BULLETIN DE LA S. M. F.

E. ANGLADE

Sur les surfaces dont la suite de Laplace adjointe se termine suivant les cas de Laplace et de Goursat

Bulletin de la S. M. F., tome 75 (1947), p. 43-48
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1947__75__43_0>

SUR LES SURFACES DONT LA SUITE DE LAPLACE ADJOINTE SE TERMINE SUIVANT LES CAS DE LAPLACE ET DE GOURSAT;

PAR M. E. ANGLADE.

Dans l'espace projectif ordinaire E_3, désignons par M le point de coordonnées curvilignes u, v pris sur une surface S rapportée à ses asymptotiques. On sait [1] qu'on peut associer à cette surface une suite de Laplace

$$(\mathcal{L}) \qquad \ldots,\ U_3,\ U_2,\ U_1,\ U,\ V,\ V_1,\ V_2,\ V_3,\ \ldots,$$

que je suppose écrite dans le sens des u et dont les divers points sont contenus dans un espace linéaire à cinq dimensions E_5. U désigne le point ayant pour coordonnées homogènes les six coordonnées radiales de la tangente en M à l'asymptotique sur laquelle le paramètre u varie seul. De même, le point V est l'image de la tangente en M à la seconde asymptotique.

Pour une surface quelconque, la suite $\mathcal{L}$ est illimitée dans les deux sens. M. Godeaux a examiné le cas où elle présente en U le cas de Laplace. La surface S est alors réglée [2] et, *en général*, $(\mathcal{L})$ se termine en V_2 suivant le cas de Goursat. J'ai moi-même étudié les surfaces réglées en m'attachant surtout aux propriétés de leurs tangentes flecnodales [3].

Plus récemment [4], j'ai donné diverses propriétés des surfaces dont la suite $(\mathcal{L})$ présente en U_1 le cas de Laplace. C'est ce qui se produit lorsque les lignes $v =$ const. appartiennent à des complexes linéaires.

Dans ce nouveau Mémoire, je suppose la suite $(\mathcal{L})$ terminée en U_n selon le cas de Laplace. *En général*, elle présente en V_{n+2} le cas de Goursat. Les particularités qui peuvent se produire [5] et que M. Godeaux indique dans l'ouvrage déjà cité [1] feront l'objet d'une publication ultérieure.

Voici, brièvement énoncés, les principaux résultats obtenus. Il suffira de poser $n = 1$ pour qu'ils s'appliquent aux surfaces dont les asymptotiques $v =$ const. appartiennent à des complexes linéaires :

Sur la surface (U_{n-1}) décrite par le point U_{n-1} de E_5, on peut distinguer les

(1) L. GODEAUX, *La théorie des surfaces et l'espace réglé*, Hermann, 1934.

(2) L. GODEAUX, *Remarques sur les surfaces réglées* (*Revista Hispano-Americana*, 1931).

(3) *Sur les surfaces flecnodales d'une surface réglée* (*Bull. Acad. Royale de Belgique*, n° 4, 1936; *Sur certaines suites de Laplace associées à une surface réglée* (*Bull. Acad. Royale de Belgique*, n° 1, 1937).

(4) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. LXX, 1946.

(5) La suite $(\mathcal{L})$ peut se terminer en V_{n+2} suivant le cas mixte ou en l'un des points V_{n+1}, V_n, V_{n-1}, V_{n-2} suivant le cas de Laplace.

familles de courbes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ L'hyperplan osculateur à une ligne du premier système engendre un faisceau linéaire lorsque son point de contact parcourt une ligne $v = \text{const.}$ Il passe par une variété à trois dimensions fixe, image d'une congruence linéaire de directrices g, g' contenue dans l'espace E_3. Par ce procédé, à chaque asymptotique $v = \text{const.}$ de S on associe deux droites g, g' conjuguées par rapport au complexe de seconde image V_{n+2}.

