BULLETIN DE LA S. M. F.

PAUL LÉVY

Le problème des cols en calcul des variations

Bulletin de la S. M. F., tome 75 (1947), p. 31-42
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1947__75__31_0>

LE PROBLÈME DES COLS EN CALCUL DES VARIATIONS;

PAR M. PAUL LÉVY.

1. Introduction. — L'étude des maxima et minima a été longtemps le principal objet du calcul des variations. Les différents types de trajectoires stationnaires, et notamment les cols, auxquels est consacré le présent travail, ne furent étudiés que plus récemment. D'autre part les premières recherches avaient porté sur l'étude locale des conditions qui caractérisent une trajectoire minimisante ou une trajectoire stationnaire d'un type donné. L'étude globale du problème, qui implique celle des propriétés topologiques des espaces fonctionnels, a été le dernier et important progrès du calcul des variations. Ce que Hilbert, reprenant et justifiant le raisonnement intuitif de Riemann, avait fait pour le problème des maxima et minima, Marston Morse, dans ses travaux sur le point de vue global en calcul des variations (1), l'a fait pour l'étude des trajectoires stationnaires de types quelconques.

L'objet du présent travail est d'attirer l'attention sur le problème des cols, d'un caractère très élémentaire, et qui peut être traité, comme celui des maxima et minima, indépendamment des théories générales de M. Morse. Nous indiquerons quelques exemples simples, relatifs à l'étude des géodésiques, et qui pourraient figurer dans un cours de calcul différentiel et intégral ou constituer des exercices de licence, au même titre que les problèmes les plus classiques de minimum. Incidemment, à propos de la surface minima de révolution, nous indiquerons au sujet de la relation entre deux points conjugués sur la chaînette méridienne, un résultat simple qui ne semble pas avoir encore été signalé.

2. Notions préliminaires. — Considérons un espace Ω, dans lequel une topologie est définie, et une fonction $\Phi(e)$ définie et continue dans Ω. Nous dirons qu'un point a est un *col ponctuel* (ou simplement un *col*) pour cette fonction si,

(1) MARSTON MORSE, *The foundations of a theory in the calculus of variations in the large* (*Transactions of the amer. math. Society*, t. 30, 1928, pp. 213-274).

Ce travail avait été précédé par une étude du même auteur sur les nombres des points stationnaires des différents types pour une fonction de n variables; même recueil, t. 27, 1925, pp. 345-396.

Comme exposé d'ensemble des théories de M. Morse, signalons :

1° MARSTON MORSE, *The calculus of variations in the large* (*Amer. math. soc. colloquium publ.*, vol. 18, New-York, 1934).

2° MORSE, *Functional topology and abstract variational theory* (*Mém. Sc. math.* Paris, 1938).

3° H. SEIFERT et W. THRELFALL, *Variationsrechnung im Grossen* (*Morsesche Theorie*) (*Hamburger math. Einzelschriften*, 24, Heft, 1938, Teubner).

au voisinage de a, la *région basse* $\Phi(e) < u(a)$ comprend au moins deux parties distinctes, séparées par le point a et la *région haute* $\Phi(e) > \Phi(a)$. D'une manière plus générale, nous appellerons aussi *col* (au sens large) un continu $\mathcal{C}$, contenu dans Ω, où $\Phi(e)$ a une valeur constante c, et au voisinage duquel la région basse $\Phi(e) < c$ comprend au moins deux parties distinctes, séparées par $\mathcal{C}$ et la région haute $\Phi(e) > c$. Ainsi, si Ω est un plan, et si $\Phi(e)$ est une fonction, nulle sur deux courbes fermées Γ_0 et Γ_1 et sur une ligne $a_0 a_1$ reliant ces deux courbes, positive à l'intérieur de Γ_0 et de Γ_1, et négative dans le reste du plan, la ligne $a_0 a_1$ est un col aussi bien pour la fonction $\Phi(e)$ que pour $-\Phi(e)$. Quand nous voudrons préciser qu'un col ne se réduit pas à un point, nous dirons que c'est un *seuil*; un col, au sens large, est donc, soit un col ponctuel, soit un seuil.

Le col (et plus spécialement le col ponctuel) est ainsi défini par une propriété locale. Mais l'étude de la topologie générale de Ω, de même qu'elle peut permettre d'affirmer l'existence de maxima et minima, permet souvent d'affirmer *a priori* l'existence d'un col; c'est ainsi que, pour une fonction définie sur la surface d'une sphère, l'existence d'un maximum et de deux minima relatifs entraîne nécessairement celle d'un col. Ainsi, des conditions relatives à certains points particuliers (complétées éventuellement par des conditions relatives à la frontière de Ω) permettent d'être assuré *a priori* de l'existence d'un ou plusieurs cols ([2]). Nous allons voir qu'on retrouve les mêmes circonstances dans l'étude des géodésiques d'une surface fermée.

3. **Les géodésiques d'une surface fermée.** — Soit S une surface fermée de l'espace euclidien à trois dimensions, ayant en chaque point un plan tangent bien déterminé, et qui varie d'une manière continue en fonction du point de contact. Les éléments e de Ω seront des *cycles*, c'est-à-dire des courbes fermées orientées, tracées sur S, et que nous pouvons supposer rectifiables, sans points doubles, et ne pouvant pas se réduire à un point. Un cycle positif et très petit ne peut donc pas être amené sur un cycle négatif et très petit sans que l'aire intérieure (en appelant ainsi celle autour de laquelle on tourne dans le sens positif) grandisse et finisse par constituer presque toute la surface S. La longueur $\Phi(e)$, initialement et finalement très petite, ne peut évidemment pas le rester au cours de la transformation.

