BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES DIXMIER

Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs

Bulletin de la S. M. F., tome 81 (1953), p. 9-39

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1953__81__9_0>

FORMES LINÉAIRES SUR UN ANNEAU D'OPÉRATEURS ;

PAR J. DIXMIER

(Dijon).

INTRODUCTION.

Des analogies de plus en plus nombreuses se manifestent entre la théorie de l'intégration et la théorie des anneaux d'opérateurs. Aussi certains auteurs parlent-ils d' « intégration non commutative ». Dans le présent article, je démontre les inégalités de Hölder et de Minkowski et j'établis la dualité de ce que l'on peut appeler les espaces L^p. Le caractère non commutatif de la situation est naturellement la seule difficulté à vaincre.

Les résultats en question, qui occupent les paragraphes 2 et 3, supposent donnée une trace normale sur l'anneau d'opérateurs étudié $\mathbf{M}$, et deviennent sans intérêt si $\mathbf{M}$ est purement infini. Au paragraphe 1, j'établis des résultats valables pour des anneaux d'opérateurs quelconques, indépendants de la notion de trace. Soit, dans le dual de l'espace de Banach $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}_*$ le sous-espace engendré par les formes linéaires normales; alors, $\mathbf{M}$ est le dual de $\mathbf{M}_*$. Des théorèmes variés dus à divers auteurs découlent aisément de ce fait.

On aurait pu abréger le paragraphe 1 en faisant usage des résultats de [3]. Mais j'ai évité autant que possible de m'appuyer sur d'autres Mémoires. Les théorèmes utilisés peuvent être considérés presque toujours comme relevant de la théorie générale des opérateurs (c'est seulement pour des points de détail qu'il est parfois fait appel à des résultats profonds sur les anneaux d'opérateurs). En particulier, tous les points essentiels de [3] sont retrouvés ici, par une voie plus rapide et sous une forme plus générale. Certains résultats de [3] sont cependant spéciaux aux facteurs de type I (de même que l'intégration sur un espace discret donne lieu à des propriétés spéciales).

Soit $\mathbf{N}$ un sous-anneau d'opérateurs de $\mathbf{M}$. Comme conséquence des théorèmes des paragraphes 1 à 3, on établit au paragraphe 4 l'existence d'une application de $\mathbf{M}$ sur $\mathbf{N}$ qui, lorsque $\mathbf{M}$ est de classe finie et lorsque $\mathbf{N}$ est le centre de $\mathbf{M}$, se réduit à l'application $\natural$ canonique.

Dans tout le travail, $\mathbf{M}$ désigne un anneau d'opératenrs dans un espace hilbertien complexe H. Si $A \in \mathbf{M}$, on appelle décomposition polaire de A la décomposition $A = U|A|$, où $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}} \in \mathbf{M}$ et où $U \in \mathbf{M}$ est partiellement isométrique et admet pour sous-espace initial l'adhérence de $|A|(H)$.

Soient **N** un autre anneau d'opérateurs, $\mathfrak{m}$ un idéal (bilatère) de **M**, θ une application linéaire de $\mathfrak{m}$ dans **N**. On dit que θ est positive si $A \geqq 0$ entraîne $\theta(A) \geqq 0$. Lorsqu'il en est ainsi, on dit que θ est normale si, $\mathcal{F}$ étant un ensemble filtrant croissant d'opérateurs $\geqq 0$ de $\mathfrak{m}$ de borne supérieure $A \in \mathfrak{m}$, $\theta(\mathcal{F})$ [qui est filtrant croissant et majoré par $\theta(A)$] admet $\theta(A)$ pour borne supérieure. On définit de façon analogue les formes linéaires positives normales.

Soient $\mathfrak{m}$ un idéal de **M** et α un nombre réel, $0 < \alpha < +\infty$. Lorsque A parcourt $\mathfrak{m}^+$, A^α parcourt la partie positive d'un idéal désigné par $\mathfrak{m}^\alpha$. Les propriétés de $\mathfrak{m}^\alpha$, étudiées dans [5], ne sont utilisées qu'aux paragraphes 3 et 4. Dans [4], on a désigné par $\mathfrak{m}^r$ l'idéal restreint associé à $\mathfrak{m}$, c'est-à-dire l'idéal engendré par les projecteurs de $\mathfrak{m}$; cette notation risquerait ici d'engendrer des confusions; d'ailleurs, il semble tout à fait indiqué de désigner cet idéal restreint par $\mathfrak{m}^\infty$, et c'est cette notation qui sera désormais utilisée. D'autre part, l'adhérence forte de $\mathfrak{m}$, désignée par $\overline{\mathfrak{m}}$ dans [4], sera désormais désignée par $\mathfrak{m}^0$: on verra que c'est là une notation logique. On a alors $\mathfrak{m}^\alpha \subset \mathfrak{m}^\beta$ pour $0 \leqq \beta \leqq \alpha \leqq +\infty$.

Pour éviter d'avoir à utiliser aux paragraphes 1 et 2 les propriétés des $\mathfrak{m}^\alpha$ qui, pour $0 < \alpha < +\infty$, sont un peu longues à démontrer, nous allons établir directement le lemme suivant :

Lemme 1. — *Soit $\mathfrak{m}$ un idéal de* **M**.

*a. L'ensemble des $A \in$ **M** tels que $AA^* \in \mathfrak{m}$ est un idéal $\mathfrak{n}$ de* **M**. *Si $A \in \mathfrak{n}$ et $B \in \mathfrak{n}$, on a $AB \in \mathfrak{m}$.*

*b. Si θ est une application linéaire de $\mathfrak{m}$ dans un espace vectoriel telle que $\theta(BA) = \theta(AB)$ pour $A \in \mathfrak{m}$ et $B \in$ **M**, on a $\theta(BA) = \theta(AB)$ pour $A \in \mathfrak{n}$ et $B \in \mathfrak{n}$.*

1° Si U est un opérateur unitaire de **M**, la relation $A \in \mathfrak{n}$ entraîne $AU \in \mathfrak{n}$ et $UA \in \mathfrak{n}$. En effet,

$$(AU)(AU)^* = AUU^*A^* = AA^* \in \mathfrak{m},$$

et

$$(UA)(UA)^* = U(AA^*)U^* \in \mathfrak{m}.$$

2° Si $A \in \mathfrak{n}$ et $B \in \mathfrak{n}$, on a $A + B \in \mathfrak{n}$. En effet,

$$(A+B)(A+B)^* \leqq 2AA^* + 2BB^* \in \mathfrak{m},$$

donc on est ramené à prouver ceci : si $0 \leqq C \in \mathfrak{m}$ et si $0 \leqq D \leqq C$, on a $D \in \mathfrak{m}$. Or (*cf.* [4], lemme 3.6) on a, pour tout $x \in H$,

$$\left\| D^{\frac{1}{2}} x \right\|^2 = \langle Dx, x \rangle \leqq \langle Cx, x \rangle = \left\| C^{\frac{1}{2}} x \right\|^2,$$

donc $D^{\frac{1}{2}} = TC^{\frac{1}{2}}$ avec un $T \in$ **M**, donc

$$D = D^{\frac{1}{2}}\left(D^{\frac{1}{2}}\right)^* = TC^{\frac{1}{2}}C^{\frac{1}{2}}T^* = TCT^* \in \mathfrak{m}.$$

Les deux propriétés précédentes entraînent que $\mathfrak{n}$ est un idéal bilatère de **M**, puisque tout opérateur de **M** est combinaison linéaire d'opérateurs unitaires de **M**.

3° Si $A \in \mathfrak{n}$, on a

$$A^* A = W(AA^*)W^*, \qquad W^* W A A^* = AA^*,$$

avec un $W \in \mathbf{M}$. Donc

$$\theta(A^* A) = \theta(W A A^* W^*) = \theta(W^* W A A^*) = \theta(AA^*).$$

4° Si $A \in \mathfrak{n}$ et $B \in \mathfrak{n}$, on a

$$\begin{aligned} 4AB &= (A + B^*)(A + B^*)^* - (A - B^*)(A - B^*)^* \\ &\quad + i(A + iB^*)(A + iB^*)^* - i(A - iB^*)(A - iB^*)^*, \\ 4BA &= (A + B^*)^*(A + B^*) - (A - B^*)^*(A - B^*) \\ &\quad + i(A + iB^*)^*(A + iB^*) - i(A - iB^*)^*(A - iB^*), \end{aligned}$$

donc $AB \in \mathfrak{n}$, $BA \in \mathfrak{n}$ et $\theta(AB) = \theta(BA)$, d'après la propriété 3°.

L'idéal $\mathfrak{n}$ n'est autre que $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$.

1. **Formes linéaires normales.** — Soit $\mathbf{B}$ l'algèbre de tous les opérateurs sur H. Indépendamment de la topologie uniforme, déduite de la norme, trois topologies localement convexes sont utilisées classiquement sur $\mathbf{B}$:

1° La topologie *forte*, définie par les semi-normes

$$A \to \| A x \|,$$

où x est un élément fixe quelconque de H.

2° La topologie *faible*, définie par les semi-normes

$$A \to |\langle A x, y \rangle|,$$

où x et y sont des éléments fixes quelconques de H. Les semi-normes

$$A \to |\langle A x, x \rangle|$$

suffisent également à définir cette topologie. La topologie faible est la moins fine des topologies pour lesquelles les formes linéaires continues soient les formes

$$A \to \Sigma_{i=1}^{n} \langle A x_i, y_i \rangle.$$

3° La topologie *ultraforte*, définie par les semi-normes

$$A \to [\Sigma_{i=1}^{\infty} \| A x_i \|^2]^{\frac{1}{2}},$$

où (x_i) est une suite quelconque de vecteurs fixes de H tels que

$$\Sigma_{i=1}^{\infty} \| x_i \|^2 < +\infty.$$

Pour clarifier la situation, il est utile d'introduire la topologie localement convexe suivante :

4° La topologie *ultrafaible* (¹), définie par les semi-normes

$$A \to |\Sigma_{i=1}^{\infty} \langle A x_i, y_i \rangle|,$$

où (x_i), (y_i) sont deux suites quelconques de vecteurs fixes de H tels que

$$\Sigma_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < +\infty, \qquad \Sigma_{i=1}^{\infty} \|y_i\|^2 < +\infty.$$

Les semi-normes

$$A \to |\Sigma_{i=1}^{\infty} \langle A x_i, x_i \rangle|$$

suffisent également à définir cette topologie. La topologie ultrafaible est la moins fine des topologies pour lesquelles les formes linéaires continues soient les formes

$$A \to \Sigma_{i=1}^{\infty} \langle A x_i, y_i \rangle.$$

On a immédiatement le tableau suivant, où le signe $<$ signifie « plus fine que » :

$$\begin{array}{ccc} \text{Topologie ultraforte} & < & \text{Topologie forte,} \\ \wedge & & \wedge \\ \text{Topologie ultrafaible} & < & \text{Topologie faible.} \end{array}$$

Il est clair que les topologies forte et ultraforte coïncident sur les parties bornées de **B**. De même, les topologies faible et ultrafaible.

Soit V un voisinage de o dans **B** pour la topologie faible. Alors, l'ensemble W des $A \in \mathbf{B}$ tels que $A^* A \in V$ est un voisinage fort de o. Et, quand V parcourt un système fondamental de voisinages de o pour la topologie faible, W parcourt un système fondamental de voisinages de o pour la topologie forte. On a la même relation entre topologies ultrafaible et ultraforte.

Lemme 2. — *Soit* $\mathbf{B}_1$ *la boule unité de* **B**. *Toute forme linéaire sur* **B**, *dont la restriction à* $\mathbf{B}_1$ *est ultrafortement continue, est ultrafaiblement continue.*

Soit φ une forme linéaire sur **B** dont la restriction à $\mathbf{B}_1$ est ultrafortement continue. Soient I et J l'ensemble des opérateurs complètement continus et l'ensemble des opérateurs d'Hilbert-Schmidt, qui sont des sous-espaces vectoriels de **B**. On a $J \subset I$. On sait que J est muni d'une structure hilbertienne et la restriction de φ à J est évidemment continue pour la topologie correspondante. D'après la décomposition polaire des éléments de **B** et la décomposition spectrale des éléments auto-adjoints de J, il existe deux suites orthonormales (x_i), (y_i) dans H, et une suite (λ_i) de nombres $\geqq 0$, avec

$$\Sigma_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 < +\infty,$$

tels que, pour tout $A \in J$,

$$\varphi(A) = \Sigma_{i=1}^{\infty} \langle A x_i, \lambda_i y_i \rangle = \Sigma_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle A x_i, y_i \rangle.$$

(¹) En fait, cette topologie est identique à la topologie désignée dans [3] par $\sigma(\mathcal{B}, \mathcal{J}')$. Ceci serait facile à montrer directement et résultera en tout cas de ce qui suit.

En particulier, si $Ax_i = c_i y_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ et $Ax = 0$ pour x orthogonal à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (auquel cas $A \in J$), on a

$$\varphi(A) = \Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i c_i.$$

Mais, d'autre part, φ est évidemment continue au sens de la norme dans $\mathbf{B}$; il existe donc une constante $k \geqq 0$ telle que

$$|\Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i c_i| \leqq k \max |c_i|.$$

Il en résulte que

$$\Sigma_{i=1}^{\infty} \lambda_i < +\infty.$$

(La démonstration précédente est due à Naimark [14]). Posons

$$x'_i = \lambda_i^{\frac{1}{2}} x_i, \qquad y' = \lambda_i^{\frac{1}{2}} y_i.$$

On a

$$\Sigma_{i=1}^{\infty} \| x'_i \|^2 < +\infty, \qquad \Sigma_{i=1}^{\infty} \| y'_i \|^2 < +\infty$$

et, pour tout $A \in J$,

$$\varphi(A) = \Sigma_{i=1}^{\infty} \langle A x'_i, y'_i \rangle.$$

Posons, pour tout $A \in B$,

$$\psi(A) = \Sigma_{i=1}^{\infty} \langle A x'_i, y'_i \rangle.$$

Les formes linéaires φ et ψ sont ultrafortement continues sur $\mathbf{B}_1$ et coïncident sur J. D'autre part, il est immédiat que $J \cap \mathbf{B}_1$ est ultrafortement dense dans $\mathbf{B}_1$. Donc $\varphi = \psi$, ce qui prouve le lemme.

