BULLETIN DE LA S. M. F.

CHARLES EHRESMANN

Sur les applications continues d'un espace dans un espace fibré ou dans un revêtement

Bulletin de la S. M. F., tome 72 (1944), p. 27-54

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1944__72__27_0>

SUR LES APPLICATIONS CONTINUES D'UN ESPACE DANS UN ESPACE FIBRÉ OU DANS UN REVÊTEMENT;

PAR M. CHARLES EHRESMANN.

1. Introduction. — Dans le présent Mémoire, je généralise un résultat indiqué dans une Note aux *Comptes rendus* (1) et qui peut s'énoncer sommairement de la façon suivante :

Soit E un espace fibré et B son espace de base; si une application continue f d'un complexe fini K dans B est la projection d'une application continue f' de K dans E, toute déformation continue de f est la projection d'une déformation continue de f'.

Le théorème 1 ci-dessous affirme que ce résultat est encore valable en supposant que K est un complexe quelconque (pas nécessairement fini). Le théorème 2 concerne le cas particulier où E est un revêtement de B. Le résultat précédent est alors valable en supposant que K est un espace topologique quelconque. B. Eckmann (2) a démontré indépendamment la proposition analogue correspondant aux hypothèses suivantes : E et K sont des espaces métriques compacts; l'espace E n'est pas muni d'une fibration, mais d'une partition *rétractile.*

J'indiquerai une série de résultats, en partie connus, qui sont des applications presque immédiates des théorèmes 1 et 2. Il s'agit surtout de conditions pour qu'un espace fibré soit isomorphe à un produit topologique, pour qu'une application dans B soit inessentielle ou pour que deux applications soient homotopes. Le théorème 3 donne une caractérisation des classes d'applications d'un espace A dans un espace localement euclidien ou localement non euclidien hyperbolique, en particulier dans une surface quelconque à l'exception de la sphère et du plan projectif.

(1) C. EHRESMANN et J. FELDBAU, *Sur les propriétés d'homotopie des espaces fibrés* (*C. R. Acad. Sc.*, 211, 1941, p. 945-948).

(2) B. ECKMANN, *Zur Homotopietheorie gefaserter Räume* (*Commentarii math. helv.*, 1941-1942, p. 141-192).

La terminologie et les notations sont celles des *Éléments de Mathématique* de N. Bourbaki [1].

2. Un théorème sur les espaces fibrés et ses applications. — Rappelons la définition suivante de la notion d'espace fibré :

Définition 1. — Soit r une relation d'équivalence dans un espace topologique E; soient B l'espace quotient E/r et p la projection canonique de E sur B. Désignons par F_x la classe d'équivalence $\overset{-1}{p}(x)$ correspondant à $x \in B$. Supposons que toutes les classes d'équivalence soient homéomorphes à un espace topologique F. Chaque classe F_x sera appelée une fibre et F sera appelé la fibre type. L'espace E muni de la relation d'équivalence r sera appelé espace fibré et B son espace de base ou espace des fibres, lorsque la condition suivante sera vérifiée : Tout point x de B admet un voisinage U_x, appelé voisinage distingué, tel qu'il existe un homéomorphisme de $\overset{-1}{p}(U_x)$ sur le produit topologique $U_x \times F$ appliquant F_y sur $\{y\} \times F$ pour tout $y \in U_x$.

Si p est la projection canonique de l'espace fibré E sur l'espace de base B et f' une application d'un espace K dans E, l'application composée $f = p \circ f'$ de K dans B sera appelée *projection* dans B de f'.

Rappelons encore qu'une *déformation* d'une application continue f de K dans B est une famille $(f_t)_{t \in I}$ d'applications continues de K dans B telle que $f_0 = f$ et que l'application φ de $K \times I$ dans B, définie par $\varphi(x, t) = f_t(x)$, $x \in K$, $t \in I$, soit continue, I désignant l'intervalle $[0, 1]$ de la droite numérique. Lorsque les restrictions de f_t et de f à une partie K' de K sont identiques, quel que soit $t \in I$, on a une *déformation modulo* K'. Les applications f_0 et f_1 sont dites *homotopes modulo* K', lorsqu'il existe une déformation $(f_t)_{t \in I}$ modulo K' de f_0 à f_1.

Théorème 1. — Soit f' une application continue d'un complexe simplicial K dans l'espace fibré E et soit $f = p \circ f'$ la projection

---

(1) Paris, Hermann, 1939, 1940, 1942.

de f' dans B. En désignant par g et g' respectivement les restrictions de f et f' à un sous-complexe L de K, soit $(g'_t)_{t \in I}$ une déformation de g' dont la projection dans B est la déformation $(g_t)_{t \in I}$ de g (c'est-à-dire $g_t = p \circ g'_t$ pour tout $t \in I$). Étant donnée une déformation $(f_t)_{t \in I}$ de f telle que la restriction de f_t à L soit g_t, il existe une déformation $(f'_t)_{t \in I}$ de f' telle que sa projection dans B soit la déformation $(f_t)_{t \in I}$ et que la restriction de f'_t à L soit g'_t.

Démontrons d'abord le théorème dans le cas particulier suivant : le complexe K est formé par un simplexe e^n, de dimension n, et par l'ensemble de ses faces ; L est donc formé par un ensemble de faces de e^n.

La déformation $(f_t)_{t \in I}$ est définie par une application continue φ de $K \times I$ dans B. On peut trouver une subdivision simpliciale K′ de K et une subdivision de I en r intervalles $I_k = \left[\frac{k-1}{r}, \frac{k}{r}\right]$, où k est un entier de l'intervalle $[1, r]$, telles que, pour tout simplexe e_i^n de K′ et pour tout entier $k \in [1, r]$, l'image par φ de $e_i^n \times I_k$ soit contenue dans un voisinage distingué d'un point de B. En effet, l'ensemble des images réciproques par φ des voisinages distingués ouverts de B forme un recouvrement de $K \times I$ par des ensembles ouverts. Si e^n est supposé plongé dans R^n, l'espace $e^n \times I$ peut être considéré comme un sous-espace, appelé prisme, de l'espace numérique $R^n \times R = R^{n+1}$. C'est donc un espace métrique compact, la métrique étant la métrique euclidienne induite. Par suite il existe (¹) un nombre $\tau > 0$ tel que toute partie de $e^n \times I$, de diamètre $\leqq \tau$, soit contenue au moins dans un des ensembles ouverts du recouvrement considéré de $K \times I$. On peut bien trouver une subdivision K′ de K et un entier r tels que les diamètres de tous les ensembles $e_i^n \times I_k$ soient $\leqq \tau$, ce qui démontre notre affirmation.

Les simplexes de dimension n de K′ seront désignés par e_i^n, où l'indice i est un entier quelconque de l'intervalle $[1, a]$, a entier. Soit $M_{h,j}$ la réunion des produits $e_i^n \times I_k$ tels que $k \leqq h-1$, $i \leqq a$, où $k = h$, $i \leqq j$, les entiers h et j vérifiant les conditions $1 \leqq h \leqq r$,

(¹) *Voir* Alexandroff-Hopf, *Topologie*, I, p. 100, Théorème IV.