Désignons par Ω'_0 l'ensemble des éléments e_0 de Ω ayant chacun la propriété suivante : on peut amener e_0 sur un cycle positif très petit par une déformation continue au cours de laquelle $\Phi(e)$ est constamment inférieur à sa valeur initiale $\Phi(e_0)$. Désignons par Ω''_0 l'ensemble des éléments liés de la même manière aux cycles négatifs et très petits, et par Ω_0 la partie commune de Ω'_0 et Ω''_0. *La longueur $\Phi(e)$ admet dans Ω_0 une borne inférieure $\Phi(e_0) = c$, réalisée en au moins un point e_0 de Ω_0 ou de sa frontière, qui est nécessairement un col* ([3]).

([2]) On remarque que cet énoncé n'est exact que s'il s'agit de cols au sens large. Il est donc impossible de se contenter de considérer les cols ponctuels.

([3]) Si le col n'est pas ponctuel, il peut arriver que les deux régions basses ne puissent être reliées que par une ligne, dont une extrémité appartiendra à Ω'_0 et l'autre à Ω''_0. Mais n'importe quel élément de la région haute voisine du col appartiendra à la fois à Ω'_0 et Ω''_0.

Cette conclusion implique d'abord un théorème d'existence du minimum, qui se démontre par les méthodes introduites par Hilbert en calcul des variations. Il est alors évident qu'au voisinage de e_0, il y a deux régions basses, comprenant respectivement les cycles positifs très petits et les cycles négatifs très petits, et entre lesquelles on ne peut pas communiquer sans passer au moins à la hauteur du point e_0. Ce point est nécessairement un col ponctuel ou un point d'un seuil.

D'autre part, pour qu'un point e_0 soit un col, il est évidemment nécessaire qu'il soit stationnaire, c'est-à-dire que la ligne de la surface S qu'il représente (en faisant maintenant abstraction du sens de parcours choisi) soit une géodésique fermée. On a ainsi un moyen très simple d'établir l'existence d'au moins une géodésique fermée.

4. **Cas des polyèdres.** — Dans ce qui précède, nous avons supposé l'existence des plans tangents à S. Cette condition est naturellement plus restrictive qu'il n'est nécessaire. Ce qui est essentiel est que la surface S puisse être balayée par des courbes rectifiables. On peut donc appliquer le résultat obtenu aux polyèdres.

Une géodésique qui coupe l'arête intersection de deux faces P_0 et P_1 d'un polyèdre comprend naturellement deux segments rectilignes D_0 et D_1 qui font le même angle avec cette arête, de manière qu'en rabattant P_0 sur P_1 ils constituent deux segments d'une même droite. On remarque que le plan de D_0 et D_1 coupe P_0 et P_1 sous le même angle.

Si un segment rectiligne D_0 aboutit en un sommet A, la géodésique définie par D_0 est prolongée par un autre segment D_1 si, dans le rabattement des faces du polyèdre qui contiennent D_0 et D_1 l'une sur l'autre, ces deux segments viennent en prolongement l'un de l'autre, et cela même s'il ne s'agit pas de deux faces consécutives du polyèdre. Pour l'application de cette règle au cas où D_0 est une arête, on peut la considérer comme appartenant à l'une ou l'autre des faces qu'elle limite, ou à n'importe quel plan P qui la contienne et laisse ces deux faces d'un même côté. Dans ces conditions, au sommet d'un angle polyèdre convexe, chaque segment de droite intérieur à une des faces du polyèdre a un prolongement déterminé; celui d'une arête est indéterminé, à moins qu'on ne précise le plan P qui lui est associé; en précisant ce plan, on est conduit à considérer que différentes géodésiques initialement distinctes peuvent coïncider le long d'une arête, et se séparer de nouveau, chacune ayant un prolongement défini sans ambiguïté (1).

Si A est le sommet d'un angle polyèdre dont les faces ont une somme inférieure à quatre droits (ce qui est sûrement le cas s'il est convexe), les deux demi-droites D_0 et D_1 séparent cette somme en deux parties dont l'une au moins a une somme inférieure à deux droits (l'autre peut atteindre deux droits, mais non dépasser cette valeur si D_0 et D_1 sont les deux segments d'une géodésique). Il n'y a alors qu'à développer cette surface polyédrique sur un plan pour voir que la géodésique constituée par D_0 et D_1 ne réalise pas le plus court chemin sur $\mathfrak{S}$ entre deux points situés respectivement sur D_0 et D_1.

---

(1) Ces conventions ne sont pas arbitraires. On y est conduit en considérant le polyèdre comme limite de surfaces dont le plan tangent varie d'une manière continue.

