BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN NORDON

Les éléments d'homologie des quadriques et des hyperquadriques

Bulletin de la S. M. F., tome 74 (1946), p. 116-129
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1946__74__116_0>

LES ÉLÉMENTS D'HOMOLOGIE DES QUADRIQUES ET DES HYPERQUADRIQUES;

PAR M. JEAN NORDON.

Le présent article est le résumé d'un travail ([1]) destiné à déterminer les éléments d'homologie des quadriques et des hyperquadriques non dégénérées.

Pour les quadriques complexes, le problème a déjà été résolu par divers auteurs ([2]). Les méthodes utilisées ici sont des extensions de la méthode de M. Ehresmann. Elles consistent à subdiviser les variétés en cellules ([3]) à l'aide d'un procédé de perspective. A partir de cette subdivision et des relations d'incidence entre les cellules, on déduit les éléments d'homologie de la variété. Les relations d'incidence s'obtiennent de suite dans beaucoup de cas où interviennent des variétés complexes, car les dimensions (réelles) des cellules successives diffèrent de deux unités et les cellules sont toutes des cycles. Dans le cas des quadriques réelles, il n'en est plus de même, et faute de connaître les relations d'incidence entre les cellules, nous ne pourrons déterminer les groupes d'homologie entièrement par cette méthode. Nous arriverons cependant au résultat en conjuguant la méthode avec une autre utilisant le fait qu'une quadrique réelle admet pour revêtement le produit de deux sphères.

Je tiens à adresser mes vifs remercîments à M. Ehresmann qui m'ayant indiqué le sujet du présent travail m'aida également de ses précieux conseils pendant la rédaction.

([1]) Ce travail a été présenté sous forme de *Diplôme d'études supérieures de mathématiques* à la Faculté des Sciences de Strasbourg le 23 décembre 1943.

([2]) É. CARTAN, *Sur les propriétés topologiques des quadriques complexes* (*Pub. Math. Univ. Belgrade*, t. 1, 1932, p. 55-74). B. L. VAN DER WAERDEN, *Zur Algebraischen Geometrie* IV (*Math. Annal.*, 109, 1933, p. 7-12). CH. EHRESMANN, *Sur la topologie de certains espaces homogènes* (*Ann. of Math.*, 35, 1934, p. 396-443).

([3]) Sur le sens de l'expression « Subdivision en cellules », *voir* l'article de M. Ehresmann cité en ([2]).

I. — ÉLÉMENTS D'HOMOLOGIE DES QUADRIQUES RÉELLES.

1. Rappel de propriétés des quadriques réelles. — Dans l'espace vectoriel E à $n+2$ dimensions, considérons la forme bilinéaire symétrique

$$F(x, x') = \sum_{i,j=0}^{n+1} a_{ij} x_i x'_j \qquad (a_{ij} = a_{ji}) \tag{1}$$

à laquelle correspond la forme quadratique

$$F(x, x) = \sum a_{ij} x_i x_j.$$

Le lieu des points pour lesquels $F(x, x) = 0$ est un *cône quadratique.*

On sait qu'on peut trouver des formes linéairement indépendantes $l_k = \sum_{h=0}^{n+1} \alpha_{kh} x_h$ telles que $F(x, x)$ puisse se mettre sous la forme

$$F(x, x) = \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon_k l_k^2 \qquad (\varepsilon_k = \pm 1). \tag{2}$$

Il y a $p+1$ nombres ε_k égaux à $+1$ et $q+1$ à -1, ces nombres p et q étant les mêmes quel que soit le procédé utilisé pour mettre $F(x, x)$ sous la forme (2) (loi d'inertie).

La forme (1) définit une application linéaire de E dans son dual E^*, celle qui, à x', fait correspondre la forme linéaire $F(x, x')$. Le rang r de cette application est appelé rang de la forme bilinéaire et aussi de la forme quadratique associé; il est égal au rang de la matrice (a_{ij}), soit $r = p + q + 2$.

L'image réciproque du point zéro de E^* est un sous-espace vectoriel V^{n-p-q} de E, de dimension $n + 2 - r = n - p - q$ dont les points sont les *points doubles* du cône quadratique.

