs systèmes distincts, donc les conditions précises ont bien été obtenues (et d'ailleurs les *trois* équations en A′ ont bien *deux* solutions communes et non *une seule*).

3. Il reste donc à effectuer les calculs; on peut les faire sous la forme stricte indiquée à l'instant; mais il est avantageux d'apporter quelques modifications (d'*exécution*, mais non de *méthode*). On peut tirer B′ comme il a été dit

$$-\mathrm{B}'=\frac{r+s\mathrm{A}'}{s+t\mathrm{A}'};$$

en dérivant cette équation par rapport à a, on a une équation définissant A″ (équivalente à III_2, comme c'est aisé de le vérifier). On a ainsi

$$(5)\quad \mathrm{A}''=\frac{s\alpha-\beta r+(\alpha t+\beta s-2\gamma r)\mathrm{A}'+(2\beta t-\gamma s-\delta r)\mathrm{A}'^2+(t\gamma-s\delta)\mathrm{A}'^3}{rt-s^2}.$$

En dérivant cette équation par rapport à b, nous avons une équation équivalente à IV_3 (car IV_3 se déduit de III_2 en dérivant en b); cette équation est

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{A}'')+\mathrm{B}'\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{A}'')=0,$$

d'après le principe déjà expliqué [A″ est remplacé par sa valeur (5) et les dérivations sont faites en regardant x, y, a, b comme des variables indépendantes]; on remplace B′ par sa valeur $-(r+s\mathrm{A}'):(s+t\mathrm{A}')$ et nous obtenons ainsi

$$(6)\quad (s+t\mathrm{A}')\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{s\alpha-\beta r+\ldots}{rt-s^2}\right]-(r+s\mathrm{A}')\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{s\alpha-\beta r+\ldots}{rt-s^2}\right]=0.$$

Nous posons

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{lll}
\mathrm{P}=\dfrac{\alpha s-\beta r}{rt-s^2}, & & \mathrm{Q}=\dfrac{\delta s-\gamma t}{rt-s^2},\\[2ex]
\mathrm{P}_1=\dfrac{\alpha t+\beta s-2\gamma r}{rt-s^2}, & & \mathrm{Q}_1=\dfrac{\delta r+\gamma s-2\beta t}{rt-s^2};\\[2ex]
\mathrm{H}=\dfrac{\mathrm{D}(q,\mathrm{Q})}{\mathrm{D}(x,y)}, & \mathrm{N}=\dfrac{\mathrm{D}(p,\mathrm{P})}{\mathrm{D}(y,x)}, & \mathrm{L}=\dfrac{\mathrm{D}(p,\mathrm{Q}_1)}{\mathrm{D}(x,y)}+\dfrac{\mathrm{D}(q,\mathrm{P}_1)}{\mathrm{D}(y,x)};\\[2ex]
\mathrm{K}=\dfrac{\mathrm{D}(q,\mathrm{Q}_1)}{\mathrm{D}(x,y)}+\dfrac{\mathrm{D}(p,\mathrm{Q})}{\mathrm{D}(x,y)}, & & \mathrm{M}=\dfrac{\mathrm{D}(p,\mathrm{P}_1)}{\mathrm{D}(y,x)}+\dfrac{\mathrm{D}(q,\mathrm{P})}{\mathrm{D}(y,x)}.
\end{array}\right.$$

L'équation (6) est alors

$$(6') \qquad HA'^4 + KA'^3 + LA'^2 + MA' + N = 0.$$

Puisque (6′) est équivalente à IV_3, en la dérivant en b, nous avons une équation équivalente à V_4, qui est

$$A'^4\left(\frac{\partial H}{\partial x} + B'\frac{\partial H}{\partial y}\right) + \ldots + \frac{\partial N}{\partial x} + B'\frac{\partial N}{\partial y} = 0,$$

ou en remplaçant B′ par son expression $-(r + sA') : (s + tA')$,

$$(7) \qquad \begin{aligned}(s + tA')&\left[\frac{\partial H}{\partial x}A'^4 + \frac{\partial K}{\partial x}A'^3 + \ldots + \frac{\partial N}{\partial x}\right]\\ -(r + sA')&\left[\frac{\partial H}{\partial y}A'^4 + \frac{\partial K}{\partial y}A'^3 + \ldots + \frac{\partial N}{\partial y}\right] = 0.\end{aligned}$$

C'est l'équation de degré 5 annoncée [en dérivant (6′) en a, on aurait une équation de degré 6 en A′; il y a donc intérêt à dériver en b]. Si l'on désigne par E le premier membre de (6′), l'équation (7) peut s'écrire

$$(7') \qquad \frac{D(E, p + qA')}{D(x, y)} = 0,$$

étant entendu que, en calculant le Jacobien, x, y, A′ sont considérés provisoirement comme des variables indépendantes.