Cela n'empêche pas qu'une géodésique passant par un sommet A peut être un col. Pour le voir, prenons pour S une pyramide de sommet A ayant pour base un rectangle, A se projetant sur le plan de cette base à l'intérieur de ce rectangle. La section Γ de cette pyramide par le plan P contenant A et perpendiculaire à deux côtés opposés de ce rectangle est une géodésique fermée. Les sections Γ_0 et Γ_1 par des plans parallèles à P, voisins de lui, et situés de part et d'autre de lui, sont des triangles semblables à Γ et plus petits. Une courbe C située sur $\mathfrak{S}$ et restant voisine de Γ ne saurait passer de Γ_0 à Γ_1 par une déformation continue sans franchir A, et, à ce moment, sa longueur $\Phi(C)$ sera au moins égale à celle de Γ, qui est donc un col pour $\Phi(C)$.

Une géodésique fermée Γ peut même passer par plusieurs sommets et être un col, à condition que les déformations qui permettent de diminuer la longueur en évitant ces différents sommets soient toutes du même côté de Γ. Sans cette condition, on pourrait s'arranger pour franchir successivement les deux sommets sans que la longueur de C atteigne à aucun moment celle de Γ. De l'autre côté, une géodésique parallèle à Γ est encore une géodésique fermée de même longueur que Γ; Γ n'est pas un col ponctuel, mais un élément d'un seuil.

Nous dirons qu'une géodésique fermée est *régulière* si elle ne contient aucun sommet et *singulière* si elle en contient au moins un. Si une géodésique Γ est régulière, des parallèles aux différents côtés de Γ, situées du même côté de Γ et à une même distance δ assez petite pour qu'il n'y ait aucun sommet entre elles est Γ, forment une autre géodésique fermée Γ', de la même longueur que Γ; cela résulte évidemment de ce que, dans le développement sur un même plan des faces successives du polyèdre traversées par Γ, cette ligne se développe suivant une droite. Si le polyèdre S est convexe, Γ est alors un élément d'un seuil; les éléments limites de ce seuil sont seuls des géodésiques du second type, contenant au moins un sommet du polyèdre et pouvant en contenir plusieurs.

Nous avons vu que le plan de deux segments rectilignes consécutifs d'une géodésique fait le même angle avec les plans des faces qui les contiennent. Il en résulte que *le plan d'une ligne géodésique régulière et plane fait le même angle θ avec toutes les faces qui contiennent ses côtés*. Les parallèles dont nous venons d'indiquer l'existence sont alors aussi des géodésiques planes. Deux cas sont d'ailleurs à distinguer, suivant que l'angle θ est droit ou non. Dans le premier cas, la géodésique considérée est une section droite d'un prisme, qui peut être quelconque, et en particulier avoir un nombre quelconque de faces. Dans le second cas, les plans des faces du polyèdre qui contiennent les côtés de la géodésique considérée sont également inclinés sur son plan, mais alternativent dans un sens, et dans l'autre; le nombre de ces côtés est nécessairement pair.

5. **Application aux polyèdres réguliers.** — Nous allons, dans le cas des trois polyèdres réguliers les plus simples, préciser ces résultats en indiquant tous les systèmes de lignes géodésiques fermées sans points doubles. Nous désignerons par l la longueur des arêtes.

1° *Le tétraèdre régulier*. — Les sections de ce tétraèdre par ses six plans de symétrie sont évidemment des géodésiques fermées singulières (pour une surface quelconque, sa section par un plan de symétrie est une géodésique); ce sont des triangles, de périmètre $l(1+\sqrt{3})$.

Pour chercher les géodésiques fermées régulières, il suffit de développer sur un plan la figure formée par les faces successivement traversées. La figure ainsi formée par le développement des quatre faces successivement traversées est un parallélogramme, dont deux côtés opposés ab et $a'b'$ représentent une même arête du tétraèdre. On obtient une géodésique fermée en le coupant par une sécante mm' parallèle aux deux autres côtés, et en enroulant la figure sur le tétraèdre. On obtient ainsi une géodésique fermée plane, section du tétraèdre par un plan parallèle à deux arêtes opposées, AD et BC par exemple; c'est un rectangle, de périmètre constamment égal à mm', donc à $2l$. Dans les positions extrêmes de ce plan, il se réduit à l'une de ces arêtes; dans sa position moyenne, c'est un carré, ayant pour sommets les milieux des quatre arêtes autres que AD et BC.

Il y a naturellement trois familles analogues, chacune étant obtenue en coupant le tétraèdre par un plan mobile constamment parallèle à un couple d'arêtes opposées. On a donc trois seuils; comme $2l < l(1+\sqrt{3})$, ces trois seuils sont plus bas que les cols dont nous avons établi l'existence. Ce sont eux qui résolvent le problème de minimum étudié; il faut les utiliser pour faire passer le tétraèdre à travers un fil fermé de longueur $2l$, et l'on ne peut pas le faire passer à travers un fil fermé de longueur plus faible.

