BULLETIN DE LA S. M. F.

BELA DE SZ. NAGY

Vibrations d'une corde non homogène

Bulletin de la S. M. F., tome 75 (1947), p. 193-208
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1947__75__193_0>

VIBRATIONS D'UNE CORDE NON HOMOGÈNE;

PAR BÉLA DE SZ. NAGY

(Szeged).

Le calcul des perturbations dont on se sert aujourd'hui généralement dans la Mécanique quantique, naquit d'une idée de Lord Rayleigh qui l'appliqua pour la première fois au calcul approché des vibrations propres d'une corde avec de petites inhomogénéités de masse (1). Ce calcul formel, même dans la forme perfectionnée que lui prêta plus tard M. E. Schrödinger (2), manquait d'un fondement mathématique rigoureux, en particulier, d'une démonstration de la convergence du procédé et des estimations concernant la rapidité de cette convergence. Ce n'est que tout récemment qu'on a entrepris des investigations dans cette direction (3).

Le but primitif de cette Note est d'illustrer ces résultats nouveaux, d'ordre général, sur l'exemple classique de la corde vibrante non homogène. A cet effet, il faut formuler le problème d'une façon convenable, dans le vocabulaire d'un problème dans l'espace de Hilbert. Cela réussit même dans le cas où la distribution des masses est tout à fait arbitraire. En même temps, on obtient une nouvelle voie pour l'étude du problème, sous les conditions les plus générales. Les paragraphes 1-4 sont consacrés à ces considérations d'ordre général, tandis que le dernier paragraphe contient le calcul des perturbations.

1. Choisissons le plan des vibrations pour plan (x, y), et supposons que les extrémités de la corde sont fixées aux points $(0, 0)$ et $(l, 0)$. Le mouvement de la corde sera décrit par une fonction $y(x, t)$ indiquant l'ordonnée à l'instant t.

L'énergie cinétique est fournie par l'intégrale de Stieltjes

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \dot{y}^2 dm(x) \quad (4), \tag{1}$$

(1) J. W. S. RAYLEIGH, *The theory of sound*, 2e éd., vol. I, 1894, London, p. 115-118; *cf.* R. COURANT et D. HILBERT, *Methoden der Mathematischen Physik*, 2e éd., vol. I, 1931, Berlin, p. 300-302.

(2) *Cf.* par exemple le livre cité de R. COURANT et D. HILBERT, Chap. V, § 13.

(3) F. RELLICH, *Störungstheorie der Spektralzerlegung* I-V (*Math. Annalen*, t. 113, 1936, p. 600-619 et 677-685; t. 116, 1939, p. 555-570; t. 117, 1940, p. 356-382 et t. 118, 1942, p. 462-484); BÉLA DE SZ. NAGY, *Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de Hilbert* (*Commentarii Math. Helvetici*, t. 19, 1946/47, p. 347-366).

(4) Convenons d'écrire $\dot{y}$ au lieu de $\frac{\partial y}{\partial t}$ et y' au lieu de $\frac{\partial y}{\partial x}$.

où l'on a désigné par $m(x)$ la masse portée par le segment (o, x) de la corde ([5]). L'énergie potentielle est proportionnelle à l'accroissement de la longueur de la corde, c'est-à-dire à $\Delta = \int_0^l \sqrt{1+y'^2}\,dx - l$, le coefficient du rapport étant égal à la force extensive que nous voulons supposer, pour simplifier la notation, égale à l'unité. Bornons-nous à l'étude des petites vibrations, c'est-à-dire supposons que la valeur exacte de Δ puisse être remplacée par le premier terme de son développement, savoir par $\Delta_1 = \frac{1}{2}\int_0^l y'^2\,dx$. L'énergie potentielle s'exprime alors par la formule

$$U = \frac{1}{2}\int_0 y'^2\,dx. \tag{2}$$

Les fonctions $y(x, t)$ correspondant aux mouvements que la corde est susceptible de prendre, sont, d'après le principe de Hamilton, celles qui rendent stationnaire l'intégrale

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - U)\,dt = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l [\dot{y}^2\,dm(x) - y'^2\,dx], \tag{3}$$

lorsqu'on suppose données les configurations aux instants initial et final $y(x, t_1)$ et $y(x, t_2)$. On a donc pour ces fonctions

$$\frac{d}{d\varepsilon}\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l [(\dot{y} + \varepsilon\dot{\eta})^2\,dm(x) - (y' + \varepsilon\eta')^2\,dx] = 0 \qquad \text{pour} \quad \varepsilon = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l [\dot{y}\,\dot{\eta}\,dm(x) - y'\,\eta'\,dx] = 0, \tag{4}$$

pour toute fonction *admissible* $\eta(x, t)$ telle que

$$\eta(x, t_1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \eta(x, t_2) = 0. \tag{5}$$

Nous disons que la fonction $y(x, t)$ est admissible lorsqu'elle satisfait à certaines conditions imposées par la nature même du problème. Nous préciserons ces conditions plus loin; pour le moment qu'il nous suffise d'en indiquer l'essentiel : c'est que $y(x, t)$ satisfasse aux *conditions aux limites*

$$y(0, t) = 0 \qquad \text{et} \qquad y(l, t) = 0 \tag{6}$$

pour tout t et que les dérivées et les intégrales figurant dans (3) aient un sens.

Lorsque la masse de la corde admet une fonction de densité $\rho(x)$ dont elle est l'intégrale, alors les vibrations $y(x, t)$ de la corde satisfont à l'équation

([5]) $m(x)$ peut donc être une fonction croissante arbitraire, continue pour $x = 0$ et $x = l$, c'est-à-dire telle que $\lim_{x \to 0} m(x) = 0$ et $\lim_{x \to l} m(x) = m(l)$.

différentielle bien connue

$$y'' - \rho(x)\ddot{y} = 0, \tag{7}$$

l'équation différentielle d'Euler-Lagrange associée à l'intégrale (3). Les vibrations où les points de la corde sont toujours dans la même phase, c'est-à-dire pour lesquelles $y(x, t)$ a la forme $u(x)v(t)$, s'appellent les *vibrations propres*. Il suit de (7) que $v(t)$ a nécessairement la forme $a\cos\varkappa t + b\sin\varkappa t$, tandis que $u(x)$ satisfait à l'équation différentielle

$$u'' + \varkappa^2\rho(x)u = 0 \tag{8}$$

et aux conditions aux limites

$$u(0) = 0 \quad \text{et} \quad u(l) = 0. \tag{9}$$

En intégrant, on en obtient l'équation, équivalente à (8) et (9)

$$\left\{\begin{array}{l} u(x) + \varkappa^2\displaystyle\int_0^x dz\left[\int_0^z u(\xi)\rho(\xi)\,d\xi - C\right] = 0 \\ \text{où} \quad C = C(u) = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l dz\int_0^z u(\xi)\rho(\xi)\,d\xi. \end{array}\right. \tag{10}$$

On peut l'écrire, d'ailleurs, aussi sous la forme

$$\int_0^l \Gamma(x, \xi)\,u(\xi)\,\rho(\xi)\,d\xi = \mu u(x) \tag{11}$$

où $\mu = \frac{1}{\varkappa^2}$ et la fonction $\Gamma(x, \xi)$ est définie par $\frac{\xi(l-x)}{l}$ lorsque $0 \leqq \xi \leqq x$ et par $\frac{x(l-\xi)}{l}$ lorsque $x \leqq \xi \leqq l$.