Théorème 1. — *Soit $\mathbf{M}^*$ le dual de l'anneau d'opérateurs $\mathbf{M}$ (considéré comme espace de Banach complexe). Soit $\mathbf{M}_* \subset \mathbf{M}^*$ l'ensemble des formes linéaires ultrafaiblement continues sur $\mathbf{M}$, c'est-à-dire l'ensemble des formes*

$$A \to \Sigma_{i=1}^{\infty} \langle A x_i, y_i \rangle,$$

où (x_i), (y_i) sont deux suites de vecteurs fixes de H *tels que*

$$\Sigma_{i=1}^{\infty} \| x_i \|^2 < +\infty, \qquad \Sigma_{i=1}^{\infty} \| y_i \|^2 < +\infty \quad (^2).$$

Alors, $\mathbf{M}_*$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathbf{M}^*$ (au sens de la norme dans $\mathbf{M}^*$). La forme bilinéaire canonique sur $\mathbf{M} \times \mathbf{M}^*$ induit sur $\mathbf{M} \times \mathbf{M}_*$ une forme bilinéaire pour laquelle $\mathbf{M}$ est le dual de $\mathbf{M}_*$ (en tant qu'espace vectoriel normé). Enfin, $\mathbf{M}_*$ est aussi l'ensemble des formes linéaires ultrafortement continues sur $\mathbf{M}$.

Supposons d'abord $\mathbf{M} = \mathbf{B}$. Si une suite (φ_n) de formes linéaires ultrafaiblement continues sur $\mathbf{B}$ converge au sens de la norme dans $\mathbf{B}^*$ vers une forme linéaire $\varphi \in \mathbf{B}^*$, φ est limite uniforme sur $\mathbf{B}_1$ des φ_n, donc la restriction de φ à $\mathbf{B}_1$ est ultrafaiblement continue, donc $\varphi \in \mathbf{B}_*$ (lemme 2). Autrement dit, $\mathbf{B}_*$ est un

---

(2) On utilise ici le fait qu'une forme linéaire ultrafaiblement continue sur $\mathbf{M}$ peut se prolonger en une forme linéaire ultrafaiblement continue sur $\mathbf{B}$.

sous-espace vectoriel de $\mathbf{B}^*$ fermé au sens de la norme. La topologie $\sigma(\mathbf{B}, \mathbf{B}_*)$ ([3]), c'est-à-dire la topologie ultrafaible, coïncide avec la topologie faible sur $\mathbf{B}_1$, de sorte que $\mathbf{B}_1$ est compacte pour $\sigma(\mathbf{B}, \mathbf{B}_*)$. Nous allons en déduire que $\mathbf{B}$ s'identifie au dual de $\mathbf{B}_*$ (pour la forme bilinéaire induite par la forme bilinéaire canonique sur $\mathbf{B} \times \mathbf{B}^*$) ([4]). Soit E le dual de $\mathbf{B}_*$. Il existe une application linéaire canonique θ de $\mathbf{B}$ dans E, et l'on a $\|\theta(A)\| \leq \|A\|$ pour tout $A \in \mathbf{B}$. Il est, d'autre part, évident que θ est continue pour les topologies $\sigma(\mathbf{B}, \mathbf{B}_*)$ et $\sigma(E, \mathbf{B}_*)$; donc $\theta(\mathbf{B}_1)$ est compacte pour $\sigma(E, \mathbf{B}_*)$ et contenue dans la boule unité E_1 de E. Enfin, si un élément $\varphi \in \mathbf{B}_*$ est tel que $|\varphi(A)| \leq 1$ pour tout $A \in B_1$, on a $\|\varphi\| \leq 1$, donc $|\langle \varphi, x \rangle| \leq 1$ pour tout $x \in E_1$; par suite, $\theta(\mathbf{B}_1)$ est partout dense dans E_1 pour $\sigma(E, \mathbf{B}_*)$, de sorte que $\theta(B_1) = E_1$. Ainsi, θ est une application linéaire isométrique de $\mathbf{B}$ sur E qui permet d'identifier $\mathbf{B}$ au dual de $\mathbf{B}_*$.

Considérons maintenant un anneau d'opérateurs $\mathbf{M} \subset \mathbf{B}$ et soit $\mathbf{M}^\perp \subset \mathbf{B}_*$ l'ensemble des éléments de $\mathbf{B}_*$ orthogonaux à $\mathbf{M}$; c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{B}_*$ fermé au sens de la norme. Comme $\mathbf{M}$ est fermé pour $\sigma(\mathbf{B}, \mathbf{B}_*)$, $\mathbf{M}$ est le sous-espace de $\mathbf{B}$ orthogonal à $\mathbf{M}^\perp$. On sait que l'espace de Banach $\mathbf{M}$ s'identifie alors au dual de l'espace de Banach $\mathbf{B}_*/\mathbf{M}^\perp$. Il existe un isomorphisme canonique de $\mathbf{B}_*/\mathbf{M}^\perp$ sur un sous-espace $\mathbf{M}_*$ du dual $\mathbf{M}^*$ de $\mathbf{M}$ et les formes linéaires de $\mathbf{M}_*$ sont celles qui peuvent se prolonger en formes linéaires ultrafaiblement continues sur $\mathbf{B}$.

Enfin, si une forme linéaire sur $\mathbf{M}$ est ultrafortement continue, elle est prolongeable en une forme linéaire sur $\mathbf{B}$ ultrafortement continue, donc ultrafaiblement continue (lemme 2).

Proposition 1. — *Soit* K *une partie convexe de* $\mathbf{M}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :* (*a*) [*resp.* (*b*)], K *est ultrafortement* (*resp. ultrafaiblement*) *fermée;* (*c*) [*resp.* (*d*), (*e*), (*f*)], *pour toute boule fermée* S *de* $\mathbf{M}$, $K \cap S$ *est ultrafortement* (*resp. ultrafaiblement, fortement, faiblement*) *fermée.*

On a les équivalences $(a) \Leftrightarrow (b)$, $(c) \Leftrightarrow (d)$, puisque les formes linéaires continues sur $\mathbf{M}$ sont les mêmes pour les topologies ultrafaible et ultraforte (th. 1). L'équivalence $(b) \Leftrightarrow (d)$ résulte du théorème 1 et d'une propriété classique des espaces de Banach. Enfin, l'équivalence $(c) \Leftrightarrow (e)$ [resp. $(d) \Leftrightarrow (f)$] résulte de l'identité des topologies induites sur S par les topologies forte et ultraforte (resp. faible et ultrafaible).

Théorème 2. — *Pour une forme linéaire* φ *sur* $\mathbf{M}$, *les conditions suivantes sont équivalentes :* (*a*) [*resp.* (*b*)], φ *est ultrafortement* (*resp. ultrafaiblement*) *continue;* (*c*) [*resp.* (*d*), (*e*), (*f*)], *la restriction de* φ *à la boule unité* $\mathbf{M}_1$ *de* $\mathbf{M}$ *est ultrafortement* (*resp. ultrafaiblement, fortement, faiblement*) *continue.*

([3]) Si E, E' désignent deux espaces vectoriels complexes et si $B(x, x')$ est une forme bilinéaire sur $E \times E'$, la topologie la moins fine sur E rendant continues les formes linéaires $x \to B(x, x')$ est désignée par $\sigma(E, E')$. Cette notation est employée dans tout le travail.

([4]) On pourrait utiliser ici le théorème 19 de [2].

Les implications $(b) \Rightarrow (d) \Rightarrow (c)$, $(b) \Rightarrow (a) \Rightarrow (c)$ et les équivalences $(c) \Leftrightarrow (e)$, $(d) \Leftrightarrow (f)$ sont claires. Soit enfin φ une forme linéaire sur $\mathbf{M}$ dont la restriction à $\mathbf{M}_1$ est ultrafortement continue, et soit $K \subset \mathbf{M}$ l'hyperplan d'équation $\varphi(A) = 0$; l'ensemble $\mathbf{M}_1 \cap K$ est ultrafortement fermé, donc (prop. 1) K est ultrafaiblement fermé; on a ainsi $(c) \Rightarrow (b)$, ce qui achève la démonstration.

Théorème 3. — *Toute forme linéaire $\varphi \in \mathbf{M}_*$ est combinaison linéaire de formes linéaires positives de $\mathbf{M}_*$. Une forme linéaire positive sur $\mathbf{M}$ appartient à $\mathbf{M}_*$ si et seulement si elle est normale.*

A cause de l'identité

$$\begin{aligned} 4\langle Ax, y\rangle = \ & \langle A(x+y), x+y\rangle \\ & - \langle A(x-y), x-y\rangle + i\langle A(x+iy), x+iy\rangle - i\langle A(x-iy), x-iy\rangle, \end{aligned}$$

toute forme linéaire de $\mathbf{M}_*$ est combinaison linéaire de formes linéaires positives de $\mathbf{M}_*$. Soit φ une forme linéaire positive de $\mathbf{M}_*$ et soit $\mathcal{F}$ un ensemble filtrant croissant dans $\mathbf{M}^+$ de borne supérieure $A \in \mathbf{M}^+$; on a $\varphi(\mathcal{F}) \leq \varphi(A)$; comme A est fortement adhérent à $\mathcal{F}$ et que φ est fortement continue sur les parties bornées de $\mathbf{M}$, $\varphi(A)$ est la borne supérieure de $\varphi(\mathcal{F})$, de sorte que φ est normale. Enfin, soit φ une forme linéaire positive normale sur $\mathbf{M}$ et montrons d'abord que, pour tout projecteur $E \neq 0$ de $\mathbf{M}$, il existe un projecteur F de $\mathbf{M}$, $F \neq 0$, $F \leq E$, tel que la forme linéaire $A \to \varphi(AF)$ sur $\mathbf{M}$ soit fortement continue. Soit z un vecteur tel que $\varphi(E) \leq \langle Ez, z\rangle$. Supposons que, pour tout projecteur non nul $F \leq E$ de $\mathbf{M}$, il existe un projecteur non nul $G \leq F$ de $\mathbf{M}$ tel que $\varphi(G) > \langle Gz, z\rangle$; considérons une famille maximale (G_α) de projecteurs de $\mathbf{M}$ non nuls, deux à deux orthogonaux, $\leq E$, tels que $\varphi(G_\alpha) > \langle G_\alpha z, z\rangle$ pour tout α; d'après notre hypothèse, $E = \Sigma_\alpha G_\alpha$, donc

$$\varphi(E) = \Sigma_\alpha \varphi(G_\alpha) > \Sigma_\alpha \langle G_\alpha z, z\rangle = \langle Ez, z\rangle,$$

ce qui est contradictoire. Donc il existe un projecteur non nul $F \leq E$ tel que $\varphi(G) \leq \langle Gz, z\rangle$ pour tout projecteur de $\mathbf{M}$ non nul $G \leq F$. Grâce au théorème spectral on en déduit $\varphi(A) \leq \langle Az, z\rangle$ pour tout $A \in \mathbf{M}^+$ tel que $FAF = A$ (5). Pour tout $A \in \mathbf{M}$, on a alors, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$|\varphi(AF)|^2 \leq \varphi(1)\varphi(FA^*AF) \leq \varphi(1)\langle A^*Az, z\rangle = \varphi(1)\,\|Az\|^2,$$

ce qui prouve bien que la forme linéaire $A \to \varphi(AF)$ est fortement continue. Ceci posé, considérons une famille maximale $(F_\iota)_{\iota \in I}$ de projecteurs de $\mathbf{M}$ non nuls, deux à deux orthogonaux, tels que $\varphi(AF_\iota)$ soit fortement continue pour tout ι. D'après le résultat précédent, on a $\Sigma_\iota F_\iota = 1$. Posons $F_J = \Sigma_{\iota \in J} F_\iota$ pour toute partie J de I. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie I_1 de I telle que, posant $I_2 = I - I_1$, on ait $\varphi(F_{I_2}) \leq \varepsilon$; alors, pour tout $A \in M$, on a

$$|\varphi(AF_{I_2})|^2 \leq \varepsilon\varphi(A^*A)$$

(5) Le raisonnement précédent est essentiellement la démonstration du théorème 1 de [7]; son principe remonte à [10]. La suite de la démonstration est aussi inspirée de [7].

et $\varphi(AF_{I_1})$ est fortement continue; il en résulte aussitôt que la restriction de φ à la boule unité $\mathbf{M}_1$ de $\mathbf{M}$ est fortement continue ([6]).

Remarque. — Il serait intéressant de savoir si toute forme linéaire positive de $\mathbf{M}_*$ est du type

$$A \to \Sigma_{i=1}^{\infty} \langle A x_i, x_i \rangle, \qquad \text{avec} \quad \Sigma_{i=1}^{\infty} \| x_i \|^2 < +\infty.$$

Il en est bien ainsi lorsque $\mathbf{M} = \mathbf{B}$.

Le théorème 3 fournit une définition purement algébrique du sous-espace $\mathbf{M}_*$ de $\mathbf{M}^*$, donc de la topologie ultrafaible, donc de la topologie ultraforte. Au contraire, les topologies faible et forte ne sont pas susceptibles en général d'une telle définition (*cf.* plus loin). C'est ce qui fait l'intérêt des topologies ultrafaible et ultraforte, et explique les résultats suivants.

COROLLAIRE 1. — *Soient* $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ *deux anneaux d'opérateurs. Soit* θ *une application linéaire positive normale de* $\mathbf{M}$ *dans* $\mathbf{N}$. *Alors* θ *est ultrafaiblement continue, donc la restriction de* θ *aux parties bornées de* $\mathbf{M}$ *est faiblement continue. Si, de plus, il existe une constante* $k \geq 0$ *telle que* $\theta(A)^*\theta(A) \leq k\theta(A^*A)$, θ *est ultrafortement continue, donc la restriction de* θ *aux parties bornées de* $\mathbf{M}$ *est fortement continue.*

En effet, soit φ une forme linéaire positive normale sur $\mathbf{N}$. Posons

$$\psi(A) = \varphi(\theta(A)) \qquad \text{pour} \quad A \in \mathbf{M}.$$

Alors, ψ est une forme linéaire positive normale sur $\mathbf{M}$. Donc l'image d'un voisinage ultrafaible de zéro dans $\mathbf{N}$ par $\overset{-1}{\theta}$ est un voisinage ultrafaible de zéro dans $\mathbf{M}$, c'est-à-dire que θ est ultrafaiblement continue. Maintenant supposons que

$$\theta(A)^*\theta(A) \leq k\theta(A^*A) \qquad \text{pour} \quad A \in \mathbf{M}$$

et considérons un voisinage ultrafort V de zéro dans $\mathbf{N}$, que l'on peut supposer défini par la relation $\varphi(B^*B) \leq 1$. On a

$$\varphi(\theta(A)^*\theta(A)) \leq k\varphi(\theta(A^*A)) = k\psi(A^*A).$$

Par conséquent, l'ensemble W des $A \in \mathbf{M}$ tels que $k\psi(A^*A) \leq 1$ est contenu dans $\overset{-1}{\theta}(V)$; or, W est un voisinage ultrafort de zéro dans $\mathbf{M}$, ce qui prouve que θ est ultrafortement continue.