D'autre part, si l'on veut que deux équations

$$\begin{gathered}X^4 + kX^3 + lX^2 + mX + n = 0,\\ X^5 + k_1X^4 + l_1X^3 + m_1X^2 + n_1X + p_1 = 0\end{gathered}$$

aient deux racines communes, il n'y a qu'à pousser les opérations du plus grand commun diviseur jusqu'à ce que le reste soit de degré 1 (il y a 3 divisions à faire, le premier reste étant de degré 3, le second de degré 2, le troisième de degré 1); on annule les deux coefficients de ce reste et l'on a ainsi les relations cherchées. Ce calcul qui, au fond, ne nous servirait que médiocrement, n'est pas inextricable; on peut, si l'on préfère, opérer ainsi : on écrit

$$\frac{X^4 + kX^3 + lX^2 + mX + n}{X^5 + k_1X^4 + l_1X^3 + m_1X^2 - m_1X + p_1} = \frac{X^2 + \alpha X + \rho n}{X^3 + \alpha_1X^2 + \beta_1X + \rho p_1},$$

où α, α_1, β_1, ρ sont 4 inconnues, liées par 6 équations obtenues en chassant les dénominateurs et égalant les coefficients de X^6, X^5, X^4, X^3, X^2, X; les termes en X^6, X^5 donnent $\alpha_1 = \alpha + k_1 - k$, $\beta_1 = \rho n + \alpha(k_1 - k) + l_1 - l - k^2$, et alors il reste quatre équations linéaires aux inconnues α, ρ; les deux conditions s'obtiennent aussitôt sous forme de deux déterminants d'ordre 3; mais comme déjà $k = \frac{K}{H}$, $l = \frac{L}{H}$, ..., k_1 ..., sont des expressions assez compliquées, le calcul n'apprend rien d'intéressant.

Quand les deux équations aux dérivées partielles d'ordre 5 ainsi trouvées sont vérifiées par la fonction $z(x, y)$, A' et B' se calculent en fonction de z et de ses dérivées (de l'ordre 2 inclus à 5 inclus) comme racines communes aux équations

$$E = 0, \qquad \frac{D(E, p + qA')}{D(x, y)} = 0$$

déjà écrites; et l'équation $A' =$ const. définit, pour chaque valeur de la constante, une courbe le long de laquelle la surface est touchée par un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la direction $(1, A', p + qA')$; les équations $A' =$ const., $A'_1 = p + qA' =$ const. sont équivalentes; cette courbe de contact est l'une des positions des courbes $a =$ const. de la surface, courbes toutes congruentes entre elles; on obtient donc, la surface étant supposée *donnée*, par des éliminations et des dérivations le réseau de translation; *si la surface est algébrique, les courbes de ce réseau sont algébriques, résultat bien connu, mis simplement en évidence par notre méthode.* Ayant précisé la valeur de la constante à laquelle A' reste égal, on a une courbe *connue*, sur laquelle on peut prendre b, qui est la seule quantité variable sur cette courbe, égal à l'abscisse du point courant; dans ces conditions, B, B_1 désignant les coordonnées y, z d'un point de cette courbe en fonction de l'abscisse b, et (x, y, z) étant le point courant de la surface, le paramètre a est égal à $x - b$; $y - B$ est égal à A, $z - B_1$ égal à A_1; on a ainsi trouvé, sur une surface *donnée* qui est de translation, les fonctions A, A_1, B, B_1 des arguments a ou b.