Dans ces formes intégrées, l'équation conserve un sens même lorsque la répartition des masses de la corde est du type le plus général. Il n'y a qu'à substituer dans ces intégrales $dm(\xi)$ à $\rho(\xi)\,d\xi$, et à les prendre au sens de Stieltjes.

2. Nous allons considérer l'équation (10), ou celle équivalente (11), comme un problème de valeurs propres dans un espace de Hilbert. Les éléments de cet espace $\mathfrak{D}$ *sont les fonctions à valeurs réelles* $u(x)$ définies sur $(0, l)$, absolument continues, s'annulant aux points $x = 0$ et $x = l$, et pour lesquelles $u'(x)$ (existant presque partout) est de carré intégrable. Produits scalaires et normes sont définis par

$$(u_1, u_2)' = \int_0^l u_1' u_2'\,dx \quad \text{et} \quad \|u\|' = \sqrt{(u, u)'}.$$

On vérifie sans peine que $\mathfrak{D}$ satisfait aux axiomes de l'espace abstrait (réel) de Hilbert, en particulier, qu'il est complet.

On a les inégalités fondamentales

$$\max|u(x)| \leqq \frac{\sqrt{l}}{2}\|u\|' \quad \text{et} \quad |u(x_1) - u(x_2)| \leqq \sqrt{|x_1 - x_2|}\,\|u\|', \tag{12}$$

conséquences simples de l'inégalité de Schwarz. En effet,

$$|2u(\xi)|^2 = \left[\int_0^\xi u'dx - \int_\xi^l u'dx\right]^2$$
$$= \left[\int_0^l sgn(x-\xi)\, u'dx\right]^2 \leqq \int_0^l (sgn(x-\xi))^2 dx \int_0^l u'^2 dx$$

et

$$|u(x_1) - u(x_2)|^2 = \left|\int_{x_2}^{x_1} u'dx\right|^2 \leqq \left|\int_{x_2}^{x_1} dx\right| \cdot \int_0^l u'^2 dx = |x_1 - x_2|\, \| u \|'^2.$$

Il s'ensuit que la convergence dans la métrique de $\mathfrak{D}$ entraîne la convergence uniforme, et que les fonctions $u(x)$ situées dans une « sphère » $\| u \|' \leqq C$ de $\mathfrak{D}$, sont bornées dans leur ensemble et uniformément et également continues. Il s'ensuit, en vertu d'un théorème d'Arzelà, que de toute suite bornée dans la métrique de $\mathfrak{D}$ on peut extraire une suite partielle uniformément convergente.

On tire de la première des inégalités (12) que

$$\left(\int_0^l u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \frac{l}{2} \| u \|',$$

mais l'inégalité précise est la suivante :

$$(13) \qquad \left(\int_0^l u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \frac{l}{\pi} \| u \|',$$

l'égalité ayant lieu pour $u(x) = c \sin \frac{\pi x}{l}$. La démonstration ([6]) est basée sur l'identité

$$\int_0^l \left(\frac{l^2}{\pi^2}(u')^2 - u^2\right) dx = \int_0^l \left(\frac{l}{\pi} u' - u \operatorname{cotg} \frac{\pi x}{l}\right)^2 dx.$$

Celle-ci s'obtient, à son tour, par intégration partielle, en remarquant que $u^2(x) \operatorname{cotg} \frac{\pi x}{l} \to 0$ pour $x \to 0$ et $x \to l$, conséquence de ce que

$$u^2(x) = \left(\int_0^x u' d\xi\right)^2 \leqq x \int_0^l (u')^2 d\xi$$

et

$$u^2(x) = \left(\int_x^l u' d\xi\right)^2 \leqq (l - x) \int_x^l (u')^2 d\xi.$$

Quelle que soit la fonction continue $u(x)$, la fonction

$$Au = \int_0^l \Gamma(x, \xi)\, u(\xi)\, dm(\xi) = -\int_0^x dz \left[\int_0^z u(\xi)\, dm(\xi) - C(u)\right]$$

appartient évidemment à $\mathfrak{D}$. En particulier, $\mathfrak{D}$ est transformé par A en lui-même. La *linéarité* de cette transformation est manifeste; nous allons montrer aussi

([6]) *Cf.* G. H. Hardy, J. E. Littlewood et G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge, 1934, p. 185.

qu'elle est *symétrique* et *complètement continue*. En effet, quels que soient u et v appartenant à $\mathfrak{D}$, on a

$$(\mathrm{A}u, v)' = \int_0^l (\mathrm{A}u)'v'\,dx = \int_0^l \left[-\int_0^x u(\xi)\,dm(\xi) + \mathrm{C}(u)\right] v'(x)\,dx$$
$$= \left[\left(-\int_0^x u(\xi)\,dm(\xi) + \mathrm{C}(u)\right)v(x)\right]_0^l - \int_0^l v(x)\,d\left[-\int_0^x u(\xi)\,dm(\xi) + \mathrm{C}(u)\right]$$
$$= \int_0^l v(x)\,u(x)\,dm(x),$$

donc

$$(14)\quad (\mathrm{A}u, v)' = \int_0^l v(x)\,u(x)\,dm(x) = \int_0^l u(x)\,v(x)\,dm(x) = (\mathrm{A}v, u)' = (u, \mathrm{A}v)'.$$

Pour démontrer la continuité complète, envisageons une suite bornée d'éléments de $\mathfrak{D}$, et montrons qu'on en peut tirer une suite partielle u_n, pour laquelle $\mathrm{A}u_n$ est convergente dans la métrique de $\mathfrak{D}$. Il suffit de choisir cette suite partielle $u_n(x)$ de sorte qu'elle soit uniformément convergente, alors $\mathrm{A}u_n$ sera convergente dans la métrique de $\mathfrak{D}$, puisque

$$\|\mathrm{A}u_n - \mathrm{A}u_m\|'^2 = \int_0^l [\mathrm{A}(u_n - u_m)]'^2\,dx = \int_0^l \left\{-\int_0^x [u_n(\xi) - u_m(\xi)]\,dm(\xi) + \mathrm{C}(u_n - u_m)\right\}^2 dx$$

tend vers zéro lorsque m et n croissent indéfiniment.

