BULLETIN DE LA S. M. F.

RENÉ LAGRANGE

Sur une classe d'harmoniques associés aux cyclides de révolution

Bulletin de la S. M. F., tome 72 (1944), p. 169-177
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1944__72__169_0>

SUR UNE CLASSE D'HARMONIQUES ASSOCIÉS AUX CYCLIDES DE RÉVOLUTION;

PAR M. RENÉ LAGRANGE.

Dans un Mémoire [1] intitulé *Les familles de surfaces de révolution qui possèdent des harmoniques*, j'ai recherché les familles de surfaces $\theta(x, y, z) = \text{const.}$ d'axe de révolution oz, associées aux surfaces orthogonales $\eta(x, y, z) = \text{const.}$, telles que l'équation de Laplace admette une solution de la forme

$$V = f(\eta, \theta)\,N(\eta)\,T(\theta)\,\Phi(\varphi) \qquad (\varphi = \text{azimut}), \tag{1}$$

où $f(\eta, \theta)$ est une fonction fixe, et où N, T, Φ désignent trois fonctions dépendant chacune d'au moins un paramètre. J'ai montré que les surfaces les plus générales en question sont les cyclides de révolution. On voyait incidemment que la transformation de J. J. Thomson des harmoniques, par inversion dont le pôle est sur oz, conserve également la forme de ces harmoniques.

Les harmoniques associés aux formes dégénérées de ces cyclides, c'est-à-dire aux cylindre, cône, sphère, quadrique et tore sont bien connues; on sait qu'en particulier, il correspond des harmoniques polynomiaux à la sphère et à l'ellipsoïde de révolution. On peut alors se demander si les cyclides de révolution non dégénérées ne fournissent pas également des harmoniques, sinon polynomiaux, tout au moins de forme algébrique simple. Il suffit de considérer les cyclides dont la méridienne est une Cartésienne, qui est anallagmatiquement équivalente à la quartique bicirculaire générale d'axe oz, tout au moins à l'aide d'une inversion imaginaire.

1. Nous nous bornerons donc au cas d'une Cartésienne d'axe oz, possédant sur cet axe un foyer réel et deux foyers réels ou

---

[1] *Acta Mathematica*, t. 71, 1939, p. 283.

imaginaires conjugués, en écartant les Cartésiennes ayant un foyer double car ce sont les inverses d'une conique par rapport à un foyer.

L'origine des coordonnées étant le barycentre des trois foyers, l'équation aux cotes e_1, e_2, e_3 de ceux-ci est de la forme

$$4z^3 - g_2 z - g_3 = 0,$$

où g_2, g_3 sont deux constantes réelles, telles que $g_2^3 - 27 g_3^2 \neq 0$. L'équation générale des surfaces cartésiennes de révolution ayant ces trois foyers est

$$(2)\quad \begin{aligned} &G(x, y, z;\, \zeta) \\ &\equiv \left(x^2 + y^2 + z^2 - 2\zeta z + \frac{g_2}{4} - 2\zeta^2\right)^2 - (4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3)(2z + \zeta) = 0; \end{aligned}$$

ζ est le paramètre dont dépend cette Cartésienne, et l'on sait que, par chaque point de l'espace, il passe deux de ces surfaces, orthogonales entre elles.

En posant $\rho^2 = x^2 + y^2$, ces surfaces de genre 1 admettent la représentation paramétrique ([1])

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \rho &= -\frac{1}{2i} \frac{p'\eta\, p'(i\theta)}{[p\eta - p(i\theta)]^2}, \\ z &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{p'^2\eta - p'^2(i\theta)}{[p\eta - p(i\theta)]^2} - 4\, p\eta - 4\, p(i\theta) \right\}, \end{aligned} \right.$$

où $p\eta$ désigne la fonction elliptique de Weierstrass $p(\eta;\, g_2, g_3)$. Les deux familles de surfaces (2) sont les surfaces

$$\zeta = p(2\eta) = \text{const.} \qquad \text{et} \qquad \zeta = p(2i\theta) = \text{const.}$$

En posant $\eta + i\theta = \alpha$, $\eta - i\theta = \beta$, les équations (3) s'écrivent encore, plus simplement,

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2i}(p\alpha - p\beta), \\ z &= \frac{1}{2}(p\alpha + p\beta). \end{aligned} \right.$$