Lorsque v varie, les droites g, g' décrivent les nappes focales (g), (g') d'une congruence W_g. Les congruences linéaires osculatrices à ces surfaces le long de g et de g' appartiennent au complexe U_n. D'autre part, chaque point N de (g) a pour plan polaire, par rapport au complexe V_{n+2} correspondant, le plan tangent à (g') au point N' associé à N par la congruence W_g.

La congruence linéaire caractéristique du complexe U_n admet pour directrices deux droites f, f' tangentes aux surfaces (g), (g'). Lorsque le paramètre v varie, ces deux droites décrivent les nappes focales (f), (f') d'une congruence W_f. Par rapport au complexe U_n, le plan polaire de tout point de (f) est tangent à (f'). Les deux droites g et g' sont elles-mêmes tangentes aux surfaces (f) et (f').

1. Propriétés de la suite ($\mathcal{L}$). — On sait que la suite ($\mathcal{L}$) est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q (1) qui représente l'espace réglé E_3 dans l'espace F_5. Les points U_p et V_p admettent respectivement pour hyperplans polaires

$$V_{p-2}V_{p-1}V_pV_{p+1}V_{p+2} \quad \text{et} \quad U_{p-2}U_{p-1}U_pU_{p+1}U_{p+2}.$$

Nous supposerons désormais que la suite ($\mathcal{L}$) se termine en U_n selon le cas de Laplace. Les relations d'autopolarité subsistent (2), mais aux points U_{n+1}, U_{n+2}, ... il faut alors substituer les points $\frac{dU_n}{dv}$, $\frac{d^2U_n}{dv^2}$, ... Par exemple, l'hyperplan $U_n\frac{dU_n}{dv}\frac{d^2U_n}{dv^2}\frac{d^3U_n}{dv^3}\frac{d^4U_n}{dv^4}$ a pour pôle le point V_{n+2}.

Nous envisageons ici le cas le plus général : *l'hyperplan osculateur à la courbe* (U_n), *lieu du point* U_n, *varie avec* v. Son pôle V_{n+2} ne dépend que de v. *La suite* ($\mathcal{L}$) *se termine donc en* V_{n+2} *selon le cas de Goursat.*

On retiendra que la droite $V_{n+2}V_{n+1}$ reste tangente à la courbe (V_{n+2}) décrite par le point V_{n+2}.

2. Les deux complexes fondamentaux. — Les propriétés que nous établissons mettent en jeu les complexes linéaires en involution de secondes images respectives U_n et V_{n+2}.

Nous avons déjà dit que le point V_{n+2} est le pôle, par rapport à l'hyperquadrique Q, de l'hyperplan $U_n\frac{dU_n}{dv}\frac{d^2U_n}{dv^2}\frac{d^3U_n}{dv^3}\frac{d^4U_n}{dv^4}$ osculateur à la courbe (U_n). On voit immédiatement que U_n est le pôle de l'hyperplan $V_{n+2}V_{n+1}V_nV_{n-1}V_{n-2}$

(1) L. Godeaux, *Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé* (*Bull Acad. Royale de Belgique*, 1927, pp. 812-826; 1928, pp. 31-41).

(2) L. Godeaux, *Sur les surfaces donnant lieu, dans l'espace réglé, à des suites de Laplace terminées* (*Bull. Acad. Royale de Belgique*, 1931, pp. 730-739).

osculateur à la courbe (V_{n+2}). Les deux courbes (U_n) et (V_{n+2}) sont donc corrélatives par rapport à Q. Il suffit que l'une d'elles soit connue pour que l'autre soit déterminée.

La congruence linéaire caractéristique du complexe V_{n+2} admet pour directrices les droites g et g' dont les images G, G' sont les intersections de Q et de la droite $V_{n+2}V_{n+1}$.

De même, la droite $U_n \frac{dU_n}{dv}$ coupe l'hyperquadrique Q en deux points F, F, images des directrices f, f' de la congruence linéaire caractéristique du complexe U_n.