Si P et S sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, on peut écrire de façon unique $x = y + z$ (où $y \in P$, $z \in S$) et l'on a

$$F(x, x) = F(y, y) + 2F(y, z) + F(z, z),$$

qui se réduit, si P et S sont conjugués au cône quadratique, à

$$F(x, x) = F(y, y) + F(z, z). \tag{3}$$

Dans E, retirons le point O et identifions tous les points situés sur une même droite passant par l'origine, on obtient ainsi l'espace projectif réel P^{n+1} à $n+1$ dimensions. Le cône devient une quadrique $Q^n_{p,q}$ dont l'équation peut s'écrire, avec un choix convenable du repère projectif,

$$x_0^2 + \ldots + x_o^2 - y_0^2 - \ldots - y_q^2 = 0. \tag{4}$$

La quadrique sera dite du type p, q (avec la convention $p \leqq q$).

Si $p + q = n$, la quadrique est *non dégénérée*. Par contre, si $p + q < n$, la quadrique est $n - p - q$ fois *dégénérée*, car elle admet des points doubles formant un espace projectif $P^{n-p-q-1}$ (que nous appellerons *sommet* de la quadrique) image du sous-espace V^{n-p-q} de E. Un espace projectif P^{p+q+1} supplémentaire du sommet (c'est-à-dire image dans P^n d'un espace vectoriel V^{p+q+2} supplémentaire de V^{n-p-q} dans E) coupe $Q^n_{p,q}$ suivant une quadrique non dégénérée qui sera dite une *base* de la quadrique dégénérée. La quadrique dégénérée est le lieu des variétés linéaires P^{n-p-q} contenant le sommet et s'appuyant sur une base. D'après (3) (où $y \in V^{n-p-q}$ et $z \in V^{p+q+2}$) toutes les bases sont du même type p, q que la quadrique.

De (3) on tire de suite la

Proposition I. — *L'intersection avec une quadrique non dégénérée de type p, q de l'espace conjugué d'une droite coupant la quadrique en deux points distincts est une quadrique non dégénérée de type $p - 1$, $q - 1$.*

Citons pour terminer le théorème sur les génératrices des quadriques :

Théorème I. — *Sur toute quadrique réelle non dégénérée de type p, q ($p \leqq q$) sont situées des variétés linéaires (appelées* génératrices*) de toutes les dimensions $\leqq p$ et il n'y en a pas de dimension supérieure.*

Lorsque $p \neq q$, l'espace des génératrices de dimension p est une variété algébrique connexe [1] *de dimension* $\frac{1}{2}(p+1)(2q-p)$.

Lorsque $p = q$, cet espace est une variété algébrique de dimension $\frac{1}{2}p(p+1)$ *admettant deux composantes connexes. Deux génératrices appartenant à la même composante connexe (génératrices de même famille) ont une intersection de dimension $p-2k$, tandis que deux de familles différentes ont une intersection de dimension $p-2k-1$* (une intersection vide est comptée comme de dimension -1).

Ainsi que les propositions

Proposition II. — *Sur une quadrique réelle, deux génératrices de même dimension (et éventuellement de même famille) sont homotopes.*

Proposition III. — *La variété linéaire conjuguée d'une génératrice G^k de dimension $k (0 \leqq k \leqq p)$ de la quadrique non dégénérée $Q^{p+q}_{p,q}$ coupe cette quadrique suivant une quadrique $k+1$ fois dégénérée de type $p-k-1$, $q-k-1$ et de sommet G^k* (on convient qu'une quadrique dégénérée pour laquelle $p = -1$ est réduite à son sommet).

2. Première subdivision de $Q^n_{p,q}$ en cellules. — A la quadrique non dégénérée $Q^n_{p,q}$ d'équation (4), associons les deux sphères d'équations

$$(S^p) \qquad x_0^2 + \ldots + x_p^2 = 1,$$

$$(S^q) \qquad y_0^2 + \ldots + y_q^2 = 1$$

dans les espaces numériques R^{p+1} et R^{q+1} à $p+1$ ou $q+1$ dimensions. On voit de suite que le produit topologique $S^p \times S^q$ est un revêtement à deux feuillets de $Q^n_{p,q}$ (les points $A \times B$ et $A' \times B'$ où A et A' sont diamétralement opposés sur S^p, B et B' l'étant sur S^q, revêtent un même point de la quadrique).