Rappelons d'autre part que les harmoniques de la forme (1),

([1]) *Loc. cit.*, p. 299-303.

associés aux surfaces $\eta =$ const. et $\theta =$ const., sont de la forme [1]

$$\text{(5)} \qquad \frac{p\eta - p(i\theta)}{\sqrt{p'\eta\, p'(i\theta)}} E^k_{m-\frac{1}{2}}(2\eta)\, E^k_{m-\frac{1}{2}}(2i\theta) \frac{\cos}{\sin}(m\varphi),$$

où $E^k_{m-\frac{1}{2}}(2\eta)$ est l'intégrale générale de l'équation de Lamé

$$\text{(6)} \qquad \frac{d^2\Lambda}{d(2\eta)^2} - \left[\left(m^2 - \frac{1}{4}\right) p(2\eta) + k\right]\Lambda = 0;$$

$E^k_{m-\frac{1}{2}}(2\eta)$ et $E^k_{m-\frac{1}{2}}(2i\theta)$ ne sont pas nécessairement la même fonction intégrale.

En posant $p(2\eta) = \zeta$ et $m - \frac{1}{2} = n$, (6) prend la forme algébrique

$$\text{(7)} \quad (4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3)\frac{d^2\Lambda}{d\zeta^2} + \left(6\zeta^2 - \frac{g_2}{2}\right)\frac{d\Lambda}{d\zeta} - [n(n+1)\zeta + k]\Lambda = 0,$$

ou

$$\text{(7')} \quad (\zeta - e_1)(\zeta - e_2)(\zeta - e_3)\frac{d^2\Lambda}{d\zeta^2}$$
$$+ \frac{1}{2}[(\zeta - e_2)(\zeta - e_3) + (\zeta - e_3)(\zeta - e_1) + (\zeta - e_1)(\zeta - e_2)]\frac{d\Lambda}{d\zeta}$$
$$- \left[\frac{n(n+1)}{4}\zeta + \frac{k}{4}\right]\Lambda = 0.$$

2. Il suffit maintenant de s'inspirer de l'étude des fonctions de Lamé. On sait que l'équation (7′) peut admettre des intégrales de la forme

$$\text{(8)} \qquad \Lambda = (\zeta - e_1)^{\frac{\alpha_1}{2}}(\zeta - e_2)^{\frac{\alpha_2}{2}}(\zeta - e_3)^{\frac{\alpha_3}{2}} P(\zeta),$$

où $P(\zeta)$ est un polynome entier en ζ, pourvu que n soit un nombre entier, et que les α_i aient la valeur 0 ou 1, car les exposants caractéristiques des points singuliers e_i sont 0 et $\frac{1}{2}$. Le changement de variable dépendante (8) détermine $P(\zeta)$ par l'équation différentielle

$$\text{(9)} \qquad (\zeta - e_1)(\zeta - e_2)(\zeta - e_3)\frac{d^2P}{d\zeta^2}$$
$$+ \left[\sum\left(\alpha_1 + \frac{1}{2}\right)(\zeta - e_2)(\zeta - e_3)\right]\frac{dP}{d\zeta}$$
$$- \left\{\left[\frac{n(n+1)}{4} - \frac{\Sigma\alpha_1}{2} - \frac{\Sigma\alpha_1\alpha_2}{2}\right]\zeta + h\right\}P = 0,$$

(1) *Loc. cit.*, p. 303.

avec

$$4h = k + \Sigma\, e_1(2\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_3),$$

où les sommes concernent les termes déduits de celui qui est écrit par permutation circulaire des indices 1, 2, 3. Si p désigne le degré du polynome $P(\zeta)$, l'annulation du terme en ζ^{p+1} dans (9) donne

$$p\left(p + \frac{1}{2} + \sum \alpha_1\right) = \frac{n(n+1)}{4} - \frac{1}{2}\sum \alpha_1 - \frac{1}{2}\sum \alpha_1\alpha_2$$

ou, compte tenu de $\alpha_i(\alpha_i - 1) = 0$,

$$n(n+1) = (2p + \Sigma\,\alpha_1)(2p + \Sigma\,\alpha_1 + 1);$$

on obtient ainsi les deux solutions

$$n = 2p + \Sigma\alpha_1 \qquad \text{et} \qquad n = -2p - \Sigma\alpha_1 - 1,$$

mais l'invariance de (9) quand on change n en $-n-1$ permet de conserver la seule solution

$$(10) \qquad n = 2p + \Sigma\,\alpha_1,$$

qui est un nombre entier $\geqq 0$.