$1 \leqq j \leqq a$. L'ensemble $M_{h,a}$ sera aussi désigné par $M_{h+1,0}$ et la partie vide de $K' \times I$ sera désignée par $M_{1,0}$. Nous allons définir par récurrence une application continue φ' de $K' \times I$ dans E telle que $\varphi = p \circ \varphi'$ et que la restriction de φ' à $L \times I$ soit l'application ψ' correspondant à la déformation donnée $(g'_t)_{t \in I}$. Soit $\varphi_{h,j}$ la restriction de φ à $M_{h,j}$. Soit $N_{h,j}$ l'intersection de $M_{h,j}$ avec $L \times I$ et soit $\psi'_{h,j}$ la restriction de ψ' à $N_{h,j}$. Supposons qu'on ait défini une application continue $\varphi'_{h,j}$ de $M_{h,j}$ dans E telle que $\varphi_{h,j} = p \circ \varphi'_{h,j}$ et que la restriction de $\varphi'_{h,j}$ à $N_{h,j}$ soit $\psi'_{h,j}$. En supposant $0 \leqq j \leqq a' - 1$, définissons un prolongement $\varphi'_{h,j+1}$ de $\varphi'_{h,j}$, défini dans $M_{h,j+1}$, tel que $\varphi_{h,j+1} = p \circ \varphi'_{h,j+1}$ et que la restriction de $\varphi'_{h,j+1}$ à $N_{h,j+1}$ soit $\psi'_{h,j+1}$. Il suffit de définir une application continue $\varphi''_{h,j+1}$ de $e^n_{j+1} \times I_h$ dans E telle que : 1° $p \circ \varphi''_{h.j+1} =$ restriction $\overline{\varphi}_{h,j+1}$ de φ à $e^n_{j+1} \times I_h$; 2° $\varphi''_{h,j+1}$ coïncide avec $\varphi'_{h,j}$ sur l'intersection de $e^n_{j+1} \times I_h$ avec $M_{h,j}$, et coïncide avec ψ' sur l'intersection de $e^n_{j+1} \times I_h$ avec $L \times I$. La condition 2° exprime que $\varphi''_{h,j+1}$ est un prolongement au prisme $e^n_{j+1} \times I_h$ d'une application continue donnée $\theta_{h,j+1}$ d'un certain sous-complexe $M''_{h,j+1}$ de ce prisme. Ce sous-complexe, lorsqu'il est différent du prisme tout entier, est formé de la base *inférieure* $e^n_{j+1} \times \left\{\frac{h-1}{r}\right\}$ et d'un ensemble de faces latérales de ce prisme. L'application $p \circ \theta_{h,j+1}$ est la restriction de φ à $M''_{h,j+1}$. Comme le prisme est appliqué par φ dans un voisinage distingué U d'un point de B, il sera appliqué par $\varphi''_{h,j+1}$ dans $\overset{-1}{p}(U)$, qu'on peut identifier avec $U \times F$. Soit p' la projection canonique de $U \times F$ sur F. L'application $\varphi''_{h,j+1}$ sera définie lorsqu'on aura défini les deux applications continues $p \circ \varphi''_{h,j+1}$ et $p' \circ \varphi''_{h,j+1}$. Or $p \circ \varphi''_{h,j+1}$ est l'application connue $\overline{\varphi}'_{h,j+1}$. L'application $p' \circ \varphi''_{h,j+1}$ doit être un prolongement continu au prisme de l'application connue $p' \circ \theta_{h,j+1}$. D'après le lemme que nous démontrerons un peu plus loin, $M''_{h.j+1}$ est un rétracte du prisme; c'est-à-dire il existe une application continue π du prisme sur $M''_{h,j+1}$ telle que sa restriction à $M''_{h.j+1}$ soit l'application identique. L'application $p' \circ \theta_{h,j+1} \circ \pi$ est un prolongement au prisme de $p' \circ \theta_{h,j+1}$. Le couple d'applications $(\overline{\varphi}_{h,j+1}, p' \circ \theta_{h,j+1} \circ \pi)$ définit une application $\varphi''_{h.j+1}$ vérifiant les conditions (1°) et (2°). La réunion des deux applications $\varphi'_{h,j}$ et $\varphi''_{h,j+1}$ définit l'application continue cherchée $\varphi'_{h,j+1}$.

La définition précédente s'applique lorsque $h = 1$ et $j = 0$, $\varphi'_{1,0}$ désignant l'application *vide* (c'est-à-dire de la partie vide $M_{1,0}$). Par récurrence nous avons donc défini une application φ' de $K' \times I$ dans E, qui détermine une déformation $(f'_t)_{t \in I}$ vérifiant les conditions de l'énoncé.

Démontrons maintenant le théorème en supposant le complexe simplicial K absolument quelconque. Soit φ l'application de $K \times I$ dans B qui définit la déformation donnée $(f_t)_{t \in I}$ et soit ψ' l'application de $L \times I$ dans E qui définit la déformation donnée $(g'_t)_{t \in I}$. Soit A l'ensemble des applications dans E vérifiant les conditions suivantes :

1. Chaque application $a \in A$ est définie dans $M \times I$, où M est un sous-complexe arbitraire de K.
2. L'application $p \circ a$ est la restriction de φ à $M \times I$.
3. Les restrictions de a et de ψ' à $L' \times I$, où $L' = M \cap L$, sont identiques.

L'ensemble A est ordonné par la relation $a \subset a_1$ qui signifie que a_1 est un prolongement de a. L'ensemble ordonné A est inductif ([1]). En effet, soit A' une partie totalement ordonnée de A et soit $M' \times I$ la réunion de l'ensemble des parties de $K \times I$ dans lesquelles sont définies les applications appartenant à A'. M' est un sous-complexe de K, car c'est une réunion de sous-complexes. Soit b l'application de $M' \times I$ dans E qu'on peut appeler réunion de la famille d'applications A' et qui est définie de la façon suivante : $b(x) = a(x)$, quel que soit $x \in M' \times I$ et quel que soit $a \in A'$ tel que $a(x)$ soit défini ; l'élément $b(x)$ est bien unique, car si $a(x)$ et $a'(x)$ sont définis et si a et a' appartiennent à A', on a $a(x) = a'(x)$ en remarquant que $a \subset a'$ ou $a' \subset a$. L'application b vérifie les trois conditions (1), (2) et (3) ; c'est évidemment la borne supérieure de A' dans A. L'existence de cette borne supérieure signifie que A est inductif. En vertu du théorème de Zorn, l'ensemble A possède au moins un élément maximal.

Soit φ' un élément maximal de A. Supposons φ' défini dans $K_1 \times I$ et montrons que $K_1 = K$. Soit e^n un simplexe quelconque de K. Soit L_1 le sous-complexe de e^n formé par

---

([1]) *Voir* Bourbaki, *Th. des Ensembles* (fasc. de Résultats), p. 36 et 37.

$(K_1 \cap e^n) \cup (L \cap e^n)$. Soit ψ'_1 l'application continue de $L_1 \times I$ dans E qui coïncide avec φ' sur $(K_1 \cap e^n) \times I$ et avec ψ' sur $(L \cap e^n) \times I$; ces deux conditions sont compatibles, parce que φ' vérifie la condition (3). D'après le cas particulier du théorème 1, déjà démontré ci-dessus, il existe une application continue φ'_1 de $e^n \times I$ dans E telle que $p \circ \varphi'_1$ soit la restriction de φ à $e^n \times I$ et que la restriction de φ'_1 à $L_1 \times I$ soit égale à ψ'_1. Comme les restrictions de φ' et φ'_1 à $(K_1 \cap e^n) \times I$ sont identiques, la réunion des applications φ' et φ'_1 définit une application φ'' de $K_2 \times I$ dans E, où $K_2 = K_1 \cup e^n$. Cette application φ'' est continue, ses restrictions aux deux ensembles fermés $K_1 \times I$ et $e^n \times I$ étant continues. Elle vérifie d'autre part les conditions (1), (2) et (3) et prolonge φ'. Comme φ' est maximal, on a $\varphi' = \varphi''$. Donc $K_2 = K_1$, c'est-à-dire e^n appartient à K_1. Donc $K_1 = K$. L'application φ' définit bien une déformation de f' vérifiant les conditions de l'énoncé du théorème.

Dans la démonstration précédente nous avons utilisé le lemme suivant :

Lemme. — Soit e^n un simplexe dans R^n et considérons le prisme $e^n \times I$ de $R^n \times R = R^{n+1}$. Soit M un sous-complexe du prisme, formé par la réunion de la base inférieure $e^n \times \{0\}$ et d'un ensemble de faces latérales $e_i^r \times I$, où e_i^r est une face de dimension r de e^n. Il existe une application continue π du prisme $e^n \times I$ sur M telle que la restriction de π à M soit l'application identique.

On définit facilement une suite de $p+1$ sous-complexes M_k du prisme $e^n \times I$, l'indice k étant un entier quelconque de l'intervalle $[0, p]$, cette suite vérifiant les conditions suivantes : 1° $M_k = M_{k+1} \cup (e_k \times I)$, où e_k est une face de e^n. L'intersection de M_{k+1} avec $e_k \times I$ est la réunion de la base inférieure $e_k \times \{0\}$ et de toutes les faces $e_i \times I$ telles que $e_i \subset e_k$ et $e_i \neq e_k$; 2° $M_0 = e^n \times I$ et $M_p = M$. On peut définir une application π_k de M_k sur M_{k+1} telle que sa restriction à M_{k+1} soit l'application identique. En effet, soit c_k le point $(g_k, 2)$ de $R^n \times R$, où g_k est le centre de gravité de e_k. La droite passant par g_k et par $x \in M_k$ rencontre M_{k+1} en un point unique $\pi_k(x)$. L'application π_k qui fait correspondre à x le point $\pi_k(x)$ possède la propriété indiquée. L'application composée $\pi = \pi_{p-1} \circ \pi_{p-2} \circ \ldots \circ \pi_1 \circ \pi_0$ est une application de $e^n \times I$ sur M dont la restriction à M est l'application identique.

Remarque. — Dans le cas particulier où la déformation donnée de g' est la déformation constante (c'est-à-dire $g'_t = g'$, quel que soit $t \in I$), le théorème 1 peut encore s'énoncer de la façon suivante :

Soit f' une application continue du complexe K dans l'espace fibré E et soit $f = p \circ f'$ sa projection dans l'espace de base B. En désignant par $\dot{f}'$ et $\dot{f}$ les classes d'homotopie de f' et de f modulo un sous-complexe L de K, on a $\dot{f} = p \circ \dot{f}'$.