---

[1] Cet espace est d'ailleurs homéomorphe à la variété $V_{q+1,p+1}$ de Stiefel. *Cf.* Ch. Ehresmann, *Sur la variété des génératrices planes d'une quadrique réelle et sur la topologie du groupe orthogonal à n variables* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 208, 1939, p. 321-323).

Le produit $S^p \times S^q$ étant connexe (si $p \neq 0$, mais on a sinon le cas de la sphère, sans intérêt ici), il en résulte que $Q^n_{p,q}$ est aussi connexe. Comme c'est une variété topologique, elle est donc régulièrement connexe.

Pour subdiviser $Q^n_{p,q}$ en cellules, il suffit de subdiviser S^p et S^q; on en déduit une subdvision de $S^p \times S^q$ et par identification celle de $Q^n_{p,q}$. Nous décomposons S^p en cellules qui, pour chaque dimension i, sont deux « hémisphères » symétriques E^i_1 et E^i_2. Les relations d'incidence sont

$$\partial E^i_1 = E^{i-1}_1 + E^{i-1}_2, \qquad \partial E^i_2 = -(E^{i-1}_1 + E^{i-1}_2) \qquad (i = 0, \ldots, p).$$

La décomposition de S^q est analogue avec des cellules F^j_1 et F^j_2 $(j = 0, \ldots, q)$. Les cellules de dimension s du produit $S^p \times S^q$ sont donc du type $E^i_\alpha \times F^{s-i}_\beta$ $(\alpha, \beta = 1, 2)$ et $Q^n_{p,q}$ s'obtient en identifiant la cellule précédente à $E^i_{\alpha'} \times F^{s-i}_{\beta'}$ (avec $\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = 3$).

De façon plus précise, et pour respecter l'orientation, on doit identifier E^i_α avec $(-1)^{i-1} E^i_{\alpha'}$ et F^{s-i}_β avec $(-1)^{s-i-1} F^{s-i}_{\beta'}$, soit $E^i_\alpha \times F^{s-i}_\beta$ avec $(-1)^s E^i_{\alpha'} \times F^{s-i}_{\beta'}$. Nous poserons

$$C^s_i = E^i_1 \times F^{s-i}_1 = (-1)^s E^i_2 \times F^{s-i}_2,$$
$$D^s_i = E^i_1 \times F^{s-i}_2 = (-1)^s E^i_2 \times F^{s-i}_1,$$

avec $0 \leq i \leq p$, $0 \leq s - i \leq q$, $i \leq s$, ce qu'on peut écrire

$$\max(0, s-q) \leq i \leq \min(p, s).$$

Les relations d'incidence entre ces cellules résultent de la relation générale

$$\partial(A^m \times B^n) = (\partial A^m \times B^n) + (-1)^m (A^m \times \partial B^n),$$

qui donne, en orientant convenablement les cellules du produit $E \times F$ de deux complexes E et F, le bord de la chaîne produit de deux chaînes A^m et B^n (de dimensions m et n) situées respectivement sur E et sur F. On obtient ainsi

$$\partial C^s_i = C^{s-1}_{i-1} + (-1)^{s-1} D^{s-1}_{i-1} + (-1)^i [C^{s-1}_i + D^{s-1}_i],$$
$$\partial D^s_i = D^{s-1}_{i-1} + (-1)^{s-1} C^{s-1}_{i-1} - (-1)^i [C^{s-1}_i + D^{s-1}_i].$$

3. Groupes d'homologie de $Q^n_{p,q}$. — Les relations d'incidences précédentes permettent d'écrire les matrices d'incidence (on doit distinguer divers cas, suivant la parité de s et sa position par rapport aux nombres p et q). Ces matrices sont aisées à réduire, et l'on en déduit, selon les méthodes bien connues, les invariants numériques d'homologie. On peut ainsi dresser le tableau suivant (B signifie nombre de Betti, T coefficient de torsion) qui n'est valable que pour p non nul.