Il y a d'ailleurs d'autres géodésiques fermées, mais qui contiennent plusieurs segments situés sur une même face. On peut en obtenir en joignant sur la figure développée un point m de ab à un point m' de $a'b'$ tel que $a'm' - am = \frac{p}{q}l$ (p, q, entiers). Le réseau triangulaire obtenu par le développement des quatre faces du tétraèdre étant indéfiniment prolongé, la droite mm' prolongée passera en un point μ, défini par $m\mu = qmm'$, situé sur un côté $\alpha\beta$ parallèle à ab et tel que $\alpha\mu = am$. Il peut arriver que, en enroulant inversement sur le tétraèdre la figure formée par les $4q$ triangles traversés par $m\mu$, on trouve que $\alpha\beta$ représente une arête autre que $\alpha\beta$; il y a 12 possibilités, puisqu'il faut tenir compte du sens de l'arête représenté par $\alpha\beta$. Donc, après avoir traversé au plus $48q$ triangles, on retrouvera le même point de la même arête, et on la recoupera sous le même angle, représenté sur la figure développée par $bm\mu = m\mu\beta$. On aura ainsi une géodésique fermée, et, bien qu'elle ne soit pas plane, elle appartient encore à un système de géodésiques fermées parallèles entre elles. Leur longueur a une valeur constante, toujours supérieure à $2l$. Ce sont des polygones ayant plusieurs côtés sur chaque face du tétraèdre, et l'on voit aisément que ces côtés sont parallèles.

2° *Le cube*. — Ici encore, il y a des géodésiques fermées des deux types. Les géodésiques singulières sont les sections du cube par les six plans de symétrie non parallèles aux axes, qui contiennent chacun deux arêtes parallèles opposées; ce sont des rectangles, de périmètre $2a(1+\sqrt{2})$. Il existe d'autre part deux espèces différentes de géodésiques fermées régulières et planes. Les premières sont les sections du cube par des plans parallèles aux faces du cube; on a ainsi trois familles de carrés, dont les périmètres ont la longueur $4a$. Les autres sont les sections par des plans perpendiculaires aux diagonales du cube et les coupant en des points de leurs tiers médians. On a ainsi quatre familles de sections hexagonales, ayant le même périmètre $3a\sqrt{2}$. Les sections extrêmes se réduisent à des triangles équilatéraux; les sections médianes sont des hexagones réguliers.

Comme $3\sqrt{2} > 4$, ce sont les carrés qui donnent les cols les moins élevés.

3° *L'octaèdre régulier.* — Les géodésiques fermées singulières comprennent d'abord les sections par les trois plans de symétrie perpendiculaires aux diagonales. Ce sont des carrés de périmètre $4a$. Il y a d'autre part les sections par les six plans de symétrie perpendiculaires aux côtés; ce sont des losanges, de périmètre $2a\sqrt{3}$ inférieur à celui du carré.

Ici encore, les cols les moins élevés sont des seuils, constitués par des géodésiques fermées régulières. Il en existe quatre familles, qui sont les sections de l'octaèdre par des plans parallèles à un couple de faces opposés; ils coupent les six autres faces. Comme dans le cas du cube, la section médiane est un hexagone régulier; elle se déforme régulièrement, jusqu'aux sections extrêmes qui sont des triangles équilatéraux. Tous ces hexagones ont le même périmètre $3a$. Comme $3 < 2\sqrt{3}$, ce sont les cols définis par ces hexagones qui sont les moins élevés.

Naturellement la méthode indiquée dans le cas du tétraèdre régulier pour trouver des géodésiques fermées d'un type plus complexe s'applique sans difficulté au cube et à l'octaèdre régulier.

6. **Exemple simple de problème avec limites variables.** — Désignons par A_0A_1 le grand axe d'une ellipse, par BB' le petit axe, par C une ligne ayant pour extrémités un point M de l'arc d'ellipse A_0BA_1 et un point M' de l'arc $A_0B'A_1$, et se déformant d'une manière continue depuis une position initiale où elle est réduite au point A_0, jusqu'à une position finale où elle est réduite au point A_1. Il s'agit de définir la déformation de C de manière à rendre minimum le maximum de sa longueur.

Il est évident que ce minimum est la longueur du petit axe BB'. Il faut, en effet, la ligne C balayant l'ellipse, qu'une de ses positions passe au centre; à ce moment sa longueur est au moins égale à BB'. D'autre part, si C est un segment rectiligne parallèle à BB' qui se déplace d'une manière continue de A_0 jusqu'à A_1, sa longueur maxima est celle de BB'. Le petit axe BB' est le col.

Il n'est pas difficile de traiter le même problème en remplaçant les positions initiale et finale A_0 et A_1 par deux points quelconques P_0 et P_1 de l'ellipse. Pour fixer les idées, supposons l'excentricité de l'ellipse supérieure à $\frac{1}{\sqrt{2}}$, de sorte qu'elle coupe sa développée, et prenons P_0 et P_1 de part et d'autre de B' sur l'arc d'ellipse comprenant ce point et intérieur à la développée. Désignons par M_0 et M_1 les pieds des normales abaissées de P_0 sur l'arc A_0B, et par M_2 et M_3 les pieds des normales abaissées de P_1 sur l'arc BA_1. Le point M doit, en partant de P_0, franchir successivement les positions A_0, M_0, M_1, B, M_2, M_3, A'. Le point M' ne variant que de P_0 à P_1, quand M est en M_0, MM' est au moins égal à M_0P_0; quand M est en B, MM′ est au moins égal à BB′; quand M′ est en M_3, MM′ est au moins égal à M_3P_1. Ces trois positions M_0P_0, BB′, M_3P_1 sont trois cols à franchir. Si on laisse P_0 immobile jusqu'à ce que le segment MM′ soit parallèle à BB′, puis que MM′ reste parallèle à BB′ jusqu'à ce que M′ vienne en P_1, ces longueurs M_0P_0, BB′, M_3P_1 sont des maxima, séparés par les minima M_1P_0 et M_2P_1. Le minimum du maximum de la longueur MM′ au cours de la déformation considérée est donc la plus grande des longueurs M_0P_0, BB′ et M_3P_1. Si pour fixer les idées B′ est plus près de P_0 que de P_1, on a $M_0P_0 > M_3P_1$; il reste à comparer M_0P_0 et BB′. On voit aisément que la plus grande de ces longueurs est BB′ si P_0 est assez près de la développée de l'ellipse, et au contraire M_0P_0 si P_0 est assez près de B′.