Le théorème 1 admet de nombreuses applications. Ainsi il sert à établir les relations entre les groupes d'homotopie des espaces E, B et F, relations indiquées dans la note citée plus haut et démontrées avec des hypothèses différentes dans le mémoire cité de B. Eckmann. Nous pouvons énoncer le corollaire suivant :

Corollaire 1. — Si E est un espace fibré et B son espace de base, toute application continue inessentielle du complexe K dans B est projection d'une application inessentielle de K dans E. En particulier, si K est contractile en un point, toute application continue de K dans B est projection d'une application continue de K dans E.

En effet, une application inessentielle est par définition une application homotope à une application constante. Or toute application constante f de K dans B est projection d'une application constante f' de K dans E. Toute application homotope à f est donc projection d'une application homotope à f'. De plus, si K est contractile en un point, toute application continue de K dans B est inessentielle.

Par exemple, *toute application continue dans* B *d'une boule fermée ou ouverte est projection d'une application dans* E. En particulier, *tout chemin* [1] *dans* B *est la projection dans* B *d'un*

[1] Un chemin dans B est une application continue dans B de l'intervalle I. Un chemin c est dit fermé lorsque $c(0) = c(1)$; on peut le considérer aussi comme une application du cercle S^1.

chemin dans E. Rappelons d'ailleurs que *si la fibre* F *est connexe par arcs* (¹), *tout chemin fermé dans* B *est la projection d'un chemin fermé dans* E. Il suffit, en effet, de considérer le chemin fermé dans B comme le produit de deux chemins a et b tels que $a(1) = b(0)$, $b(1) = a(0)$, $a(0) \neq b(0)$, le chemin b étant un chemin dans un voisinage distingué U de $a(0)$. Le chemin a est la projection d'un chemin a' dans E. Nous pouvons identifier $p^{-1}(U)$ avec $U \times F$. Il existe un chemin c dans F tel que $c(0)$ soit la projection canonique de $a'(1)$ dans F et que $c(1)$ soit la projection canonique de $a'(0)$ dans F. L'ensemble des chemins b et c définit un chemin b' dans E se projetant suivant b dans B. Le produit des chemins a' et b' est un chemin fermé dans E se projetant suivant le chemin fermé donné dans B. Le théorème 1 entraîne donc aussi le corollaire suivant :

Corollaire 2. — Si E est un espace fibré dont la fibre F est connexe par arcs et si K est un complexe contractile en un cercle, toute application de K dans l'espace de base B est la projection d'une application de K dans E.

Le corollaire 1 montre que tout espace fibré dont l'espace de base B est un complexe contractile en un point admet une section [2]. Il en est de même si la fibre F est connexe par arcs et si B est un complexe contractile en un cercle. On en déduit la proposition suivante :

Proposition 1. — Tout espace fibré E dont l'espace de base B est un complexe contractile en un point est isomorphe au produit topologique $B \times F$, où F est la fibre type.

Pour la démonstration de cette proposition, je renvoie à ma note « Espaces fibrés associés » [3], où elle est démontrée dans le

---

(1) Un espace est dit connexe par arcs, lorsqu'il existe un chemin dont l'origine et l'extrémité sont deux points donnés arbitraires.

(2) Une section de l'espace fibré E est l'image de l'espace de base B par une application continue f de B dans E telle que $p \circ f$ soit l'application identique de B. Une section est aussi appelée système continu de représentants de l'ensemble des fibres.

(3) *C. R. Acad. Sc.*, 213, 1941, p. 762-764. Cette Note contient aussi la définition de la notion d'isomorphisme.

cas où B est un complexe fini. La notion d'espace fibré utilisée dans cette Note est d'ailleurs plus précise que celle qui est définie plus haut. C'est la notion d'*espace fibré à groupe structural* G, où G est un groupe d'automorphismes de la fibre F. On considère sur G une topologie telle que l'application $(s, x) \rightarrow s(x)$, où $x \in \mathrm{F}$ et $s \in \mathrm{G}$, soit une application continue de $\mathrm{G} \times \mathrm{F}$ sur F. On peut alors faire correspondre à tout espace fibré à groupe structural G un « espace fibré associé principal », qui a le même espace de base B et dont la fibre type est l'espace topologique G. Pour que l'espace fibré donné soit isomorphe au produit topologique $\mathrm{B} \times \mathrm{F}$, il faut et il suffit que l'espace fibré associé principal admette une section. La proposition 1 en résulte immédiatement.

Par exemple, tout espace fibré dont l'espace de base est une boule ouverte est isomorphe à un produit topologique; remarquons qu'il admet donc un prolongement formant un espace fibré sur la boule fermée.

On démontre de la même façon la proposition suivante :

Proposition 2. — Tout espace fibré à groupe structural G, tel que G soit connexe par arcs et que l'espace de base B soit contractible en un cercle, est isomorphe au produit topologique $\mathrm{B} \times \mathrm{F}$, où F est la fibre type.

3. **Cas particuliers des revêtements.** — La notion de revêtement peut se définir de la façon suivante :

Définition 2. — Étant donnés un espace topologique E et une application continue p de E sur un espace topologique B, l'ensemble (E, p) est appelé revêtement de B, lorsque : 1° quel que soit $x \in \mathrm{B}$, l'ensemble $\overset{-1}{p}(x)$ est discret dans E; 2° tout point $x \in \mathrm{B}$ admet un voisinage V, appelé voisinage distingué, tel que $\overset{-1}{p}(\mathrm{V})$ admette un homéomorphisme sur le produit topologique $\mathrm{V} \times \overset{-1}{p}(x)$ appliquant $\overset{-1}{p}(y)$ sur $\{y\} \times \overset{-1}{p}(x)$, pour tout $y \in \mathrm{V}$.

Le voisinage V' de $x' \in \overset{-1}{p}(x)$ qui correspond à $\mathrm{V} \times \{x'\}$ dans un tel homéomorphisme s'appellera voisinage distingué de x'.

On voit facilement que, si B est connexe, tous les ensembles $\overset{-1}{p}(x)$ ont même puissance et sont donc homéomorphes à un même espace discret F. Le revêtement (E, p) est alors un espace fibré dont la fibre est un espace discret.

Le théorème 1 s'applique aux revêtements; d'une façon plus précise, on a le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — Soit (E, p) un revêtement de B et soit A un espace topologique quelconque. Si l'application continue f de A dans B est la projection $p \circ f'$ d'une application continue f' de A dans E, toute déformation $(f_t)_{t \in \mathrm{I}}$ de f est la projection d'une déformation bien déterminée $(f'_t)_{t \in \mathrm{I}}$ de f'.

On démontre d'abord la proposition suivante, qui n'est qu'un cas très particulier du théorème 2.

PROPOSITION 3. — Tout chemin c dans B est la projection d'un chemin bien déterminé c' dans E, tel que l'origine $c'(0)$ soit un point donné de E se projetant sur l'origine $c(0)$ de c.

Si le chemin c est contenu dans un voisinage distingué V de $c(0)$, soit V$'$ un voisinage distingué de $c'(0)$ se projetant sur V. La restriction de p à V$'$ est un homéomorphisme p' de V$'$ sur V. Le chemin c' sera une application de I dans V$'$, car V$'$ contient la composante connexe de $c'(0)$ relativement à $\overset{-1}{p}(\mathrm{V})$. Donc c' sera défini par $(p')^{-1} \circ c$.

Si c est quelconque, on peut subdiviser I en r intervalles partiels $\mathrm{I}_h = \left[\frac{h-1}{r}, \frac{h}{r}\right]$ tels que la restriction c_h de c à I_h soit contenue dans un voisinage distingué de B, quel que soit l'entier $h \in [1, r]$. Par récurrence on définit alors un chemin c' bien déterminé se projetant sur c.

COROLLAIRE. — (E, p) étant un revêtement de B et A étant un espace connexe par arcs, s'il existe une application continue f' de A dans E telle que $p \circ f'$ soit une application donnée f de A dans B et que $f'(x_0)$, où $x_0 \in \mathrm{A}$, soit un point donné de E, l'application f' est déterminée d'une façon unique.

Démonstration du théorème 2. — La déformation donnée $(f_t)_{t \in \mathrm{I}}$ est définie par une application φ de $\mathrm{A} \times \mathrm{I}$ dans B. Soit φ_x la restriction de φ à $\{x\} \times \mathrm{I}$, où $x \in \mathrm{A}$. Soit q_x l'application de I sur $\{x\} \times I$ telle que $q_x(t) = (x, t)$. L'application $\varphi_x \circ q_x$ est un chemin c_x d'origine $f(x)$, qui est projection d'un chemin déterminé c'_x d'origine $f'(x)$. Soit φ' l'application de $A \times I$ dans E telle que $\varphi'(x, t) = c'_x(t)$. S'il existe une déformation $(f'_t)_{t \in I}$ de f' telle que $f_t = p \circ f'_t$, celle-ci est définie par φ'. Il suffit donc de démontrer que φ' est une application continue.