Ainsi, à toute asymptotique $v =$ const. de S on peut associer les droites g, g', f, f' qui ne dépendent que de v et qui décrivent les surfaces (g), (g'), (f), (f') lorsque v varie.

3. Propriétés des droites g **et** g'. — Nous avons déjà dit que la droite GG' passe par V_{n+2}. Les points G, G' se correspondent dans l'homologie harmonique de centre V_{n+2} et d'hyperplan $U_n \frac{dU_n}{dv} \frac{d^2U_n}{dv^2} \frac{d^3U_n}{dv^3} \frac{d^4U_n}{dv^4}$. *Les droites* g, g' *sont donc conjuguées par rapport au complexe* V_{n+2}.

Considérons le point U_{n-1} de E_5. Il décrit une surface (U_{n-1}) que nous rapportons aux lignes u, v. La ligne $u =$ const. qui passe par U_{n-1} admet en ce point l'hyperplan osculateur $U_{n-1}U_n \frac{dU_n}{dv} \frac{d^2U_n}{dv^2} \frac{d^3U_n}{dv^3}$ dont V_{n+1} est le pôle par rapport à Q. Lorsque u varie seul, le point V_{n+1} reste sur la droite $V_{n+1}V_{n+2}$ tangente en V_{n+2} à la courbe (V_{n+2}). *Ceci prouve que les hyperplans osculateurs aux courbes* $u =$ const. *de la surface* (U_{n-1}) *menés le long d'une courbe* $v =$ const. *appartiennent à un faisceau linéaire. Ils ont en commun la variété à trois dimensions image de la congruence linéaire de directrice* g *et* g'.

La congruence linéaire osculatrice à la surface (g) le long de la génératrice g a pour image la section de Q par la variété linéaire $G \frac{dG}{dv} \frac{d^2G}{dv^2} \frac{d^3G}{dv^3}$. Puisque le point G appartient à la droite $V_{n+1}V_{n+2}$, l'hyperplan $V_{n+2}V_{n+1}V_nV_{n-1}V_{n-2}$ de pôle U_n contient cette variété. *La congruence linéaire osculatrice à l'une des surfaces* (g) *fait donc partie du complexe* U_n *qui correspond à la génératrice de contact.*

4. Congruence de nappes focales (g) **et** (g'). — Dans l'espace E_5, les plans $U_n \frac{dU_n}{dv} \frac{d^2U_n}{dv^2}$ et $V_{n+2}V_{n+1}V_n$ sont conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q. Ils déterminent sur Q deux coniques images de deux demi-quadriques complémentaires Y et Z de l'espace E_3. Chaque droite de Y coupe toutes les droites de Z.

Les droites g, g' et les droites infiniment voisines des surfaces (g), (g') appartiennent à Z. En effet, les images G, G' sont prises sur $V_{n+2}V_{n+1}$ et les images infiniment voisines appartiennent au plan $V_{n+2}V_{n+1}V_n$ tangent à la développable engendrée par la droite $V_{n+2}V_{n+1}$.

Ainsi, chaque droite de Y coupe g, g' et les génératrices infiniment voisines. Elle est donc tangente aux surfaces (g), (g') et fait partie de la congruence de nappes focales (g), (g'). On observera que toute droite de Y tangente à (g) le long de l'asymptotique g est aussi tangente à (g') le long de l'asymptotique g'. Cela revient à dire que (g) et (g') *sont les nappes focales d'une congruence* W que nous désignerons désormais par W_g.

Nous supposerons les surfaces (g), (g') rapportées aux asymptotiques u', v. u' désigne le paramètre qui varie seul sur chaque génératrice. Nous attribuerons les mêmes coordonnées curvilignes aux foyers N, N' de tout rayon de la congruence W_g. En se donnant l'un de ces points, on détermine la valeur de v. Par suite, on précise les complexes U_n et V_{n+2} qu'il faut lui associer.