COROLLAIRE 2. — *Soient* $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ *deux anneaux d'opérateurs et* θ *un* **-isomorphisme de* $\mathbf{M}$ *sur* $\mathbf{N}$. *Alors,* θ *est ultafortement et ultrafaiblement bicontinu, donc la restriction de* θ *aux parties bornées est fortement et faiblement bicontinue.*

([6]) En fait, les hypothèses nécessaires sur φ pour assurer la démonstration sont les suivantes : φ est linéaire positive et, pour toute famille (E_ι) de projecteurs de $\mathbf{M}$ deux à deux orthogonaux, on a

$$\varphi(\Sigma_\iota E_\iota) = \Sigma_\iota \varphi(E_\iota).$$

En effet, θ est isomorphisme pour la structure d'ordre, donc positif et normal. En outre,

$$\theta(A)^*\theta(A) = \theta(A^*A).$$

Ce corollaire est dû à H. A. Dye [7] lorsque $\mathbf{M}$ est fini, à R. Pallu de la Barrière [16] lorsque $\mathbf{M}$ est semi-fini (c'est-à-dire sans projecteurs purement infinis), à E. L. Griffin [8] dans le cas général.

Remarque. — Il n'est pas vrai qu'un *-homomorphisme de $\mathbf{M}$ sur $\mathbf{N}$ soit toujours ultrafortement ou ultrafaiblement continu.

COROLLAIRE 3. — *La notion de sous-anneau d'opérateurs de $\mathbf{M}$ est purement algébrique dans $\mathbf{M}$.*

En effet, un sous-anneau d'opérateurs de $\mathbf{M}$ est une sous-*algèbre ultrafortement fermée de $\mathbf{M}$.

Ce corollaire avait été établi dans [3] lorsque H est séparable.

COROLLAIRE 4. — *Soient $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ deux anneaux d'opérateurs et θ un *-homomorphisme normal de $\mathbf{M}$ dans $\mathbf{N}$. Alors, $\theta(\mathbf{M})$ est un anneau d'opérateurs.*

En effet, si $A \in \mathbf{M}^+$, on a $A = B^*B$, avec un $B \in \mathbf{M}$, donc

$$\theta(A) = \theta(B)^*\theta(B) \in \mathbf{N}^+,$$

de sorte que θ est positif. D'après le corollaire 1, θ est ultrafaiblement continu. D'après l'étude élémentaire faite dans [4] des idéaux bilatères de $\mathbf{M}$, il existe deux projecteurs centraux E, F de $\mathbf{M}$ tels que

$$EF = 0, \qquad E + F = 1, \qquad \theta(\mathbf{M}F) = 0,$$

la restriction de θ à $\mathbf{M}E$ étant biunivoque. On est donc ramené au cas où θ est un *-isomorphisme normal.

La boule unité $\mathbf{M}_1$ de $\mathbf{M}$ est ultrafaiblement compacte, donc $\theta(\mathbf{M}_1)$ est ultrafaiblement compacte. On va voir que $\theta(\mathbf{M}_1)$ n'est autre que la boule unité de $\theta(\mathbf{M})$; il en résultera, d'après la proposition 1, que $\theta(\mathbf{M})$ est ultrafaiblement fermé dans $\mathbf{N}$, donc que $\theta(\mathbf{M})$ est un anneau d'opérateurs.

Pour prouver notre assertion, il suffit de prouver que θ est isométrique. Ceci résulte de théorèmes classiques sur les *-algèbres normées. Mais voici une démonstration directe qui généralise légèrement celle de [13]. Soit $A \in \mathbf{M}$, $A \neq 0$. Si $a \geqq \|A\|$, on a $a^2 - A^*A \geqq 0$, donc $a^2 - \theta(A)^*\theta(A) \geqq 0$, donc $a \geqq \|\theta(A)\|$; par suite, $\|\theta(A)\| \leqq \|A\|$. Si $0 \leqq a < \|A\|$, il existe un $E \in \mathbf{M}$ tel que

$$E = E^* = E^2, \qquad EA^*A = A^*AE,$$
$$E(A^*A - a^2) \geqq 0, \qquad E(A^*A - a^2) \neq 0,$$

en appliquant θ à ces relations, on voit que $a < \|\theta(A)\|$; par suite, $\|\theta(A)\| \geqq \|A\|$ et le corollaire est démontré.

Ce corollaire généralise le corollaire 5.4 de [7].

Corollaire 5. — *Soit φ une forme linéaire positive normale sur* $\mathbf{M}$. *Soit* θ_φ *la représentation canonique de* $\mathbf{M}$ *définie par* φ. *Alors*, $\theta_\varphi(\mathbf{M})$ *est un anneau d'opérateurs.*

D'après le corollaire 4, il suffit de prouver que θ_φ est normale. Or, soit $\mathcal{F} \subset \mathbf{M}^+$ un ensemble filtrant croissant de borne supérieure $B \in \mathbf{M}^+$. Pour tout $C \in \mathbf{M}$, C^*BC est la borne supérieure de l'ensemble filtrant croissant $C^*\mathcal{F}C$, donc $\varphi(C^*BC)$ est la borne supérieure de $\varphi(C^*\mathcal{F}C)$. Il en résulte aussitôt que $\theta_\varphi(B)$ est la borne supérieure de $\theta_\varphi(\mathcal{F})$ dans l'*-algèbre des opérateurs continus sur l'espace de la représentation.

Corollaire 6. — *Si* $\mathbf{M}$ *est un facteur de classe* II *ou* III, *aucune forme linéaire positive normale n'est pure.*

Soient φ une forme linéaire positive normale sur $\mathbf{M}$ et θ_φ la représentation canonique définie par φ dans un espace hilbertien H_φ. Le noyau de θ_φ est un idéal bilatère ultrafaiblement fermé de $\mathbf{M}$; comme $\mathbf{M}$ est un facteur, ce noyau est zéro ou $\mathbf{M}$; si $\varphi \neq 0$, θ_φ est donc un *-isomorphisme de $\mathbf{M}$ sur un anneau d'opérateurs dans H_φ (cor. 5). Si φ est pure, $\theta_\varphi(\mathbf{M})$ est irréductible, donc est nécessairement l'anneau de tous les opérateurs dans H_φ. Ainsi, $\mathbf{M}$ est de classe I.

Les corollaires 5 et 6 généralisent la remarque 5.2 de [7].

Corollaire 7. — *Soit θ une application* $\natural$ *normale définie sur l'idéal* $\mathfrak{m}$ *de* $\mathbf{M}$. *Soit* $A \in \mathfrak{m}$. *L'application* $B \rightarrow \theta(AB)$ *de* $\mathbf{M}$ *dans le centre* $\mathbf{M}^\natural$ *de* $\mathbf{M}$ *est ultrafortement et ultrafaiblement continue, donc sa restriction aux parties bornées de* $\mathbf{M}$ *est fortement et faiblement continue.*

Comme tout élément de $\mathfrak{m}$ est combinaison linéaire d'éléments de $\mathfrak{m}^+$, on peut supposer $A \geqq 0$. Posons, pour $B \in \mathbf{M}$, $\eta(B) = \theta(AB)$ et montrons que η satisfait aux conditions du corollaire 1. D'abord, η est linéaire. Ensuite, η est positif, car, si $B \geqq 0$, on a

$$\theta(AB) = \theta\left(B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}\right) \geqq 0, \qquad \text{puisque} \quad B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}} \geqq 0.$$

D'autre part, on a, pour $B \in \mathbf{M}$,

$$(1) \qquad \begin{aligned} 0 &\leqq [B\eta(1) - \eta(B)]^*[B\eta(1) - \eta(B)] \\ &= B^*B\eta(1)^2 - B^*\eta(B)\eta(1) - B\eta(B)^*\eta(1) + \eta(B)^*\eta(B), \end{aligned}$$

donc, en remarquant que, pour $C \in \mathbf{M}^\natural$, on a

$$\eta(BC) = \theta(ABC) = \theta(AB)C = \eta(B)C,$$

(1) entraîne

$$(2) \qquad \begin{aligned} 0 &\leqq \eta(B^*B)\eta(1)^2 - \eta(B^*)\eta(B)\eta(1) - \eta(B)\eta(B)^*\eta(1) + \eta(B)^*\eta(B)\eta(1) \\ &= \eta(B^*B)\eta(1)^2 - \eta(B)^*\eta(B)\eta(1). \end{aligned}$$

Soit E le plus grand projecteur de $\mathbf{M}^\natural$ tel que $E\eta(1) = 0$ et soit $F = 1 - E$. L'inégalité (2) entraîne d'abord

$$F(\eta(B^*B)\eta(1) - \eta(B)^*\eta(B)) \geqq 0.$$

Ensuite, l'égalité $\eta(E) = E\eta(1) = 0$ entraîne, pour tout $B \in \mathbf{M}$ tel que $0 \leq B \leq E$,

$$0 \leq \eta(B) \leq 0, \qquad \text{donc} \quad \eta(B) = 0;$$

par suite, pour tout $B \in \mathbf{M}$,

$$\eta(B)E = \eta(BE) = 0,$$

car BE est combinaison linéaire d'opérateurs $B' \in \mathbf{M}$ tels que $0 \leq B' \leq E$. Donc

$$E(\eta(B^*B)\eta(1) - \eta(B)^*\eta(B)) = 0$$

et finalement

$$\eta(B)^*\eta(B) \leq \eta(1)\eta(B^*B) \leq k\eta(B^*B).$$

Reste à montrer que η est normal. Soit $\mathcal{F} \subset \mathbf{M}^+$ un ensemble filtrant croissant de borne supérieure B. Alors, $A^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}A^{\frac{1}{2}}$ est filtrant croissant, majoré par $A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}$ et $A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}$ est fortement adhérent à $A^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}A^{\frac{1}{2}}$, donc $A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}$ est la borne supérieure de $A^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}A^{\frac{1}{2}}$. Observons que $A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}})^* = A \in \mathfrak{m}$, et que, pour $C \in \mathbf{M}$,

$$(CA^{\frac{1}{2}})(CA^{\frac{1}{2}})^* = CAC^* \in \mathfrak{m}.$$

Alors (lemme 1), $A^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}A^{\frac{1}{2}} \subset \mathfrak{m}$, $A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{m}$ et

$$\eta(B) = \theta(AB) = \theta\left(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}\right)$$

est la borne supérieure de

$$\theta\left(A^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}A^{\frac{1}{2}}\right) = \theta(A\mathcal{F}) = \eta(\mathcal{F}).$$

Corollaire 8. — *Soit φ une trace normale définie sur l'idéal $\mathfrak{m}$ de $\mathbf{M}$. Soit $A \in \mathfrak{m}$. L'application $B \to \varphi(AB)$ est ultrafaiblement continue, donc sa restriction aux parties bornées de $\mathbf{M}$ est faiblement continue.*

Il suffit de transposer, en la simplifiant légèrement, la démonstration du corollaire 7.

Les corollaires 7 et 8 généralisent certains résultats de [5], [15] et [16].

Nous avons signalé qu'en général les topologies faible et forte ne sont pas susceptibles d'une définition algébrique. Nous allons maintenant préciser ce point.

Proposition 2. — *Soit $\mathbf{M}$ un anneau d'opérateurs. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a. Toute forme linéaire du type $\Sigma_{i=1}^{\infty}\langle Ax_i, y_i\rangle$, où

$$\Sigma_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^2 < +\infty, \qquad \Sigma_{i=1}^{\infty}\|y_i\|^2 < +\infty,$$

est égale sur $\mathbf{M}$ à une forme linéaire du type $\Sigma_{i=1}^{n}\langle Ax'_i, y'_i\rangle$;

b. Les topologies faible et ultrafaible coïncident sur $\mathbf{M}$.

c. Les topologies forte et ultraforte coïncident sur $\mathbf{M}$.

L'équivalence de a et b est immédiate. D'autre part, si les topologies forte et ultraforte coïncident sur $\mathbf{M}$, toute forme linéaire ultrafaiblement continue sur $\mathbf{M}$ est fortement continue, donc faiblement continue d'après un résultat élémentaire de [3], de sorte que les topologies faible et ultrafaible coïncident sur $\mathbf{M}$. Enfin, si les topologies faible et ultrafaible coïncident sur $\mathbf{M}$, considérons un voisinage ultrafort de zéro dans $\mathbf{M}$; il contient un voisinage W défini par la relation $\varphi(A^*A) \leq 1$, où φ est une forme linéaire ultrafaiblement continue sur $\mathbf{M}$; mais φ est alors faiblement continue, de sorte que W est un voisinage fort de zéro; ainsi, les topologies forte et ultraforte coïncident sur $\mathbf{M}$.

Soit $\mathbf{M}'$ le commutant de $\mathbf{M}$. Utilisant la théorie de réduction globale ([9] et [6]), on sait qu'il existe deux projecteurs E et F dans le centre $\mathbf{M}^\natural$ de $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}'$, uniquement déterminés par les conditions suivantes : 1° $EF = 0$, $E + F = 1$; 2° E est proprement infini pour $\mathbf{M}'$, F est fini pour $\mathbf{M}'$. Pour éviter un énoncé compliqué, nous envisagerons seulement les cas $E = 0$ et $F = 0$. Mais il serait facile de déduire de là un énoncé relatif au cas général.

Proposition 3. — *Si* $F = 0$, *c'est-à-dire si* $\mathbf{M}'$ *est un anneau d'opérateurs proprement infini (en particulier, si* $\mathbf{M}'$ *est un facteur de classe infinie), les topologies forte et ultraforte coïncident sur* $\mathbf{M}$.