Supposons que φ' soit continu en tout point (x, t), où x est un point fixe de A et t un point quelconque de I vérifiant la condition $t < t_1 \leqq 1$. Montrons que φ' est aussi continu dans tout un voisinage du point (x, t_1). En effet, il existe un voisinage $W \times [t_2, t_3]$ de (x, t_1) dans $A \times I$ tel que son image par φ soit contenue dans un voisinage distingué ouvert V de $\varphi(x, t_1)$ et que $\varphi'(W \times \{t_2\})$ soit contenu, à cause de la continuité de φ' au point (x, t_2), dans un voisinage distingué V' de $\varphi'(x, t_2)$ se projetant sur V. D'après le raisonnement utilisé pour démontrer la proposition 3, la restriction de φ' à $W \times [t_2, t_3]$ est la restriction à $W \times [t_2, t_3]$ de l'application $(p')^{-1} \circ \varphi$, où p' est l'homéomorphisme canonique de V' sur V. Supposons W ouvert dans A et soit U l'intérieur de l'intervalle $[t_2, t_3]$ relativement à I. L'application φ' est alors continue en tout point de $W \times U$. Le raisonnement s'applique aussi au cas où $t_1 = 0$. Alors on a $t_2 = 0$ et il faut utiliser la continuité de f' au point $(x, 0)$. Soit J le plus grand intervalle contenu dans I et contenant le point O, tel que φ' soit continu au point (x, t), quel que soit $t \in J$. Ce qui précède montre que J est ouvert relativement à I et contient sa borne supérieure; donc $J = I$.

Du théorème 2 on déduit immédiatement les corollaires suivants :

Corollaire 1. — Pour qu'une application f de A dans B soit inessentielle, il faut et il suffit qu'elle soit la projection $p \circ f'$ d'une application inessentielle f' de A dans E, où (E, p) est un revêtement quelconque de B.

En particulier, si A est contractile en un point, toute application continue de A dans B est la projection d'une application continue de A dans E.

Corollaire 2. — Soit (E, p) un revêtement de B tel que toute application continue de A dans E soit inessentielle. Alors la condition nécessaire et suffisante pour que l'application continue f de A dans B soit inessentielle, est que f soit la projection d'une application continue de A dans E.

Par exemple, ce corollaire s'applique dans les cas suivants :

1. A est un espace quelconque, E (qui sera alors le revêtement universel) est contractile en un point. En particulier, $E = R^n$. L'espace B sera, par exemple, le cercle S^1, ou un espace localement euclidien ou localement non euclidien hyperbolique, ou une surface quelconque à l'exception de la sphère S^2 et du plan projectif.

2. Le revêtement E est la sphère S^n, de dimension n. L'espace A est de dimension strictement inférieure à n.

Le corollaire 2 conduit à poser le problème suivant :

Reconnaître si l'application continue f de A dans B est la projection d'une application continue de A dans un revêtement donné de B.

Nous pouvons généraliser le problème de la façon suivante. Soit (A', p, a') un revêtement pointé de A, c'est-à-dire un revêtement sur lequel on s'est donné un point $a' \in A'$ tel que $p(a') = a$. Soit (B', q, b') un revêtement pointé de B, avec $q(b') = b$. On dira qu'une application continue f de A dans B est la *projection* d'une application continue f' de (A', p, a') dans (B', q, b') lorsqu'on a : $f \circ p = q \circ f'$ et $f'(a') = b'$. En particulier, soient (A', p, a') et (A'', q, a'') deux revêtements pointés de A tels que $p(a') = q(a'') = a \in A$; on dira que (A', p, a') *recouvre* (A'', q, a''), lorsque l'application identique de A est la projection d'une application continue de (A', p, a') dans (A'', q, a''). Posons alors le problème suivant :

Étant donnés un revêtement pointé (A', p, a') de A et une application continue f de A dans B, determiner tous les revêtements pointés (B', q, b') de B tels que f soit la projection d'une application continue f' de (A', p, a') dans (B', q, b'). De même, étant donnés f et un revêtement pointé (B', q, b') de B, déterminer tous lès revêtements pointés (A', p, a') de A tels que f soit la projection d'une application continue f' de (A', p, a') dans (B', q, b').

Désignons par $\Pi(E, x)$ le groupe de Poincaré d'un espace E au point x, c'est-à-dire le groupe des classes [1] de chemins fermés d'origine x. L'application f définit un homomorphisme $\bar{f}$ du groupe $\Pi(A, a)$ dans le groupe $\Pi(B, b)$, où $b = f(a)$. L'application p définit un isomorphisme de $\Pi(A', a')$ sur un sous-groupe $\Pi'(A, a)$ de $\Pi(A, a)$, résultat qui se déduit facilement du théorème 2. De même, q définit un isomorphisme de $\Pi(B', b')$ sur un sous-groupe $\Pi'(B, b)$ de $\Pi(B, b)$. Supposons A et B connexes et localement simplement connexes [2]. Alors on sait qu'à tout sous-groupe $\Pi'(A', a)$ de $\Pi(A, a)$ correspond inversement un revêtement pointé (A', p, a') défini à un isomorphisme près. Un point $x' \in A'$ correspond d'une façon biunivoque à une classe de chemins dans A, d'origine a et de même extrémité x et équivalents suivant $\Pi'(A, a)$: deux chemins l et l', d'origine a et d'extrémité x, sont dits équivalents suivant $\Pi'(A, a)$ lorsque la classe du chemin fermé $l'l^{-1}$ est un élément de $\Pi'(A, a)$. Le point a' correspond à la classe du chemin réduit au point a. Si V est un voisinage simple [2] de x, l'ensemble des classes suivant $\Pi'(A, a)$ des chemins lc, où c est un chemin quelconque dans V et d'origine x, formera un voisinage de la classe de l; au système fondamental de voisinages simples de x correspond un système fondamental de voisinages de la classe de l. Pour que le revêtement associé à $\Pi'(A, a)$ recouvre le revêtement associé à un autre sous-groupe $\Pi''(A, a)$, il faut et il suffit que $\Pi'(A, a) \subset \Pi''(A, a)$.

S'il existe une application f' de (A', p, a') dans (B', q, b') dont la projection est f, toute classe de chemins d'origine a et équivalents suivant $\Pi'(A, a)$ est appliquée par f sur un ensemble de chemins d'origine b et équivalents suivant $\Pi'(B, b)$; donc $\bar{f}\big(\Pi'(A, a)\big) \subset \Pi'(B, b)$. Réciproquement, si l'application f possède cette dernière propriété, elle détermine une application de l'ensemble des classes de chemins suivant $\Pi'(A, a)$ dans l'ensemble

[1] Deux chemins dans E sont de même classe, lorsqu'ils sont homotopes modulo le sous-ensemble de I formé par les points 0 et 1.

[2] Un espace E sera dit localement simplement connexe, lorsque tout point admet un système fondamental de voisinages (appelés simples) dont chacun est connexe par arcs et possède la propriété suivante : tout chemin fermé contenu dans ce voisinage est contractile en un point dans E.

des classes de chemins suivant $\Pi'(B, b)$, qui correspond à une application continue bien déterminée f' de (A', p, a') dans (B', q, b') dont la projection est f. Le problème posé est donc résolu par la proposition suivante :

PROPOSITION 4. — Étant donnés f et le revêtement (A', p, a'), soit $\Pi_0(B, b) = \bar{f}\big(\Pi'(A, a)\big)$ et soit (B_0, q_0, b_0) le revêtement pointé de B associé à $\Pi_0(B, b)$, qui est un sous-groupe de $\Pi(B, b)$. Les revêtements pointés (B', q, b') de B tels que f soit projection d'une application f' de (A', p, a') dans $(B' q, b')$ sont ceux qui sont recouverts par (B_0, q_0, b_0). De même, étant donnés f et le revêtement (B', q, b'), soit (A_0, p_0, a_0) le revêtement pointé de A associé au sous-groupe $\Pi_0(A, a)$ de $\Pi(A, a)$, image réciproque par $\bar{f}$ de $\Pi'(B, b)$. Les revêtements pointés (A', p, a') de A tels que f soit projection d'une application f' de $(A' p, a')$ dans (B', q, b') sont ceux qui recouvrent (A_0, p_0, a_0).

COROLLAIRE 1. — Si $\big(\hat{A}, p, a'\big)$ est un revêtement universel pointé de A et $\big(\hat{B}, q, b'\big)$ un revêtement universel pointé de B, toute application continue f de A dans B telle que $f\big(p(a')\big) = q(b')$ est la projection d'une application continue bien déterminée $\hat{f}$ de $\big(\hat{A}, p, a'\big)$ dans $\big(\hat{B}, q, b'\big)$.