La transformation A étant complètement continue, est, à plus forte raison, *bornée*, c'est-à-dire que $\|\mathrm{A}u\|'$ admet un maximum fini $\|\mathrm{A}\|'$, lorsque u parcourt tous les éléments de $\mathfrak{D}$ tels que $\|u\|' \leq 1$. Comme il s'agit d'une transformation symétrique, $\|\mathrm{A}\|'$ est en même temps le maximum de $|(\mathrm{A}u, u)'|$. Or, $|(\mathrm{A}u, u)'|$ peut être écrit, en vertu de (14), sous la forme $\int_0^l u^2\,dm$, d'où l'on obtient par une intégration par parties

$$(\mathrm{A}u, u)' = -2\int_0^l [m(x) - c]\,u(x)\,u'(x)\,dx,$$

c désignant une constante arbitraire. Choisissons pour c, par exemple la moyenne arithmétique du maximum et du minimum de $m(x)$ sur $(0, l)$, alors nous aurons $|m(x) - c| \leq \frac{1}{2}\mathrm{V}_m$ où $\mathrm{V}_m = \max m(x)$. Il s'ensuit que

$$|(\mathrm{A}u, u)'| \leq \mathrm{V}_m \int_0^l |uu'|\,dx \leq \mathrm{V}_m \left\{\int_0^l u^2\,dx \int_0^l (u')^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

et, tenant compte de (13),

$$|(\mathrm{A}u, u)'| \leq \frac{l}{\pi}\mathrm{V}_m \|u\|'^2.$$

Donc

$$(15)\qquad \|\mathrm{A}\|' \leq \frac{l}{\pi}\mathrm{V}_m.$$

Il convient d'observer, et nous en ferons usage plus loin, que *la fonction $m(x)$ pouvait être jusqu'ici une fonction quelconque à variation bornée.*

Lorsqu'on suppose que $m(x)$ est, conformément à sa signification physique, une fonction strictement croissante, alors on a $(\mathrm{A}u, u)' = \int_0^l u^2\, dm > 0$ pour tout élément u de $\mathfrak{D}$, sauf pour $u(x) \equiv 0$, ce qu'on exprime en disant que la transformation A est *définie positive*.

Or, on sait qu'une transformation linéaire symétrique complètement continue et définie positive de l'espace de Hilbert admet un système orthonormal complet d'éléments propres, les valeurs propres correspondantes étant toutes positives et convergeant vers zéro.

Il existe donc un système orthonormal d'éléments de $\mathfrak{D}$: $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., fonctions propres de la transformation A, *correspondant respectivement aux valeurs propres μ_1, μ_2, ... où $\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \ldots > 0$, $\lim \mu_n = 0$, et toute fonction $u(x)$ de $\mathfrak{D}$ admet le développement $u(x) = \sum_k c_k u_k(x)$ avec $c_k = (u, u_k)'$, convergeant au sens de la métrique de $\mathfrak{D}$ et, à plus forte raison, convergeant uniformément. L'arrangement des termes étant arbitraire, la convergence est même absolue.*

3. Envisageons, outre $\mathfrak{D}$, encore une autre réalisation de l'espace abstrait de Hilbert, notamment l'espace L^2 des fonctions réelles $f(x)$ mesurables et de carré sommable par rapport à la fonction monotone $m(x)$. Dans L^2, produits scalaires et normes se définissent comme d'habitude par

$$(f, g) = \int_0^l f(x)\, g(x)\, dm(x) \qquad \text{et} \qquad \|f\| = \sqrt{(f, f)},$$

et deux fonctions sont considérées comme représentant le même élément de L^2, si elles ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle par rapport à $m(x)$.

Dérivons du système $\{u_n(x)\}$, obtenu dans le paragraphe 2, le système $\{\varphi_n(x)\}$ où

$$\varphi_n(x) = \varkappa_n u_n(x) \qquad \left(\varkappa_n = \mu_n^{-\frac{1}{2}};\ n = 1, 2, \ldots\right).$$

Ce système est *orthonormal* dans L^2. En effet, on a par (14) :

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \int_0^l \varphi_m \varphi_n\, dm = (\mathrm{A}\varphi_m, \varphi_n)' = \mu_m(\varphi_m, \varphi_n)' = \frac{\varkappa_n}{\varkappa_m}(u_m, u_n)' = \delta_{mn}.$$

On sait que les fonctions continues forment un ensemble partout dense dans L^2 ; même il suffit de prendre seulement les fonctions s'annulant pour 0 et l et dont la courbe est composée d'un nombre fini de segments de droites. Or, ces fonctions appartiennent à $\mathfrak{D}$, donc elles peuvent être approchées uniformément par les combinaisons linéaires des fonctions $u_n(x)$. Il s'ensuit que les fonctions $\varphi_n(x)$ forment un système *complet* dans L^2, c'est-à-dire que *toute fonction $f(x)$*

de L^2 *admet le développement* $f(x)=\sum_k d_k\varphi_k(x)$ *avec* $d_k=(f,\varphi_k)$, *convergeant dans la métrique de* L^2.

Faisons quelques observations sur l'allure des fonctions $u_n(x)$ et $\varphi_n(x)$. La forme différentielle de l'équation (10)

$$du'(x)+\varkappa^2 u(x)\,dm(x)=0 \tag{16}$$

fait voir que sur tout intervalle où $u(x)\geqq 0$, on a $du'(x)\leqq 0$, donc $u(x)$ est concave; de même, $u(x)$ est convexe sur tout intervalle où elle est $\leqq 0$. Les dérivées de gauche et de droite de $u(x)$ sont égales en tout point où $m(x)$ est continue, tandis qu'à un point x où $m(x)$ fait un saut égal à τ, la dérivée de gauche surpasse celle de droite par la valeur $\frac{\tau}{\mu}u(x)$.

Soient α et β deux zéros de $u(x)$, $\beta>\alpha$. Supposons de plus que $u(x)$ ne s'annule pas identiquement entre α et β, ou, ce qui revient au même, que $\int_\alpha^\beta (u')^2\,dx>0$. On a, d'une part,

$$\int_\alpha^\beta (u')^2\,dx=-\int_\alpha^\beta u\,du'=\frac{1}{\mu}\int_\alpha^\beta u^2\,dm;$$

d'autre part, on obtient par un raisonnement analogue à la démonstration de (15), que

$$\int_\alpha^\beta u^2\,dm\leqq\frac{\beta-\alpha}{\pi}V_m(\alpha,\beta)\int_\alpha^\beta (u')^2\,dx,$$

$V_m(\alpha,\beta)$ désignant l'oscillation de $m(x)$ sur (α,β). Il s'ensuit que

$$\beta-\alpha\geqq\frac{\pi\mu}{V_m(\alpha,\beta)}\geqq\frac{\pi\mu}{V_m}. \tag{17}$$

D'ailleurs, il est impossible que $u(x)$ s'annule identiquement sur un intervalle, sans qu'elle s'annule identiquement sur $(0,l)$. En effet, (γ,δ) étant un tel intervalle de longueur maximum, s'il ne coïncide pas avec l'intervalle entier $(0,l)$, alors il existe un intervalle contigu sur lequel $u(x)\neq 0$. Supposons, pour fixer les idées, que c'est l'intervalle (α,γ) et que $u(x)>0$ sur (α,γ). Alors $u(x)$ doit être concave sur tout l'intervalle (α,δ), ce qui est impossible. On vérifiera d'une manière analogue que $u(x)$ change de signe à chacun de ses zéros.