Nous savons directement, d'après le théorème d'Abel appliqué aux quartiques planes (et d'après les recherches de Sophus Lie qui prouvent la réciproque), qu'il existe des surfaces à 18 paramètres qui ont deux réseaux de translation. Pour ces surfaces l'équation de degré 5 en A' admet les racines de l'équation de degré 4, ce qui fait un *système d'équations d'ordre cinq encore, en nombre égal à* 4, intégrable avec une solution renfermant 18 constantes arbitraires ; comptons le nombre de constantes ainsi : pour x_0, y_0 donnés, on peut donner arbitrairement z_0, p_0, q_0, les dérivées d'ordre 2, 3, 4 et deux des 6 dérivées d'ordre 5, ce qui fait un total de 17 ; donc il reste une arbitraire sur les dérivées d'ordre 6, qui se trouvent ainsi liées par six équations seulement : les 4 équations d'ordre 5 (si du moins elles sont distinctes) donnent par dérivation en x et y simplement six équations distinctes et non huit. Ayant calculé une des quatre valeurs de A', on détermine comme plus haut le réseau de translation correspondant.

Enfin, si l'équation $HA'^4 + \ldots + N = 0$ se réduit à une identité, on a *les cinq équations d'ordre* 4, $H = K = L = M = N = 0$ vérifiées par les surfaces qui ont ∞^1 réseaux de translation ; si l'on circonscrit à la surface un cylindre dont les génératrices ont une direction quelconque, la courbe de contact est susceptible d'engendrer un réseau de translation ; la courbe étant ainsi obtenue, le réseau se détermine comme plus haut, si la surface est donnée (il n'y a que ∞^1 réseaux, parce que chaque réseau est obtenu ∞^1 fois par notre procédé) ; ces surfaces dépendent de 12 paramètres ; rappelons comment ce résultat s'obtient ; posons

$$f(\alpha, \beta) \equiv \lambda(h\alpha^2 + 2k\alpha\beta + l\beta^2 + 2m\alpha + 2n\beta + 1)(h_1\alpha^2 + \ldots + 2n_1\beta + 1).$$

Les formules

$$x = \int \frac{d\alpha_1}{\frac{\partial f}{\partial \beta_1}} + \int \frac{d\alpha_2}{\frac{\partial f}{\partial \beta_2}}, \qquad y = \int \frac{\alpha_1\, d\alpha_1}{\frac{\partial f}{\partial \beta_1}} + \int \frac{\alpha_2\, d\alpha_2}{\frac{\partial f}{\partial \beta_2}},$$

$$z = \int \frac{\beta_1\, d\alpha_1}{\frac{\partial f}{\partial \beta_1}} + \int \frac{\beta_2\, d\alpha_2}{\frac{\partial f}{\partial \beta_2}},$$

où les points (α_1, β_1) ou (α_2, β_2) décrivent tous deux la conique

$$h\alpha^2 + 2k\alpha\beta + l\beta^2 + 2m\alpha + 2n\beta + 1 = 0,$$

définissent la surface générale en jeu ; on a ainsi 10 paramètres pour les 2 coniques, 1 pour λ, 3 comme constantes additives figurant, après intégration, pour x, y, z. On a donc 14 paramètres en apparence pour définir à la fois la surface et celui des ∞^1 réseaux de translation qu'elle porte; mais il faut remarquer qu'il y a *deux* unités à retrancher; en effet, si μ est une constante arbitraire, on peut remplacer f par

$$\bar{f} \equiv (h\alpha^2 + 2k\alpha\beta + \ldots + 1)[\lambda(h_1\alpha^2 + \ldots + 2n_1\beta + 1) + \mu(h\alpha^2 + 2k\alpha\beta + \ldots + 2n\beta + 1)].$$

L'introduction de μ ne change aucune des intégrales, puisque les points (α_1, β_1), (α_2, β_2) décrivent tous deux la conique $h\alpha^2 + \ldots + 1 = 0$; mais alors la constante μ permet de supposer que l'un des coefficients, h_1 par exemple, est nul; autrement dit, l'un des 14 paramètres introduits ne change pas la surface, mais simplement l'une des coniques du faisceau ponctuel qui entre en jeu et un autre modifie le choix du réseau de translation mis en évidence. Il reste donc 12 paramètres pour la surface. On arriverait au même résultat en se bornant à écrire

$$f(\alpha, \beta) \equiv \lambda(m_1\alpha + n_1\beta - 1)(m_2\alpha + n_2\beta - 1)(m_3\alpha + n_3\beta - 1)(m_4\alpha + n_4\beta - 1)$$