	p pair				p impair			
	q impair		q pair		q impair		q pair	
Dimension.	B.	T.	B.	T.	B.	T.	B.	T.
$p+q$	0	–	1	–	1	–	0	–
.	.	.	.	.	.	.	.	.
$p+q-2k$	0	–	0	2	0	2	0	–
$p+q-2k-1$ ...	0	2	0	–	0	–	0	2
.	.	.	.	.	.	.	.	.
$q+1$	0	2	0	–	0	2	0	–
q	1	–	0	2	1	–	–	2
.	.	.	.	.	.	.	.	.
$p+l$	0	–	0	–	0	–	0	–
.	.	.	.	.	.	.	.	.
p	0	–	0	–	1	–	1	–
.	.	.	.	.	.	.	.	.
$2m+1$	0	2	0	2	0	2	0	2
$2m$	0	–	0	–	0	–	0	–
	.	.	.	.	.	.	.	.
0	1	–	1	–	1	–	1	–

Dans le cas où $p = q$, le milieu du tableau est à remplacer par

Dimension.	$p = q$ pair		$p = q$ impair	
	B.	T.	B.	T.
$q+1$	0	–	0	2
$p = q$	0	2	2	–
$p-1$	0	2	0	–
$p-2$	0	–	0	2

Remarque. — Le fait que le nombre de Betti de la dimension $p+q$ soit égal à 1 (ou à 0) pour $p+q$ pair (ou impair) joint à celui de la connexion régulière de $Q^n_{p,q}$ montre que les quadriques non dégénérées autres que la sphère sont orientables (ou non orientables) lorsqu'elles sont de dimension paire (ou impaire); ce qu'on aurait d'ailleurs pu voir directement.

La méthode précédente, qui nous a donné les invariants numériques d'homologie, ne permet pas de trouver simplement les bases d'homologie. La méthode suivante permettra de trouver ces bases d'homologie.

4. Deuxième subdivision de $Q^n_{p,q}$ en cellules. — Soient O un point de la quadrique et P^n la variété linéaire tangente en ce point. $P^n \cap Q^n_{p,q}$ est une quadrique dégénérée $Q^{n-1}_{p-1,q-1}$ ayant O pour sommet. Soient P'^n une variété linéaire ne contenant pas O et $P^{n-1} = P^n \cap P'^n$. Une perspective depuis O permet de mettre en correspondance biunivoque $P'^n - P^{n-1}$ et $Q^n_{p,q} - Q'^{n-1}_{p-1,q-1}$ qui est donc homéomorphe à une boule ouverte.

Si G^k est une génératrice de dimension k de la quadrique, et P^{n-k} sa variété conjuguée par rapport à la quadrique, $Q^n_{p,q} \cap P^{n-k}$ est une quadrique $k+1$ fois dégénérée $Q^{n-k-1}_{p-k-1,q-k-1}$ (que nous écrirons plus rapidement Q^{n-k-1}) dont G^k est le sommet. Soient O' un point de Q^{n-k-1} non situé sur G^k et G^{k+1} la génératrice de $Q^n_{p,q}$ contenant G^k et O'. La variété conjuguée P^{n-k-1} de G^{k+1} coupe $Q^n_{p,q}$ suivant Q^{n-k-2} et une perspective depuis O' montre encore que $Q^{n-k-1} - Q^{n-k-2}$ est homéomorphe à une boule.

Considérons alors une suite de génératrices de chaque dimension, telles que $G^p \supset G^{p-1} \supset \ldots \supset G^1 \supset G^0$. En faisant correspondre à G^k la quadrique dégénérée $Q^{n-k-1} = Q^n_{p,q} \cap P^{n-k}$ (où P^{n-k} est conjugué de G^k) on obtient une suite

$$(5) \qquad Q^n_{p,q} \supset Q^{n-1} \supset \ldots \supset Q^{q+1} \supset Q^q \supset G^p \supset \ldots \supset G^1 \supset G^0,$$

et la différence de deux espaces consécutifs de cette suite est homéomorphe à une boule ouverte. Cette suite définit donc une subdivision de la quadrique en cellules.