En résumé, si $u(x)$ ne s'annule pas identiquement, alors elle a un nombre fini de zéros au plus, la différence de deux zéros consécutifs satisfaisant à l'inégalité (17).

Toutes les valeurs propres de A sont simples. En effet, u et v étant deux fonctions propres correspondant à la même valeur propre μ, choisissons les quantités c_1, c_2 de façon que $c_1C(u)+c_2C(v)=0$, $|c_1|+|c_2|>0$. $w=c_1u+c_2v$ est alors aussi une fonction propre correspondant à μ et l'on a $C(w)=0$. On a donc

$$-\int_0^x dz\int_0^z w(\xi)\,dm(\xi)=\mu w(x). \tag{18}$$

Si $w(x) \neq 0$, alors on peut trouver un point x_0 de façon que $w(x_0) \neq 0$ et que $w(x)$ ne change pas de signe sur $(0, x_0)$. Supposons, pour fixer les idées, que $w(x_0) > 0$ et que $w(x) \geqq 0$ sur $(0, x_0)$. La valeur propre μ étant positive, le second membre de (18) est, pour $x = x_0$, positif, tandis que le premier membre est négatif ou o. L'hypothèse $w(x) \neq 0$ nous a donc conduits à une contradiction. Donc $w(x) \equiv 0$: $u(x)$ et $v(x)$ sont linéairement dépendantes. Cela prouve que μ est une valeur propre *simple*.

Nous avons vu qu'une fonction propre ne peut avoir qu'un nombre fini de zéros au plus. Dans le cas où $m(x)$ est l'intégrale d'une fonction de densité $\gamma(x)$, alors on a le théorème d'oscillation de Sturm, d'après lequel le nombre des zéros de $u_n(x)$ dans l'intérieur de $(0, l)$ est égal à $n - 1$ et cela de façon qu'entre deux zéros consécutifs de $u_{n-1}(x)$ il y a toujours un zéro de $u_n(x)$. Dans le cas d'une distribution de masse du type général, notre méthode ne fournit pas un résultat aussi précis (¹), sauf le résultat partiel que $u_1(x)$ n'admet aucun zéro intérieur à $(0, l)$. La fonction propre correspondant à la plus grande valeur propre peut être caractérisée notamment par le fait que c'est pour elle que $\frac{(\mathbf{A}u, u)'}{(u, u)'}$, c'est-à-dire $\frac{\int_0^l u^2 dm}{\int_0^l (u')^2 dx}$, atteint son maximum. Mais cette expression a la même valeur pour $u(x)$ et pour $|u(x)|$. Toute valeur propre étant *simple*, $u_1(x)$ et $|u_1(x)|$ ne peuvent donc différer qu'à un facteur constant près. En particulier, $u_1(x)$ ne change pas de signe dans $(0, l)$, donc elle se compose d'un seul arc convexe ou concave, et par conséquent, qu'elle n'a pas de zéros dans l'intérieur de $(0, l)$.

En résumé, *la corde a une infinité de fréquences propres* $\varkappa_1 < \varkappa_2 < \varkappa_3 < \ldots$ $\lim \varkappa_n = \infty$; *les vibrations propres de fréquence* $\varkappa_n$ *étant décrites par les fonctions* $y(x, t) = (a \cos \varkappa_n t + b \sin \varkappa_n t)\, u_n(x)$ *de même forme et différant seulement dans leurs phases et amplitudes. Les fonctions* $u_n(x)$ *forment un système orthogonal et complet dans l'espace* $\mathfrak{D}$, *on peut supposer qu'elles sont aussi normées. Les fonctions* $\varphi_n(x) = \varkappa_n u_n(x)$ *forment alors un système orthonormal et complet dans l'espace* L^2. *La fonction* $u_n(x)$ *admet un nombre fini de zéros au plus, et entre deux zéros consécutifs elle est alternativement convexe et concave. La fonction* $u_1(x)$ *n'admet aucun zéro dans l'intérieur de* $(0, l)$.

4. Passons maintenant à l'étude des vibrations les plus générales, déterminées par les *conditions initiales* arbitraires

$$y(x, 0) = f(x), \qquad \dot{y}(x, 0) = g(x), \tag{19}$$

(¹) On pourrait d'ailleurs montrer que le même théorème subsiste aussi dans le cas général, et cela par exemple par un raisonnement indiqué dans le livre cité de R. COURANT et D. HILBERT, p. 395, note (²).

et montrons qu'une telle vibration admet une « résolution spectrale » en vibrations propres.

Pour déterminer $y(x, t)$, nous nous servirons du principe de Hamilton, c'est-à-dire de l'équation (4). Il y a lieu ici de préciser ce que nous voulons entendre par une *fonction admissible*. Telle est une fonction $y(x, t)$ satisfaisant aux conditions suivantes imposées par la nature du problème :

a. $y(x, t)$ est, pour chaque valeur fixe de t, un élément de l'espace $\mathfrak{D}$;

b. $y(x, t)$ est, pour chaque valeur fixe de x, une fonction continue de t ;

c. $y(x, t)$, considérée comme un élément de l'espace L^2, admet une dérivée « faible » par rapport au paramètre t, c'est-à-dire qu'il existe un élément de L^2, dépendant du paramètre t et désigné par $\dot{y}(x, t)$, de façon qu'on ait

$$\lim_{\delta \to 0}\left(\frac{y(x, t+\delta)-y(x, t)}{\delta}, f(x)\right) = (\dot{y}(x, t), f(x)),$$

quelle que soit la fonction $f(x)$ appartenant à L^2 ;

d. $\|y\|'$ et $\|\dot{y}\|$ sont des fonctions bornées de t.

Les fonctions admissibles forment évidemment une variété linéaire. Quelles que soient les fonctions admissibles y_1, y_2, les produits scalaires (y_1, y_2) et $(\dot{y}_1, \dot{y}_2)$ sont intégrables par rapport à t sur tout intervalle fini (t_1, t_2). En effet, ce sont des fonctions bornées (en vertu de d) et mesurables, puisqu'elles se déduisent de $y_1(x, t)$ et $y_2(x, t)$, fonctions continues de t, par des passages à la limite.

