

BULLETIN DE LA S. M. F.

MARCEL DECUYPER

Composition des similitudes planes. Application aux quadrilatères complets

Bulletin de la S. M. F., tome 76 (1948), p. 49-58

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1948__76__49_0

© Bulletin de la S. M. F., 1948, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**COMPOSITION DES SIMILITUDES PLANES.
APPLICATION AUX QUADRILATÈRES COMPLETS;**

PAR M. MARCEL DECUYPER

(Lille).

1. M. Hadamard a récemment publié dans l'*Intermédiaire des Recherches Mathématiques* (Supplément du fascicule 9, janvier 1947, p. 69-71) un article intitulé « Composition des similitudes planes », où il reprenait un problème qu'il avait traité de façon plus détaillée quelque temps auparavant [*A known problem of geometry and its cases of indetermination* (*Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 50, n° 8, p. 520-528, 1944)]. La discussion du problème P suivant : « construire un quadrilatère Q directement semblable à un quadrilatère q donné, $xyzt$, tel que les côtés TX, XY, YZ, ZT (ou leurs prolongements) passent respectivement par des points donnés K, L, M, N » l'avait amené à étudier la composition des similitudes planes.

Nous reprenons ici cette question par une méthode un peu plus simple et nous complétons la discussion du problème P en nous inspirant des remarques et des souhaits exprimés par l'illustre géomètre à la fin des deux articles cités.

2. Dans le plan euclidien, une *similitude directe* S est parfaitement déterminée par le symbole $S(\alpha, z)$ qui représente la donnée de α , le centre et de z , que nous appellerons le « rapport » de la transformation et qui est l'imaginaire $\rho e^{i\theta}$, ρ désignant le rapport d'amplification (que nous pouvons prendre positif), et θ l'angle de rotation; M_0 étant un nombre quelconque, M son transformé, on a $\alpha M : \alpha M_0 = \rho$, $(\overrightarrow{\alpha M_0}, \overrightarrow{\alpha M}) = \theta$; N_0, N étant un autre couple de points homologues, on a $MN : M_0 N_0 = \rho$, $(\overrightarrow{M_0 N_0}, \overrightarrow{MN}) = \theta$. Nous appelons *triangle directeur* de S tout triangle Oa_0a tel que $Oa : Oa_0 = \rho$, $(\overrightarrow{Oa_0}, \overrightarrow{Oa}) = \theta$; ainsi le triangle $(o, 1, z)$ où chaque sommet est figuré par son affixe est un triangle directeur de S (α, z) ; il est commode d'appeler Oa_0 côté initial, Oa côté extrémité. Une similitude est parfaitement définie par un couple M_0, M de points homologues et son rapport z ; le triangle $\alpha M_0 M$ est en effet directement semblable au triangle directeur $Oa_0 a$ et cette propriété détermine le centre α .

M_0 étant transformé en M par $S(\alpha, z)$, effectuons sur M la similitude $S'(\beta, z')$ de façon à obtenir M' ; le produit de la transformation S par S' que nous représenterons suivant l'habitude par $S'S$ est une similitude dont nous nous proposons de

(o), ($z\bar{z}'$). Le triangle $Po'o'$ étant inversement semblable à ($z, o, 1$) (donc à $c'c\alpha$), puisque $o'o'$ est antiparallèle de ($o, 1$) par rapport à l'angle en P , et de même $Po'o'\beta'$ étant inversement semblable à ($z, z\bar{z}', o$) (donc à $c'c\beta$) le quadrilatère $Pz'o'\beta'$ est inversement semblable à $c'\alpha c\beta$. Le triangle $\alpha c'\beta$ est inversement semblable à $\alpha'P\beta'$ lui-même inversement semblable à ($z\bar{z}', z, 1$); donc les triangles $\alpha c'\beta$ et ($z\bar{z}', z, 1$) sont directement semblables; on peut remplacer le second par ($1, \frac{1}{z}, \frac{1}{z\bar{z}'}$) qui s'en déduit par la similitude directe ($O, \frac{1}{z\bar{z}'}$). Le triangle $\alpha c'\beta$ est lié à l'opération SS' où les similitudes sont effectuées dans l'ordre inverse de $S'S$; en effet, S' transforme c' en c et S transforme c en c' ; le point invariant de SS' , centre de cette similitude, est donc c' . Les résultats obtenus pour c' montrent donc, en permutant α avec β , c avec c' , z avec z' que le triangle $\beta c\alpha$ est directement semblable au triangle ($z\bar{z}', z', 1$) ou au triangle ($1, \frac{1}{z}, \frac{1}{z\bar{z}'}$).