7. **Une remarque générale.** — On remarque, dans l'exemple précédent, qu'il suffit de considérer une famille simple de lignes C; ce sont les segments rectilignes MM′. Cela tient aux deux circonstances suivantes : on diminue nécessairement la longueur d'une ligne C non rectiligne en la remplaçant par sa corde MM′; quand la ligne C balaye d'une manière continue l'aire de l'ellipse, il en est de même de MM′.

D'une manière générale, pour l'étude d'un problème à limites variables, si l'on a résolu au préalable le problème de la détermination des courbes C′ ayant deux extrémités données M et M′ et rendant $\Phi(C)$ minimum, il arrivera souvent qu'on puisse se contenter de considérer ces courbes. L'étude d'une fonction de ligne est ainsi ramenée à l'étude plus simple d'une fonction de deux variables. Mais il est nécessaire de s'assurer qu'à toute famille de courbes C balayant la région considérée correspond une famille de courbes minimisantes C′, ayant à chaque instant les mêmes extrémités que les courbes C, et balayant d'une manière continue cette région. Il n'en sera pas toujours ainsi; il est facile de le montrer par un exemple.

Considérons de nouveau à cet effet le problème étudié au n° 6, mais supposons qu'à l'aire intérieure de l'ellipse considérée on substitue la surface $\mathfrak{S}$ constituée par l'aire plane comprise entre cette ellipse et une circonférence concentrique et intérieure à l'ellipse, et par la surface d'un cône de révolution ayant cette circonférence pour base; nous désignerons son sommet par P. Il y a sur cette surface, de part et d'autre du plan PBB′, deux géodésiques C'_0 et C'_1 ayant pour extrémités B et B′. Quand M et M′ décrivent symétriquement les deux demi-ellipses A_0BA_1 et $A_0B'A_1$, la géodésique reliant M à M′ varie d'abord d'une manière continue de A_0 à C'_0, puis passe brusquement de C'_0 à C'_1, puis varie ensuite d'une manière continne de C'_1 jusqu'à A_1. Pour réaliser le balayage continu de $\mathfrak{S}$, il reste à relier C'_0 à C'_1 par une déformation continue. Il faut pour cela franchir le sommet P du cône, et c'est pour la ligne Γ section de la surface par le plan PBB′ qu'on obtient le col relatif à la fonction de ligne étudiée.

Il est facile de modifier cet exemple de manière à réaliser les mêmes circonstances avec une surface dont le plan tangent varie d'une manière continue; il suffit par exemple de remplacer le cône par la surface

$$z = h\left(1 - \frac{x^2+y^2}{R^2}\right)^p \qquad (p > 1), \tag{2}$$

qui se raccorde avec le plan de l'ellipse le long de la circonférence $x^2+y^2=R^2$. Il est évident que, pour h ou p assez grands, le plus court chemin entre B et B′ ne passe pas par le sommet de cette surface, mais sera encore réalisé par deux géodésiques C'_0 et C'_1 passant de part et d'autre de ce sommet.

Un tel cas se distingue du précédent parce qu'il est possible de faire varier une courbe C d'une manière continue de C'_0 à C'_1 sans qu'elle cesse d'être une géodésique. Il suffit évidemment de considérer les géodésiques partant de B dans différentes directions. Les courbes C ainsi considérées vont de C à un point M′ qui se déplace sur l'ellipse, et ne réalisent naturellement pas toujours le plus court chemin entre B et M′. En particulier, si p est assez grand, une partie de la surface (2) est assimilable à la surface d'une aiguille, et, au début de sa déformation, la ligne C est assimilable à un fil que l'on enroule autour de cette aiguille en faisant tourner le point M′ autour de l'ellipse. Il pourra arriver ainsi que cette géodésique ait une longueur supérieure à celle de la géodésique BPB′ passant par le sommet, et qui constitue le col. Ainsi, bien que des géodésiques puissent au cours d'une déformation continue balayer toute l'aire considérée, on placerait le col à un niveau plus élevé qu'il ne l'est réellement si l'on ne considérait pas d'autres courbes C que des géodésiques.