En particulier, tout automorphisme f de A tel que $f(a) = b$ est la projection d'un automorphisme $\hat{f}$ de $\hat{A}$ appliquant $a' \in \overset{-1}{p}(a)$ sur $b' \in \overset{-1}{p}(b)$. On voit facilement que ce résultat est encore valable, si $\big(\hat{A}, p\big)$ désigne un revêtement de A associé à un sous-groupe caractéristique de $\Pi(A, a)$, c'est-à-dire qui est invariant par tout automorphisme de $\Pi(A, a)$. Si A est un groupe topologique connexe, les remarques précédentes conduisent à la définition des groupes revêtements de A. On sait que $\Pi(A, a)$ est alors abélien. Si (A', p) est un revêtement quelconque de A, le groupe des automorphismes de A' qui se projettent sur les translations à gauche du groupe A est simplement transitif et permet de définir sur A' une structure de groupe topologique, après avoir choisi comme élément neutre un point quelconque se projetant sur l'élément neutre de A. Les groupes topologiques ainsi obtenus sont les groupes revêtements de A.

Corollaire 2. — Si A est simplement connexe, toute application continue f de A dans B est la projection d'une application f' de A dans un revêtement quelconque de B.

(B', q) étant un revêtement de B, soit H' l'ensemble des classes d'homotopie modulo $a \in A$ des applications f' de A dans B' telles que $f'(a) = b'$; soit H l'ensemble des classes d'homotopie modulo a des applications f de A dans B telles que $f(a) = b = q(b')$. Désignons les classes correspondant à f et f' par $\dot{f}$ et $\dot{f'}$. Si A est simplement connexe, l'application $\dot{f'} \to q \circ \dot{f'}$ est une application biunivoque de H' *sur* H, en vertu du corollaire précédent et du théorème 2. Si l'on suppose seulement que A est connexe par arcs, c'est une application biunivoque de H' *dans* H, d'après le corollaire de la proposition 3. En particulier, si A est la sphère S^r de dimension $r > 1$, on obtient le *théorème de Hurewicz* :

Les groupes d'homotopie, correspondant à la dimension $r > 1$, de B au point b et d'un revêtement quelconque B', en un point b' se projetant sur b, sont isomorphes.

En vertu du corollaire 2 ci-dessus et du corollaire 2 du théorème 2, on a la proposition suivante :

Proposition 5. — Si A est simplement connexe, toute application de A dans un espace B qui admet R^n comme revêtement universel est inessentielle.

Par exemple, l'espace B peut être un espace localement euclidien ou non euclidien hyperbolique, en particulier le tore T^r ou une surface quelconque à l'exception de la sphère S^2 et du plan projectif.

De la proposition 4 et du corollaire 2 du théorème 2 on déduit encore la proposition suivante :

Proposition 5'. — Si B admet R^n comme revêtement universel, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une application f de A dans B soit inessentielle est que l'homomorphisme $\bar{f}$ associé à f applique $\Pi(A, a)$ sur l'élément neutre de $\Pi\big(B, f(a)\big)$.

Proposition 6. — Soit B une variété admettant la sphère S^n comme revêtement à r feuillets (c'est-à-dire l'ensemble des points de S^n qui se projettent sur un point B est formé de r points) et soit A une pseudo-variété close, simplement connexe et de dimension n. Il existe une infinité de classes d'applications de A dans B. Si B est orientable, la condition nécessaire et suffisante pour que deux applications continues de A dans B soient homotopes est qu'elles aient le même degré d'application; l'ensemble des degrés des applications de A dans B est l'ensemble des multiples de r.

Soit A un espace simplement connexe et B une variété admettant (S^n, p) comme revêtement à r feuillets. En désignant par $\dot{f}$ la classe d'homotopie de f, l'application $\dot{f}' \rightarrow p \circ \dot{f}'$, où f' est une application continue de A dans S^n, est une application $\bar{p}$ de l'ensemble des classes d'applications de A dans S^n *sur* l'ensemble des classes d'applications de A dans B. Si B est orientable, l'application $\bar{p}$ est biunivoque, de sorte que chaque classe d'applications de A dans B est alors caractérisée par la classe correspondante d'applications de A dans S^n. En effet, si $p \circ f' = p \circ f''$, on a $f'' = h \circ f'$, où h est un *automorphisme* du revêtement (S^n, p), c'est-à-dire un homéomorphisme de S^n sur lui-même tel que $p = p \circ h$. L'orientabilité de B entraîne que le degré d'application de h est égal à 1. En vertu du théorème de H. Hopf (¹), h est donc homotope à l'application identique et par suite $\dot{f}' = \dot{f}''$. En particulier, si A est une pseudovariété de dimension n, close et simplement connexe (donc orientable), la classe de f' est caractérisée par le degré d' de f', et inversement à tout entier rationnel d', correspond une classe d'applications (théorème de Hopf). Si d est le degré de $f = p \circ f'$, on a $d = rd'$; car le degré de p est égal à r. On en déduit la proposition 6 pour le cas où B est orientable.

Si B est non orientable, il existe des automorphismes h de (S^n, p) de degré égal à -1. Si A est toujours une pseudo-variété de dimension n, close et simplement connexe, on voit que toute classe d'applications de A dans B correspond par p à deux classes d'applications de A dans S^n caractérisées par deux degrés opposés,

(¹) Alexandroff-Hopf, *Topologie I* (Berlin, Springer), p. 512, théorème III.

exception faite de la classe d'applications inessentielles qui correspond à une seule classe, de degré o. Ceci montre qu'il existe encore une infinité de classes d'applications de A dans B. La classe de f est caractérisée par la valeur absolue du degré d'une application f' quelconque de A dans S^n, dont la projection $p \circ f'$ est f.

Proposition 7. — *Si l'application f de A dans B est la projection d'une application f' du revêtement (A', p, a') de A dans le revêtement (B', q, b') de B, toute déformation de f est la projection d'une déformation de f'.*

Il suffit d'appliquer le théorème 2 à la déformation $(f_t \circ p)_{t \in I}$, si $(f_t)_{t \in I}$ est la déformation donnée de f.

Remarquons qu'à une déformation de f' ne correspond pas forcément par projection une déformation de f. Par exemple, si A et B sont des variétés orientables admettant S^n comme revêtement universel, le degré de l'application f détermine le degré, et par suite la classe, de toute application f' de S^n dans S^n dont la projection est f. Mais nous ne pouvons pas en conclure que le degré de f détermine la classe de f.

4. Caractérisation des classes d'applications dans un espace localement euclidien ou localement non euclidien hyperbolique. — Désignons encore par $\bar{f}$ l'homomorphisme du groupe de Poincaré $\Pi(A, a)$ dans le groupe de Poincaré $\Pi\big(B, f(a)\big)$ associé à une application continue f de A dans B.

Proposition 8. — *Soient f et f_1 deux applications homotopes de A dans B et soient $\bar{f}$ et $\bar{f}_1$ les homomorphismes associés de $\Pi(A, a)$ dans $\Pi\big(B, f(a)\big)$ et $\Pi\big(B, f_1(a)\big)$ respectivement. A toute déformation de f à f_1 est associé un isomorphisme h de $\Pi\big(B, f(a)\big)$ sur $\Pi\big(B, f_1(a)\big)$ tel que $\bar{f}_1 = h \circ \bar{f}$.*

Soit $(f_t)_{t \in I}$ une déformation de f à f_1. L'application $t \rightarrow f_t(a)$ définit un chemin l (appelé chemin de déformation) reliant $f(a)$ à $f_1(a)$. Soit c un chemin fermé d'origine a. L'image de c par f est le chemin $c' = f \circ c$; l'image de c par f_1 est le chemin $c'_1 = f_1 \circ c$.

Soit x un chemin fermé quelconque d'origine $f(a)$. L'application $x \to l^{-1}xl$ détermine un isomorphisme h de $\Pi\big(B, f(a)\big)$ sur $\Pi\big(B, f_1(a)\big)$ que nous appellerons isomorphisme *intérieur* ([1]) associé au chemin l. Montrons que les chemins c'_1 et $l^{-1}c'l$ sont de même classe. En effet, soit $c'_t = f_t \circ c$ et soit l_t le chemin $l \circ \varphi_t$, où φ_t est l'application affine de $[0, 1]$ sur $[t, 1]$. La famille de chemins $(l_t^{-1} c'_t l_t)_{t \in I}$ définit bien une déformation de $l^{-1}c'l$ à c'_1, laissant fixe l'origine $f_1(a)$. Il en résulte $\bar{f_1} = h \circ \bar{f}$.

La proposition précédente admet une réciproque dans le cas où B est un espace localement euclidien complet ou localement non euclidien hyperbolique complet. Rappelons qu'un espace est dit localement euclidien complet lorsqu'il admet l'espace numérique R^n comme revêtement universel, le groupe d'automorphismes de ce revêtement étant un groupe de déplacements euclidiens de R^n. De même B est dit localement hyperbolique complet, lorsqu'il admet comme revêtement universel l'espace hyperbolique (représenté en général par l'intérieur d'une boule), le groupe d'automorphismes de ce revêtement étant un groupe de déplacements hyperboliques.