Quant aux fonctions données figurant dans les conditions initiales (19), on doit naturellement supposer que $f(x)$ appartient à l'espace $\mathfrak{D}$ et $g(x)$ à l'espace L^2. Leurs développements

$$f(x) = \sum_k a_k u_k(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sum_k b_k \varphi_k(x) = \sum_k b_k \varkappa_k u_k(x).$$

convergent respectivement dans la métrique de $\mathfrak{D}$ et de L^2. On a

$$\sum_k a_k^2 = \|f\|'^2 \qquad \text{et} \qquad \sum_k b_k^2 = \|g\|^2.$$

Envisageons la série

$$\sum_k (a_k \cos \varkappa_k t + b_k \sin \varkappa_k t)\, u_k(x) : \tag{20}$$

elle converge dans la métrique de $\mathfrak{D}$, et cela uniformément par rapport à t, puisque

$$\left\| \sum_m^n (a_k \cos \varkappa_k t + b_k \sin \varkappa_k t)\, u_k \right\|'^2 = \sum_m^n (a_k \cos \varkappa_k t + b_k \sin \varkappa_k t)^2 \leqq \sum_m^n (a_k^2 + b_k^2).$$

Il s'ensuit que (20) converge absolument et uniformément par rapport à x et t. Sa somme $y(x, t)$ est donc une fonction continue des deux variables, appartenant à $\mathfrak{D}$ pour chaque valeur fixe de t et l'on a

$$|y|'^2 \leq \sum_k (a_k^2 + b_k^2).$$

La série

(21)
$$\sum_k (-a_k \sin \varkappa_k t + b_k \cos \varkappa_k t)\, \varphi_k(x)$$

converge dans la métrique de L^2, puisque

$$\left\| \sum_m^n (-a_k \sin \varkappa_k t + b_k \cos \varkappa_k t)\, \varphi_k \right\|^2 = \sum_m^n (-a_k \sin \varkappa_k t + b_k \cos \varkappa_k t)^2 \leq \sum_m^n (a_k^2 + b_k^2).$$

La somme de (21), élément de L^2, est évidemment la dérivée faible $\dot{y}(x, t)$ de $y(x, t)$; on a de plus

$$\|\dot{y}\|^2 \leq \sum_k (a_k^2 + b_k^2).$$

La fonction $y(x, t)$, définie par (20), est donc admissible. Elle vérifie évidemment les conditions initiales (19). Nous allons montrer que c'est cette fonction qui décrit le mouvement de la corde déterminé par les conditions initiales, c'est-à-dire qu'elle satisfait à la relation (4), quelle que soit la fonction admissible $\eta(x, t)$ telle que (5) ait lieu.

Soient

$$\eta(x, t) = \sum_k \gamma_k(t)\, u_k(x) \qquad \text{et} \qquad \dot{\eta}(x, t) = \sum_k \frac{\dot{\gamma}_k(t)}{\varkappa_k} \varphi_k(x)$$

les développements de η et de $\dot{\eta}$, convergeant respectivement dans la métrique de $\mathfrak{D}$ et de L^2. Il s'ensuit de (5) que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) = 0$ pour $k = 1, 2, \ldots$. Posons, pour abréger,

(22)
$$a_k \cos \varkappa_k t + b_k \sin \varkappa_k t = c_k(t).$$

On a alors

$$(\dot{y}, \dot{\eta}) - (y, \eta)' = \sum_k \left(\frac{\dot{c}_k \dot{\gamma}_k}{\varkappa_k^2} - c_k \gamma_k \right).$$

Les sommes partielles de la série du second membre sont bornées; en effet,

$$\left| \sum_{k=1}^n \right| \leq \left[\sum_{k=1}^n \frac{\dot{c}_k^2}{\varkappa_k^2} \sum_{k=1}^n \frac{\dot{\gamma}_k}{\varkappa_k^2} \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{k=1}^n c_k^2 \sum_{k=1}^n \gamma_k^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq |\dot{y}|\,|\dot{\eta}| + |y|'|\eta|'.$$

Par conséquent, on peut intégrer terme à terme :

(23)
$$\int_{t_1}^{t_2} [(\dot{y}, \dot{\eta}) - (y, \eta)']\, dt = \sum_k \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\dot{c}_k \dot{\gamma}_k}{\varkappa_k^2} - c_k \gamma_k \right) dt.$$

Tenant compte de la relation $\ddot{c}_k = -\varkappa_k^2 c_k$, on trouve par une intégration par parties, que (23) est égale à o, c'est-à-dire que la relation (4) est satisfaite.

Il reste à montrer que les conditions initiales déterminent le mouvement d'une manière univoque. Soit $y^*(x, t) = \sum_k c_k^*(t) u_k(x)$ une fonction admissible quelconque satisfaisant au principe de Hamilton exprimé par (4), ainsi qu'aux conditions initiales (19); on a à montrer que $c_k^*(t) = c_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Soit $\gamma(t)$ une fonction absolument continue de t, satisfaisant aux conditions $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) = 0$, d'ailleurs quelconque. La fonction $\eta(x, t) = \gamma(t) u_n(x)$ étant admissible et vérifiant (5), on déduit de (4) que

$$\int_{t}^{t_2} \left(\frac{\dot{c}_n^* \dot{\gamma}}{\varkappa_n^2} - c_n^* \gamma \right) dt = 0.$$

En désignant par $C_n^*(t)$ une fonction primitive de $c_n^*(t)$, on obtient en intégrant par parties :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\ddot{C}_n^*}{\varkappa_n^2} + C_n^* \right) \dot{\gamma}\, dt = 0.$$

Comme $\dot{\gamma}$ est une fonction arbitraire dont l'intégrale sur (t_1, t_2) s'annule, on en tire que $\ddot{C}_n^* + \varkappa_n^2 C_n^*$ doit être égale à une constante presque partout. Or, cela entraîne que $C_n^*(t)$ a la forme $\alpha \cos \varkappa_n t + \beta \sin \varkappa_n t + \delta$, donc

$$c_n^*(t) = \dot{C}_n^*(t) = a_n^* \cos \nu_n t + b_n^* \sin \varkappa_n t.$$

Or, au vu des conditions initiales, on doit avoir $a_n^* = a_n$ et $b_n^* = b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, ce qui achève la démonstration.