La discussion classique de l'équation de Lamé montre d'autre part qu'à chaque système de valeurs de p, α_1, α_2, α_3 correspondent $p+1$ valeurs de h, sûrement réelles et distinctes lorsque les e_i sont réels, pour lesquelles (9) admet une intégrale entière polynomiale. Ce polynome P est sûrement réel en même temps que les e_i, mais peut encore l'être lorsque les g_2, g_3 sont seuls réels, pourvu que les exposants α_i relatifs à deux e_i imaginaires conjugués soient égaux.

Cette équation (9) se rattache aux quadriques homofocales, réelles ou non,

$$(11) \qquad \frac{x^2}{\zeta - e_1} + \frac{y^2}{\zeta - e_2} + \frac{z^2}{\zeta - e_3} - 1 = 0,$$

par le fait classique que, si λ, μ, ν sont les trois racines de cette équation (11) en ζ, le polynome

$$H(x, y, z) = x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3} P(\lambda) P(\mu) P(\nu) \qquad (\alpha_i = 0 \text{ ou } 1)$$

est harmonique lorsque $P(\zeta)$ vérifie (9). Aucun des points singuliers e_i ne peut annuler $P(\zeta)$ puisque ses exposants caractéristiques sont o et $\frac{1}{2}$; les zéros du polynome $P(\zeta)$ sont tous distincts, ce qui est bien connu quand les e_i sont réels, mais subsiste dans le cas général, car la seule intégrale de (9) qui s'annule en même temps que sa dérivée première en un point ordinaire est $P \equiv 0$. On sait également que, si

$$(12) \qquad P(\zeta) = (\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)\ldots(\zeta - \zeta_p),$$

on a, à un facteur constant près,

$$(13) \quad H(x, y, z) = x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3} \prod_{s=1}^{p} \left(\frac{x^2}{\zeta_s - e_1} + \frac{y^2}{\zeta_s - e_2} + \frac{z^2}{\zeta_s - e_3} - 1 \right).$$

Rappelons en passant que, lorsque les e_i sont réels, les p nombres $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p$ sont réels et compris entre le plus petit et le plus grand des e_i.

3. Ceci rappelé, considérons l'harmonique (5) formé en utilisant la même intégrale (8) de l'équation (6) comme facteurs $E^k_{m-\frac{1}{2}}(2\eta)$ et $E^k_{m-\frac{1}{2}}(2i\theta)$; prenons d'autre part

$$m = 2p + \frac{1}{2} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$

p étant un nombre entier $\geqq 0$ et les α_i trois nombres égaux à o ou 1; enfin h est l'une des valeurs pour lesquelles (9) est vérifié par un polynome $P(\zeta)$ de degré p, de la forme (12). A un facteur constant près, cet harmonique s'écrit

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\cos}{\sin}(m\varphi) \prod_{i=1}^{3} \left\{ [p(2\eta) - e_i][p(2i\theta) - e_i] \right\}^{\frac{\alpha_i}{2}}$$
$$\times \prod_{s=1}^{p} [p(2\eta) - \zeta_s][p(2i\theta) - \zeta_s].$$

Or l'équation (2), du second degré en ζ, admet pour racines $\zeta = p(2\eta)$ et $\zeta = p(2i\theta)$; le coefficient de ζ^2 y étant égal à $-4\rho^2$, on a donc

$$[p(2\eta) - \zeta][p(2i\theta) - \zeta] = -\frac{1}{4\rho^2} G(x, y, z; \zeta);$$

en particulier

$$[p(2\eta)-e_i][p(2i\theta)-e_i]=-\frac{1}{4\rho^2}\left(r^2-2e_iz+\frac{g_2}{4}-2e_i^2\right)^2,$$

où l'on a posé $r^2=x^2+y^2+z^2=\rho^2+z^2$. On obtient ainsi les harmoniques

$$(14)\quad \frac{1}{\rho^m}\frac{\cos}{\sin}(m\varphi)\prod_{i=1}^{3}\left(r^2-2e_iz+\frac{g_2}{4}-2e_i^2\right)^{\alpha_i}\prod_{s=1}^{p}G(x,y,z;\zeta_s).$$