et faisant décrire au point (α_1, β_1) la droite $m_1\alpha + n_1\beta - 1 = 0$, au point (α_2, β_2) la droite $m_2\alpha + n_2\beta - 1 = 0$; les 12 paramètres sont les 8 constantes m_i, n_i, puis λ, puis les 3 constantes d'intégration, et cette fois on a mis en évidence l'un des trois réseaux de translation composés de courbes planes et la direction des plans relatifs à un autre des deux réseaux analogues. Si nous choisissons comme constantes les valeurs, pour x_0, y_0 donnés, de z_0, p_0, q_0, ..., les dérivées jusqu'à l'ordre 3 inclus donnent 10 constantes; il reste encore 2 constantes arbitraires, de sorte que *les cinq équations d'ordre 4 ne peuvent être distinctes;* il est facile de vérifier qu'elles se réduisent à *trois relations distinctes.*

En effet, l'équation

$$\text{(8)} \qquad HA'^4 + KA'^3 + LA'^2 + MA' + N = 0$$

jouit de cette particularité que si A' est racine, on a une autre racine B' liée à la première par la relation

$$r + s(A' + B') + tA'B' = 0.$$

Un calcul simple permet de trouver les deux relations nécessaires et suffisantes pour que l'équation (8) jouisse de cette propriété,

$$(9)\quad \begin{cases} H = \dfrac{2s^2+rt}{4rs}K - \dfrac{t}{2r}L + \dfrac{t^2}{4rs}M, \\ N = \dfrac{2s^2+rt}{4ts}M - \dfrac{r}{2t}L + \dfrac{r^2}{4ts}K, \end{cases}$$

de sorte que *les surfaces de translation à ∞^1 réseaux satisfont aux* 3 *équations d'ordre* 5, *strictement nécessaires et suffisantes,* $K = L = M = 0$; pour revenir à notre décompte de paramètres, il y aura 2 constantes fournies par 2 dérivées d'ordre 4, de la sorte les 3 équations d'ordre 4 donnent par dérivation en x, y six équations distinctes (1).

4. Pour être complet, il n'y a qu'à signaler le cas spécial des surfaces qui admettent un réseau de translation avec une famille, ou deux, composée de courbes planes. *A condition de particulariser le système d'axes, on obtient un résultat plus simple.*

Prenons d'abord le cas d'une famille plane

$$(10)\qquad x = a + b, \qquad y = B, \qquad z = A_1 + B_1$$

(ce qui revient à supposer la fonction A identiquement nulle) : les systèmes (I), (II), (III) deviennent

$$\text{(I)}\qquad p = A'_1, \qquad p + qB' = B'_1;$$

$$\text{(II)}\qquad r = A''_1, \qquad r + sB' = 0, \qquad r + 2sB' + tB'^2 + qB'' = B''_1;$$

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} \alpha = A'''_1, \qquad \alpha + \beta B' = 0, \qquad \alpha + 2\beta B' + \gamma B'^2 + sB'' = 0, \\ \alpha + 3\beta B'^2 + 3\gamma B'^2 + \delta B'^3 + 3sB'' + 3tB'B'' + qB''' = B'''_1; \end{cases}$$

et l'on aperçoit aussitôt la relation $\beta r - \alpha s = 0$ d'ordre 3, qui caractérise ces surfaces, du moins quand le plan des zx est paral-

(1) Le calcul qui donne les relations (9) ne suppose rien sur les quantités H, K, L, M, N, r, s, t qui ait le moindre rapport avec le problème traité ici; il s'agit d'une propriété concernant une équation, numérique ou non, de degré 4. On fait ce calcul aisément en écrivant

$$HA'^4 + \ldots + N \equiv H(A'^2 - \lambda A' + \mu)(A'^2 - \lambda_1 A' + \mu_1),$$

avec

$$r + s\lambda + t\mu = 0, \qquad r + s\lambda_1 + t\mu_1 = 0$$

et éliminant λ, μ, λ_1, μ_1.

lèle à celui de la courbe plane du réseau de translation; réciproquement cette équation s'intègre sans difficulté et nous retrouvons la surface (8) comme intégrale générale. Nous chercherons au paragraphe suivant le système précis correspondant à une orientation quelconque du plan de la courbe plane génératrice.