En résumé : *Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions quelconques, appartenant respectivement aux espaces* $\mathfrak{D}$ *et* L^2. *Soient* $f(x) = \sum_n a_n u_n(x)$ et $g(x) = \sum_{n} b_n \varphi_n(x)$ *leurs développements suivant les fonctions propres u_n et φ_n. La corde est susceptible d'un et un seul mouvement $y(x, t)$ satisfaisant aux conditions initiales $y(x, 0) = f(x)$ et $\dot{y}(x, 0) = g(x)$, et ce mouvement admet la « résolution spectrale »*

$$y(x, t) = \sum_n (a_n \cos \varkappa_n t + b_n \sin \varkappa_n t) u_n(x).$$

Ce développement est convergent dans la métrique de l'espace $\mathfrak{D}$ *et à plus forte raison, il est convergent absolument et uniformément.*

5. Dans le calcul effectif des vibrations propres d'une corde non homogène, on a besoin, dans la plupart des cas, de se servir des procédés d'approximation. Le procédé dont nous faisons usage, s'applique au cas où la distribution des masses donnée $m(x)$ ne s'écarte que relativement peu d'une distribution $m_0(x)$, pour laquelle les vibrations propres sont connues. L'écart relatif en question est mesuré par le rapport $\sigma = \frac{V_{m_1}}{M_0}$, V_{m_1} désignant l'oscillation de la fonction $m_1(x) = m(x) - m_0(x)$ sur $(0, l)$ et M_0 étant égal à la masse totale $m_0(l)$. La

distribution $m(x)$ peut être dérivée de $m_0(x)$ aussi par une déformation continue dépendant d'un paramètre ε, $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$; il n'y a qu'à poser

$$m(\varepsilon; x) = m_0(x) + \varepsilon m_1(x) = \varepsilon m(x) + (1 - \varepsilon) m_0(x),$$

alors $m(0; x) = m_0(x)$ et $m(1; x) = m(x)$.

Les fonctions $m(x)$, $m_0(x)$, $m_1(x)$ et $m(\varepsilon; x)$ engendrent dans le sens du paragraphe 2, certaines transformations linéaires A, A_0, A_1 et $A(\varepsilon)$ de l'espace $\mathfrak{D}$ en lui-même; on a $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1$. $A(\varepsilon)$ est définie positive, mais A_1 ne l'est que si $m_1(x) = m(x) - m_0(x)$ est aussi une fonction croissante.

Par hypothèse, les valeurs propres $\mu_{10}, \mu_{20}, \mu_{30}, \ldots$, et les fonctions propres $u_{10}(x)$, $u_{20}(x)$, $u_{30}(x)$, ... de A sont connues; les μ_{n0} soient rangées en ordre décroissant et les u_{n0} soient normées dans l'espace $\mathfrak{D}$.

Soient $\mu_1(\varepsilon)$, $\mu_2(\varepsilon)$, $\mu_3(\varepsilon)$, ..., les valeurs propres de $A(\varepsilon)$ en ordre décroissant. On obtient immédiatement par la propriété du « minimum maximorum » de la $n^{\text{ième}}$ valeur propre ([8]) que $\mu_n(\varepsilon) - \mu_{n0}$ est compris entre le minimum et le maximum de $\varepsilon(A_1 u, u)'$ lorsque u parcourt tous les éléments de $\mathfrak{D}$ tels que $\| u \|' \leqq 1$. Tenant compte de (15), il s'ensuit que

$$|\mu_n(\varepsilon) - \mu_{n0}| \leqq \varepsilon \frac{l}{\pi} V_{m_1} \tag{24}$$

et, lorsque la fonction $m_1(x) = m(x) - m_0(x)$ est aussi non décroissante, et que par conséquent $(A_1 u, u)' = \int_0^l u^2 \, dm_1(x) \geqq 0$, alors on a même

$$0 \leqq \mu_n(\varepsilon) - \mu_{n0} \leqq \varepsilon \frac{l}{\pi} V_{m_1} \qquad (0 \leqq \varepsilon \leqq 1). \tag{25}$$

Pour obtenir des évaluations plus précises, nous nous servirons du théorème suivant, cas particulier du théorème II dans le Mémoire cité de l'auteur (pour $b = p = 0$) et qui, à son tour, est une variante précisée d'un théorème de M. F. Rellich. Bien qu'il fut énoncé originellement pour l'espace de Hilbert complexe, il reste évidemment valable aussi dans le cas plus simple d'un espace de Hilbert réel. Le voici :

Soit H_0 *une transformation autoadjointe de l'espace de Hilbert. Soit* μ_0 *une valeur propre simple de* H_0 *et soit* u_0 *un élément propre normé correspondant. Supposons que* μ_0 *soit isolée, c'est-à-dire qu'il existe un intervalle* $(\mu_0 - d, \mu_0 + d)$ $(d > 0)$ *ne contenant pas d'autres points du spectre de* H_0. *Enfin, soit* H_1 *une transformation autoadjointe, bornée par a. Alors,* ε *désignant un paramètre réel tel que* $0 \leqq \varepsilon < \frac{d}{2a}$, *le spectre de la transformation* $H(\varepsilon) = H_0 + \varepsilon H_1$ *consiste, dans l'intervalle* $(\mu_0 - d + a\varepsilon, \mu_0 + d - a\varepsilon)$, *en une seule valeur propre simple* $\mu(\varepsilon)$; *celle-ci peut être représentée, du moins*

([8]) *Cf.* par exemple, le livre cité de R. Courant et D. Hilbert, Chap. III, § 3, où cette propriété est énoncée pour les équations intégrales.

pour $0 \leqq \varepsilon < \frac{d}{4a}$, *par une série entière de* ε *commençant par le terme* μ_0, *et dont le* $k^{\text{ième}}$ *coefficient* ($k \geqq 1$) *ne dépasse pas en module la valeur*

$$a\left(\frac{4a}{d}\right)^{k-1} = \frac{d}{4}\left(\frac{4a}{d}\right)^k.$$

Il existe en plus un élément propre normé $u(\varepsilon)$ *de* $\mathrm{H}(\varepsilon)$, *correspondant à* $\mu(\varepsilon)$, *qui est représenté pour les mêmes valeurs de* ε *par une série entière de* ε *commençant par le terme* u_0 ; *le* $k^{\text{ième}}$ *coefficient de cette série (qui est aussi un élément de l'espace) ne dépasse pas en norme la valeur* $\left(\frac{4a}{d}\right)^k$.