D'après [6], lemme 1.3, il existe, pour tout entier $n > 0$, une suite $(E'_1, E'_2, \ldots, E'_n)$ de projecteurs de $\mathbf{M}'$ deux à deux orthogonaux, tels que

$$\Sigma_{i=1}^{n} E'_i = 1 \qquad (1 \sim E'_1 \sim E'_2 \sim \ldots \sim E'_n).$$

La démonstration du lemme prouve, avec de minimes modifications, qu'il existe aussi une suite infinie $(E'_1, E'_2, \ldots)$ de projecteurs de $\mathbf{M}'$ deux à deux orthogonaux, tels que

$$\Sigma_{i=1}^{\infty} E'_i = 1 \qquad (1 \sim E'_1 \sim E'_2 \sim \ldots).$$

Soit, d'autre part, (E'_{ij}) la suite $(E'_1, E'_2, \ldots)$ réindexée en suite double ($i = 1, 2, \ldots$; $j = 1, 2, \ldots$). Ceci posé, soit (x_r) une suite de vecteurs de H tels que $\Sigma_r \| x_r \|^2 < +\infty$ et soit V le voisinage ultrafort de zéro dans $\mathbf{M}$ défini par la relation

$$\Sigma_r \| A x_r \|^2 < +\infty.$$

Posons, pour $r = 1, 2, \ldots$, $x_{ri} = E'_i x_r$. On a

$$\| x_r \|^2 = \Sigma_i \| x_{ri} \|^2 \quad \text{et} \quad \| A x_r \|^2 = \Sigma_i \| E'_i A x_r \|^2 = \Sigma_i \| A x_{ri} \|^2 \quad \text{pour } A \in \mathbf{M}.$$

Soit U'_{ri} un opérateur de $\mathbf{M}'$ tel que

$$U'^*_{ri} U'_{ri} = E'_i, \qquad U'_{ri} U'^*_{ri} = E'_{ir}$$

et posons $y_{ri} = U'_{ri} x_{ri}$. On a

$$\| y_{ri} \| = \| x_{ri} \|, \qquad \| A y_{ri} \| = \| A U'_{ri} x_{ri} \| = \| U'_{ri} A x_{ri} \| = \| A x_{ri} \|.$$

Soit $y = \Sigma_{ri} y_{ri}$ qui existe, car les y_{ri} sont deux à deux orthogonaux et tels que

$$\Sigma_{ri} \| y_{ri} \|^2 = \Sigma_{ri} \| x_{ri} \|^2 = \Sigma_r \| x_r \|^2 < +\infty.$$

On a

$$\Sigma_r \| A x_r \|^2 = \Sigma_{r\iota} \| A x_{r\iota} \|^2 = \Sigma_{r\iota} \| A y_{r\iota} \|^2 = \Sigma_{r\iota} \| A E'_{r\iota} y \|^2 = \Sigma_{r\iota} \| E'_{r\iota} A y \|^2 = \| A y \|^2.$$

Donc V est l'ensemble des $A \in \mathbf{M}$ tels que $\| A y \| \leq 1$, ce qui prouve la proposition.

La proposition suivante est la seule dont la démonstration exige, semble-t-il, des résultats profonds sur les anneaux d'opérateurs. Elle résulte aisément du corollaire 5.2 de [7], dont nous utilisons les notations sans explications. La démonstration détaillée est laissée au lecteur.

Proposition 4. — *Si* $E = 0$, *c'est-à-dire si* $\mathbf{M}'$ *est fini, les topologies forte et ultraforte coïncident sur* $\mathbf{M}$ *si et seulement si, pour toute décomposition de* $\mathbf{M}$ *en somme directe centrale d'anneaux d'opérateurs σ-finis* $(\mathbf{M}_\iota)$, *l'unité de chaque* $\mathbf{M}_\iota$ *est somme finie de projecteurs cycliques de* $\mathbf{M}_\iota$. *En particulier, si* $\mathbf{M}$ *est un facteur (tel que* $\mathbf{M}'$ *soit fini), cette condition est remplie si et seulement si* $\mathbf{M}$ *est fini.*

2. **Les espaces** L^1 **et** L^∞. — Dans tout ce paragraphe et le suivant, φ désigne une trace normale définie sur l'idéal $\mathfrak{m}$ de $\mathbf{M}$.

Lemme 3. — *Soient* $A \in \mathbf{M}$, $B \in \mathfrak{m}$. *On a*

$$|\varphi(AB)| \leq [\varphi(|A^*|.|B|)\varphi(|A|.|B^*|)]^{\frac{1}{2}}.$$

Soient $A = U|A|$, $B = V|B|$ les décompositions polaires de A et B. On a $|B| \in \mathfrak{m}$, $|B|^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$, donc, en vertu du lemme 1,

$$\varphi(AB) = \varphi\left(|B|^{\frac{1}{2}}U|A|V|B|^{\frac{1}{2}}\right) = \varphi\left[\left(|B|^{\frac{1}{2}}U|A|^{\frac{1}{2}}\right)\left(|B|^{\frac{1}{2}}V^*|A|^{\frac{1}{2}}\right)^*\right].$$

Comme $|B|^{\frac{1}{2}}U|A|^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ et $|B|^{\frac{1}{2}}V^*|A|^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'applique sans aucune difficulté et donne

$$\begin{aligned}|\varphi(AB)|^2 &\leq \varphi\left(|B|^{\frac{1}{2}}U|A|^{\frac{1}{2}}|A|^{\frac{1}{2}}U^*|B|^{\frac{1}{2}}\right)\varphi\left(|B|^{\frac{1}{2}}V^*|A|^{\frac{1}{2}}|A|^{\frac{1}{2}}V|B|^{\frac{1}{2}}\right)\\ &= \varphi(U|A|U^*|B|)\varphi(|A|V|B|V^*);\end{aligned}$$

or,

$$|A^*| = U|A|U^* \qquad \text{et} \qquad |B^*| = V|B|V^*,$$

d'où le lemme.

Théorème 4. — *Soient* $A \in \mathbf{M}$, $B \in \mathfrak{m}$. *On a*

$$|\varphi(AB)| \leq \varphi(|AB|) \leq \|A\| \varphi(|B|).$$

Supposons d'abord $A \geq 0$ et $B \geq 0$. On a

$$B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}} \leq \|A\| B, \qquad \text{donc} \quad \varphi(AB) = \varphi\left(B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}\right) \leq \|A\| \varphi(B).$$

Si maintenant $A \in \mathbf{M}$ et $B \in \mathfrak{m}$ sont quelconques, on a

$$\begin{aligned}\varphi(|A^*|.|B|) &\leq \||A^*|\| \varphi(|B|) = \|A\| \varphi(|B|),\\ \varphi(|A|.|B^*|) &\leq \||A|\| \varphi(|B^*|) = \|A\| \varphi(|B|),\end{aligned}$$

d'où, en vertu du lemme 3,

$$|\varphi(AB)| \leqq \|A\| \varphi(|B|).$$

Par conséquent,

$$|\varphi(AB)| = |\varphi(AB\,\mathrm{I})| \leqq \|\mathrm{I}\| \varphi(|AB|) = \varphi(|AB|),$$

ce qui est la première inégalité du théorème. D'autre part, il existe un opérateur partiellement isométrique $W \in \mathbf{M}$ tel que $|AB| = WAB$. Donc

$$\varphi(|AB|) = \varphi(WAB) \leqq \|WA\| \varphi(|B|) \leqq \|A\| \varphi(|B|),$$

ce qui est la deuxième inégalité du théorème.

Le théorème 4 et le corollaire 2 ci-dessous sont aussi prouvés dans [17], lemme 5.14, dans le cas de la trace usuelle sur l'algèbre de tous les opérateurs. Les démonstrations de [17] s'étendent d'elles-mêmes au cas général, mais sont un peu moins rapides que les démonstrations ci-dessus. Le lemme 3 présente aussi quelque intérêt propre.

Corollaire 1. — *Soit* $B \in \mathfrak{m}$. *Le nombre* $\varphi(|B|)$ *est la borne supérieure des nombres* $|\varphi(AB)|$ *quand* A *parcourt l'ensemble des opérateurs de* $\mathfrak{m}^0$ *tels que* $\|A\| \leqq 1$; *cette borne supérieure est atteinte.*

En effet,

$$|\varphi(V^*B)| = \varphi(|B|) \quad \text{et} \quad \|V^*\| \leqq 1, \quad V^* \in \mathfrak{m}^0.$$

Corollaire 2. — *La fonction* $B \to \varphi(|B|)$, *définie sur* $\mathfrak{m}$, *est une semi-norme.*

En effet, cette fonction est enveloppe supérieure de semi-normes d'après le corollaire 1.

Corollaire 3. — *Si* φ *est fidèle et si* $A \in \mathfrak{m}^0$, *le nombre* $\|A\|$ *est la borne supérieure des nombres* $|\varphi(AB)|$ *quand* B *parcourt l'ensemble des opérateurs de* $\mathfrak{m}$ *tels que* $\varphi(|B|) \leqq 1$.

En effet, posons $a = \|A\|$ et soit $\varepsilon > 0$. D'après la théorie spectrale, il existe un projecteur spectral non nul de $|A^*|$, soit E, tel que $(a-\varepsilon)E \leqq |A^*|E \leqq aE$. Puisque φ est fidèle et que $A \in \mathfrak{m}^0$, donc $E \in \mathfrak{m}^0$, il existe un projecteur $F \leqq E$ tel que $F \in \mathfrak{m}$ et $b = \varphi(F) > 0$. Soit $B = b^{-1}U^*F$. On a $\varphi(|B|) = 1$, et

$$|\varphi(AB)| = b^{-1}|\varphi(AU^*F)| = b^{-1}\varphi(|A^*|F) = b^{-1}\varphi(F|A^*|F) \geqq b^{-1}(a-\varepsilon)\varphi(F) = a - \varepsilon,$$

d'où le corollaire.

Remarque. — La borne supérieure du corollaire 3 n'est pas nécessairement atteinte.

Supposons désormais φ fidèle. L'espace $\mathfrak{m}$, muni de la norme $B \to \varphi(|B|)$, est un espace vectoriel complexe normé. Nous désignons l'espace de Banach complexe obtenu par complétion de cet espace normé par $L^1(\varphi)$, ou plus brièvement par L^1; $\mathfrak{m}$ sera identifié à un sous-espace partout dense de L^1. La norme d'un élément $f \in L^1$ sera désignée par $\|f\|_{1,\varphi}$ ou par $\|f\|_1$.

D'autre part, l'espace vectoriel complexe $\mathfrak{m}^0$, muni de la norme $A \to \|A\|$, est un espace de Banach complexe qui sera désigné aussi par $L^\infty(\varphi)$ ou L^∞. On posera

$$\|A\| = \|A\|_\infty \quad \text{pour} \quad A \in \mathfrak{m}^0.$$

Soit $A \in \mathfrak{m}$. La forme linéaire $B \to \varphi(AB)$ sur $\mathfrak{m}^0$ est une forme linéaire F_A ultrafaiblement continue (cor. 8 du th. 3), donc $F_A \in (\mathfrak{m}_0)_*$; en outre

$$\|F_A\| = \varphi(|A|) = \|A\|_1 \quad \text{(cor. 1 du th. 4)}.$$

Si $B \in \mathfrak{m}^0$ est tel que $F_A(B) = \varphi(AB)$ pour tout $A \in \mathfrak{m}$, on a $B = 0$ (cor. 3 du th. 4); donc, compte tenu du théorème 1, l'image de $\mathfrak{m}$ dans $(\mathfrak{m}^0)_*$ par l'application $A \to F_A$ est un sous-espace vectoriel partout dense dans $(\mathfrak{m}^0)_*$ au sens de la norme. Par conséquent, l'application $A \to F_A$ se prolonge en un isomorphisme de l'espace normé L^1 sur $(\mathfrak{m}^0)_*$. Nous identifierons désormais L^1 à $(\mathfrak{m}^0)_*$ par cet isomorphisme et nous avons donc le théorème suivant :

Théorème 5. — *Si φ est fidèle, L^∞ est le dual de L^1.*

Par contre, $(L^\infty)^*$, c'est-à-dire $(\mathfrak{m}^0)^*$, n'est pas L^1 en général. Toutefois, d'après le théorème 2, L^1 est le dual de L^∞ muni de la topologie ultraforte, ou de la topologie ultrafaible.

Les résultats de ce paragraphe sont en rapports étroits avec des résultats de I. E. Segal qui doivent paraître très prochainement.

3. Les espaces L^p. — Posons, pour $A \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$ $(p \geqq 1)$,

$$\|A\|_{p,\varphi} = \|A\|_p = [\varphi(|A|^p)]^{\frac{1}{p}}.$$

Cette notation sera justifiée par la suite.

Théorème 6 (« *inégalité de Hölder* »). — *Soient $p, q, \ldots, r$ des nombres appartenant à l'intervalle $[1, +\infty]$, tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{9}{1} + \ldots + \frac{1}{r} = 1.$$

Soient $A \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$, $B \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{q}}$, $\ldots$, $C \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{r}}$. On a $AB\ldots C \in \mathfrak{m}$ et

$$|\varphi(AB\ldots C)| \leqq \varphi(|AB\ldots C|) \leqq \|A\|_p \|B\|_q \ldots \|C\|_r.$$

En effet, d'après le lemme 4.5 de [4], on peut d'abord se limiter au cas où φ est fidèle et où $\mathfrak{m}^0 = \mathbf{M}$, ce que nous supposerons désormais. La relation $AB\ldots C \in \mathfrak{m}$ résulte de la proposition 2 de [5].

Soit $(E_1, E_2, \ldots, E_h)$ un système de projecteurs fixes de $\mathfrak{m}$, non nuls, deux à deux orthogonaux; soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h)$ un système de nombre complexes variables; soit

$$A^0 = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \ldots + \lambda_h E_h;$$

soit U un opérateur partiellement isométrique fixe de **M** dont le sous-espace initial contient $(E_1 + E_2 + \ldots + E_h)(H)$. Posons $A = UA^0$. On a

$$|A| = |\lambda_1| E_1 + \ldots + |\lambda_h| E_h;$$

si $p < +\infty$,

$$|A|^p = |\lambda_1|^p E_1 + \ldots + |\lambda_h|^p E_h \quad \text{et} \quad \|A\|_p = [|\lambda_1|^p \varphi(E_1) + \ldots + |\lambda_h|^p \varphi(E_h)]^{\frac{1}{p}};$$

si $p = +\infty$,

$$\|A\|_p = \sup(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_h|).$$

Considérons de même des systèmes de projecteurs fixes $(F_1, F_2, \ldots, F_i), \ldots, (G_1, G_2, \ldots, G_k)$, de nombres complexes variables $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i), \ldots, (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)$, d'opérateurs partiellement isométriques fixes V, ..., W, avec des propriétés analogues; soient

$$B^0 = \mu_1 F_1 + \ldots + \mu_i F_i, \quad \ldots, \quad C^0 = \nu_1 G_1 + \ldots + \nu_k G_k,$$
$$B = VB^0, \quad \ldots, \quad C = WC^0.$$

Nous allons démontrer l'inégalité

$$|\varphi(AB\ldots C)| \leqq \|A\|_p \|B\|_q \ldots \|C\|_r$$

pour les opérateurs A, B, ..., C précédents.