La surface à deux profils plans $z = X + Y$ *donne l'équation* $s = 0$, *du moins quand les plans* zOx, zOy *sont parallèles aux plans des deux profils.*

5. Revenons au cas où *l'un des profils de translation est plan, mais d'orientation non précisée.*

Si nous adoptons les formules paramétriques

$$x = a + b, \qquad y = A + B, \qquad z = B_1, \tag{11}$$

qui ont le même degré de simplicité que les formules (10) dont elles ne diffèrent que par l'échange des noms de y et z, nous aurons encore une équation unique d'ordre 3 que l'on peut déduire de $\beta r - \alpha s = 0$ en y regardant x et z comme les variables indépendantes et y comme fonction de x, z; le changement de variables et fonction étant effectué, on remplace y par z et z par y, de façon à obtenir l'équation relative aux formules (11); il est plus simple ici de reprendre, *mutatis mutandis*, la méthode du paragraphe 2, en ne conservant que des équations strictement nécessaires pour éliminer certaines fonctions; on aperçoit ainsi (en faisant $A_1 = 0$ dans les équations déjà décrites) les quatre relations

$$\left\{\begin{array}{l} p + qA' = 0, \qquad r + 2sA' + tA'^2 + qA'' = 0, \\ r + s(A' + B') + tA'B' = 0, \\ \alpha + \beta(2A' + B') + \gamma(2A'B' + A'^2) + \delta A'^2B' + (s + tB')A'' = 0 \end{array}\right. \tag{12}$$

dont les trois premières donnent successivement A', A'', B'; la dernière fournit donc l'équation d'ordre 3

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha q^2(qs - tp) + \beta q(2tp^2 - spq - rq^2) \\ + \delta p^2(ps - rq) + \gamma p(2rq^2 - spq - tp^2) \\ + (rt - s^2)(rq^2 - spq + tp^2) = 0 \end{array}\right. \tag{E_1}$$

parfaitement symétrique, comme de juste, par rapport aux variables x, y.

Si maintenant on passe au cas

(13) $x = a + b, \qquad y = A + B, \qquad z = A_1 + B_1, \qquad A_1 \equiv ma + nA + \lambda,$

où m, n, λ sont constants de façon que le profil plan soit parallèle au plan $z - mx - ny = 0$, nous écrivons

$$(14) \quad \begin{cases} \bar{z} = z - mx - ny = B_1 + \lambda - mb - nB = \bar{B}_1, \\ \bar{p} = p - m, \quad \bar{q} = q - n, \quad \bar{r} = r, \quad \ldots, \quad \bar{\delta} = \delta. \end{cases}$$

Si nous appelons $f(p, q, r, s, t, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ le premier membre de (E_1), la surface $(x, y, \bar{z})$ fournit l'équation $f(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \ldots \bar{\delta}) = 0$, de sorte que la surface (13) fournit l'équation

$$(15) \qquad f(p - m, q - n, r, s, t, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0$$

[à titre de vérification, on comprend pourquoi dans E_1 le coefficient de q^3 est $\alpha s - \beta r$: si n augmente indéfiniment, l'équation (15) doit en effet se réduire à $\alpha s - \beta r = 0$]. On remarquera encore (ce sera utile pour la suite), que la relation $\bar{p} + \bar{q}A' = 0$ donne $(p - m) + (q - n)A' = 0$.

Ce résultat établi, si on laisse m, n indéterminés, et si l'on veut les éliminer, il suffit d'adjoindre à l'équation (15) les deux équations dérivées, en x ou y et d'éliminer m, n entre le total des équations qui viennent d'être obtenues; au point de vue du résultat définitif, les constantes m, n ne figurant que par les groupes $p - m$, $q - n$, cela revient à éliminer p, q entre les équations

$$(16) \quad \begin{cases} f(p, q, r, s, t, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0, \\ r\dfrac{\partial f}{\partial p} + s\dfrac{\partial f}{\partial q} + \alpha\dfrac{\partial f}{\partial r} + \ldots + \delta_1\dfrac{\partial f}{\partial \delta} = 0, \\ s\dfrac{\partial f}{\partial p} + t\dfrac{\partial f}{\partial q} + \beta\dfrac{\partial f}{\partial r} + \ldots + \varepsilon_1\dfrac{\partial f}{\partial \delta} = 0. \end{cases}$$

On a ainsi l'équation E_2 aux dérivées partielles d'ordre 4 que l'on doit adjoindre aux équations d'ordre 5 déjà formées.