Observons que $\rho^{-m}\cos m\varphi$ s'écrit encore $\rho^{-2m}\times\rho^m\cos m\varphi$, où $\rho^m\cos m\varphi$ est lui-même harmonique et s'écrit

$$\begin{aligned}\rho^m\cos m\varphi &= \rho^{n+\frac{1}{2}}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\\ &=\sqrt{\rho\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,\rho^n\cos n\varphi-\sqrt{\rho\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,\rho^n\sin n\varphi\\ &=\sqrt{\frac{\rho+x}{2}}\,\rho^n\cos n\varphi-\sqrt{\frac{\rho-x}{2}}\,\rho^n\sin n\varphi;\end{aligned}$$

les déterminations des deux radicaux $\sqrt{\rho+x}$ et $\sqrt{\rho-x}$ sont telles que

$$\sqrt{\rho+x}\sqrt{\rho-x}=\rho\sin\varphi=y.$$

On a de même

$$\rho^m\sin m\varphi=\rho^{n+\frac{1}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi=\sqrt{\frac{\rho+x}{2}}\,\rho^n\sin n\varphi+\sqrt{\frac{\rho-x}{2}}\,\rho^n\cos n\varphi.$$

Posons

$$C_n(x,y)=\rho^n\cos n\varphi=\sum_{t=0}^{t\leqq\frac{n}{2}}(-1)^n\binom{n}{2t}\,x^{n-2t}\,y^{2t},$$

$$S_n(x,y)=\rho^n\sin n\varphi=\sum_{t=0}^{t\leqq\frac{n}{2}}(-1)^n\binom{n}{2t+1}x^{n-2t-1}y^{2t+1};$$

au facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ près, $\rho^m\times\frac{\cos}{\sin}(m\varphi)$ s'écrit alors

$$C_n(x,y)\sqrt{\rho\pm x}\mp S_n(x,y)\sqrt{\rho\mp x},$$

où les signes $\pm$ se correspondent, et ces deux expressions se déduisent l'une de l'autre, au signe près, en changeant x en $-x$.

Substituons dans (14) et remplaçons ρ^{2m} par

$$(x^2+y^2)^{2p+\frac{1}{2}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3};$$

ces harmoniques prennent ainsi la forme algébrique remarquable

$$\left[C_n(x,y)\sqrt{\frac{\rho\pm x}{x^2+y^2}}\mp S_n(x,y)\sqrt{\frac{\rho\mp x}{x^2+y^2}}\right] \tag{15}$$
$$\times\prod_{i=1}^{3}\left(\frac{r^2-2e_i z+\frac{g_2}{4}-2e_i^2}{x^2+y^2}\right)^{\alpha_i}\prod_{s=1}^{p}\frac{G(x,y,z;\zeta_s)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Les p racines ζ_s de $P(\zeta)=0$ s'obtiennent également en écrivant que (13) est harmonique, ce qui donne le système connu d'équations

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\alpha_i+\frac{1}{2}}{\zeta_s-e_i}+2\sum_{t\neq s}\frac{1}{\zeta_s-\zeta_t}=0 \qquad (s=1,2,\ldots,p). \tag{16}$$

4. Lorsque les e_i sont réels, le nombre des harmoniques (15) relatifs à une même valeur de n est toujours $4n+2$. En effet, il y a toujours 4 combinaisons de α_1, α_2, α_3 pour lesquelles $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ a la parité de n, et, pour ces 4 combinaisons, $\sum_1^4(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=6$; chacune de ces combinaisons détermine $p=\frac{n-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}{2}$ et fournit par conséquent $p+1$ valeurs distinctes de h, donc $p+1$ polynomes P; le nombre total des harmoniques (15) est ainsi

$$\sum_1^4(2p+2)=\sum_1^4(n+2)-\sum_1^4(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=4n+2.$$