Pour déduire de cette subdivision les groupes d'homologie de $Q^n_{p,q}$, il faudrait connaître les relations d'incidence entre les cellules. Pour les dimensions inférieures à p, le résultat est bien connu et les groupes d'homologie ne sont autres que ceux de l'espace projectif de dimension p. Pour les dimensions entre p et q, les groupes d'homologie sont nuls. Par contre, pour les dimensions supérieures ou égales à q, on ne peut écrire les relations d'incidence faute de connaître les caractères d'orientabilité des quadriques dégénérées; c'est pourquoi nous avons dû d'abord déterminer les invariants numériques d'homologie par une première méthode pour avoir maintenant le résultat complet.

Remarquons encore que, d'après la suite (5), il semble que les cellules servant de bases d'homologie pour les diverses dimensions doivent être « emboîtées ». On montre qu'il n'en est rien, et même qu'on peut remplacer la quadrique dégénérée $Q^{n-k}_{p-k,q-k}$ par une quadrique quelconque, dégénérée ou non, de la même dimension. En définitive, on a le

Théorème II. — *Les groupes d'homologie de la quadrique réelle non dégénérée du type p, q sont donnés par le tableau du paragraphe* 3.

Dans le cas où p et q sont distincts, lorsque le groupe d'homologie n'est pas nul, la base d'homologie pour la dimension k admet un seul élément qui est une génératrice si $k \leqq p$, *une quadrique si* $k \geqq q$.

Dans le cas $p = q$, *le résultat est le même, sauf pour la dimension p. Si p est pair, la base d'homologie est formée d'un seul élément d'ordre* 2, *somme de deux génératrices de familles différentes. Si p est impair, la base d'homologie admet deux éléments d'ordre infini qui sont deux génératrices de systèmes différents.*

Remarque. — Nous n'avons pu pousser la 2e méthode jusqu'au bout parce qu'ignorant les caractères d'orientabilité des quadriques dégénérées. Mais puisque nous connaissons les groupes d'homologie, il est facile de voir le caractère d'orientabilité à adopter dans chaque cas pour retrouver les résultats du tableau. On trouve ainsi

Proposition IV. — *Les quadriques réelles dégénérées ou non de dimensions paires sont orientables; celles de dimensions impaires ne le sont pas. Toutefois, la sphère est toujours orientable ainsi que les quadriques dégénérées ayant pour base une sphère.*

5. **Groupe de Poincaré.** — Ce groupe ne dépendant que des cellules des deux premières dimensions est donc celui de l'espace projectif pour $2 \leqq p \leqq q$. Pour $p = 1 < q$, il y a une cellule de dimension 1 et pas de dimension 2; le groupe fondamental est donc cyclique libre. Enfin, pour $p = q = 1$, la quadrique est homéomorphe au tore à deux dimensions.

Théorème III. — *Le groupe de Poincaré de la quadrique réelle non dégénérée du type p, q est cyclique d'ordre 2 engendré par une génératrice lorsque $2 \leqq p \leqq q$. Pour $1 = p \leqq q - 1$ ce groupe est cyclique libre avec le même générateur. Pour $p = q = 1$ il est abélien libre à deux générateurs qui sont deux génératrices de systèmes différents.*

6. Cas des quadriques complexes. — Nous donnons ici simplement pour mémoire le résultat, ce cas ayant été souvent étudié ([2]).

Théorème IV. — *Les groupes d'homologie des dimensions (réelles) impaires d'une quadrique complexe à n dimensions complexes sont nuls.*

Lorsque n est impair, les groupes d'homologie des dimensions paires sont cycliques libres. Les bases d'homologie sont formées, soit par des quadriques $\left(\text{pour les dimensions} > \frac{n}{2}\right)$, soit par des génératrices $\left(\text{dimensions} < \frac{n}{2}\right)$.

Lorsque n est pair, les résultats sont les mêmes, sauf pour la dimension complexe $\frac{n}{2}$ pour laquelle le groupe d'homologie est libre à deux générateurs qui sont deux génératrices de systèmes différents.