Toutes les valeurs propres de notre transformation A_0 étant simples et isolées, et comme A_1 est bornéee par $a = \frac{2}{\pi} V_{m_1}$, ce théorème s'applique à chacune d'elles. En désignant par d_n la distance de la $n^{\text{ième}}$ valeur propre μ_{n0} à la valeur propre la plus proche, on aura donc pour $0 \leqq \varepsilon < \frac{d_n}{4a}$:

$$(26) \qquad \mu_n(\varepsilon) = \mu_{n0} + \varepsilon\mu_{n1} + \varepsilon^2\mu_{n2} + \dots \qquad |\mu_{nk}| \leqq \frac{d_n}{4}\left(\frac{4a}{d_n}\right)^k \qquad (k = 1, 2, \dots),$$

$$(27) \qquad u_n(\varepsilon) = u_{n0} + \varepsilon u_{n1} + \varepsilon^2 u_{n2} + \dots \qquad \| u_{nk} \|' \leqq \left(\frac{4a}{d_n}\right)^k \qquad (k = 0, 1, \dots).$$

Pour calculer les μ_{nk} et les u_{nk}, on commence par comparer les coefficients dans les développements des équations

$$A(\varepsilon)u_n(\varepsilon) = \mu_n(\varepsilon)u_n(\varepsilon) \qquad \text{et} \qquad \big(u_n(\varepsilon), u_n(\varepsilon)\big)' = 1,$$

ce qui fournit le système infini d'équations :

$$\begin{array}{llll}
(P_0) & A_0 u_{n0} = \mu_{n0} u_{n0}, & (Q_0) & (u_{n0}, u_{n0})' = 1, \\
(P_1) & A_0 u_{n1} + A_1 u_{n0} = \mu_{n0} u_{n1} + \mu_{n1} u_{n0}, & (Q_1) & (u_{n0}, u_{n1})' + (u_{n1}, u_{n0})' = 0, \\
(P_2) & A_0 u_{n2} + A_1 u_{n1} = \mu_{n0} u_{n2} + \mu_{n1} u_{n1} + \mu_{n2} u_{n0}, & (Q_2) & (u_{n0}, u_{n2})' + (u_{n1}, u_{n1})' + (u_{n2}, u_{n0})' = 0, \\
\dots & & &
\end{array}$$

(P_0) et (Q_0) expriment seulement le fait que u_{n0} est une fonction propre normée (dans l'espace $\mathfrak{D}$) correspondant à la valeur propre μ_{n0} de A_0. En prenant les produits scalaires des deux membres de (P_1) avec u_{n0} et en tenant compte aussi de la symétrie de A_0 et de (14), on obtient

$$(28) \qquad \mu_{n1} = (A_1 u_{n0}, u_{n0})' = \int_0^l u_{n0}^2(x)\, dm_1(x).$$

Soit $u_{n1} = \sum_\nu c_{n\nu} u_{\nu 0}$ le développement de u_{n1} suivant le système orthormale complet $\{u_{\nu 0}\}$ dans $\mathfrak{D}$. (Q_1) donne $c_{nn} = (u_{n1}, u_{n0})' = 0$. Pour calculer les coefficients $c_{n\nu}$ tels que $\nu \neq n$, prenons les produits scalaires des deux membres de (P_1) avec $u_{\nu 0}$; nous obtenons par un calcul simple que

$$c_{n\nu} = (u_{n1}, u_{\nu 0})' = \frac{(A_1 u_{n0}, u_{\nu 0})'}{\mu_{n0} - \mu_{\nu 0}},$$

donc

$$u_{n1}(x) = \sum_{\nu \neq n} \frac{u_{\nu 0}(x)}{\mu_{n0} - \mu_{\nu 0}} (A_1 u_{n0}, u_{\nu 0})' = \sum_{\nu \neq n} \frac{u_{\nu 0}(x)}{\mu_{n0} - \mu_{\nu 0}} \int_0^l u_{n0} u_{\nu 0} \, dm_1. \tag{29}$$

Prenons maintenant les produits scalaires des deux membres de (P_2) avec u_{n0}, nous obtenons

$$\mu_{n2} = (A_1 u_{n1}, u_{n0})' = \sum_{\nu \neq n} c_{n\nu} (A_1 u_{\nu 0}, u_{n0})',$$

donc

$$\mu_{n2} = \sum_{\nu \neq n} \frac{[(A_1 u_{n0}, u_{\nu 0})']^2}{\mu_{n0} - \mu_{\nu 0}} = \sum_{\nu \neq n} \frac{1}{\mu_{n0} - \mu_{\nu 0}} \left[\int_0^l u_{n0} u_{\nu 0} \, dm_1 \right]^2. \tag{30}$$

Ainsi, faisant usage de plus en plus d'équations (P) et (Q), on calculera successivement les coefficients de la série de $\mu_n(\varepsilon)$ et de $u_n(\varepsilon)$. (Cependant, dans la plupart des applications, on se contente des premiers coefficients que nous venons de calculer.)

Envisageons, à titre d'exemple, le cas d'une corde homogène de masse M_0, chargée au point $x = \xi$ par une masse ponctuelle (un curseur) τ; calculons la vibration propre fondamentale, c'est-à-dire $\mu_1 = \frac{1}{\varkappa_1^2}$ et $u_1(x)$.

Prenons pour distribution de masses approchée celle de la corde homogène

$$m_0(x) = \frac{M_0}{l} x,$$

alors

$$m_1(x) = m(x) - m_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leqq x \leqq \xi, \\ \tau & \text{pour } \xi < x \leqq l, \end{cases} \qquad V_{m_1} = \tau \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{\tau}{M_0}.$$

Les vibrations propres de la corde homogène sont faciles à calculer; on a

$$\mu_{n0} = \frac{1}{\varkappa_{n0}^2} = \frac{M_0 l}{\pi^2} \frac{1}{n^2}, \qquad u_{n0}(x) = \frac{\sqrt{2l}}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{l},$$

$$d_n = \mu_{n0} - \mu_{n+1,0} = \frac{4\pi}{C_n} \mu_{10} \qquad \text{où} \quad \frac{4\pi}{C_n} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2},$$

et

$$\frac{4a}{d_n} = \frac{\dfrac{4l\tau}{\pi}}{\dfrac{4\pi\mu_{10}}{C_n}} = C_n \sigma.$$

Supposons que

$$\sigma < \frac{1}{C_1} = \frac{3}{16\pi}, \tag{31}$$

alors l'inégalité $0 \leqq \varepsilon < \frac{d_1}{4a} = \frac{1}{C_1 \sigma}$ est vérifiée aussi par $\varepsilon = 1$, donc on a, en vertu de (26) et (27),

$$\mu_1 = \mu_1(1) = \mu_{10} + \mu_{11} + \mu_{12} + \ldots, \qquad |\mu_{1k}| \leqq \mu_{10} \frac{\pi}{C_1} (C_1 \sigma)^k \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$u_1 \doteq u_1(1) \doteq u_{10} + u_{11} + u_{12} + \ldots, \qquad \| u_{1k} \|' \leqq (C_1 \sigma)^k \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Les coefficients μ_{11}, μ_{12} et $u_{11}(x)$ se calculent par les formules (28)-(30) :

$$\mu_{11} = \mu_{10} 2\sigma \sin^2 \frac{\pi\xi}{l}, \qquad \mu_{12} = \mu_{10} 4\sigma^2 \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 - 1} \left(\sin \frac{\pi\xi}{l} \sin \frac{\nu\pi\xi}{l} \right)^2$$

et

$$u_{11}(x) = \frac{\sqrt{2l}}{\pi} 2\sigma \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 - 1} \sin \frac{\pi\xi}{l} \sin \frac{\nu\pi\xi}{l} \sin \frac{\nu\pi x}{l}.$$