Appelons *inversion complexe* l'opération qui remplace le point z par le point $\frac{k}{z}$ où k est une constante quelconque (réelle ou complexe); l'origine est le pôle de cette inversion; nous voyons que si nous avons construit deux triangles directeurs ωAP de S , ωPB de S' tels que ωP côté extrémité du premier soit le côté initial du second, le triangle $\beta c\alpha$ est directement semblable au triangle $A_1P_1B_1$ formé par les inverses complexes de A, P, B relatifs à ω ; si, au lieu d'une inversion complexe, nous opérons une *inversion géométrique* habituelle de pôle ω , le triangle $A_1P_1B_1$ est inversement semblable au triangle $\beta c\alpha$. Cette remarque sera utile plus loin.

$S'S$ faisant passer de M_0 à M puis à M' , l'opération inverse fait revenir de M' à M par $(S')^{-1}$ et de M à M_0 par $(S)^{-1}$; de sorte que $(S'S)^{-1} = (S)^{-1}(S')^{-1}$: le point c est centre encore de $(S'S)^{-1}$; les triangles directeurs qui interviennent ici sont ($o, 1, \frac{1}{z}$) pour $(S')^{-1}$, puis ($o, \frac{1}{z}, \frac{1}{z\bar{z}'}$) pour $(S)^{-1}$: en appliquant la règle trouvée plus haut, on voit donc que le triangle $\alpha c\beta$ est directement semblable au triangle ($1, z', z\bar{z}'$), de sorte que $\beta c\alpha$ est directement semblable au triangle ($z\bar{z}', z', 1$), nous retrouvons comme vérification le résultat déjà obtenu.

Faisons encore la remarque suivante: dans la similitude directe des triangles $\beta c\alpha$ et ($z\bar{z}', z', 1$), β correspond à $z\bar{z}'$ et α à 1 ; dans la similitude de $\alpha c'\beta$ et ($z\bar{z}', z, 1$), c'est α qui correspond à $z\bar{z}'$ et β à 1 ; si donc nous faisons tourner le triangle $\beta c\alpha$ de 180° autour du milieu de $\alpha\beta$, le point c viendra occuper une position \bar{c} telle que les quadrilatères ($1, z, z\bar{z}', z'$) et $\beta c'\alpha\bar{c}$ soient directement semblables.

3. Les raisonnements purement géométriques que nous avons faits peuvent être remplacés par un calcul simple effectué sur des imaginaires, nous désignons par (αc) l'imaginaire qui représente le vecteur libre $\overrightarrow{\alpha c}$; on peut écrire

$$(\alpha c') = (\alpha c)z, \quad (\beta c) = (\beta c')z'.$$

Transformons la seconde égalité

$$(\beta\alpha) + (\alpha c) = [(\beta\alpha) + (\alpha c')]z' = (\beta\alpha)z' + (\alpha c)z\bar{z}'.$$

On a donc, en supposant $zz' \neq 1$,

$$(\alpha c) = (\alpha\beta) \frac{z'-1}{zz'-1}, \quad (\alpha c') = (\alpha\beta) \frac{zz'-z}{zz'-1},$$

et cela signifie que les deux triangles $\beta c \alpha$ et $(z', z', 1)$ sont directement semblables, de même que $\alpha c' \beta$ et $(z', z, 1)$.