5. **Suites de Laplace relatives aux surfaces (g) et (g').** — Nous avons déjà dit que la suite de Laplace $(\mathcal{L})$, relative à une surface réglée, se termine en U selon le cas de Laplace et en V_2 selon le cas de Goursat. Pour éviter toute confusion, nous désignerons par

$$(\mathcal{G}) \qquad G,\ H,\ H_1,\ H'_3,$$
$$(\mathcal{G}') \qquad G',\ H',\ H'_1,\ H_2,$$

les suites attachées aux surfaces (g) et (g'). Elles sont supposées écrites dans le sens des u'. La droite H_1H_2 reste tangente à la courbe décrite par H_2 et ne dépend que de v. $H'_1H'_2$ possède une propriété analogue.

Les points G, G' appartiennent à la droite $V_{n+2}V_{n+1}$. Il en résulte que l'hyperplan $V_{n+2}V_{n+1}V_nV_{n-1}V_{n-2}$ contient les variétés linéaires

$$G\frac{dG}{dv}\frac{d^2G}{dv^2}\frac{d^3G}{dv^3} \quad \text{et} \quad G'\frac{dG'}{dv}\frac{d^2G'}{dv^2}\frac{d^3G'}{dv^3}.$$

Les droites H_1H_2, $H'_1H'_2$, *conjuguées de ces variétés par rapport à* Q, *passent par le pôle* U_n *de l'hyperplan.*

6. **Suite de Laplace associée à la congruence W_g.** — Représentons par j une droite de la congruence W_g qui touche les nappes focales en des points N, N' de coordonnées curvilignes u', v. Les droites GH et G'H' de E_5 représentent les faisceaux tangents à (g) et à (g') en ces deux points. Puisque j fait partie des deux faisceaux, on voit que son image J est l'intersection de GH et de G'H'.

Un théorème de Darboux [1] montre que le point J décrit un réseau. Il appartient donc à une suite de Laplace

$$(\mathcal{J}) \qquad J_{-1}\,J\,J_1\,J_2,$$

écrite dans le sens des u' et inscrite dans les suites $(\mathcal{G})$ et $(\mathcal{G}')$.

La suite $(\mathcal{J})$ se termine en J_{-1} selon le cas de Laplace et en J_2 selon le cas de Goursat. En effet, J_{-1} est commun aux deux droites $G\frac{dG}{dv}$ et $G'\frac{dG'}{dv}$ qui ne

---

[1] G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. 2, 1915, p. 358.

dépendent que de v; il ne dépend lui-même que de ce paramètre. On fera une démonstration analogue pour le point J_2 qui appartient aux deux droites H_1H_2, $H'_1H'_2$. D'ailleurs, ce point et U_n sont confondus (n° 5).

7. **Propriétés des plans tangents aux surfaces** (g) **et** (g'). — Les hyperplans $\frac{d^2G}{dv^2}\frac{dG}{dv}GHH_1$, $\frac{d^2G'}{dv^2}\frac{dG'}{dv}G'H'H'_1$ contiennent la variété $J_1JJ_{-1}\frac{dJ_{-1}}{dv}$. Puisque les points J_2 et U_n sont confondus, l'hyperplan $U_n\frac{dU_n}{dv}\frac{d^2U_n}{dv^2}\frac{d^3U_n}{dv^3}\frac{d^4U_n}{dv^4}$ passe par la même variété. Cela prouve que *les pôles* H, H′, V_{n+2} *de ces trois hyperplans sont alignés.*

L'homologie harmonique déterminée par le centre V_{n+2} et son hyperplan polaire par rapport à Q transforme G en G′ et H en H′; elle transforme donc la droite GH en G′H′. Par suite :

En deux points N, N′ *associés par la congruence* W_g, *les tangentes aux surfaces* (g), (g') *sont deux à deux conjuguées par rapport au complexe* V_{n+2} *correspondant. Par rapport à ce même complexe, le plan polaire du point* N *de la surface* (g) *est tangent à la surface* (g') *au point* N′.