Par exemple, $n=0$ exige que $p=\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$, et il lui correspond les deux harmoniques

$$\frac{1}{\rho}\sqrt{\rho\pm x}.$$

Pour $n=1$, un seul des α_i est égal à 1, et $p=0$; d'autre part

$C_1(x,y) = x$, $S_1(x,y) = y$, ce qui donne bien les six harmoniques

$$\frac{1}{\rho^3}(x\sqrt{\rho \pm x} \mp y\sqrt{\rho \mp x})\left(r^2 - 2e_i z + \frac{g_2}{4} - 2e_i^2\right) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

A $n = 2$ correspondent 10 harmoniques. Ici, $C_2(x,y) = x^2 - y^2$, $S_2(x.y) = 2xy$; la valeur $p = 0$ donne 6 harmoniques du type $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 0$,

$$\frac{1}{\rho^5}[(x^2-y^2)\sqrt{\rho \pm x} \mp 2xy\sqrt{\rho \mp x}]\prod_{i=1}^{2}\left(r^2 - 2e_i z + \frac{g_2}{4} - 2e_i^2\right);$$

$p = 1$ en donne 4 du type $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

$$(17) \quad \frac{1}{\rho^5}[(x^2-y^2)\sqrt{\rho \pm x} \mp 2xy\sqrt{\rho \mp x}]$$
$$\times\left[\left(r^2 - 2\zeta z + \frac{g_2}{4} - 2\zeta^2\right)^2 - (4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3)(2z + \zeta)\right],$$

où ζ est l'une quelconque des deux racines de l'équation

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\zeta - e_i} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \zeta^2 = \frac{g_2}{12}.$$

Si l'on exclut la condition de réalité des e_i, g_2 peut être nul, et ces derniers harmoniques ne sont plus qu'au nombre de deux.

Il est commode de substituer le paramètre ζ à g_2 dans les harmoniques (17) et dans l'équation de la cyclide correspondante. Celle-ci s'écrit alors

$$G(x, y, z; \zeta) \equiv (\rho^2 + z^2 - 2\zeta z + \zeta^2)^2 + (8\zeta^3 + g_3)(2z + \zeta)$$
$$\equiv [\rho^2 + (z - \zeta)^2]^2 + (8\zeta^3 + g_3)(2z + \zeta) = 0$$

et il lui correspond les deux harmoniques algébriques

$$\frac{1}{\rho^5}[(x^2-y^2)\sqrt{\rho \pm x} \mp 2xy\sqrt{\rho \mp x}]$$
$$\times\{[\rho^2 + (z-\zeta)^2]^2 + (8\zeta^3 + g_3)(2z + \zeta)\},$$

qui s'annulent sur elle, et admettent l'axe oz comme ligne singulière. Il est aisé de voir pour quelles valeurs réelles de g_3 et ζ cette cyclide est réelle. Pour que $G(x, y, z; \zeta) = 0$ ait une racine réelle en ρ^2, il faut tout d'abord

$$(8\zeta^3 + g_3)(2z + \zeta) \leqq 0, \tag{18}$$

de sorte que

$$\rho^2 = -(z-\zeta)^2 + \sqrt{(-8\zeta^3 - g_3)(2z+\zeta)};$$

il faut ensuite que ρ^2 soit $\geqq 0$, ce qui donne la nouvelle condition

$$f(z) = (z-\zeta)^4 + (8\zeta^3 + g_3)(2z+\zeta) \leqq 0,$$

dont (18) est une conséquence. Quand z varie de $-\infty$ à $+\infty$, $f(z)$ décroît de $+\infty$ à un minimum, puis croît de nouveau jusqu'à $+\infty$. Ce minimum se produit pour $z = \zeta - \sqrt[3]{4\zeta^3 + \frac{g_3}{2}}$, et a pour valeur

$$f_m = 3\left(4\zeta^3 + \frac{g_3}{2}\right)\left(2\zeta - \sqrt[3]{4\zeta^3 + \frac{g_3}{2}}\right).$$

La Cartésienne est donc réelle pourvu que f_m soit négatif; elle a alors la forme d'un ovale compris entre les deux parallèles z_1, z_2, situés de part et d'autre de $\zeta - \sqrt[3]{4\zeta^3 + \frac{g_3}{2}}$, pour lesquels $\rho = 0$. On voit tout de suite que la condition de réalité est que ζ^3 soit compris entre $-\frac{g_3}{8}$ et $\frac{g_3}{8}$.

(Manuscrit reçu le 10 octobre 1944).