En se servant des formules

$$\frac{2}{\nu^2 - 1} = \frac{1}{\nu - 1} - \frac{1}{\nu + 1},$$

$$\sin(n+1)\alpha \sin(n+1)\beta - \sin(n-1)\alpha \sin(n-1)\beta$$
$$= \sin(\alpha+\beta) \sin n(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) \sin n(\alpha-\beta)$$

et des transformations abéliennes, on obtient

$$\mu_{12} = \mu_{10}\sigma^2 \sin^2 \frac{\pi\xi}{l} \left(\sin^2 \frac{\pi\xi}{l} + 2 \sin \frac{2\pi\xi}{l} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \sin \frac{2\nu\pi\xi}{l} \right)$$
$$= \mu_{10}\sigma^2 \sin^2 \frac{\pi\xi}{l} \left[\sin^2 \frac{\pi\xi}{l} + \left(\sin \frac{2\pi\xi}{l} \right) \pi \left(1 - \frac{2\pi\xi}{l} \right) \right]$$

et

$$u_{11}(x) = \frac{\sqrt{2l}}{\pi} \sigma \sin \frac{\pi\xi}{l} \left[\frac{1}{2} \sin \frac{\pi\xi}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \sin \pi \frac{\xi + x}{l} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \sin \nu\pi \frac{\xi + x}{l} \right.$$
$$\left. - \sin \pi \frac{\xi - x}{l} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \sin \nu\pi \frac{\xi - x}{l} \right]$$
$$= u_{10}(\xi) \frac{\sigma}{2} \left[\sin \frac{\pi\xi}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \pi \left(1 - \frac{\xi + x}{l} \right) \sin \pi \frac{\xi + x}{l} - \pi \left(\pm 1 - \frac{\xi - x}{l} \right) \sin \pi \frac{\xi - x}{l} \right],$$

$+1$ se référant au cas $0 \leq x \leq \xi$ et -1 au cas $\xi < x \leq l$.

La valeur propre μ_1 est donc égale « en seconde approximation » à

$$(32) \quad \tilde{\mu}_1 = \mu_{10} + \mu_{11} + \mu_{12} = \mu_{10} \left[1 + 2\sigma \sin^2 \frac{\pi\xi}{l} + \sigma^2 \sin^4 \frac{\pi\xi}{l} + \sigma^2 \sin^2 \frac{\pi\xi}{l} \sin \frac{2\pi\xi}{l} \left(\pi - 2 \frac{\pi\xi}{l} \right) \right]$$

et l'erreur relative $(\mu_1 - \tilde{\mu}_1) : \mu_{10}$, étant égale à $\frac{1}{\mu_{10}} \sum_{k=3}^{\infty} \mu_{1k}$, ne dépasse pas en module

$$(33) \qquad \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\pi}{C_1} (C_1\sigma)^k = \frac{\pi}{C_1} \frac{(C_1\sigma)^3}{1 - C_1\sigma}.$$

L'élément propre u_1 est égale « en première approximation » à $\tilde{u} = u_{10} + u_{11}$ et l'on a

$$\| u_1 - \tilde{u}_1 \|' = \left\| \sum_{k=2}^{\infty} u_{1k} \right\|' \leq \sum_{k=2}^{\infty} (C_1\sigma)^k = \frac{(C_1\sigma)^2}{1 - C_1\sigma}.$$

En particulier, soit $\xi = \frac{l}{2}$ (c'est-à-dire que le curseur est placé au milieu de la de la corde), alors (32) prend la forme simple

$$\mu_1 \approx \tilde{\mu}_1 = \mu_{10}(1+\sigma)^2.$$

Il s'ensuit pour la première fréquence propre

$$\kappa_1 \approx \tilde{\kappa}_1 = \sqrt{\frac{1}{\tilde{\mu}_1}} = \frac{\kappa_{10}}{1+\sigma}. \tag{34}$$

Comme $\tilde{\mu}_1 \geqq \mu_{10}$ et [d'après (25)] aussi $\mu_1 \geqq \mu_{10}$, on voit aisément que l'erreur relative $(\kappa_1 - \tilde{\kappa}_1) : \kappa_{10}$ ne dépasse pas en module la moitié de la quantité (33).

Remarquons, en vue de faire une comparaison, que cet exemple admet aussi une solution directe simple. L'équation (16) prend la forme

$$-du'(x) = \kappa^2 u(x)\, dm(x) = \begin{cases} \kappa^2 u(x) \frac{M_0}{l}\, dx & \text{pour } x \neq \frac{l}{2}, \\ \kappa^2 u(x)\, \tau & \text{pour } x = \frac{l}{2}, \end{cases}$$

donc

$$-u''(x) = \kappa^2 \frac{M_0}{l} u(x) \qquad \text{pour } x \neq \frac{l}{2}$$

et

$$u'\left(\frac{l}{2} - 0\right) - u'\left(\frac{l}{2} + 0\right) = \kappa^2 \tau u\left(\frac{l}{2}\right).$$

Il s'ensuit par un calcul simple que la première fonction propre (non normée) est la suivante

$$v_1(x) = \sin \frac{\kappa_1}{\kappa_{10}} \frac{\pi x}{l} \quad \left(0 \leqq x \leqq \frac{l}{2}\right), \qquad v_1(x) = v_1(l - x) \qquad (0 \leqq x \leqq l),$$

la fréquence propre κ_1 étant déterminée par l'équation

$$\operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} \frac{\kappa_1}{\kappa_{10}} = \frac{\pi}{2} \frac{\kappa_1}{\kappa_{10}} \sigma. \tag{35}$$

En comparant avec (34), on voit que l'approximation de κ_1 par $\tilde{\kappa}_1$ est serrée même pour les valeurs de σ dépassant sensiblement la borne (31) (voir le tableau suivant). Il est d'ailleurs tout naturel que le théorème général dont nous sommes partis, ne fournisse pas, dans chaque cas concret, les estimations les meilleures pour l'erreur d'une approximation de rang donné.

$\frac{\kappa_1}{\kappa_{10}}$.	1.	0.9.	0.8.	0,7.	0.6.	0.5.
σ[de (34)].....	0	$\frac{1}{9}$ = 0,111...	$\frac{1}{4}$ = 0,25	$\frac{3}{7}$ = 0,428...	$\frac{2}{3}$ = 0,666...	1
σ[de (35)] (¹)...	0	0,112...	0,258...	0,463...	0,771...	1,273...

(Manuscrit reçu le 7 novembre 1946.)

(¹) Nous faisons usage des tableaux de E. Jahnke et F. Emde, *Funktionentafeln*, 2ᵉ éd. 1938, Leipzig-Berlin, p. 38.