8. **Les géodésiques de l'ellipsoïde.** — Considérons l'ellipsoïde d'axes $AA'=2a$, $BB'=2b$, $PP'=2c$; nous supposerons $c<b$. Proposons-nous d'étudier les longueurs des lignes C allant de A à A′ sur la surface de l'ellipsoïde. Les plus courtes de ces lignes sont les demi-ellipses APA′ et AP′A′. On ne peut amener l'une de ces lignes sur l'autre par une déformation continue sans balayer complètement un des demi-ellipsoïdes; supposons que ce soit celui qui contient B. Il y a alors, au cours de la déformation, un moment où la courbe qui se déforme contient B, et la longueur de la courbe constituant le col est au moins égale à la longueur L de la courbe Γ constituée par la géodésique (ou une des géodésiques) réalisant le plus court chemin de A à B, prolongée par sa symétrique par rapport à OB; c'est donc une géodésique allant de A à A′ (et qui est la moitié d'une géodésique fermée de l'ellipsoïde). Nous allons montrer que cette courbe Γ est le col entre les deux demi-ellipses APA′ et AP′A′; mais il y a deux cas possibles suivant les valeurs relatives de a, b, c. Si c est au moins égal à une certaine fonction $\varphi(a, b)$ (et toujours $<b$), Γ est la demi-ellipse ABA′. Si $c<\varphi(a, b)$, c'est une courbe distincte de cette ellipse; il y a dans ce cas deux courbes Γ′ et Γ″, symétriques l'une de l'autre par rapport au plan de cette ellipse, qui répondent à la question.

Pour le montrer, considérons d'abord les géodésiques issues de A, et qui balayent le quart d'ellipsoïde limité par les demi-ellipses APA′ et ABA′, depuis la première jusqu'à la seconde. Elles coupent ABA′ en un point M qui se déplace d'une manière continue depuis A′ jusqu'à un point F, qui est le foyer conjugué de A sur ABA′, c'est-à-dire le point d'intersection de ABA′ avec la géodesique infiniment voisine issue de A. Pour n'importe quel point M compris sur cette demi-ellipse entre A et F (ce dernier point exclu), c'est cette géodésique distincte de ABA′ qui réalise le plus court chemin de A à M; si en effet elle coupe l'ellipse ABA′ sous un angle α, la longueur de l'arc de géodésique allant de A à une position particulière M_0 de M est

$$\text{arc}\,AF + \int_{FM_0} \cos\alpha\, ds < \text{arc}\,AFM_0.$$

Si au contraire on considère un point M situé sur l'arc d'ellipse AF (F inclus), la plus courte distance de A à M sur l'ellipsoïde ne peut être réalisée que pour l'arc d'ellipse AM.

Supposons maintenant que l'ellipsoïde se déforme, l'ellipse ABA′ restant fixe, et c variant de zéro à b. Pour c très petit, l'ellipsoïde est assimilable à un disque très mince, et, quel que soit M sur ABA′, le plus court chemin entre A et M est réalisé, non par l'arc d'ellipse AM, mais par un arc de géodésique presque rectiligne tracé sur l'une ou l'autre des faces du disque. L'arc A′F comprend donc initialement toute la demi-ellipse ABA′, c'est-à-dire que la position initiale de F est en A. Au contraire, pour $c = b$, l'ellipsoïde est de révolution; toutes les géodésiques issues de A sont des ellipses qui passent en A′, de sorte que l'arc A′F se réduit au point A′. La variation de F étant évidemment continue, ce point varie d'une manière continue de A à A′ quand c varie de zéro à b.

D'autre part F varie constamment dans le même sens. Si, en effet, pour une certaine valeur c_1 de c il existe entre A et un point M de la demi-ellipse ABA′ un chemin $\mathcal{L}$ de longueur l inférieure à l'arc d'ellipse AM, c'est vrai *a fortiori* pour $c < c_1$, puisque la ligne tracée sur l'ellipsoïde défini par cette valeur de c et ayant même projection que $\mathcal{L}$ sur le plan ABA′ a une longueur inférieure à l donc inférieure à celle de l'arc d'ellipse AM. Le point F ne peut donc que se rapprocher de A quand c décroît. Il varie donc d'une manière continue et monotone de A à A′ quand c croît de zéro à b. On voit aussi aisément qu'il varie constamment. Il est donc en B pour une valeur bien déterminée $\varphi(a, b)$ de c.

Si alors $c \geqq \varphi(a, b)$, on n'a qu'à faire tourner un demi-plan autour de AA′; il coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse qui coïncide initialement avec le plus court chemin ACA′; puis sa longueur croît jusqu'à la position ABA′ et décroît ensuite. Comme il faut que la longueur de la demi-ellipse ABA′ soit atteinte, c'est bien cette courbe qui est la courbe Γ et constitue le col.

Supposons au contraire $c < \varphi(a, b)$. Il y a alors entre A et B deux géodésiques Γ'_1 et Γ'_2 symétriques l'une de l'autre par rapport au plan ABA′, et plus courtes que le quart d'ellipse AB. Désignons par Γ''_1 et Γ''_2 les arcs symétriques de Γ'_1 et Γ'_2 par rapport au diamètre OB, par Γ_1 la réunion de Γ'_1 et Γ''_2, et par Γ_2 celle de Γ'_2 et Γ''_1; Γ_1 et Γ_2 sont des géodésiques allant de A à A′ en passant par B. A chaque point M de la demi-ellipse ABA′ faisons maintenant correspondre une ligne AMA′ constituée par le plus court chemin de A à M suivi du plus court chemin de M à A′, en spécifiant que si M est entre A′ et F, de sorte que le plus court chemin de A à M n'est pas l'arc d'ellipse, on choisira l'arc situé par rapport au plan ABA′ du même côté que P; au contraire, de M à A′ si ce n'est pas l'arc d'ellipse, on choisira l'arc situé du côté opposé à P. Si alors M se déplace d'une manière continue de A′ vers A, la ligne AMA′ que nous venons de définir varie d'une manière continue de la demi-ellipse APA′ à la demi-ellipse AP′A′; le sens de variation de sa longueur dépend à chaque instant du sens de l'angle en M (une position étant, par rapport à la précédente, enveloppée ou enveloppante). Cette longueur est alors maxima quand M est en B, et que AMA' est une des géodésiques Γ_1 et Γ_2 définies ci-dessus. Comme on peut, à l'inverse de ce que nous avons fait, prendre l'arc AM du côté opposé à P et A'M du côté de P, les courbes Γ_1 et Γ_2 sont deux cols, équivalents au point de vue qui nous occupe, puisqu'elles ont même longueur.