Nous allons confronter cette méthode de calcul avec une autre qui suit de plus près la voie indiquée au paragraphe 2; mais, auparavant, signalons que, si la surface admet un second profil plan de translation (appartenant au même réseau, ou à un second réseau), la surface satisfera, en même temps qu'à l'équation (15), à une autre semblable avec deux constantes m_1, n_1 différentes du couple (m, n); on peut choisir m, n, m_1, n_1 arbitrairement *et le système*

$$(17) \qquad \begin{cases} f(p-m, \; q-n, \; r, \ldots, \delta) = 0 \\ f(p-m_1, q-n_1, r, \ldots, \delta) = 0 \end{cases}$$

est compatible : un premier système de solutions comprend les surfaces où les deux profils plans appartiennent au même réseau, la surface n'ayant qu'un réseau de translation; un second système de solutions comprend les surfaces à deux réseaux de translation seulement, chacun d'eux ayant un profil plan et un seul : les profils complémentaires ont un même cône du second degré pour cône directeur des tangentes; un troisième système de solutions comprend les surfaces ayant ∞^1 systèmes de translation, sur lesquels trois sont composés de profils plans [et dans ce cas les profils (m, n), (m_1, n_1) peuvent appartenir ou non au même réseau]. Il y a, alors, une série de résultats intéressants à signaler.

Si les profils (m, n), (m_1, n_1) appartiennent au *même* réseau, on a

$$A' = -\frac{p-m}{q-n}, \qquad B' = -\frac{p-m_1}{q-n_1};$$

et *alors la relation* $r + 2s(A'+B') + tA'B' = 0$ *qui exprime que les deux tangentes* $(1, A', A'_1)$, $(1, B', B'_1)$ *sont conjuguées fournit l'équation aux dérivées partielles du second ordre*

$$(18) \quad r(q-n)(q-n_1) - 2s[(p-m)(q-n_1) + (p-m_1)(q-n)] \\ + t(p-m)(p-m_1) = 0,$$

qui prend la forme simple $s = 0$ *signalée plus haut quand on peut disposer de l'orientation du trièdre de référence.* Ceci est tout à fait d'accord avec les résultats donnés par Sophus Lie et Georg Scheffers au Chapitre indiqué [*voir* p. 378, l'équation (10) de ces auteurs

$$R(p, q)r + 2S(p, q)s + T(p, q)t = 0$$

quand on donne le cône directeur des tangentes du profil C et le cône analogue du profil Γ, qui engendrent la surface par leur translation]. Quand m, n, m_1, n_1 sont donnés, l'équation (18) est nécessaire et suffisante pour que la surface $z(x, y)$ admette un réseau de translation dont les deux profils sont plans, parallèles aux plans $mx + ny - z = 0$ et $m_1 x + n_1 y - z = 0$.

Un autre résultat important est le suivant : le système des trois équations

$$f(p - m,\ q - n,\ r,\ \ldots,\ \delta) = 0,$$
$$f(p - m_1,\ q - n_1,\ \ldots,\ \delta) = 0,$$
$$f(p - m_2,\ q - n_2,\ \ldots,\ \delta) = 0$$

est compatible, quelles que soient les constantes $m_i, n_i\,(i = 0, 1, 2)$; *on distingue le cas où les droites* $m_i x + n_i y = 1$ *sont concourantes et celui où elles forment un triangle; mais, de toute façon, une surface intégrale vérifie un ensemble de trois équations nouvelles de même forme*

$$f(p - m_3,\ q - n_3,\ r,\ \ldots,\ \delta) = 0,$$
$$f(p - m_4,\ q - n_4,\ r,\ \ldots,\ \delta) = 0,$$
$$f(p - m_5,\ q - n_5,\ r,\ \ldots,\ \delta) = 0,$$

car la surface est nécessairement du type ∞^1 réseaux de translation, parmi lesquels *trois* sont formés de courbes planes.