Rappelons aussi que *les quadriques complexes sont simplement connexes*; sauf celle de dimension zéro qui n'est d'ailleurs pas connexe.

II. — ÉLÉMENTS D'HOMOLOGIE DES HYPERQUADRIQUES DE L'ESPACE PROJECTIF COMPLEXE.

7. Propriétés des hyperquadriques. — Dans l'espace projectif complexe P^{n+1} à $n + 1$ dimensions, une hyperquadrique est le lieu des points dont les coordonnées annulent une forme d'Hermite

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} x_i \overline{x_j} = 0$$

(où $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, $\overline{x}$ désignant le nombre complexe conjugué de x).

La loi d'inertie est encore vraie pour une telle forme, si bien que, par un choix convenable du repère projectif, l'équation précédente s'écrit (on suppose toujours $p \leqq q$)

$$(\mathrm{H}^{n}_{p,q}) \qquad x_0\overline{x_0}+\ldots+x_p\overline{x_p}-y_0\overline{y_0}-\ldots-y_q\overline{y_q}=0.$$

Les propriétés des hyperquadriques sont très voisines de celles des quadriques réelles puisque la loi d'inertie a une forme analogue. La seule différence provient du fait que sur la droite projective complexe l'équation $x_0^2=y_0^2$ représente deux points, tandis que $x_0\overline{x_0}=y_0\overline{y_0}$ représente un cercle du plan de Gauss (complété par un point à l'infini) par lequel on représente cette droite. Il en résulte que *l'intersection d'une droite complexe et d'une hyperquadrique* $\mathrm{H}^{p+q}_{p,q}$ *est, ou vide, ou formée d'une chaîne* (5) *linéaire. Dans le cas intermédiaire où la droite passe en un point* M *de* $\mathrm{H}^{p+q}_{p,q}$ *et est contenue dans la variété linéaire tangente en* M, *ou elle n'a que* M *en commun avec* $\mathrm{H}^{p+q}_{p,q}$, *ou elle est située sur l'hyperquadrique.*

Le théorème I s'étend sans difficulté au cas des hyperquadriques, car sa démonstration repose sur l'emploi de la loi d'inertie, d'où

Théorème V. — *Sur l'hyperquadrique du type* p, q ($p \leqq q$) *sont situées des variétés linéaires complexes de toutes les dimensions complexes* $\leqq q$, *et il n'y en a pas de dimension supérieure. L'espace des génératrices de dimension* p *est une variété connexe à* $(p+1)(2q-p+1)$ *dimensions réelles.*

Citons enfin

Proposition V. — *L'intersection de l'hyperquadrique* $\mathrm{H}^{p+q}_{p,q}$ *et de la variété linéaire conjuguée de la génératrice* G^k *à* k *dimensions complexes est une hyperquadrique dégénérée de sommet* G^k *et du type* $p-k-1, q-k-1$.

8. Subdivision en cellules. — Soient O un point de l'hyperquadrique, T la variété linéaire tangente en O, P et Q deux

(5) Le mot chaîne employé ici n'a pas le même sens qu'en topologie algébrique. Une telle chaîne n'est autre qu'un cercle du plan de Gauss. *Cf.* É. Cartan, *Leçons sur la géométrie projective complexe*, Gauthier-Villars, Paris, 1931.

variétés linéaires de même dimension complexe $n = p + q$ que T et telles que $S = P \cap Q$ soit contenue dans T. T coupe $H^n_{p,q}$ suivant l'hyperquadrique dégénérée $H^{n-1}_{p-1,q-1}$.

L'ensemble des droites complexes issues de O et non situées dans T est homéomorphe à la boule à n dimensions complexes, donc à la boule réelle R^{2n}. Chacune de ces droites coupe $H^n_{p,q}$ suivant une chaîne linéaire passant en O; lorsqu'on retire O, ce qui reste de cette chaîne est homéomorphe à R droite numérique réelle. On montre que $H^n_{p,q} - H^{n-1}_{p-1,q-1}$ est homéomorphe à une boule (de dimension $2n+1$) en montrant qn'elle est homéomorphe au produit topologique $R^{2n} \times R$.