Le résultat énoncé est ainsi établi dans tous les cas.

9. **Les surfaces minima de révolution.** — Rappelons d'abord les résultats connus relatifs au problème des surfaces minima de révolution. On suppose donnés deux points M et M' dans le plan xOy, et du même côté de Ox; nous désignerons par h la distance du milieu de MM' à Ox, par θ l'angle de MM' et de Ox $\left(\text{compris entre zéro et } \frac{\pi}{2}\right)$, et par l la distance MM'. Il s'agit de déterminer la courbe C (qu'on peut supposer plane), allant de M à M', et dont la rotation autour de Ox donne une surface de révolution d'aire minima. Les courbes extrémales sont des chaînettes ayant Ox pour directrice; elles sont donc homothétiques les unes aux autres, Ox étant l'axe d'homothétie.

Il y a alors trois cas à distinguer. Dans le premier, qui est défini par une condition de la forme $l > h\varphi(\theta)$, il n'existe aucune extrémale allant de M à M'. Le minimum est alors réalisé par la ligne brisée MHH'M', H et H' étant les pieds des perpendiculaires abaissées de M et M' sur Ox. Il est évident que cette ligne, qui donne le minimum absolu dans le cas considéré, donne en tout cas un minimum relatif. Une ligne voisine de MHH'M' ne peut donner qu'une surface plus grande.

Dans les deux autres cas, $l = h\varphi(\theta)$ et $l < h\varphi(\theta)$, il existe respectivement une ou deux chaînettes de directrice Ox passant par M et M'. Si $l = h\varphi(\theta)$, il en existe une, et les tangentes en M et M' se coupent sur Ox. Si $l < h\varphi(\theta)$, il en existe deux, donnant un *arc tendu* dont les tangentes extrêmes se coupent au-dessus de Ox (c'est-à-dire du même côté que M et M'), et un *arc courbe* dont les tangentes extrêmes se coupent de l'autre côté de Ox. On remarque que, sur une chaînette donnée, le foyer F conjugué de M s'obtient en traçant la tangente en M jusqu'au point T où elle coupe Ox; F est le point de contact de la seconde tangente issue de T (il est à l'infini si M est au sommet de la chaînette). Si alors M' est entre M et F ou de l'autre côté de M, l'arc MM' est l'arc tendu; si M' est au-delà de F, l'arc MM' est l'arc courbe.

On démontre aisément que l'arc courbe ne peut pas réaliser le minimum (5).

---

(5) Désignons par MAM' et MBM' les deux arcs de chaînette qui vont de M à M', MAM' étant le plus tendu; sur le second, il existe un arc partiel $M_1BM'_1$ homothétique de MAM'; la même homothétie fait correspondre à MBM' un autre arc $M_1B_1M'_1$. Désignons par $\Phi(C)$ la fonction de ligne étudiée. Si l'on avait $\Phi(MBM') \leqq \Phi(MAM')$, on aurait aussi $\Phi(M_1B_1M'_1) \leqq \Phi(MBM')$, et par suite $\Phi(MM_1B_1M'_1M') \leqq \Phi(MBM')$. Or la ligne $MM_1B_1M'_1M'$, ayant deux points anguleux M_1 et M'_1, ne peut pas réaliser le minimum de Φ. Si TT_1 et $T'T'_1$ sont les tangentes communes aux deux chaînettes, on aurait en particulier

$$\Phi(MTT_1B_1T'_1T'M') < \Phi(MM_1B_1M'_1M') \quad \text{et } \textit{a fortiori} \quad < \Phi(MBM').$$

Donc $\Phi(MBM')$ n'est en tout cas pas le minimum de $\Phi(C)$ pour les lignes C allant de M à M'.

Pour avoir le minimum absolu, il n'y a donc qu'à comparer l'arc tendu ou l'arc unique et la ligne brisée MHH'M'.

Si $l = h\varphi(\theta)$, il n'y a que deux lignes vérifiant les conditions nécessaires pour un col ou un minimum, la ligne brisée MHH'M', et l'unique arc de chaînette allant de M à M'. Il ne peut pas y avoir deux minima relatifs, puisque leur existence impliquerait celle d'un col. Comme nous savons qu'en tout cas MHH'M' réalise un minimum relatif, c'est nécessairement lui qui réalise le minimum absolu, et il est possible, par une déformation continue, d'amener une ligne C de l'arc de chaînette à la ligne MHH'M', de manière que l'aire de la surface de révolution dont elle est la méridienne soit constamment décroissante. Cela est aussi possible, comme dans le cas où $l > h\varphi(\theta)$, quelle que soit la position initiale de C.