On a

$$\varphi(AB\ldots C) = f((\lambda_\alpha), (\mu_\beta), \ldots, (\nu_\gamma)),$$

où f est multilinéaire. Si f est identiquement nulle, l'inégalité est évidente. Sinon, soient $(p_1, q_1, \ldots, r_1)$ des nombres > 0. La borne supérieure $M(p_1, q_1, \ldots, r_1)$ de $|f|$ lorsque les $\lambda_\alpha, \mu_\beta, \ldots, \nu_\gamma$ varient de telle sorte que

$$\Sigma_{\alpha=1}^{h} |\lambda_\alpha|^{\frac{1}{p_1}} \varphi(E_\alpha) \leqq 1, \quad \Sigma_{\beta=1}^{i} |\mu_\beta|^{\frac{1}{q_1}} \varphi(F_\beta) \leqq 1, \quad \ldots, \quad \Sigma_{\gamma=1}^{k} |\nu_\gamma|^{\frac{1}{r_1}} \varphi(G_\gamma) \leqq 1$$

est > 0, et finie [notamment parce que les nombres $\varphi(E_\alpha), \varphi(F_\beta), \ldots, \varphi(G_\gamma)$ sont > 0]. D'après un théorème de Thorin [18], $\log M(p_1, q_1, \ldots, r_1)$ est une fonction convexe de $(p_1, q_1, \ldots, r_1)$. Il est clair, d'autre part, que la fonction $M(p_1, q_1, \ldots, r_1)$ a une limite > 0 quand certaines des variables $(p_1, q_1, \ldots, r_1)$ tendent vers zéro; la fonction ainsi prolongée par continuité, que nous désignerons encore par $M(p_1, q_1, \ldots, r_1)$, est dans tous les cas la borne supérieure de $|f|$ lorsque les $\lambda_\alpha, \mu_\beta, \ldots, \nu_\gamma$ varient de telle sorte que

$$\|A\|_{\frac{1}{p_1}} \leqq 1, \quad \|B\|_{\frac{1}{q_1}} \leqq 1, \quad \ldots, \quad \|C\|_{\frac{1}{r_1}} \leqq 1$$

et $\log M(p_1, q_1, \ldots, r_1)$ est encore convexe.

Or, si $p_1 = 1$, $q_1 = 0, \ldots, r_1 = 0$, les conditions $\|A\|_1 \leqq 1$, $\|B\|_\infty \leqq 1, \ldots, \|C\|_\infty \leqq 1$ entraînent $|\varphi(AB\ldots C)| \leqq 1$, d'après le théorème 4. On a donc

$$\log M(1, 0, \ldots, 0) \leqq 0.$$

De même,

$$\log M(0, 1, \ldots, 0) \leq 0, \qquad \ldots, \qquad \log M(0, 0, \ldots, 1) \leq 0.$$

Donc, si $p_1 + q_1 + \ldots + r_1 = 1$, on a

$$\log M(p_1, q_1, \ldots, r_1) \leq 0,$$

c'est-à-dire que les conditions

$$\| A \|_p \leq 1, \qquad \| B \|_q \leq 1, \qquad \ldots, \qquad \| C \|_r \leq 1,$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{r} = 1$, entraînent $|\varphi(AB\ldots C)| \leq 1$. Par linéarité, on en déduit

$$|\varphi(AB\ldots C)| \leq \| A \|_p \| B \|_q \ldots \| C \|_r$$

pour des opérateurs A, B, ..., C de la forme indiquée.

Maintenant, supposons $A \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$, $B \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{q}}$, ..., $C \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{r}}$ quelconques. Utilisant la décomposition polaire de A et la décomposition spectrale de $|A|$, on voit qu'il existe une suite A_l d'opérateurs de $\mathbf{M}$ auto-adjoints permutables à $|A|$ tels que : 1° $0 \leq A_l \leq 1$; 2° A_l tend fortement vers 1 ; 3° AA_l est du type considéré précédemment. Soient (B_m), ..., (C_n) des suites possédant des propriétés analogues relativement à B et C. On a

$$|\varphi(AA_l BB_m \ldots CC_n)| \leq \| AA_l \|_p \| BB_m \|_q \ldots \| CC_n \|_r.$$

Si $l \to +\infty$,

$$\varphi(AA_l BB_m \ldots CC_n) = \varphi(BB_m \ldots CC_n AA_l)$$

tend vers

$$\varphi(BB_m \ldots CC_n A) = \varphi(ABB_m \ldots CC_n)$$

(cor. 8 du th. 3), puisque

$$BB_m \ldots CC_n A \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{r} + \frac{1}{p}} = \mathfrak{m}.$$

D'autre part, $|AA_l| = |A| A_l$, donc $|AA_l|^p = |A|^p A_l^p$ et A_l^p tend fortement vers 1, avec $0 \leq A_l^p \leq 1$, donc $\| AA_l \|_p$ tend vers $\| A \|_p$. A la limite, on a donc

$$|\varphi(ABB_m \ldots CC_n)| \leq \| A \|_p \| BB_m \|_q \ldots \| CC_n \|_r.$$

Un deuxième passage à la limite montre, de même, que

$$|\varphi(AB \ldots CC_n)| \leq \| A \|_p \| B \|_q \ldots \| CC_n \|_r.$$

De proche en proche, on arrive ainsi à l'inégalité

$$|\varphi(AB \ldots C)| \leq \| A \|_p \| B \|_q \ldots \| C \|_r.$$

D'autre part, il existe un opérateur partiellement isométrique $X \in \mathbf{M}$ tel que $|AB\ldots C| = XAB\ldots C$. Donc, d'après ce qui précède,

$$\varphi(|AB\ldots C|) = |\varphi(XAB\ldots C)| \leq \| X \|_\infty \| A \|_p \| B \|_q \ldots \| C \|_r \leq \| A \|_p \| B \|_q \ldots \| C \|_r.$$

Ceci est l'une des inégalités du théorème 6. Quand à l'inégalité

$$|\varphi(AB\ldots C)| \leqq \varphi(|AB\ldots C|),$$

elle est contenue dans le théorème 4.

Corollaire 1. — *Soit* $A \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$ $(1 \leqq p < +\infty)$. *Le nombre* $\|A\|_p$ *est la borne supérieure des nombres* $|\varphi(AB)|$ *quand* B *parcourt l'ensemble des opérateurs de* $\mathfrak{m}^{\frac{1}{q}}$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ *tels que* $\|B\|_q \leqq 1$; *cette borne supérieure est atteinte.*

Si $p = 1$, il suffit d'appliquer le corollaire 1 du théorème 4. Supposons

$$1 < p < +\infty.$$

En vertu du théorème 6, il suffit de prouver qu'il existe un opérateur $B \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{q}}$ tel que

$$\|B\|_q \leqq 1 \qquad \text{et} \qquad |\varphi(AB)| = \|A\|_p.$$

Or, soit $A = U|A|$ la décomposition polaire de A. Posons $B = \lambda U^*|A^*|^{p-1}$, avec $\lambda > 0$. On a

$$AB = |A^*|U\lambda U^*|A^*|^{p-1} = \lambda |A^*|^p,$$

donc

$$\varphi(AB) = \varphi(\lambda |A^*|^p) = \lambda\varphi(|A|^p)$$

et, d'autre part,

$$|B| = \lambda |A^*|^{p-1}, \qquad \text{donc} \quad \varphi(|B|^q) = \varphi(\lambda^q |A^*|^p) = \lambda^q \varphi(|A|^p);$$

si $\varphi(|A|^p) \neq 0$, on a, en prenant $\lambda = \varphi(|A|^p)^{-\frac{1}{q}}$,

$$\varphi(|B|^q) = 1 \qquad \text{et} \qquad \varphi(AB) = \|A\|_p;$$

si $\varphi(|A|^p) = 0$, le corollaire est immédiat.

Corollaire 2. — (« *inégalité de Minkowski* »). — *Pour* $1 \leqq p \leqq +\infty$, *la fonction* $A \to \|A\|_p$ *est une semi-norme sur* $\mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$.

En effet, cette fonction est enveloppe supérieure de semi-normes d'après le corollaire 1.

Corollaire 3. — *Soient* $p, q, \ldots, r, s$ *des nombres appartenant à l'intervalle* $[1, +\infty]$, *tels que* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\ldots+\frac{1}{r}=\frac{1}{s}$. *Soient* $A \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$, $B \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{q}}$, ..., $C \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{r}}$. *On a* $AB\ldots C \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{s}}$ *et*

$$\|AB\ldots C\|_s \leqq \|A\|_p \|B\|_q \ldots \|C\|_r.$$

Soit, en effet, s' le nombre de l'intervalle $[1, +\infty]$ tel que

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1.$$

On a

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\ldots+\frac{1}{r}+\frac{1}{s'}=1,$$

donc, en vertu du théorème 6, pour tout $D \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{s'}}$ tel que $\| D \|_{s'} \leq 1$, on a

$$\| AB\ldots CD \|_1 \leq \| A \|_p \| B \|_q \ldots \| C \|_r \| D \|_{s'} \leq \| A \|_p \| B \|_q \ldots \| C \|_r.$$

Il suffit alors d'appliquer le corollaire 1.

Remarques. — 1. Lorsque $\mathfrak{m}=\mathbf{M}$, les raisonnements peuvent être adaptés facilement au cas où φ n'est plus supposée normale.

2. Les résultats qui précèdent peuvent être étendus sans peine aux applications $\natural$.

3. Si φ est une forme linéaire positive définie sur un idéal $\mathfrak{m}$ de $\mathbf{M}$, mais non nécessairement centrale, les inégalités

$$|\varphi(AB)| \leq [\varphi(|A|^p)]^{\frac{1}{p}}[\varphi(|B|^q)]^{\frac{1}{q}} \quad \text{et} \quad [\varphi(|A+B|^p)]^{\frac{1}{p}} \leq [\varphi(|A|^p)]^{\frac{1}{p}}+[\varphi(|B|^p)]^{\frac{1}{p}}$$

sont classiquement valables pour $p=q=2$; mais elles ne le sont plus pour p quelconque, et ceci déjà si H est un espace à deux dimensions Ceci montre que l'inégalité de Hölder est, par opposition à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, une propriété « abélienne ».

Si la trace normale φ est fidèle, la semi-norme $\| A \|_p$ est une norme. L'espace de Banach complexe obtenu en complétant l'espace vectoriel complexe $\mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$ muni de la norme $\| A \|_p$ sera désigné par $L^p(\varphi)$ ou, plus brièvement, par L^p; $\mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$ sera identifié à un sous-espace partout dense de L^p. La norme d'un élément $f \in L^p$ sera désignée encore par $\| f \|_p$. L'espace $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$, muni du produit scalaire $\langle A, B \rangle = \varphi(B^*A)$, est un espace préhilbertien; l'espace hilbertien obtenu par complétion n'est autre que L^2.

Soit $A \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$. La forme linéaire $B \to \varphi(AB)$ sur $\mathfrak{m}^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ est continue et de norme $\| A \|_p$ (cor. 1 du th. 6). Elle se prolonge en une forme linéaire F_A continue et de même norme sur L^q. L'application $A \to F_A$ est une application linéaire et isométrique de $\mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$ dans le dual $(L^q)^*$ de L^q; cette application se prolonge de manière unique en une application linéaire et isométrique de L^p dans $(L^q)^*$, par laquelle nous identifions désormais L^p à un sous-espace de $(L^q)^*$.

Théorème 7. — *Pour* $1<p<+\infty$, L^p *est le dual de* $L^q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$.

En effet, soit f un élément de L^q. On a

$$\| f \|_q = \sup |\langle f, A \rangle|,$$

quand A parcourt l'ensemble des opérateurs de $\mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$ tels que $\| A \|_p \leq 1$; ceci résulte du corollaire 1 du théorème 6 quand $f \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{q}}$, et l'on passe de là au cas général par continuité. Il en résulte que $\mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$, et par suite L^p, sont faiblement denses dans $(L^q)^*$. Nous allons montrer, appliquant la méthode de [1], que, si $q \geqq 2$, L^q est uniformément convexe. Il en résultera que L^q et $(L^q)^*$ sont réflexifs, donc que L^p est fortement dense dans $(L^q)^*$ et, par suite, identique à $(L^q)^*$, donc aussi que $L^q = (L^p)^*$ et le théorème sera démontré. Pour établir notre assertion, nous prouverons d'abord les lemmes suivants :

Lemme 4. — *Soient* $q \geqq 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $A \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{q}}$, $B \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{q}}$, $C \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$, $D \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$. *Alors*, $(A+B)C + (A-B)D \in \mathfrak{m}$, *et l'on a*

$$|\varphi((A+B)C + (A-B)D)| \leqq 2^{\frac{1}{p}}[\|A\|_q^q + \|B\|_q^q]^{\frac{1}{q}}[\|C\|_p^p + \|D\|_p^p]^{\frac{1}{p}}.$$

(*On convient que* $[\|A\|_q^q + \|B\|_q^q]^{\frac{1}{q}} = \sup(\|A\|_q, \|B\|_q)$ *si* $q = +\infty$).

En effet, si $q = +\infty$ et $p = 1$, on a, en vertu du théorème 4,

$$\begin{aligned} |\varphi((A+B)C + (A-B)D)| &\leqq |\varphi((A+B)C)| + |\varphi((A-B)D)| \\ &\leqq \|A+B\|_\infty \|C\|_1 + \|A-B\|_\infty \|D\|_1 \\ &\leqq (\|A\|_\infty + \|B\|_\infty)(\|C\|_1 + \|D\|_1) \\ &\leqq 2\sup(\|A\|_\infty, \|B\|_\infty)(\|C\|_1 + \|D\|_1). \end{aligned}$$