Il est opportun d'étudier le cas où $zz' = 1$, c'est-à-dire celui où $S'S$ se réduit à une translation, comme il résulte de $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MNz'} = \overrightarrow{M_0N_0} z z' = \overrightarrow{M_0N_0}$. Pour obtenir le vecteur libre constant $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{T}$ qui définit la translation $S'S = T$, il suffit d'opérer sur le centre α qui reste invariant par S et ne subit que l'opération S' ; donc $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{\beta\alpha}(z'-1)$. En écrivant la relation $T = S'S$ sous les formes équivalentes $(S')^{-1}T = S$ ou $TS^{-1} = S'$, on déduit de là le moyen de composer une translation T effectuée en premier lieu avec une similitude $(S')^{-1}$ de centre β et de rapport $1:z' = z$; l'opération S résultante a même rapport z que $(S')^{-1}$ et pour centre le point α défini par $\overrightarrow{\beta\alpha} = \frac{\overrightarrow{T}}{z'-1} = \frac{\overrightarrow{T}z}{1-z}$; en composant une similitude S^{-1} , de centre α et de rapport z' effectuée en premier lieu, avec une translation T , on a pour l'opération résultante, le rapport z' de S^{-1} et le centre β tel que

$$\overrightarrow{\alpha\beta} = \frac{\overrightarrow{T}}{1-z'}$$

4. Songeons maintenant au problème P. Le quadrilatère cherché Q dont les côtés, prolongés au besoin, TX, XY, YZ, ZT passent respectivement par les points donnés K, L, M, N est directement semblable à un quadrilatère donné q ; de sommets x, y, z, t . Pour définir la forme de q , il suffit de mener la diagonale xz par exemple et de donner les angles orientés de droites indéfinies (autrement dit, non orientées) $\varphi_1 = (xt, xz)$, $\varphi_2 = (xz, xy)$, $\psi_1 = (xy, zx)$, $\psi_2 = (zx, zt)$; chacun de ces angles est défini à $k\pi$ près; quand ils sont connus, si nous nous donnons arbitrairement x_1 et z_1 , le point t_1 s'obtient au croisement de deux droites indéfinies, et de même y_1 . Si nous faisons un décompte d'inconnues et d'équations pour le problème P, nous avons 8 inconnues: les coordonnées des sommets X, Y, Z, T liées par 4 équations exprimant que les angles (XT, XZ) , (XZ, XY) , (ZY, ZX) , (ZX, ZT) ont des valeurs données et 4 autres exprimant que les côtés passent par 4 points donnés. *A priori*, bien qu'un tel décompte ne puisse conduire à une certitude, on peut donc espérer trouver un nombre fini de solutions si K, L, M, N ont des positions choisies au hasard.

Le problème étant supposé résolu (fig. 3), le cercle ξ , issu de K, L et contenant X , est connu, c'est le lieu des points X tels que $(XK, XL) = \varphi_1 + \varphi_2$; ce cercle recoupe la diagonale NZ en un point α connu car

$$(K\alpha, K\alpha) = (N\alpha, X\alpha) = \varphi_2, \quad (LK, L\alpha) = (XK, X\alpha) = \varphi_1;$$

le point α s'obtient donc par des opérations linéaires, à l'intersection de deux droites indéfinies issues de K et L respectivement; ces deux droites ne sont pas