Une forme équivalente de cet énoncé est la suivante : nous supposons que les 4 droites $m_i x + n_i y = 1\,(i = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ ne comprennent aucun système de 3 droites concourantes au même point; dans ces conditions *le système des 4 équations*

$$(19)\quad \begin{aligned} &f(p - m,\ q - n,\ \ldots,\ \delta) = 0, &\quad &f(p - m_1,\ q - n_1,\ \ldots,\ \delta) = 0,\\ &f(p - m_2,\ \ldots,\ \delta) = 0, & &f(p - m_3,\ \ldots,\ \delta) = 0 \end{aligned}$$

est compatible et fournit des surfaces à ∞^1 *réseaux de translation;* suivant la façon de grouper par couples les profils, on a trois séries de surfaces. Cela se voit en remarquant que la droite $z = 1$, $m_i x + n_i y = 1$ est la directrice du cône directeur (réduit à un plan) des tangentes à l'un des profils plans de translation. Si l'on a choisi l'une des 3 façons d'associer les couples de profils (par exemple le couple 0, 1, puis le couple 2, 3), on a formé un quadrilatère ayant pour côtés opposés les droites de chacun de ces couples et alors les diagonales donnent les droites

$$m_4 x + n_4 y = 1, \qquad m_5 x + n_5 y = 1,$$

qui correspondent au troisième réseau de même définition; *de la sorte le système* (19) *entraîne l'existence des deux équations analogues*

$$(20)\qquad f(p-m_4,\, q-n_4, \ldots, \delta) = 0, \qquad f(p-m_5,\, q-n_5,\, \ldots, \delta) = 0$$

et nous avons appris à calculer (m_4, n_4), (m_5, n_5) *qui ont trois déterminations.*

On remarque encore que les *équations* (19) (*où les couples associés correspondent aux indices* 0, 1, *puis* 2, 3) *entraînent non seulement les équations* (20), *où* (m_4, n_4), (m_5, n_5) *ont été calculées comme il a été expliqué*, mais encore les équations analogues à (18), où les indices associés sont (0, 1), (2, 3), (4, 5), et cela confirme le résultat indiqué précédemment, à savoir que les surfaces admettant ∞^1 réseaux de translation dépendent de 12 constantes; ce sont les 8 constantes (m, n), (m_1, n_1), (m_2, n_2), (m_3, n_3), puis les valeurs pour $x = x_0$, $y = y_0$ de z, p, q, r et le système d'équations aux dérivées partielles strictement indépendantes se réduit aux deux équations nécessaires et suffisantes

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &r(q-n)(q-n_1) - 2s[(p-m)(q-n_1) + (p-m_1)(q-n)] \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + t(p-m)(p-m_1) = 0, \\ &r(q-n_2)(q-n_3) - 2s[(p-m_2)(q-n_3) + (p-m_3)(q-n_2)] \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + t(p-m_2)(p-m_3) = 0, \end{aligned}\right.$$

mais *quand on n'a pas précisé les valeurs des huit constantes* $(m, n), \ldots, (m_3, n_3)$, *on doit écrire le système d'ordre* 4 *annoncé plus haut*, $\mathrm{H} = \mathrm{K} = \mathrm{L} = \mathrm{M} = \mathrm{N} = 0$ (*qui se réduit à trois équations distinctes, comme il a été expliqué*), *pour caractériser les surfaces admettant* ∞^1 *réseaux de translation.*

Remarquons enfin que la méthode suivie dans ce paragraphe, appliquée aux surfaces qui ont un seul profil plan de translation, permet de trouver aussi les deux équations d'ordre 5 à adjoindre à E_2. En effet, si E_2 est vérifiée (sans supposer pour l'instant que z doive satisfaire à une autre équation), le système employé

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &f(p-m,\, q-n,\, r,\, s,\, \ldots, \delta) = 0, \\ &r\frac{\partial f}{\partial p}(p-m,\, q-n,\, r,\, s,\, \ldots, \delta) + s\frac{\partial f}{\partial q} + \ldots + \delta_1 \frac{\partial f}{\partial \delta} = 0, \\ &s\frac{\partial f}{\partial p}(p-m,\, q-n,\, r,\, s,\, \ldots, \delta) + t\frac{\partial f}{\partial q} + \ldots + \varepsilon_1 \frac{\partial f}{\partial \delta} = 0, \end{aligned}\right.$$

contient une équation qui peut être remplacée par E_2 et peut être considérée comme un sytème définissant z, m, n en fonction de x; la différentiation de la première équation donne, en tenant compte des deux dernières,