Si l décroît d'une manière continue en partant de la valeur $h\varphi(\theta)$, il est clair, par raison de continuité, que l'aire dont MHH'M' est la méridienne est encore inférieure à celle décrite par l'arc de chaînette. Le contraire a lieu quand l est assez petit, puisque, l tendant vers zéro, la première de ces aires tend vers $2\pi l^2$ et la seconde vers zéro. Il y a donc, entre $h\varphi(\theta)$ et zéro, au moins une valeur $h\psi(\theta)$ de l pour laquelle ces deux aires sont égales. En fait il n'y en a qu'une. On voit donc que : *le minimum est réalisé par la ligne brisée* MHH'M' *si* $l \geq h\psi(\theta)$ (et cela qu'il y ait ou non des extrémales passant par M et M'), *et par l'arc de chaînette tendu si* $l \leq h\psi(\theta)$; *pour* $l \leq h\psi(\theta)$ *il est réalisé de deux manières différentes*.

Au point de vue de l'étude des cols, si $l < h\varphi(\theta)$, il y a deux minima relatifs, réalisés, l'un par MHH'M', l'autre par l'arc de chaînette tendu. Cela implique l'existence d'un col. Ce col est nécessairement réalisé par l'arc de chaînette courbe allant de M à M'.

Il n'est peut être pas inutile d'indiquer en terminant les résultats que l'on obtient en étudiant la variation seconde de l'intégrale

$$\Phi(C) = \int_C y\sqrt{1+y'^2}\,dx, \tag{1}$$

qui représente, au facteur 2π près, l'aire de la surface décrite par la rotation de C autour de Ox.

Les extrémités M et M' de C étant supposées fixes, et C variant en fonction d'un paramètre λ, on a

$$\frac{d\Phi}{d\lambda} = \int_C \frac{1+y'^2-yy''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\,u\,dx \qquad \left(u = \frac{\partial y}{\partial\lambda}\right),$$

et cette dérivée s'annule pour les chaînettes solutions de l'équation d'Euler

$$1+y'^2 = yy''. \tag{2}$$

L'expression de la dérivée seconde de Φ, simplifiée en tenant compte de l'équation (2) supposée vérifiée initialement (pour $\lambda = 0$), est

$$\frac{d^2\Phi}{d\lambda^2} = \int_C \frac{yu'^2-y''u^2}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx \qquad (\lambda = 0). \tag{3}$$

Nous pouvons choisir l'origine des x et l'unité de longueur de manière que la détermination initiale de C soit $y = \operatorname{ch} x$. En désignant alors par x_0 et x_1 les abscisses de M et M', et posant

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \frac{u'^2\,dx}{\operatorname{ch}^5 x}, \qquad J = \int_{x_0}^{x_1} \frac{u^2\,dx}{\operatorname{ch}^5 x},$$

il vient

$$(4) \qquad \frac{d^2\Phi}{d\lambda^2} = I - J, \qquad (\lambda = 0).$$

Or, u s'annulant pour les valeurs x_0 et x_1 de x, on a, si u varie,

$$\delta J = 2\int_{x_0}^{x_1} \frac{u\,\delta u}{\operatorname{ch}^5 x}\,dx, \qquad \delta I = -2\int_{x_0}^{x_1} \left(u'' - 5u'\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)\frac{\delta u\,dx}{\operatorname{ch}^5 x}.$$

Or on sait que le minimum de $\frac{I}{J}$ est la plus petite valeur de k pour laquelle $\delta I - k\,\delta J$ puisse être identiquement nul, c'est-à-dire pour laquelle l'équation différentielle

$$(5) \qquad u'' - 5\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}u' + ku = 0,$$

ait une solution s'annulant pour $x = x_0$ et pour $x = x_1$. Pour que la forme (4) soit définie positive, et que par suite la courbe C considérée donne un minimum relatif pour $\Phi(C)$, il faut que ce minimum soit supérieur à l'unité, ce qui implique que la solution de l'équation

$$(6) \qquad (u'' + u)\operatorname{ch} x - 5u'\operatorname{sh} x = 0,$$

qui s'annule pour $x = x_0$ n'ait pas de racine comprise entre x_0 et x_1. Cette condition est nécessairement équivalente à la condition que l'arc de chaînette MM' soit l'arc tendu de chaînette. Le cas limite où M et M' sont deux foyers conjugués sur la chaînette, est alors celui où la solution u de l'équation (6) qui s'annule pour $x = x_0$ s'annule aussi pour $x = x_1$. On en déduit que : *cette équation a une solution impaire, définie à un facteur constant près, qui n'a pas d'autre racine que zéro; les autres solutions ont deux racines, une positive et une négative, qui sont les abscisses de deux foyers conjugués sur la chaînette, c'est-à-dire les points de contact de deux tangentes qui se coupent sur* Ox (6). *Il y a une solution paire, dont les racines sont les abscisses des points de contact des tangentes issues de l'origine.*

---

(6) Il est dans ces conditions naturel de se demander si le point d'intersection des deux tangentes est facile à caractériser en considérant la fonction $u(x)$; peut-être son abscisse est-elle la racine de $u'(x)$.

(Manuscrit reçu le 1er juin 1946.)