Pour cela, soit $N \in P - S$. La droite complexe ON coupe $H^n_{p,q}$ en M et Q en L. On peut représenter cette droite ON sur un plan de Gauss xoy, N étant représenté par l'origine, L par le point *un* et O par le point à l'infini. L'intersection de ON et de $H^n_{p,q}$ est alors représentée dans xoy par une droite D. On a ainsi défini une application continue h de la boule $P - S$ dans E, espace des droites de xoy. L'espace E' des droites orientées de xoy est un revêtement à deux feuillets de E, et on sait (6) que h est projection d'une application continue h' de la boule $P - S$ dans E'. A tout point $N \in P - S$ on fait donc ainsi correspondre une droite orientée de xoy sur laquelle M a pour image un point m qui peut être repéré sur cette droite par sa distance algébrique d à la projection de O sur la droite. En résumé, à tout point $M \in H^n_{p,q} - H^{n-1}_{p-1,q-1}$ on fait correspondre un point $N \in P - S$ et un nombre algébrique réel d. On voit aisément que cette correspondance est bicontinue, donc que l'espace ci-dessus est homéomorphe à $R^{2n} \times R$.

Si à la génératrice G^k on associe $H^{n-k-1}_{p-k-1,q-k-1}$ (plus brièvement H^{n-k-1}) intersection de $H^n_{p,q}$ par la variété conjuguée de G^k, on voit, en associant le raisonnement fait pour les quadriques réelles et le précédent, que $H^{n-k-1} - H^{n-k-2}$ est homéomorphe à $R^{2(n-k-1)} \times R$, donc à la boule à $2n - 2k - 1$ dimensions réelles.

Ceci étant, on considère une suite analogue à (5), soit

$$H^n_{p,q} \supset H^{n-1} \supset \ldots \supset H^q \supset G^p \supset \ldots \supset G^1 \supset G^0.$$

(6) *Voir* Ch. Ehresmann, *Sur les applications continues d'un espace dans un espace fibré ou dans un revêtement* (*Bull. Soc. Math. France*, 1944) (Corollaire I du théorème II).

La différence de deux éléments successifs de cette suite est homéomorphe à une boule et on a réalisé une subdivision de $H^n_{p,q}$ en cellules.

9. **Groupes d'homologie.** — La dimension réelle de la génératrice G^k étant $2k$, et celle de H^{n-k} étant $2(n-k)+1$, la différence des dimensions de deux cellules consécutives est de 2; ces cellules sont toutes des cycles.

Il y a toutefois un cas douteux, celui de H^q lorsque $p=q$, car les dimensions réelles de H^q et G^p sont $2p+1$ et $2p$. Il faut étudier la relation d'incidence entre ces cellules. On montre que H^p est orientable, donc est un cycle. Pour faire cette démonstration, on retire de H^p le sommet G^{p-1} qui est de dimension réelle $2p-2$ (puisque l'orientabilité ne dépend que des cellules des deux dimensions maxima) et l'on montre que $H^p - G^{p-1}$ est homéomorphe au produit topologique $C \times (G^p - G^{p-1})$, où C est le cercle réel « base » de l'hyperquadrique dégénérée H^p. Le produit de deux espaces orientables (ici C et $G^p - G^{p-1}$) étant orientable, $H^p - G^{p-1}$, donc H^p est orientable. On peut alors énoncer

THÉORÈME VI. — *Les groupes d'homologie de l'hyperquadrique de l'espace projectif complexe non dégénérée du type p, q sont nuls, sauf ceux des dimensions réelles* $0, 2, \ldots, 2p, 2q+1, 2q+3, \ldots, 2q+2p+1$ *qui sont cycliques libres.*

Lorsque le groupe d'homologie de la dimension k n'est pas nul, la base d'homologie est formée d'une génératrice si $k \leqq 2p$ ou d'une hyperquadrique si $k \geqq 2q+1$.