Si $p = q = 2$, on a, en vertu du théorème 6,

$$\begin{aligned} |\varphi((A+B)C + (A-B)D)| &\leqq |\varphi((A+B)C)| + |\varphi((A-B)D)| \\ &\leqq \|A+B\|_2 \|C\|_2 + \|A-B\|_2 \|D\|_2 \\ &\leqq [\|A+B\|_2^2 + \|A-B\|_2^2]^{\frac{1}{2}}[\|C\|_2^2 + \|D\|_2^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= 2^{\frac{1}{2}}[\|A\|_2^2 + \|B\|_2^2]^{\frac{1}{2}}[\|C\|_2^2 + \|D\|_2^2]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ceci posé, procédons comme dans la démonstration du théorème 6, en supposant φ fidèle et $\mathfrak{m}^0 = \mathbf{M}$. Soient $(E_\alpha)_{1 \leqq \alpha \leqq h}$, $(E'_{\alpha'})_{1 \leqq \alpha' \leqq h'}$, $(F_\beta)_{1 \leqq \beta \leqq l}$, $(F'_{\beta'})_{1 \leqq \beta' \leqq l'}$ des systèmes de projecteurs non nuls de $\mathfrak{m}$ deux à deux orthogonaux; soient $(\lambda_\alpha)_{1 \leqq \alpha \leqq h}$, $(\lambda'_{\alpha'})_{1 \leqq \alpha' \leqq h'}$, $(\mu_\beta)_{1 \leqq \beta \leqq l}$, $(\mu'_{\beta'})_{1 \leqq \beta' \leqq l'}$ des systèmes de nombres complexes variables; soient

$$A^0 = \Sigma_\alpha \lambda_\alpha E_\alpha, \qquad B^0 = \Sigma_{\alpha'} \lambda'_{\alpha'} E'_{\alpha'}, \qquad C^0 = \Sigma_\beta \mu_\beta F_\beta, \qquad D^0 = \Sigma_{\beta'} \mu'_{\beta'} F'_{\beta'};$$

soient U, U', V, V' des opérateurs partiellement isométriques de $\mathbf{M}$, tels que le sous-espace initial de U (resp. U', V, V') contienne $(\Sigma_\alpha E_\alpha)(H)$ [resp. $(\Sigma_{\alpha'} E'_{\alpha'})(H)$, $(\Sigma_\beta F_\beta)(H)$, $(\Sigma_{\beta'} F'_{\beta'})(H)$]. Posons

$$A = UA^0, \qquad B = U'B^0, \qquad C = VC^0, \qquad D = V'D^0.$$

On a

$$\begin{aligned} |A| &= \Sigma_\alpha |\lambda_\alpha| E_\alpha, \qquad & |B| &= \Sigma_{\alpha'} |\lambda'_{\alpha'}| E'_{\alpha'}, \\ |C| &= \Sigma_\beta |\mu_\beta| F_\beta, & |D| &= \Sigma_{\beta'} |\mu'_{\beta'}| F'_{\beta'}; \end{aligned}$$

$$[\|A\|_q^q + \|B\|_q^q]^{\frac{1}{q}} = [\Sigma_\alpha |\lambda_\alpha|^q \varphi(E_\alpha) + \Sigma_{\alpha'} |\lambda'_{\alpha'}|^q \varphi(E'_{\alpha'})]^{\frac{1}{q}} \quad \text{si } q < +\infty$$

et

$$\sup(\| A \|_\infty, \| B \|_\infty) = \sup(| \lambda_\alpha |, | \lambda'_{\alpha'} |);$$

enfin,

$$[\| C \|_p^p + \| D \|_p^p]^{\frac{1}{p}} = [\Sigma_\beta | \mu_\beta |^p \varphi(F_\beta) + \Sigma_{\beta'} | \mu'_{\beta'} |^p \varphi(F_{\beta'})]^{\frac{1}{p}}.$$

Nous allons démontrer l'inégalité

$$| \varphi((A + B)C + (A - B)D) | \leqq 2^{\frac{1}{p}} [\| A \|_q^q + \| B \|_q^q]^{\frac{1}{q}} [\| C \|_p^p + \| D \|_p^p]^{\frac{1}{p}}$$

pour les opérateurs A, B, C, D précédents.

On a

$$\varphi((A + B)C + (A - B)D) = f((\lambda_\alpha), (\lambda'_{\alpha'}), (\mu_\beta), (\mu'_{\beta'})),$$

où f est multilinéaire. Si f est identiquement nulle, l'inégalité est évidente. Sinon, soient (p_1, q_1) des nombres > 0. La borne supérieure $M(p_1, q_1)$ de $| f |$ lorsque les λ_α, $\lambda'_{\alpha'}$, μ_β, $\mu'_{\beta'}$ varient de telle sorte que

$$\Sigma_\alpha | \lambda_\alpha |^{\frac{1}{q_1}} \varphi(E_\alpha) + \Sigma_{\alpha'} | \lambda'_{\alpha'} |^{\frac{1}{q_1}} \varphi(E'_{\alpha'}) \leqq 1,$$

$$\Sigma_\beta | \mu_\beta |^{\frac{1}{p_1}} \varphi(F_\beta) + \Sigma_{\beta'} | \mu'_{\beta'} |^{\frac{1}{p_1}} \varphi(F'_{\beta'}) \leqq 1$$

est > 0 et finie; et la fonction $\log M(p_1, q_1)$ est convexe. La fonction $M(p_1, q_1)$ a une limite > 0 quand p_1 ou q_1 tendent vers zéro; la fonction ainsi prolongée par continuité, que nous désignons encore par $M(p_1, q_1)$, est dans tous les cas la borne supérieure de $| f |$ quand les λ_α, $\lambda'_{\alpha'}$, μ_β, $\mu'_{\beta'}$ varient de telle sorte que

$$\left[\| A \|_{\frac{1}{q_1}}^{\frac{1}{q_1}} + \| B \|_{\frac{1}{q_1}}^{\frac{1}{q_1}}\right]^{q_1} \leqq 1, \qquad \left[\| C \|_{\frac{1}{p_1}}^{\frac{1}{p_1}} + \| D \|_{\frac{1}{p_1}}^{\frac{1}{p_1}}\right]^{p_1} \leqq 1;$$

et $\log M(p_1, q_1)$ est encore convexe.

Or, d'après ce qu'on a vu au début de la démonstration,

$$M(0, 1) \leqq 2 \quad \text{et} \quad M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \leqq 2^{\frac{1}{2}}.$$

Donc, si $q \geqq 2$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a, observant que $\frac{1}{q} = \left(1 - \frac{2}{q}\right) 0 + \frac{2}{q} \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{p} = \left(1 - \frac{2}{q}\right) 1 + \frac{2}{q} \frac{1}{2}$,

$$M\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right) \leqq M(0, 1)^{1 - \frac{2}{q}} M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{q}} \leqq 2^{1 - \frac{2}{q}} 2^{\frac{1}{q}} = 2^{\frac{1}{p}};$$

ce qui établit l'inégalité annoncée. On passe ensuite au cas où $A \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{q}}$, $B \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{q}}$, $C \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$, $D \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$ sont quelconques exactement comme dans la démonstration du théorème 6.

Lemme 5. — *Soient $q \geqq 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $A \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{q}}$, $B \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{q}}$. On a*

$$\| A + B \|_q^q + \| A - B \|_q^q \leqq 2^{\frac{q}{p}} [\| A \|_q^q + \| B \|_q^q].$$

En effet, soit $\varepsilon > 0$. Il existe des nombres $c \geqq 0$ et $d \geqq 0$ tels que $(c^p + d^p)^{\frac{1}{p}} \leqq 1$ et

$$[\| A + B \|_q^q + \| A - B \|_q^q]^{\frac{1}{q}} \leqq \| A + B \|_q c + \| A - B \|_q d + \varepsilon.$$

D'autre part, il existe un $C \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$ tel que

$$\| C \|_p = c \qquad \text{et} \qquad \| A + B \|_q \| C \|_p \leqq | \varphi(A + B)C) | + \varepsilon$$

(cor. 1 du th. 6); en multipliant C par un nombre complexe de module 1, on peut de plus supposer $\varphi((A + B)C) \geqq 0$. De même, il existe un $D \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$ tel que

$$\| D \|_p = d, \qquad \| A - B \|_q \| D \|_p \leqq | \varphi((A - B) D) | + \varepsilon, \qquad \varphi((A - B) D) \geqq 0.$$

Alors, compte tenu du lemme 4,

$$\begin{aligned}
[\| A + B \|_q^q + \| A - B \|_q^q]^{\frac{1}{q}} &\leqq \| A + B \|_q \| C \|_p + \| A - B \|_q \| D \|_p + \varepsilon \\
&\leqq \varphi((A + B)C) + \varepsilon + \varphi((A - B)D) + \varepsilon + \varepsilon \\
&= \varphi((A + B)C + (A - B)D) + 3\varepsilon \\
&\leqq 2^{\frac{1}{p}}[\| A \|_q^q + \| B \|_q^q]^{\frac{1}{q}}[\| C \|_p^p + \| D \|_p^p]^{\frac{1}{p}} + 3\varepsilon \\
&\leqq 2^{\frac{1}{p}}[\| A \|_q^q + \| B \|_q^q]^{\frac{1}{q}} + 3\varepsilon
\end{aligned}$$

et, comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, le lemme est démontré.

Nous pouvons maintenant démontrer que L^q est uniformément convexe pour $q \geqq 2$. En effet, si $f \in L^q$ et $g \in L^q$, on déduit du lemme 5 par passage à la limite l'inégalité

$$\| f + g \|_q^q + \| f - g \|_q^q \leqq 2^{\frac{q}{p}}[\| f \|_q^q + \| g \|_q^q].$$

Si $\| f \|_q = 1$, $\| g \|_q = 1$ et $\| f - g \|_q \geqq \varepsilon$, on a

$$\| f + g \|_q^q \leqq 2^{\frac{q}{p}+1} - \varepsilon^q = 2^q - \varepsilon^q,$$

d'où

$$\left\| \frac{1}{2}(f + g) \right\|_q \leqq \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^q \right]^{\frac{1}{q}},$$

ce qui établit notre assertion.

Remarque. — Nous n'avons pu décider si L^p est uniformément convexe pour $1 \leqq p < 2$.

Nous allons maintenant compléter l'étude des espaces L^p par quelques propositions.

Proposition 5. — *Soit $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{m}$ un idéal de $\mathbf{M}$ tel que $\mathfrak{n}^0 = \mathfrak{m}^0$. Pour $1 \leqq p < +\infty$, $\mathfrak{n}$ est partout dense dans L^p au sens de la norme $\| \ \|_p$. L'intersection de $\mathfrak{n}$ avec la boule unité de L^∞ est partout dense dans cette boule pour la topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$.*

Soit $1 \leq p < +\infty$ et montrons que $\mathfrak{n}$ est partout dense dans L^p au sens de la norme $\| \quad \|_p$. Il suffit de prouver que $\mathfrak{n}^+$ est partout dense dans $\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}\right)^+$. Or, l'adhérence de $\mathfrak{n}^+$ contient d'abord tous les projecteurs de $\mathfrak{m}$; en effet, si E est un projecteur de $\mathfrak{m}$, il existe ([4], lemme 3.11) une famille filtrante croissante (E_ι) de projecteurs de $\mathfrak{n}$ dont la borne supérieure est E; donc $\varphi(E)$ est la borne supérieure des $\varphi(E_\iota)$, donc les $\varphi(E - E_\iota)$ ont pour borne inférieure zéro, donc

$$\| E - E_\iota \|_p^p = \varphi((E - E_\iota)^p) = \varphi(E - E_\iota)$$

peut être rendu arbitrairement petit. Ensuite, si A est un élément de $\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}\right)^+$, il existe, d'après la théorie spectrale, une suite (A_n) d'opérateurs de $\mathbf{M}$ auto-adjoints permutables à A tels que : 1° $0 \leq A_n \leq 1$; 2° A_n tend fortement vers 1; 3° AA_n est combinaison linéaire finie de projecteurs de $\mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$, donc de $\mathfrak{m}$. D'après ce qui précède, AA_n appartient à l'adhérence de $\mathfrak{n}$ pour $\| \quad \|_p$ et

$$\| A - AA_n \|_p^p = \varphi[(A(1 - A_n))^p] = \varphi(A^p(1 - A_n)^p)$$

tend vers zéro, parce que $A^p \in \mathfrak{m}$ et que $(1 - A_n)^p$ tend fortement vers zéro en restant borné.

Pour $p = +\infty$, la propriété précédente n'est pas exacte en général; autrement dit, $\mathfrak{n}$ n'est pas partout dense dans $\mathfrak{m}^0$ pour $\| \quad \|_\infty$. Mais, si $A \in \mathfrak{m}_0$ est tel que $\| A \|_\infty \leq 1$, on a $\| EA \|_\infty \leq 1$ pour tout projecteur $E \in \mathfrak{n}$, et $EA \in \mathfrak{n}$; et EA peut converger fortement vers A, donc converger vers A au sens de $\sigma(L^\infty, L^1)$.

Proposition 6. — *Soient p et q des nombres de l'intervalle $[1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{m}$ un idéal de $\mathbf{M}$ tel que $\mathfrak{n}^0 = \mathfrak{m}^0$. Supposons φ maximale. Alors, si $A \in \mathfrak{m}^0$ est tel que $|\varphi(BA)| \leq k \| B \|_q$ pour $B \in \mathfrak{n}$, on a $A \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$ et $\| A \|_p \leq k$.*

Soit $A = U|A|$ la décomposition polaire de A. Pour tout $B \in \mathfrak{n}$, on a

$$|\varphi(B|A|) = |\varphi(BU^*A)| \leq k \| BU^* \|_q \leq k \| B \|_q.$$

On est donc ramené au cas où $A \geq 0$, ce que nous supposerons désormais. Soit

$$A = \int_0^{+\infty} \lambda \, dE_\lambda,$$

la décomposition spectrale de A. Pour $\lambda > 0$, on a $E_\lambda = A_\lambda A$, avec $\| A_\lambda \|_\infty \leq \lambda^{-1}$. Soit F un projecteur quelconque de $\mathfrak{m}$ tel que $F \leq E_\lambda$; on a, pour $B \in \mathfrak{n}$, $|\varphi(BF)| = |\varphi(BFE_\lambda)| = |\varphi(BFA_\lambda A)| \leq \| BFA_\lambda \|_q \| A \|_p \leq k\lambda^{-1} \| B \|_q$; d'après la proposition 5, on a donc $|\varphi(BF)| \leq k\lambda^{-1} \| B \|_q$ pour tout $B \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{q}}$; alors, d'après le corollaire 1 du théorème 6, $\| F \|_p \leq k\lambda^{-1}$, c'ést-à-dire $\varphi(F) \leq k^p \lambda^{-p}$; comme φ est maximale, on en déduit que $E_\lambda \in \mathfrak{m}$. On a d'ailleurs

$$|\varphi(BE_\lambda A)| \leq k \| BE_\lambda \|_q \leq k \| B \|_q$$

pour $B \in \mathfrak{n}$, et le même raisonnement prouve que $\| E_\lambda A \|_p \leq k$, c'est-à-dire $\varphi(E_\lambda A^p) \leq k^p$, pour tout $\lambda > 0$. Mais A^p est la borne supérieure des opérateurs $E_\lambda A^p (\lambda > 0)$; comme φ est normale maximale, on en déduit que $A^p \in \mathfrak{m}$ et que $\varphi(A^p) \leq k^p$, ce qui démontre la proposition.

Corollaire. — *Soit* Σ_p *l'ensemble des* $A \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$ *tels que* $\| A \|_p \leq 1$. *Dans les hypothèses de la proposition* 6, Σ_p *est ultrafaiblement fermé dans* $\mathbf{M}$.

En effet, la relation $A \in \Sigma_p$ est équivalente, d'après la proposition 6, à la relation « $A \in \mathfrak{m}^0$ et $|\varphi(AB)| \leq \| B \|_q$ pour $B \in \mathfrak{m}$ ». Donc Σ_p est l'intersection de $\mathfrak{m}^0$ et des ensembles définis par les inégalités $|\varphi(AB)| \leq \| B \|_q$ quand B parcourt $\mathfrak{m}$. Ces ensembles sont ultrafaiblement fermés puisque, pour $B \in \mathfrak{m}$, l'application $A \to \varphi(AB)$ est ultrafaiblement continue.