Théorème 3. — Soit B un espace localement euclidien complet ou localement non-euclidien hyperbolique complet et soit A un espace connexe et localement simplement connexe. Pour que deux applications f et f_1 de A dans B soient homotopes, il faut et il suffit qu'il existe un isomorphisme intérieur h de $\Pi\big(B, f(a)\big)$ sur $\Pi\big(B, f_1(a)\big)$ tel qu'on ait $\bar{f_1} = h \circ \bar{f}$, où $\bar{f}$ et $\bar{f_1}$ désignent les homomorphismes de $\Pi(A, a)$ sur $\Pi\big(B, f(a)\big)$ et $\Pi\big(B, f_1(a)\big)$ associés à f et à f_1.

D'après la proposition 8, la condition énoncée est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soient $(\hat{A}, p)$ et $(\hat{B}, q)$ les revêtements universels de A et B. L'application f est la projection d'une application déterminée $\hat{f}$ de $\hat{A}$ dans $\hat{B}$ telle que $\hat{f}(a') = b'$, où $a' \in p^{-1}(a)$, $b' \in q^{-1}(b)$ et $b = f(a)$. L'application $\hat{f}$ fait corres-

([1]) Le mot *intérieur* se rapporte au groupoïde formé par l'ensemble des classes de chemins dans B.

pondre à tout automorphisme g de $(\hat{A}, p)$ un automorphisme g' de $(\hat{B}, q)$ tel que $\hat{f} \circ g = g' \circ \hat{f}$. En effet, soit $a'' = g(a')$ et soit g' l'automorphisme de $(\hat{B}, q)$ qui applique b' sur $b'' = \hat{f}(a'')$. Soit c' un chemin dans $\hat{A}$ reliant a' au point x'. Soit c'' le chemin $g \circ c'$. Les images par $\hat{f}$ de c' et c'', c'est-à-dire les chemins $\hat{f} \circ c'$ et $\hat{f} \circ c''$, ont la même projection dans B et par suite $g' \circ \hat{f} \circ c' = \hat{f} \circ c'' = \hat{f} \circ g \circ c'$. Donc on a $g'\left(\hat{f}(x')\right) = \hat{f}\left(g(x')\right)$, quel que soit $x' \in \hat{A}$; c'est-à-dire $\hat{f} \circ g = g' \circ \hat{f}$. La correspondance $g \to g'$ est un homomorphisme $\bar{\bar{f}}$ du groupe d'automorphismes G de $(\hat{A}, p)$ dans le groupe d'automorphismes G' de $(\hat{B}, q)$.

Soit f_1 une deuxième application de A dans B, vérifiant la condition énoncée dans le théorème 3. En choisissant convenablement l'application $\hat{f}_1$ de $\hat{A}$ dans $\hat{B}$, de projection f_1, l'homomorphisme $\bar{\bar{f}}_1$ associé à $\hat{f}_1$ sera identique à $\bar{\bar{f}}$. L'isomorphisme intérieur h est associé à un chemin l reliant $b = f(a)$ à $b_1 = f_1(a)$. Le chemin l est la projection d'un chemin l' reliant b' à $b'_1 \in q^{-1}(b)$ et l'application f_1 est la projection d'une application $\hat{f}_1$ de $\hat{A}$ dans $\hat{B}$ telle que $\hat{f}_1(a') = b'_1$. Soit γ' un chemin dans $\hat{A}$, d'origine a' et d'extrémité $a'' = g(a')$, et soit γ sa projection $p \circ \gamma'$, qui est un chemin fermé d'origine a. Par hypothèse les chemins $f_1 \circ \gamma$ et $l^{-1}(f \circ \gamma) l$, qui sont des chemins fermés d'origine b_1, sont de même classe. Donc les chemins $\hat{f}_1 \circ \gamma'$ et $l'^{-1}(\hat{f} \circ \gamma')(g' \circ l')$, de même origine b'_1 et dont les projections par q sont respectivement $f_1 \circ \gamma$ et $l^{-1}(f \circ \gamma) l$, ont aussi la même extrémité b''_1. On a donc $b''_1 = \hat{f}_1(a'')$ et $b''_1 = g'(b'_1)$. Or, par définition l'automorphisme $g'_1 = \bar{\bar{f}}_1(g)$ est l'automorphisme de $(\hat{B}, q)$ qui applique b'_1 sur b''_1. Comme cet automorphisme est unique, on a $g'_1 = g'$. Donc les homomorphismes $\bar{\bar{f}}$ et $\bar{\bar{f}}_1$ sont identiques.

Supposons maintenant que $\hat{B}$ soit l'espace numérique R^n et que G' soit un groupe de déplacements euclidiens. Soit $\hat{f}_t$ l'application de $\hat{A}$ dans $\hat{B}$ telle que, pour tout $x' \in \hat{A}$, on ait

$$\hat{f}_t(x') = (1 - t)\hat{f}(x') + t\hat{f}_1(x'),$$

l'addition considérée étant l'addition des vecteurs dans l'espace vectoriel R^n. Soit $g \in G$ et $g' = \overline{\overline{f}}(g)$. En tenant compte des relations $\hat{f} \circ g = g' \circ \hat{f}$ et $\hat{f}_1 \circ g = g' \circ \hat{f}_1$, on a

$$\hat{f}_t(g(x')) = (1-t)\hat{f}(g(x')) + t\hat{f}_1(g(x')) = (1-t)g'(\hat{f}(x')) + tg'(\hat{f}_1(x')).$$

En remarquant que g' est une transformation affine, on a finalement $\hat{f}_t(g(x')) = g'(\hat{f}_t(x'))$, c'est-à-dire $\hat{f}_t \circ g = g' \circ \hat{f}_t$. L'application $\hat{f}_t$ est donc compatible avec les relations d'équivalence définies dans $\hat{A}$ et $\hat{B}$ (une classe d'équivalence dans $\hat{A}$, par exemple, étant une classe d'intransitivité de G). Par passage aux quotients (¹), on déduit donc de $\hat{f}_t$ une application continue f_t de A dans B. Comme la famille $(\hat{f}_t)_{t \in I}$ est une déformation de $\hat{f}$ à $\hat{f}_1$, la famille $(f_t)_{t \in I}$ sera une déformation de f à f_1, ce qui démontre le théorème 3 pour le cas où B est localement euclidien complet.

Dans le cas où B est l'espace hyperbolique et G′ un groupe de déplacements hyperboliques, la démonstration précédente est encore valable, à condition de prendre pour $\hat{f}_t(x')$ le point du segment de droite joignant $\hat{f}(x')$ et $\hat{f}_1(x')$ tel que le rapport des distances non-euclidiennes de $\hat{f}(x')$ à $\hat{f}_t(x')$ et à $\hat{f}_1(x')$ soit égal à t.

On sait que toute variété triangulable à 2 dimensions, à l'exception de la sphère S^2 et du plan projectif, peut être munie d'une métrique riemannienne à courbure constante nulle ou négative et

---

(¹) Nous utilisons le lemme suivant, facile à démontrer.

LEMME. — *Soient* E *et* F *deux espaces topologiques, r une relation d'équivalence dans* E *et s une relation d'équivalence dans* F. *Si f' est une application continue de* E *dans* F, *compatible avec r et s (c'est-à-dire toute classe suivant r est appliquée dans une classe suivant s), l'application f de* E/r *dans* F/s *qui est déduite de f' par passage aux quotients, c'est-à-dire qui fait correspondre à une classe x suivant r la classe y suivant s contenant $f'(x)$, est une application continue de* E/r *dans* F/s. *Si $(f'_t)_{t \in I}$ est une déformation de f' telle que f'_t soit compatible avec r et s quel que soit $t \in I$ et si r est une relation d'équivalence ouverte, la famille $(f_t)_{t \in I}$, où f_t est l'application déduite de f'_t par passage aux quotients, est une déformation de f.*

Pour démontrer la deuxième partie du lemme, remarquons qu'à toute application continue φ' de $E \times I$ dans F correspond par passage aux quotients une application continue φ de $E/r \times I$ dans F/s (en supposant φ' compatible avec les relations d'équivalence $r \times i$ et s, i étant la relation d'équivalence définie par l'identité dans I). On utilise ici l'homéomorphisme canonique de $(E \times I)/r \times i$ sur $E/r \times I$ (*voir* BOURBAKI, *Top.* I, § 9, prop. 3 et rectifications à *Top.* I).

telle que l'espace de Riemann ainsi obtenu soit complet. Donc le théorème 3 s'applique lorsque B est une variété triangulable quelconque de dimension 2, à l'exception de la sphère et du plan projectif.