parallèles car $\varphi_1 + \varphi_2$ n'est pas congru à π (ou ce qui revient au même, à zéro) : tout cela revient à dire que le triangle $KL\alpha$ est connu *a priori*, par sa base KL et les angles à la base; de même pour le triangle $MN\gamma$, γ étant le point, autre que Z , où la diagonale XZ est recoupée par le cercle ζ , NMZ , connu *a priori*, au même titre que ξ ; γ s'obtient lui aussi par des opérations linéaires. Si α et γ sont distincts, la diagonale XZ est connue et recoupe les cercles ξ , ζ respectivement en X , Z de sorte que Q est complètement connu. Le problème a une solution unique qui n'est jamais dégénérée. Remarquons que le tracé effectif des cercles ξ , ζ est inutile : α étant obtenu, l'égalité $(KL, KX) = (\alpha L, \alpha \gamma)$ donne par simple report d'angle, la droite KXT et de même $(LK, LX) = (\alpha K, \alpha \gamma)$ donne la droite LXY ; on a de même les droites ZMY , ZNT . Si α et γ coïncident, il y a ∞^1 solutions puisque

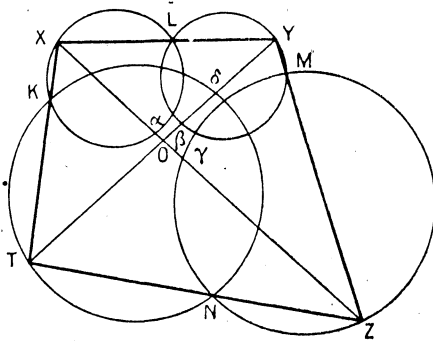


Fig. 3.

toute droite issue de ce point unique α donnera un couple Σ , Z satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

Pour que le problème admette ∞^1 solutions, les points α , γ doivent coïncider et ceci, quelle que soit la méthode employée, conduit à deux équations de condition. K , L , M étant donnés, nous pouvons aisément construire la position critique N_0 du point N telle que, si N est distinct de N_0 , le problème ait une solution et une seule tandis que si N vient en N_0 , on trouve ∞^1 solutions.

Pour cela, ainsi que pour la suite, il est utile de remarquer que le rapport (ou un triangle directeur) de la similitude de centre α qui transforme K en L est parfaitement connu quand q est donné et ne dépend pas de la configuration des 4 points K , L , M , N : en effet, l'égalité $(\alpha K, KX) = (\alpha L, LX)$ entraîne que la droite indéfinie XT se transforme en la droite indéfinie XY et que le pied de la perpendiculaire abaissée de α sur XT se transforme en le pied de la perpendiculaire abaissée de α sur XY ; ces deux perpendiculaires donnent donc un triangle directeur de la similitude; on peut remplacer ce triangle par le triangle de sommet O , point commun aux diagonales XZ et YT et ayant pour côtés les perpendiculaires issues de O sur XT et XY ; en appelant o le point de rencontre des diagonales xz et yt de q et k , l , m , n les projections de o sur tx , xy , yz , zt , nous pouvons prendre comme triangle directeur okl ; de même la similitude de centre γ qui remplace M par N , donc YZ par ZT a pour triangle directeur omn ; il est alors

clair que si K, L, M sont donnés, ce qui entraîne la connaissance de α au moyen des reports d'angles indiqués plus haut, le point N_0 sera celui qui est défini par

$$\frac{\vec{\alpha N_0}}{\vec{\alpha M}} = \frac{\vec{o n}}{\vec{o m}},$$

et notre discussion est terminée.

Indiquons brièvement une autre construction du point N_0 ; elle résulte de la propriété suivante : « Si trois droites d'une figure semblablement variable passent chacune par un point fixe, il existe un centre permanent de similitude; toute droite de la figure passe par un point fixe ». Les trois droites considérées forment un triangle MNP dont les côtés MN, NP, PM contiennent les points fixes π, μ, ν ; deux positions distinctes de la figure sont caractérisées par les deux triangles semblables $MNP, M'N'P'$; le centre ω de la similitude faisant se correspondre les deux triangles est à l'intersection des cercles circonscrits aux triangles $M\nu\pi, \mu N\pi$ (et $\mu\nu P$); il est indépendant de $M'N'P'$, c'est un centre permanent de similitude. Une droite Δ de la figure variable se déduit de MN par exemple par une similitude S de centre ω et comme MN passe par le point fixe π , Δ passe par le point fixe déduit de π par S .