Nous désignerons par $\mathfrak{m}_0$, ou par L_∞, l'adhérence de $\mathfrak{m}$ dans L^∞ pour la topologie uniforme. C'est aussi, comme on le voit aussitôt, l'adhérence de tout $\mathfrak{m}^\alpha$ $(\alpha > 0)$ dans $\mathbf{M}$ pour la topologie uniforme.

Proposition 7. — *Soient* p *et* q *des nombres de l'intervalle* $[1, +\infty]$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Supposons* φ *maximale :*

a. Sur $\Sigma_p \cap \Sigma_\infty$ *la topologie faible est une topologie d'espace compact; elle est identique à la topologie* $\sigma(L^p, L^q)$ *pour* $p > 1$, *à la topologie* $\sigma(L^1, L_\infty)$ *pour* $p = 1$. *Donc* $\Sigma_p \cap \Sigma_\infty$ *est fermé dans* L^p.

b. Sur $\Sigma_p \cap \Sigma_\infty$, *la topologie définie par la norme* $\| \ \|_p$ *est plus fine que la topologie forte; ces deux topologies sont identiques (sur* $\Sigma_p \cap \Sigma_\infty$*) lorsque* $\mathfrak{m} = \mathbf{M}$.

En effet, Σ_∞ est faiblement compacte, donc $\Sigma_p \cap \Sigma_\infty$, qui est faiblement fermé dans Σ_∞ (cor. de la prop. 6), est faiblement compacte.

Si $B \in \mathfrak{m}$, l'application $A \to \varphi(AB)$ est ultrafaiblement continue. Donc, sur Σ_∞, la topologie faible est plus fine que la topologie $\sigma(L^\infty, \mathfrak{m})$. D'autre part, sur Σ_p, la topologie $\sigma\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}, \mathfrak{m}\right)$ est identique à $\sigma(L^p, L^q)$ si $p > 1$ (prop. 5) et à $\sigma(L_1, L_\infty)$ si $p = 1$. Donc, sur $\Sigma_p \cap \Sigma_\infty$, la topologie faible est plus fine que $\sigma(L^p, L^q)$ [resp. $\sigma(L^1, L_\infty)$ si $p = 1$]. Comme $\Sigma_p \cap \Sigma_\infty$ est faiblement compacte, et séparée pour $\sigma(L^p, L^q)$ [resp. $\sigma(L^1, L_\infty)$], on obtient l'identité de la topologie faible et de $\sigma(L^p, L^q)$ [resp. $\sigma(L^1, L_\infty)$] sur $\Sigma_p \cap \Sigma_\infty$.

Si $\| A \|_p \to 0$ et $\| A \|_\infty \leq 1$, on a $\| A^* A \|_p \to 0$, puisque $\| A^* A \|_p \leq \| A^* \|_\infty \| A \|_p$. D'après ce qui précède, $A^* A$ tend vers zéro faiblement, c'est-à-dire que A tend vers zéro fortement. Donc, sur $\Sigma_p \cap \Sigma_\infty$, la topologie définie par la norme $\| \ \|_p$ est plus fine que la topologie forte. Enfin, supposons $\mathfrak{m} = \mathbf{M}$. Si A tend fortement vers zéro avec $\| A \| \leq 1$, $|A|$ tend fortement vers zéro, donc aussi $|A|^p$, en restant borné, donc $\| A \|_p^p = \varphi(|A|^p 1)$ tend vers zéro, ce qui prouve que, sur Σ_∞, la topologie forte est plus fine que la topologie définie par la norme $\| \ \|_p$. [On a d'ailleurs, si $\varphi(1) = 1$, $\Sigma_\infty \subset \Sigma_p$.]

Remarque. — Lorsque $\mathbf{M}$ est l'anneau $\mathbf{B}$ de tous les opérateurs et que φ est la trace usuelle, il est immédiat que $\| A \|_\infty \leq \| A \|_1$ pour $A \in \mathfrak{m}$. Donc $\Sigma_1 \cap \Sigma_\infty = \Sigma_1$. Comme $\Sigma_1 \cap \Sigma_\infty$ est fermé dans L^1, on voit d'abord que $\mathfrak{m} = L^1$. Comme Σ_1 est compacte pour la topologie $\sigma(L^1, L_\infty)$, on voit, en raisonnant comme dans le théorème 1, que L^1 est dual de L_∞. Comme ici L_∞ n'est autre que l'ensemble des opérateurs complètement continus, on a retrouvé un résultat de [3] (dû à R. Schatten et J. von Neumann).

Enfin, la proposition suivante complète l'inégalité de Hölder :

Proposition 8. — *Soit φ une trace normale fidèle définie sur l'idéal $\mathfrak{m}$ de $\mathbf{M}$. Soient* A *et* B *des opérateurs auto-adjoints* ≥ 0 *tels que* $A \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$, $B \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{q}}$ $\left(1 < p < +\infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$. *Si* $\varphi(AB) = \| A \|_p \| B \|_q$, A^p *et* B^q *sont proportionnels.*

Le lemme suivant présente un certain intérêt propre.

Lemme 6. — *Soit φ une trace normale fidèle définie sur l'idéal $\mathfrak{m}$ de $\mathbf{M}$. Soient* A *et* B *des opérateurs auto-adjoints tels que* $A \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$, $B \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{q}}$ $\left(1 \leq p \leq +\infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$. *Si* $\varphi(AB) \geq \varphi(AUBU^{-1})$ [*resp.* $\varphi(AB) \leq \varphi(AUBU^{-1})$] *pour tout opérateur unitaire* $U \in \mathbf{M}$, A *et* B *sont permutables.*

En effet, soit H un opérateur auto-adjoint quelconque de $\mathbf{M}$. La fonction de variable réelle $f(t) = \varphi(A e^{itH} B e^{-itH})$ est dérivable. En effet, on a

$$e^{i(t+k)H} = e^{itH} + k(iH e^{itH} + K),$$

avec $\| K \| \to 0$ quand $k \to 0$. Donc

$$\begin{aligned} k^{-1}[f(t+k) - f(t)] = \varphi(A iH e^{itH} B e^{-itH}) + \varphi(A e^{itH} B(-i) H e^{-itH}) + \varphi(AKB e^{-itH}) \\ + \varphi(A e^{itH} BK^*) + k\varphi(A(iH e^{itH} + K)B(-iH e^{-itH} + K^*)). \end{aligned}$$

Or,

$$| \varphi(AKB e^{-itH}) | \leq \| AK \|_p \| B e^{-itH} \|_q \leq \| K \| . \| A \|_p \| B \|_q,$$

donc $\varphi(AKB e^{-itH}) \to 0$ quand $k \to 0$. En raisonnant de façon analogue pour les derniers termes, on voit que $f'(t)$ existe et vaut

$$\varphi(iAH e^{itH} B e^{-itH} - iA e^{itH} BH e^{-itH}).$$

En particulier, comme f est maximum ou minimum pour $t = 0$, on a

$$0 = f'(0) = \varphi(iAHB - iABH) = \varphi[i(BA - AB)H].$$

L'opérateur $i(BA - AB)$ est auto-adjoint. Prenant $H = i(BA - AB)$, il vient $\varphi(H^2) = 0$, donc $H = 0$, puisque φ est fidèle, c'est-à-dire $BA = AB$.

Ceci établi, abordons la démonstration de la proposition 8. Si

$$\varphi(AB) = \| A \|_p \| B \|_q,$$

on a

$$\varphi(AB) \geqq \varphi(AUBU^{-1})$$

pour tout opérateur unitaire $U \in M$ d'après le théorème 6, donc A et B sont permutables, et nous sommes ramenés à un problème « d'intégration commutative ». Soit Ω le spectre de la C^*-algèbre commutative engendrée par A, B, 1; soient $A(\zeta)$, $B(\zeta)$ les fonctions $\geqq 0$ associées à A et B sur Ω; soit μ la mesure positive de support Ω correspondant à φ. On a

$$\int A(\zeta)B(\zeta)\,d\mu(\zeta) = \left[\int A(\zeta)^p\,d\mu(\zeta)\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int B(\zeta)^q\,d\mu(\zeta)\right]^{\frac{1}{q}},$$

donc $A(\zeta)^p$ et $B(\zeta)^q$ sont proportionnelles, ce qui prouve la proposition.

4. **Applications d'un anneau d'opérateurs dans un sous-anneau.** — Soit φ une trace définie sur l'idéal $\mathfrak{m}$ de $\mathbf{M}$. Soit $\mathbf{N}$ un sous-anneau d'opérateurs de $\mathbf{M}$. Soit $\mathbf{P}$ l'ensemble des opérateurs de $\mathbf{M}$ permutables à $\mathbf{N}$. La trace φ induit sur $\mathbf{N}$ une trace ψ, dont l'idéal de définition est $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap \mathbf{N}$. Il est immédiat que $\mathfrak{n}^\alpha = \mathfrak{m}^\alpha \cap \mathbf{N}$ pour $0 < \alpha \leqq +\infty$.

Si φ est normale (resp. fidèle, maximale), il est immédiat que ψ est normale (resp. fidèle, maximale). Par contre, φ peut être essentielle sans que ψ soit essentielle; autrement dit, on peut avoir $\mathfrak{m}^0 = \mathbf{M}$ et $\mathfrak{n}^0 \neq \mathbf{N}$; soit E_φ le projecteur central maximum de $\mathbf{N}$ tel que ψ induise sur $E_\varphi\mathbf{N} = \mathfrak{n}^0$ une trace essentielle.

Théorème 8. — *Soit φ une trace normale, fidèle, essentielle et maximale, définie sur l'idéal $\mathfrak{m}$ de $\mathbf{M}$. Soit $\mathbf{N}$ un sous-anneau d'opérateurs de $\mathbf{M}$ dans lequel φ induit une trace ψ définie sur l'idéal $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap \mathbf{N}$. Soit $\mathbf{N}^\perp$ l'ensemble des $A \in \mathbf{M}$ tels que $\varphi(AB) = 0$ pour $B \in \mathfrak{n}$.*

1° *La somme $E_\varphi\mathbf{N} + \mathbf{N}^\perp$ est directe et égale à $\mathbf{M}$. Soit $A \to A^\vee$ le projecteur de $\mathbf{M}$ sur $E_\varphi\mathbf{N}$ correspondant.*

2° *Pour $A \in \mathbf{M}$, $\|A^\vee\|_\infty \leqq \|A\|_\infty$.*

3° *Pour $A \in \mathbf{M}$, $A^{*\vee} = A^{\vee *}$.*

4° *Si $A \geqq 0$, on a $A^\vee \geqq 0$; si, de plus, $A^\vee = 0$, on a $E_\varphi A E_\varphi = 0$.*

5° *Si $A \in \mathbf{M}$, $B \in \mathbf{N}$ et $B' \in \mathbf{N}$, on a $(BAB')^\vee = BA^\vee B'$. En particulier, $(E_\varphi A E_\varphi)^\vee = A^\vee$.*

6° *Si $A \in \mathbf{M}$ et si $B \in \mathbf{P}$, $(AB)^\vee = (BA)^\vee$.*

7° *L'application $A \to A^\vee$ est ultrafaiblement et ultrafortement continue.*

8° *Pour $1 \leqq p \leqq +\infty$, on a $\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}\right)^\vee = \mathfrak{n}^{\frac{1}{p}}$, de sorte que $\mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$ est somme directe de $\mathfrak{m}^{\frac{1}{p}} \cap E_\varphi\mathbf{N} = \mathfrak{n}^{\frac{1}{p}}$ et de $\mathfrak{m}^{\frac{1}{p}} \cap \mathbf{N}^\perp$. Pour $A \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$, on a $\|A^\vee\|_p \leqq \|A\|_p$, et $A^\vee$ est le seul élément de $E_\varphi\mathbf{N}$ tel que $\varphi((A - A^\vee)B) = 0$ pour $B \in \mathfrak{n}^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.*

En effet, soit $A \in \mathbf{M} = \mathfrak{m}^0$. Pour $B \in \mathfrak{n}$, on a

$$|\varphi(AB)| \leqq \|A\|_\infty \|B\|_{1,\varphi} = \|A\|_\infty \|B\|_{1,\psi},$$

donc (th. 5) il existe un élément et un seul $A^\vee \in \mathfrak{n}^0 = E_\varphi \mathbf{N}$ tel que

$$\varphi(AB) = \psi(A^\vee B) = \varphi(A^\vee B)$$

pour tout $B \in \mathfrak{n}$, c'est-à-dire tel que $A - A^\vee \in \mathbf{N}^\perp$. Donc $\mathbf{M}$ est la somme directe de $E_\varphi \mathbf{N}$ et de $\mathbf{N}^\perp$: la propriété 1° est démontrée. Comme $\| A^\vee \|_\infty$ est la borne supérieure de

$$|\psi(A^\vee B)| = |\varphi(AB)| \leq \| A \|_\infty \| B \|_{1,\psi},$$

quand B varie dans $\mathbf{N}$ de telle sorte que $\| B \|_{1,\psi} \leq 1$, on voit que $\| A^\vee \|_\infty \leq \| A \|_\infty$, ce qui est la propriété 2°.

Pour $A \in \mathbf{M}$ et $B \in \mathfrak{n}$, on a

$$\varphi(A^{*\vee} B) = \varphi(A^* B) = \varphi(BA^*) = \overline{\varphi(AB^*)} = \overline{\varphi(A^\vee B^*)} = \varphi(BA^{\vee *}) = \varphi(A^{\vee *} B),$$

donc $A^{*\vee} = A^{\vee *}$, ce qui est la propriété 3°.

Si $A \geq 0$, on a d'abord $A^{\vee *} = A^\vee$ d'après la propriété 3°. En outre, pour $B \in \mathfrak{n}^+$, $\varphi(A^\vee B) = \varphi(AB) \geq 0$. Ceci posé, soient $A^\vee_+ \geq 0$ et $A^\vee_- \geq 0$ les parties positive et négative de $A^\vee$, de telle sorte que $A^\vee = A^\vee_+ - A^\vee_-$. Si $A^\vee_- \neq 0$, il existe, puisque $A^\vee_- \in \mathfrak{n}^0$, un projecteur $E \in \mathfrak{n}$ tel que

$$A^\vee_+ E = 0, \qquad EA^\vee_- E \neq 0.$$

Comme φ est fidèle, on a

$$\varphi(A^\vee E) = -\varphi(A^\vee_- E) = -\varphi(EA^\vee_- E) < 0,$$

ce qui est contradictoire. Donc $A^\vee \geq 0$, ce qui est la première partie de la propriété 4°.