L'application $\hat{f}$ correspondant à f n'étant pas déterminée d'une façon unique, on voit facilement que l'homomorphisme $\overline{\overline{f}}$ n'est déterminé qu'à un automorphisme intérieur près du groupe G'. Les groupes $\Pi(A, a)$ et $\Pi(B, b)$ sont d'ailleurs isomorphes aux groupes opposés de G et G' respectivement. A l'ensemble des homomorphismes $h \circ \overline{f}$, où h est un isomorphisme intérieur quelconque de $\Pi(B, b)$ sur $\Pi(B, b_1)$, correspond précisément une classe d'homomorphismes $\Gamma' \circ \overline{\overline{f}}$ de G dans G', où Γ' est le groupe des automorphismes intérieurs de G'. En gardant les hypothèses du théorème 3, le résultat énoncé par ce théorème peut encore s'exprimer de la façon suivante :

Corollaire. — Toute classe d'applications continues de A dans B est caractérisée par une famille d'homomorphismes $\Gamma' \circ \overline{\overline{f}}$ de G dans G', où G et G' sont les groupes d'automorphismes des revêtements universels de A et de B et où Γ' est le groupe des automorphismes intérieurs de G'.

En particulier, la classe des applications inessentielles correspond à l'homomorphisme $\overline{\overline{f}}$ qui applique G sur l'élément neutre de G'. Si G' est abélien, chaque classe d'applications est caractérisée par un homomorphisme $\overline{\overline{f}}$ bien déterminé.

Ce qui précède conduit à poser la question suivante :

Étant donné un homomorphisme $\overline{\overline{f}}$ de G dans G', existe-t-il une application continue f de A dans B telle que $\overline{\overline{f}}$ soit un homomorphisme associé à f ?

On peut répondre par l'affirmative dans le cas particulier où A et B sont les tores T^r et T^n. Les revêtements universels de T^r et T^n sont alors les espaces numériques R^r et R^n, leurs groupes d'automorphismes G et G' sont des groupes de translations. Nous pouvons supposer que G est engendré par les r translations définies par les vecteurs unitaires e_i, où $l = 1, \ldots, r$, de la base canonique de R^r, et que G' est engendré par les n translations définies par les vecteurs unitaires e'_j, où $j = 1, \ldots, n$, de la base canonique de R^n. Un homomorphisme arbitraire $\overline{\overline{f}}$ de G dans G′ est défini par

$$\overline{\overline{f}}(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e'_j \qquad (i = l, \ldots, r \text{ et } a_{ij} \text{ entier}).$$

Or il existe une application linéaire homogène bien déterminée $\hat{f}$ de R^r dans R^n transformant les vecteurs e_i de la même façon que $\overline{\overline{f}}$. L'application $\hat{f}$ est compatible avec les relations d'équivalence définies par G et G′ dans R^r et R^n. Par passage aux quotients on obtient une application continue f de T^r dans T^n telle que $\overline{\overline{f}}$ soit un homomorphisme de G dans G′ associé à f.

Remarque. — Lorsqu'on a choisi des bases de G et G′, les éléments de chaque base étant rangés dans un ordre correspondant à une orientation donnée de T^r ou de T^n respectivement, la classe d'homotopie de f est déterminée d'une façon biunivoque par une matrice (a_{ij}) à éléments entiers arbitraires, à r lignes et n colonnes. Dans le cas où $r = n$, on voit facilement que le degré de l'application f est le déterminant de la matrice. Ainsi lorsque f est une application d'un cercle orienté dans un cercle orienté, la classe de f est caractérisée par un seul nombre a, qui n'est autre que le degré de f.

Proposition 9. — A étant un espace connexe et localement simplement connexe dont le groupe de Poincaré est fini (ou plus généralement admet un système de générateurs dont chacun est d'ordre fini) et B étant un espace localement euclidien ou non-euclidien hyperbolique complet, toute application continue f de A dans B est inessentielle.

En effet, un homomorphisme $\overline{\overline{f}}$ de G dans G′ associé à f applique tout élément d'ordre fini de G sur un élément d'ordre fini de G′. Or l'élément neutre de G′ est le seul élément d'ordre fini de G′. En effet, soit s une transformation de $\hat{B}$ appartenant à G′ et supposons s d'ordre fini. Le sous-groupe H engendré par s laisse invariant l'ensemble fini M des points transformés par H d'un point donné $m \in \hat{B}$. Alors s laisse invariant au moins un point. Si $\hat{B}$ est l'espace euclidien et G' un groupe de déplacements euclidiens, s laisse invariant le centre de gravité de M; si $\hat{B}$ est le modèle projectif de l'espace hyperbolique (c'est-à-dire $\hat{B}$ est l'intérieur d'une boule et G' est un groupe projectif laissant invariant cette boule) s laisse invariant l'enveloppe convexe de M et admet bien un point invariant, d'après le théorème du point fixe de Brouwer. Un automorphisme d'un revêtement qui admet un point fixe est nécessairement la transformation identique. Il en résulte que $\bar{\bar{f}}(G)$ se réduit à l'élément neutre de G' et par suite f est inessentielle, en vertu du corollaire du théorème 3. En remarquant que l'homomorphisme $\bar{f}$ associé à f applique $\Pi(A, a)$ sur l'élément neutre de $\Pi\big(B, f(a)\big)$, on pourrait aussi appliquer la proposition 5'. La proposition 9 est donc encore valable en supposant seulement que B admet R^n comme revêtement universel et qu'aucun automorphisme de ce revêtement n'est d'ordre fini, à l'exception de la transformation identique.

Corollaire. — Toute application continue d'un espace localement sphérique complet dans un espace localement euclidien ou non euclidien hyperbolique complet est inessentielle [1].

5. **Appendice.** — Les théorèmes 1 et 2 admettent des applications variées du genre du théorème de Ważewski [2] qui s'énonce de la façon suivante :

Soit (a_{ij}) une matrice sur le corps des nombres réels, complexes ou des quaternions, à n colonnes et r lignes, de rang r et dont les éléments sont des fonctions continues de $t \in K$, où K est un pavé fermé ou ouvert. On peut compléter la matrice par

---

(1) Après avoir terminé la rédaction de ce mémoire, j'ai remarqué que le théorème 3 généralise des résultats de H. Hopf [*Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem* (*Math. Annalen*, 95, 1926, p. 333-339, *voir* § 4)] caractérisant la classe de l'application identique d'un espace localement euclidien ou hyperbolique B et montrant que toute application dans B d'une variété simplement connexe est inessentielle.

(2) T. Ważewski, *Sur les matrices dont les éléments sont des fonctions continues* (*Comp. math.*, II, 1935, p. 63-68).

l'adjonction de $n - r$ lignes dont les éléments sont également des fonctions continues de $t \in K$ et telles que la matrice obtenue soit de rang n quel que soit $t \in K$.

D'après B. Eckmann [1], ce théorème est aussi valable si K est un espace métrique compact contractile en un point. De même il est valable lorsque K est un complexe quelconque contractile en un point. Soit $V_{n,n}$ l'espace des matrices carrées à n lignes et de rang n. Soit $V_{n,r}$ l'espace des matrices à n colonnes et r lignes et de rang r. L'espace $V_{n,n}$ est un espace fibré dont l'espace de base est $V_{n,r}$, une fibre étant l'ensemble des matrices dont les r premières lignes sont données. D'après le corollaire 1 du théorème 1, si K est un complexe contractile en un point, toute application continue de K dans $V_{n,r}$ est la projection d'une application continue de K dans $V_{n,n}$, ce qui démontre le théorème.

Voici un résultat analogue :

Soit K un complexe contractile en un point et soit $(L_t^p)_{t \in K}$ une famille continue de variétés linéaires à p dimensions de l'espace euclidien R^n. Il existe aussi une famille continue de repères formés d'un point $O_t \in L_t^p$ et de p vecteurs unitaires deux à deux orthogonaux et situés dans L_t^p.

L'espace de tous les repères du type indiqué est, en effet, un espace fibré ayant pour espace de base l'espace des variétés linéaires de dimension p, une fibre étant l'ensemble des repères situés dans une même variété linéaire. On applique encore le corollaire 1 du théorème 1.

Remarquons enfin qu'à la variété linéaire L_t^p de la famille continue considérée on peut associer d'une façon continue une orientation, en supposant seulement que K est un espace quelconque contractile en un point. On peut, en effet, appliquer le corollaire 1 du théorème 2 au revêtement de l'espace des variétés linéaires formé par l'espace des variétés linéaires orientées.

---

(1) *Loc. cit.*, p. 160. Je ne fais que reproduire le principe de la démonstration d'Eckmann.