8. **Propriétés des directrices** f, f' **de la congruence linéaire caractéristique du complexe** U_n. — Les directrices f, f' de la congruence linéaire caractéristique du complexe U_n ont leurs images F, F′ sur la droite $U_n\frac{dU_n}{dv}$; *elles sont conjuguées par rapport à ce complexe.*

Les variétés linéaires à trois dimensions $F\frac{dF}{dv}\frac{d^2F}{dv^2}\frac{d^3F}{dv^3}$, $F'\frac{dF'}{dv}\frac{d^2F'}{dv^2}\frac{d^3F'}{dv^3}$, contenues dans l'hyperplan $U_n\frac{dU_n}{dv}\frac{d^2U_n}{dv^2}\frac{d^3U_n}{dv^3}\frac{d^4U_n}{dv^4}$ de pôle V_{n+2}, représentent les congruences linéaires osculatrices aux surfaces (f), (f'). *Ces congruences appartiennent au complexe* V_{n+2} *relatif aux génératrices de contact.*

Les points F, F′ et les points infiniment voisins appartiennent au plan $U_n\frac{dU_n}{dv}\frac{d^2U_n}{dv^2}$. Par suite, les droites f, f' et les génératrices infiniment voisines des surfaces (f), (f') font partie de la demi-quadrique Y (n° 4) c'est-à-dire de la congruence W_g. Ainsi :

Les surfaces (f) *et* (f') *appartiennent à la congruence* W_g *de nappes focales* (g) *et* (g').

Chaque génératrice de la demi-quadrique Z coupe toutes celles de Y. En particulier, elle coupe f, f' et les deux droites infiniment voisines sur (f) et (f'). Cela revient à dire que les droites de Z sont tangentes aux surfaces (f) et (f').

Une démonstration entièrement analogue à celle du paragraphe 4 prouve ensuite que *les surfaces* (f) *et* (f') *sont les nappes focales d'une congruence* W *décrite par la demi-quadrique* Z et que nous désignons par W_f.

Nous savons déjà que Z contient les droites g, g' (n° 4). *Les surfaces* (g), (g') *appartiennent donc à la congruence* W_f.

9. **Propriétés des plans tangents aux surfaces (f) et (f').** — Rapportons les surfaces réglées (f), (f') aux asymptotiques u'', v (le paramètre u'' varie seul sur chaque génératrice) et attribuons les mêmes coordonnées curvilignes aux foyers P et P′ de tout rayon de la congruence W_f. Comme nous l'avons fait pour (g) et (g'), il est possible d'adjoindre aux surfaces (f), (f') les suites de Laplace

$$(\mathcal{F}) \qquad \mathrm{F}, \quad \mathrm{I}, \quad \mathrm{I}_1, \quad \mathrm{I}_2,$$
$$(\mathcal{F}') \qquad \mathrm{F}', \quad \mathrm{I}', \quad \mathrm{I}'_1, \quad \mathrm{I}'_2,$$

écrites dans le sens des u''.

On montrera, en suivant une marche entièrement analogue à celle des paragraphes 5, 6 et 7 que les droites $\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2$, $\mathrm{I}'_1\mathrm{I}'_2$ se coupent en V_{n+2} et que les suites $(\mathcal{F})$, $(\mathcal{F}')$ sont circonscrites à une même suite liée à la congruence W_f. Il résulte de cela que *la droite* II′ *passe par le point* U_n. *Les tangentes en* P *et* P′ *aux asymptotiques curvilignes des surfaces réglées* (f) *et* (f') *sont donc conjugées par rapport au complexe* U_n *correspondant*. Nous avons déjà dit (n° 8) que les génératrices issues de P et P′ étaient également conjuguées par rapport au même complexe. Ainsi, *chaque point* P *de* (f) *a pour plan polaire*, *par rapport au complexe* U_n *correspondant*, *le plan tangent à la surface* (f') *au point* P′ *que la congruence* W_f *associe à* P.

(Manuscrit reçu le 3 juin 1946.)