Appliquons ceci au problème P ; si nous avons cherché à construire un quadrilatère Q directement semblable à q et tel que trois côtés seulement TX, XY, YZ passent par trois points donnés K, L, M , le problème ainsi posé aurait admis une infinité de solutions, la figure semblablement variable constituée par Q admettant un centre permanent de similitude ω (le point de rencontre autre que L , des cercles circonscrits aux triangles KXL et LYM); la droite ZT pourrait être déduite de YZ par une similitude de centre ω et passerait donc par le point fixe déduit de M par cette similitude. Pour obtenir le quadrilatère Q solution du problème P , on joindra ce point fixe à N et l'on aura la droite ZT d'où l'on déduira aisément les autres éléments; le cas d'indétermination est celui où N se confond avec ce point fixe, N_0 .

Nous devons souligner ici un fait curieux : soit un problème P dont la discussion peut se ramener à celle d'un certain nombre d'équations algébriques telles qu'en général, P n'admette qu'un nombre fini de solutions; en général encore il faudra que les données satisfassent à un certain nombre de conditions (souvent une) pour que P devienne impossible, et il faudra ajouter certaines conditions nouvelles (souvent une) pour que P redevienne possible et admette alors ∞^1 solutions. Avec le problème étudié ici, le cas d'impossibilité ne se présente pas; en général, P a une solution et une seule; moyennant deux conditions, P a ∞^1 solutions.

5. Dans notre exposé, les côtés du quadrilatère q ou Q interviennent à titre de droites indéfinies; autrement dit, c'est un quadrilatère complet que nous devons considérer; il y a trois couples de sommets opposés, trois diagonales XZ, YT, UV ; XZ porte les points α, γ centres des similitudes déjà étudiées; de même YT porte les points β et δ (*fig. 3*) à l'intersection avec les cercles LYM et NTK , et UV porte les points ε, φ (*fig. 4*) à l'intersection avec les cercles KUM et NVL .

On a utilisé la similitude de $\gamma E \delta$ et $k'n'm'$ et deux expressions de l'aire du parallélogramme $k'l'm'n'$, dont les hauteurs sont $x'z'$ et $y't'$.

Le rapport des segments $\delta\beta$, $\gamma\alpha$ portés par les diagonales YT et XL est donc indépendant de la configuration des points K, L, M, N et ne dépend que du quadrilatère q .

On reconnaît bien que si γ et α se confondent, β et δ se confondent aussi, ainsi d'ailleurs que ε et φ .

Comme les trois diagonales jouent le même rôle, nous pourrons faire apparaître d'autres couples de triangles semblables tels que $\alpha\beta E$ et $\gamma\delta E$ à partir des six points $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$ et des points A, B, C, D, E, F respectivement conjugués harmoniques de α par rapport à KL, de β par rapport à LM, etc. Pour obtenir un tel couple, par exemple $\alpha\beta E$ et $\gamma\delta E$, nous pouvons partir d'un point E correspondant à un point ε d'une diagonale UV. Les triangles qui en découlent ont un sommet commun en E, les autres sommets sont les points $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ portés par les deux autres diagonales, deux sommets homologues étant portés par la même diagonale. Nous trouvons ainsi les six couples

$$\begin{array}{cccccc} \alpha\beta E & \alpha\delta F & \beta\varepsilon A & \beta\varphi C & \alpha\varepsilon B & \alpha\varphi D \\ \gamma\delta E & \delta\beta F & \delta\varphi A & \delta\varepsilon C & \gamma\varphi B & \gamma\varepsilon D, \end{array}$$