Remarquons que, si $p \geqq 0$ et $q \geqq 1$, il n'y a pas de cellules de la dimension 1, alors qu'il y en a une si $p=q=0$ (cas du cercle). Il en résulte que *les hyperquadriques de l'espace projectif complexe sont simplement connexes, sauf le cercle dont le groupe de Poincaré est cyclique libre.*

III. — ÉLÉMENTS D'HOMOLOGIE DES HYPERQUADRIQUES DE L'ESPACE PROJECTIF QUATERNIONIEN.

10. **Groupes d'homologie.** — Une hyperquadrique $U^n_{p,q}$ de l'espace projectif quaternionien P^{n+1} à $n+1$ dimensions quater-

nioniennes ([7]) est le lieu des points dont les coordonnées annulent une forme d'Hermite $\sum_{i,j=0}^{n} z_i a_{ij} \overline{z_j} = 0$ (où $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$). Les propriétés sont les mêmes que celles des hyperquadriques de l'espace projectif complexe, car la loi d'inertie est encore vraie; seules les questions de dimensions réelles sont modifiées.

Avec les mêmes notations que dans le cas complexe, la droite quaternionienne ON sera représentée sur un espace numérique à 4 dimensions R^4, complété par un point à l'infini. L'intersection de ON et de $U_{p,q}^{n}$ est alors représentée par une sous-variété linéaire à 3 dimensions L^3 de R^4 et l'on veut montrer que $U_{p,q}^{n} - U_{p-1,q-1}^{n-1}$ est homéomorphe au produit $(P - S) \times R^3$, donc à une boule à $4n + 3$ dimensions réelles.

On procède comme dans le cas complexe. La seule difficulté est d'attacher à L^3 un repère euclidien variant de façon continue avec L^3. L'espace E des repères euclidiens trirectangles de R^4 est fibré sur l'espace de base B des variétés L^3 de R^4, la fibre type étant l'espace des repères d'un espace numérique R^3. Soit h l'application continue définie précédemment de la boule $P - S$ dans B. Comme toute application continue d'une boule, h est homotope à une application constante k de $P - S$ sur une variété L_0^3. Soient E_0 un repère dans L_0^3 et k' l'application constante qui à tout point de $P - S$ fait correspondre $E_0 \in E$. Une déformation, qui fait inversement passer de k à h dans B, définit une déformation de k' application de $P - S$ dans E, en une application de h' se projetant sur h ([8]). Si donc L^3 est l'image par h de $N \in P - S$, le même point N est appliqué par h' sur un repère déterminé de L^3, repère variant continûment avec N.

Il suffit maintenant d'achever comme dans le cas complexe. On définit une subdivision en cellules à partir de génératrices « emboîtées » et la différence de deux de ces cellules est homéo-

---

([7]) Sur l'espace projectif quaternionien, *voir*, par exemple, S. WACHS, *Essai sur la géométrie projective quaternionienne* (*Mém. Acad. Roy. Belgique*, vol. XV, fasc. 6, 1936).

([8]) Ceci résulte du lemme de déformation de MM. Ehresmann et Feldbau (*C. R. Acad. Sc.*, 212, 1941, p. 946). Le lemme n'est énoncé dans cette Note que pour le cas d'un complexe fini; mais M. Ehresmann l'a étendu au cas d'un complexe infini dans l'article cité en ([5]) (Corollaire I du théorème I).

morphe à une boule. Les cellules sont toutes des cycles, et la difficulté du cas $p = q$ n'intervient plus, car U^p est de dimension $4p + 3$, tandis que G^p est de dimension $4p$.

Théorème VII. — *Les groupes d'homologie de l'hyperquadrique non dégénérée du type* p, q *de l'espace projectif quaternionien sont nuls, sauf ceux des dimensions réelles* $0, 4, \ldots, 4p-4, 4p, 4q+3, 4q+7, \ldots, 4q+4p+3$ *qui sont cycliques libres.*

Lorsque le groupe d'homologie de la dimension k *n'est pas nul, la base d'homologie est formée d'une génératrice si* $k \leq 4p$ *ou d'une hyperquadrique si* $k \geq 4q + 3$.

Notons enfin que *les hyperquadriques de l'espace projectif quaternionien sont simplement connexes.*

(Manuscrit reçu le 10 février 1946.)