$$\frac{\partial f}{\partial p}dm + \frac{\partial f}{\partial q}dn = 0,$$

de sorte que si m est constant, n l'est aussi; or, ayant tiré de deux des équations (22), m, et n en fonction de p, q, ..., δ_1, ε_1, on égale à zéro $\frac{\partial m}{\partial x}$ et $\frac{\partial m}{\partial y}$ et cela fournit (théoriquement du moins) les deux équations d'ordre 5 en jeu. Ce raisonnement est calqué sur celui qui est adopté pour les intégrales complètes des équations aux dérivées partielles du premier ordre et explique pourquoi E_2 n'est pas suffisante. Nous allons maintenant confronter avec une autre façon d'opérer, utilisant les calculs du paragraphe 2.

6. Revenons donc à la méthode du paragraphe 2; nous avons formé les deux équations d'ordre 5 qui expriment que la surface est de translation; *nous ajoutons la condition complémentaire : la courbe* (a, A, A_1) *est plane.*

Nous devons annuler le déterminant

$$(23)\qquad \begin{vmatrix} 1 & A' & A'_1 \\ 0 & A'' & A''_1 \\ 0 & A''' & A'''_1 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} A'' & A''_1 \\ A''' & A'''_1 \end{vmatrix}.$$

Or l'équation (5), recopiée en utilisant les notations (7), est

$$(5')\qquad A'' = P + P_1 A' - Q_1 A'^2 - QA'^3.$$

Elle fournit

$$(24)\qquad {}''' = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P_1}{\partial x}A' - \frac{\partial Q_1}{\partial x}A'^2 - \frac{\partial Q}{\partial x}A'^3$$
$$+ A'\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P_1}{\partial y}A' - \frac{\partial Q_1}{\partial y}A'^2 - \frac{\partial Q}{\partial y}A'^3\right)$$
$$+ (P_1 - 2Q_1A' - 3QA'^2)(P + P_1A' - Q_1A'^2 - QA'^3).$$

D'autre part, d'après II_1, III_1, on a

$$A''_1 = r + 2sA' + tA'^2 + qA'',$$
$$A'''_1 = \alpha + 3\beta A' + 3\gamma A'^2 + \delta A'^3 + 3(s + tA')A'' + qA''',$$

de sorte que le déterminant à égaler à zéro fournit

$$(25)\qquad \begin{vmatrix} A'' & r + 2sA' + tA'^2 \\ A''' & \alpha + 3\beta A' + 3\gamma A'^2 + \delta A'^3 + 3(s + tA')A'' \end{vmatrix} = 0.$$

Remplaçant A'', A''' par les expressions ($5'$), (24), on a une équation dont le premier membre est un polynome entier en A', de degré 6 seulement (après disparition des termes de degré 7 offerts au premier abord dans le déterminant); le fait que ce polynome est de degré 6 est lié à ce fait qu'il ne peut exister que 6 profils plans de translation, sauf le cas du paraboloïde qui en admet une infinité simple; les coefficients de ce polynome dépendent des dérivées d'ordre 2, 3, 4 de z (z, p, q n'y figurent pas). Ce polynome de degré 6 a donc une racine commune avec le polynome

$$(6')\qquad HA'^4 + KA'^3 + LA'^2 + MA' + N = 0,$$

dont les coefficients dépendent aussi des dérivées 2, 3, 4 de z : *il en résulte une équation aux dérivées partielles d'ordre* 4 *à adjoindre aux équations, déjà formées d'ordre* 5. S'il n'y a qu'un profil plan, cette valeur de A' s'obtient *rationnellement* (au moyen des dérivées jusqu'à l'ordre 4 seulement) et par suite la valeur de B' s'obtiendra aussi rationnellement (mais avec les dérivées jusqu'à l'ordre 5).

Je n'insiste pas davantage sur les cas particuliers, déjà vus au paragraphe précédent.

Il ne m'a pas paru inutile de préciser divers points de cette théorie qui a coûté tant d'efforts aux géomètres illustres Abel, Sophus Lie, H. Poincaré, Darboux, et qui a donné lieu à tant de résultats élégants grâce à des raisonnements destinés à éviter des calculs inextricables; l'écueil était toutefois que, par mesure d'abréviation, un auteur annonçât, comme exact, un résultat étudié trop rapidement et fourni sans justification.

(Manuscrit reçu le 10 février 1943.)