6. **Appendice** : *Caractérisation des classes d'applications d'un complexe dans un espace asphérique.*

Le problème posé à la suite du corollaire du théorème 3 est résolu par le théorème suivant de Hurewicz [1] :

Théorème de Hurewicz. — Soit A un espace métrique compact connexe et localement connexe et soit B un espace asphérique connexe et localement connexe en toute dimension. A une application continue f de A dans B faisons correspondre la classe des homomorphismes $h \circ \bar{f}$ de Π (A, a) dans Π (B, b), où $\bar{f}$ est l'homomorphisme associé à f de Π (A, a) dans $\Pi\,[B, f(a)]$ et h un isomorphisme intérieur quelconque de $\Pi\,[B, f(a)]$ sur Π(B, b). On obtient ainsi une correspondance biunivoque entre les classes d'applications continues de A dans B et les classes d'homomorphismes continus de Π (A, a) dans Π (B, b).

A l'aide de la métrique dans A, Hurewicz définit une métrique dans Π (A, a) et par suite la notion d'homomorphisme continu de Π (A, a) dans Π (B, b), ce dernier groupe étant muni de la topologie discrète. Un espace B est dit asphérique lorsque toute application dans B de la sphère S^n, pour $n \geqq 2$, est inessentielle. L'article cité contient simplement l'idée de la démonstration de ce théorème. Il contient une démonstration plus explicite s'appliquant au cas où A est un complexe fini, B étant seulement supposé connexe par arcs et asphérique. *On a alors une correspondance biunivoque entre les classes d'applications continues de* A *dans* B *et les classes d'homomorphismes de* Π (A, a) *dans* Π (B, b).

Remarquons que les hypothèses du théorème 3 ne sont pas des conséquences des hypothèses de Hurewicz. L'espace B de notre énoncé est un espace asphérique particulier et satisfait aux hypothèses de Hurewicz; mais l'espace A est seulement supposé connexe et localement simplement connexe. L'idée de la démons-

---

(1) *Beiträge zur Topologie der deformationen* VI (*Proc. Koninkl. Akad. v. Wetensch.*, Amsterdam, t. 39, 1936, p. 215-224). Ce théorème étant publié dans un périodique pratiquement inaccessible pour moi dans les conditions actuelles, je l'ai remarqué seulement au moment de la correction des épreuves du présent article auquel j'ai ajouté alors cet appendice.

tration du théorème 3 permet de modifier le raisonnement de Hurewicz et conduit à démontrer le théorème suivant, où les hypothèses diffèrent aussi de celles de Hurewicz :

Théorème 4. — Soit A un complexe simplicial (fini ou infini) de dimension n et soit B un espace connexe et localement simplement connexe tel que toute application dans B d'une sphère S^p, pour $1 < p \leqq n$, soit inessentielle. Soient G et G′ les groupes d'automorphismes des revêtements universels $\hat{A}$ et $\hat{B}$ de A et B. A une application continue f de A dans B faisons correspondre la classe d'homomorphismes $\Gamma'_0 \overline{\overline{f}}$ de G dans G′, où Γ′ est le groupe des automorphismes intérieurs de G′ et $\overline{\overline{f}}$ un homomorphisme associé à f. On obtient ainsi une correspondance biunivoque entre les classes d'applications continues de A dans B et les classes d'homomorphismes de G dans G′.

En reprenant les notations de la démonstration du théorème 3, soient f et f_1 deux applications continues de A dans B correspondant à une même classe d'homomorphismes $\Gamma'_0 \overline{\overline{f}}$. Montrons que f et f_1 sont homotopes. On peut trouver deux applications continues $\hat{f}$ et $\hat{f}_1$ de $\hat{A}$ dans $\hat{B}$ qui se projettent respectivement suivant f et f_1 et telles que les homomorphismes associés soient identiques à $\overline{\overline{f}}$. Considérons sur $\hat{A}$ la subdivision simpliciale qui se projette sur la subdivision simpliciale de A. Dans chaque classe de sommets de $\hat{A}$ équivalents suivant G choisissons un sommet e_i^0 et relions $\hat{f}(e_i^0)$ et $\hat{f}_1(e_i^0)$ par un chemin c_i. Si $e_j^0 = g(e_i^0)$, où $g \in G$, relions les points $\hat{f}(e_j^0)$ et $\hat{f}_1(e_j^0)$ par le chemin $c_j = g' o c_i$, où $g' = \overline{\overline{f}}(g)$. Posons $\hat{f}_t^0(e_j^0) = c_j(t)$. La famille $(\hat{f}_t^0)_{t \in I}$ définit une déformation de la restriction de $\hat{f}$ à l'ensemble $\hat{A}^0$ des sommets de $\hat{A}$. Dans chaque classe d'arêtes de $\hat{A}$ équivalentes suivant G choisissons une arête e_i^1. Si e_k^0 et e_h^0 sont les sommets de e_i^1, il existe une application continue $\hat{\varphi}_i^1$ de $e_i^1 \times I$ dans $\hat{B}$ telle que

$$\hat{\varphi}_i^1(e_i^1 \times \{0\}) = \hat{f}(e_i^1), \qquad \hat{\varphi}_i^1(e_i^1 \times \{1\}) = \hat{f}_1(e_i^1),$$
$$\hat{\varphi}_i^1(e_k^0, t) = \hat{f}_t^0(e_k^0), \qquad \hat{\varphi}_i^1(e_h^0, t) = \hat{f}_t^0(e_h^0),$$

parce que toute application continue dans $\hat{B}$ du bord de $e_i^1 \times I$ est inessentielle. Si $e_j^1 = g(e_i^1)$, nous associons à $e_j^1 \times I$ l'application $\hat{\varphi}_j^1$ telle qu'on $g[\hat{\varphi}_i^1(x, t)] = \hat{\varphi}_j^1[g(x), t]$ pour tout $x \in e_i^1$ et $t \in I$. La réunion des applications $\hat{\varphi}_j^1$ définit une application continue $\hat{\varphi}^1$ de $\hat{A}^1 \times I$ dans $\hat{B}$ qui détermine une déformation continue de la restriction de $\hat{f}$ à $\hat{A}^1$, réunion des sommets et des arêtes de $\hat{A}$. Par récurrence on définit finalement une application continue $\hat{\varphi}$ de $\hat{A} \times I$ dans $\hat{B}$ déterminant une déformation continue $(\hat{f}_t)_{t \in I}$ de $\hat{f}$ à $\hat{f}_1$ telle que $\hat{f}_t$ soit compatible avec G et G'. Par passage aux quotients on obtient une déformation continue $(f_t)_{t \in I}$ de f à f_1.

Montrons d'autre part que tout homomorphisme $\bar{\bar{f}}$ de G dans G' est associé à une application continue de A dans B. On détermine facilement une application $\hat{f}$ de $\hat{A}$ dans $\hat{B}$ compatible avec G et G' telle que $\bar{\bar{f}}$ soit l'homomorphisme associé à $\hat{f}$. Dans chaque classe de sommets de $\hat{A}$ équivalents suivant G on choisit encore un sommet e_i^0 et on lui fait correspondre un point arbitraire $\hat{f}_i^0(e_i^0)$. Au sommet $e_j^0 = g(e_i^0)$, où $g \in G$, on fait correspondre le point

$$\hat{f}_j^0(e_j^0) = g'[\hat{f}_i^0(e_i^0)],$$

où $g' = \bar{\bar{f}}(g)$. Dans chaque classe d'arêtes de $\hat{A}$ on choisit une arête e_i^1, de sommets e_k^0 et e_h^0. Il existe dans $\hat{B}$ un chemin reliant $\hat{f}_k^0(e_k^0)$ à $\hat{f}_h^0(e_k^0)$, c'est-à-dire une application continue $\hat{f}_i^1$ de e_i^1 dans $\hat{B}$ telle que $\hat{f}_i^1(e_k^0) = \hat{f}_k^0(e_k^0)$ et $\hat{f}_i^1(e_h^0) = \hat{f}_h^0(e_h^0)$. A l'arête $e_j^1 = g(e_i^1)$ on fait correspondre l'application $\hat{f}_j^1$ telle qu'on ait $\hat{f}_j^1 \circ g = g' \circ \hat{f}_i^1$. La réunion des applications $\hat{f}_j^1$ définit une application $\hat{f}^1$ de $\hat{A}^1$ dans $\hat{B}$ compatible avec G et G'. De la même manière on pourra étendre $\hat{f}^1$ à la réunion $\hat{A}^2$ des simplexes de dimension 2 de $\hat{A}$. Par récurrence on définit ainsi une application $\hat{f}$ de $\hat{A}$ dans $\hat{B}$ compatible avec G et G' et telle que l'homomorphisme associé de G dans G' soit $\bar{\bar{f}}$. Ici il suffit d'ailleurs de supposer que toute application dans B d'une sphère S^p, où $1 < p < n$, est inessentielle. Par passage aux quotients on déduit de $\hat{f}$ une application f de A dans B telle que $\bar{f}$ soit un homomorphisme associé à f.

Remarque. — En appliquant le théorème de Zorn, on voit facilement que le théorème 4 est aussi valable avec les hypothèses suivantes : A est un complexe simplicial de dimension infinie; B est un espace connexe, localement connexe et asphérique.

(Manuscrit reçu le 3 février 1944.)