que l'on groupera eux-mêmes par deux en associant les points E et F, A et C, B et D suivant les diagonales qui leur correspondent. En effet, les triangles $\alpha\beta E$ et $\gamma\delta E$ sont inversement semblables au triangle $m'k'l'$ et ceux du couple $\alpha\delta F, \beta\varphi C$ sont inversement semblables au triangle $n'l'k'$ et le fait que $k'l'm'n'$ est un parallélogramme entraîne des conséquences établies par M. Hadamard dans son article du *Bulletin de la Société américaine de Mathématiques* et que nous citerons rapidement : On observe d'abord que le produit de la similitude de centre E qui change α en β par la similitude de centre F qui change β en γ est un demi-tour dont le centre est donc le milieu G de $\alpha\beta$. Le produit des mêmes similitudes dans l'ordre inverse est le demi-tour qui change δ en β , son centre est donc le milieu H de B δ . Les relations de ces centres avec E, F sont données par notre règle de composition ; on trouve ainsi que G et H sont conjugués harmoniques (au sens que nous avons précisé plus haut), par rapport à E et F.

Dans les articles cités, M. Hadamard n'a pas signalé la relation entre les points ε et E, mais il a montré que le rapport $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$ est égal à la quantité $\frac{x'z'}{y't'}$ qui ne dépend que de la forme du quadrilatère q et il a ajouté cette remarque : « le quadrilatère q , que l'on peut et doit considérer comme un quadrilatère complet, admet en réalité trois diagonales et non deux. Les résultats devraient revêtir une forme telle que l'on puisse les écrire à l'aide de deux quelconques des trois diagonales et que les valeurs ainsi inscrites des trois rapports soient concordantes ».

Cette concordance est facile à vérifier ; on aurait pu, *a priori*, supposer qu'elle donnerait une propriété projective nouvelle de la figure ; il n'en est rien ; on est simplement ramené au théorème de Ménélaus. Sur la figure 7 nous avons marqué les côtés du quadrilatère complet et ses diagonales oo_1, o_1o_2, o_2o . En introduisant

des segments orientés, on a

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} = \left| \frac{\frac{1}{ox} - \frac{1}{oz}}{\frac{1}{oy} - \frac{1}{ot}} \right| = \frac{xz}{yt} \frac{oy}{ox oz}$$

Le produit $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} \frac{\beta\delta}{\varepsilon\varphi} \frac{\varepsilon\varphi}{\alpha\gamma}$ doit être égal à l'unité ; cela entraîne

$$\left(\frac{xz}{yt} \frac{oy}{ox oz} \right) \left(\frac{yt}{uv} \frac{o_2 u o_2 v}{o_2 y o_2 t} \right) \left(\frac{uv}{xz} \frac{o_1 x o_1 z}{o_1 u o_1 v} \right) = 1.$$

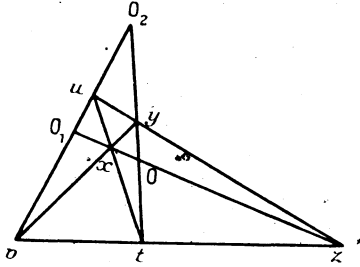


Fig. 7 .

Les termes xz , yt , uv disparaissent, il reste

$$\frac{o_1 x o_1 z}{ox oz} \frac{oy ot}{o_2 y o_2 t} \frac{o_2 u o_2 v}{o_1 u o_1 v} = 1.$$

Mais

$$\frac{o_1 x}{ox} = \frac{o_1 z}{oz}, \quad \frac{oy}{o_2 y} = \frac{ot}{o_2 t}, \quad \frac{o_2 u}{o_1 u} = \frac{o_2 v}{o_1 v}.$$

On doit donc avoir

$$\left(\frac{o_1 x}{ox} \frac{ot}{o_2 t} \frac{o_2 u}{o_1 u} \right)^2 = 1,$$

C'est le théorème de Ménélaus appliqué au triangle $oo_1 o_2$ et à la transversale uxt .

(Manuscrit remis le 1^{er} octobre 1947.)