Si $A \in \mathbf{M}$, $B \in \mathbf{N}$, $B' \in \mathbf{N}$ et $C \in \mathfrak{n}$, on a

$$\varphi((BAB')^\vee C) = \varphi(BAB'C) = \varphi(AB'CB) = \varphi(A^\vee B'CB) = \varphi((BA^\vee B')C),$$

donc $(BAB')^\vee = BA^\vee B'$. En particulier, $(E_\varphi A E_\varphi)^\vee = E_\varphi A^\vee E_\varphi = A^\vee$: la propriété 5° est démontrée.

Si $A \in \mathbf{M}$ et si $B \in \mathbf{P}$, on a, pour $C \in \mathfrak{n}$

$$\varphi((AB)^\vee C) = \varphi(ABC) = \varphi(ACB) = \varphi(BAC) = \varphi((BA)^\vee C),$$

donc $(BA)^\vee = (AB)^\vee$, ce qui est la propriété 6°.

Pour tout $B \in \mathfrak{n}$, $\psi(A^\vee B) = \varphi(AB)$ est une fonction ultrafaiblement continue de A (cor. 8 du th. 3). Observons que, quand $\| A \|_\infty$ est borné, $\| A^\vee \|_\infty$ est borné (propriété 2°) et que, sur les parties bornées de $\mathbf{M}$ (resp. $\mathfrak{n}^0 = E_\varphi \mathbf{N}$), la topologie $\sigma(\mathbf{M}, \mathfrak{m})$ [resp. $\sigma(\mathfrak{n}^0, \mathfrak{n})$] est identique à la topologie ultrafaible. Ainsi, l'application linéaire positive $A \to A^\vee$, restreinte aux parties bornées de $\mathbf{M}$, est faiblement continue; donc $A \to A^\vee$ est normale et, par suite, ultrafaiblement continue d'après le corollaire 1 du théorème 3. D'après le même corollaire, cette application est ultrafortement continue; en effet, on a

$$0 \leq (A - A^\vee)^*(A - A^\vee) = A^* A - A^* A^\vee - A^{\vee *} A + A^{\vee *} A^\vee,$$

donc

$$o \leq (A^* A)^{\mathrm{v}} - A^{*\mathrm{v}} A^{\mathrm{v}} - A^{\mathrm{v}*} A^{\mathrm{v}} + A^{\mathrm{v}*} A^{\mathrm{v}} = (A^* A)^{\mathrm{v}} - A^{\mathrm{v}*} A^{\mathrm{v}}$$

et la propriété 7° est démontrée.

Maintenant, supposons $A \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$. Pour $B \in \mathfrak{n}$, on a

$$|\psi(A^{\mathrm{v}}B)| = |\varphi(AB)| \leq \|A\|_p \|B\|_q,$$

donc (proposition 6)

$$A^{\mathrm{v}} \in \mathfrak{n}^{\frac{1}{p}} \qquad \text{et} \qquad \|A^{\mathrm{v}}\|_p \leq \|A\|_p$$

(en vertu de la maximalité de φ qui intervient seulement ici). Si $A' \in E_\varphi \mathbf{N}$ est tel que $\varphi((A - A')B) = o$ pour $B \in \mathfrak{n}^{\frac{1}{q}}$, donc pour $B \in \mathfrak{n}$, on a $A - A' \in \mathbf{N}^\perp$, donc $A' = A^{\mathrm{v}}$. Réciproquement, on a $\varphi((A - A^{\mathrm{v}})B) = o$ pour $B \in \mathfrak{n}$, donc pour $B \in \mathfrak{n}^{\frac{1}{q}}$ (d'après la proposition 5 pour $q < +\infty$ et d'après le corollaire 8 du théorème 3 pour $q = +\infty$). La propriété 8° est démontrée.

Reste à prouver la deuxième moitié de la propriété 4°. Supposons donc $A \in \mathbf{M}$ et $A^{\mathrm{v}} = o$. Si $E_\varphi A E_\varphi \neq o$, il existe un $A' \in \mathfrak{m}^+$ tel que $A' \leq E_\varphi A E_\varphi$ (donc $E_\varphi A' E_\varphi = A'$) et $\varphi(A') > o$ (parce que φ est fidèle et essentielle). On a

$$o \leq A'^{\mathrm{v}} \leq (E_\varphi A E_\varphi)^{\mathrm{v}} = A^{\mathrm{v}} = o,$$

donc, comme $A' \in \mathfrak{m}$ et faisant usage de la propriété 8°

$$o = \varphi(A'^{\mathrm{v}} E_\varphi) = \varphi(A' E_\varphi) = \varphi(E_\varphi A' E_\varphi) = \varphi(A'),$$

ce qui est contradictoire. Donc $E_\varphi A E_\varphi = o$, ce qui achève de démontrer le théorème.

Remarque. — En combinant les propositions 1 et 7 et le théorème 8, on retrouve en particulier le théorème 1 de [11].

Supposons maintenant que, sans changer $\mathbf{N}$, on remplace φ par une autre trace normale fidèle essentielle et maximale φ'. Des exemples simples montrent que, en général, $E_{\varphi'} \neq E_\varphi$; même si $E_{\varphi'} = E_\varphi$, l'application $A \to A^{\mathrm{v}}$ est en général modifiée. Nous allons voir toutefois que, dans un cas important, E_φ et l'application $A \to A^{\mathrm{v}}$ ne dépendent que de $\mathbf{N}$ (et de $\mathbf{M}$).

PROPOSITION 8. — *Soient φ et φ' deux traces normales fidèles essentielles et maximales sur $\mathbf{M}$. Supposons que $\mathbf{N}$ contienne le centre $\mathbf{M}^\natural$ de $\mathbf{M}$. Alors, $E_\varphi = E_{\varphi'}$, et les applications $A \to A^{\mathrm{v}}$ définies par φ et φ' sont identiques.*

En effet, soient φ^* et φ'^* les pseudo-traces associées à φ et φ' ([4], prop. 7). D'après le théorème 3 de [4], il existe une suite croissante de projecteurs $E_n \in \mathbf{M}^\natural$, tendant fortement vers 1, telle que, pour tout $A \in \mathbf{M}^+$,

$$\varphi^*(AE_n) \leq k_n \varphi'^*(AE_n) \qquad (o \leq k_n < +\infty);$$

on en déduit que $E_n\mathfrak{m} \supset E_n\mathfrak{m}'$ ($\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$ désignant les idéaux de définition de φ et φ'); en outre, encore d'après le théorème 3 de [4], il existe un opérateur $K_n \in \mathbf{M}^{\natural +}$ tel que, pour $A \in \mathfrak{m}'$, on ait

$$\varphi(AE_n) = \varphi'(AE_nK_n).$$

Ceci posé, soient $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap \mathbf{N}$, $\mathfrak{n}' = \mathfrak{m}' \cap \mathbf{N}$ et $B' \in \mathfrak{n}'$. On a

$$B'E_n \in E_n\mathfrak{m}' \subset E_n\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m},$$

et $B'E_n \in \mathbf{N}$ (parce que $E_n \in \mathbf{M}^{\natural} \subset \mathbf{N}$); donc $B'E_n \in \mathfrak{n}$. Or, $B'E_n$ tend fortement vers B' quand $n \to +\infty$, donc $B' \in \mathfrak{n}^0$. Ainsi, $\mathfrak{n}' \subset \mathfrak{n}^0$, donc $\mathfrak{n}'^0 \subset \mathfrak{n}^0$ et, par symétrie, $\mathfrak{n}'^0 = \mathfrak{n}^0$, c'est-à-dire $E_\varphi = E_{\varphi'}$.

Maintenant, soit $A \in \mathbf{M}$ tel que $\varphi'(AB') = 0$ pour $B' \in \mathfrak{n}'$. On a

$$\varphi(AB'E_n) = \varphi'(AB'E_nK_n) = 0,$$

car $B'E_nK_n \in \mathfrak{n}'$. Comme

$$(E_n\mathfrak{n}')^0 = E_n\mathfrak{n}'^0 = E_n\mathfrak{n}^0 = (E_n\mathfrak{n})^0,$$

$E_n\mathfrak{n}'$ est partout dense dans $E_n\mathfrak{n}$ au sens de la norme $\| \ \|_{1,\varphi}$. Donc $\varphi(AE_nB) = 0$ pour tout $B \in \mathfrak{n}$. Enfin, pour $B \in \mathfrak{n}$ fixé, l'application $A \to \varphi(AB)$ est ultrafortement continue, donc $\varphi(AB) = 0$ pour tout $B \in \mathfrak{n}$. Par symétrie, on voit que les conditions « $\varphi'(AB') = 0$ pour $B' \in \mathfrak{n}'$ » et « $\varphi(AB) = 0$ pour $B \in \mathfrak{n}$ » sont équivalentes, de sorte que $\mathbf{N}^\perp$ est le même pour φ et φ' et aussi, par conséquent, l'application $A \to A^{\mathrm{v}}$.

Proposition 9. — *Soit $\mathbf{P}_U$ l'ensemble des opérateurs unitaires de $\mathbf{P}$. Pour $A \in \mathbf{M}$, soit k_A l'ensemble convexe engendré par les UAU^{-1}, $U \in \mathbf{P}_U$. Soit $K_A \subset \mathbf{M}$ l'adhérence faible (ou forte) de k_A.*

a. Si $A \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$ $(1 \leqq p \leqq +\infty)$, on a $K_A \subset \mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$.

b. Si $A \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$ $(1 < p < +\infty)$, K_A est aussi l'adhérence de k_A dans L^p pour la topologie de la norme $\| \ \|_p$, ou pour la topologie $\sigma(L^p, L^q)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

c. Si $\mathbf{N}$ est l'ensemble des éléments de $\mathbf{M}$ permutables à $\mathbf{P}$ et si $A \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$ $(1 \leqq p < +\infty)$, K_A rencontre $E_\varphi\mathbf{N}$ en un point unique qui n'est autre que A^{v}.

Pour tout $U \in \mathbf{P}_U$, on a

$$\| UAU^{-1} \|_\infty = \| A \|_\infty \qquad \text{et} \qquad \| UAU^{-1} \|_p = \| A \|_p.$$

Supposons, ce qui est évidemment loisible,

$$\| A \|_\infty \leqq 1 \qquad \text{et} \qquad \| A \|_p \leqq 1.$$

Alors, avec les notations de la proposition 7, on a $k_A \subset \Sigma_p \cap \Sigma_\infty$. Comme $\Sigma_p \cap \Sigma_\infty$ est faiblement compacte (prop. 7), on a $K_A \subset \Sigma_p \cap \Sigma_\infty$, donc en particulier $K_A \subset \mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$.

Dans $\Sigma_p \cap \Sigma_\infty$, la topologie faible coïncide, si $p > 1$, avec la topologie $\sigma(L^p, L^q)$. L'adhérence de k_A dans L^p pour $\sigma(L^p, L^q)$ est donc K_A. D'autre part, pour $1 < p < +\infty$, l'adhérence de k_A dans L^p pour $\sigma(L^p, L^q)$ coïncide avec l'adhérence de k_A dans L^p pour la topologie de la norme $\| \quad \|_p$, d'après le théorème 7.

Pour $U \in \mathbf{P}_U$, on a

$$(UAU^{-1})^\natural = (U^{-1}UA)^\natural = A^\natural,$$

d'après la propriété 6° du théorème 8. Donc $B^\natural = A^\natural$ pour tout $B \in k_A$. Comme l'application $A \to A^\natural$ est ultrafaiblement continue, on a $B^\natural = A^\natural$ pour tout $B \in K_A$. Si $B \in K_A \cap E_\varphi \mathbf{N}$, on a $B = B^\natural = A^\natural$.

Enfin, prouvons que, pour $A \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{p}} (1 \leq p < +\infty)$, K_A contient un élément permutable à $\mathbf{P}$, c'est-à-dire un point fixe pour le groupe G de transformations $A \to UAU^{-1}$, $U \in \mathbf{P}_U$. L'ensemble k_A, donc l'ensemble K_A, sont stables pour G. On peut se limiter au cas où $p \geq 2$ $\left(\text{puisque } \mathfrak{m}^{\frac{1}{p}} \subset \mathfrak{m}^{\frac{1}{p'}} \text{ pour } p' \geq p\right)$, auquel cas L^p est uniformément convexe. Alors, le raisonnement classique de G. Birkhoff s'applique : le point $B \in K_A$ qui rend $\| B \|_p$ minimum est invariant par G. On a donc $B \in \mathbf{N}$ si $\mathbf{N}$ est l'ensemble des éléments de $\mathbf{M}$ permutables à $\mathbf{P}$; d'autre part, $B \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{p}}$, donc $B \in \mathfrak{n}^{\frac{1}{p}} \subset \mathfrak{n}^0 = E_\varphi \mathbf{N}$.

Remarques. — 1. Lorsque $\mathbf{P}$ est abélien, les symétries de $\mathbf{P}$ forment un groupe et l'on peut substituer ce groupe à $\mathbf{P}_U$ dans le raisonnement précédent. D'autre part, si $S = 2E - 1$ est une symétrie de $\mathbf{P}$ (où E est un projecteur de $\mathbf{P}$), on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(SAS^{-1} + A) &= \frac{1}{2}[(2E-1)A(2E-1) + A] \\ &= 2EAE + A - EA - AE = EAE + (1-E)A(1-E);\end{aligned}$$

cette remarque permet de retrouver alors aisément les résultats du chapitre II de [12].

2. Ce qui précède conduit à formuler le problème suivant. Soit $\mathbf{P}$ un sous-anneau d'opérateurs de $\mathbf{M}$; soit $\mathbf{N}$ l'ensemble des opérateurs de $\mathbf{M}$ permutables à $\mathbf{P}$. Alors, pour $A \in \mathbf{M}$, $K_A \cap \mathbf{N}$ est-il non vide? Il en est bien ainsi, d'après le théorème de Markoff-Kakutani, lorsque $\mathbf{P}$ est abélien. On sait aussi que $K_A \cap \mathbf{N}$ est non vide lorsque $\mathbf{P} = \mathbf{M}$, auquel cas $\mathbf{N}$ est le centre de $\mathbf{M}$ (dans ce cas, on peut même remplacer K_A par l'adhérence de k_A pour la topologie uniforme).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] R. P. Boas, *Uniformly convex spaces* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 46, 1940, p. 304-311).

[2] J. Dixmier, *Sur un théorème de Banach* (*Duke Math. J.*, t. 15, 1948, p. 1057-1071).

[3] J. Dixmier, *Les fonctionnelles linéaires sur l'ensemble des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert* (*Ann. Math.*, t. 51, 1950, p. 387-408).

[4] J. Dixmier, *Applications ♮ dans les anneaux d'opérateurs* (*Compos. Math.*, t. 10, 1952, p. 1-55).

[5] J. Dixmier, *Remarques sur les applications ♮* (*Archiv der Mathematik*, t. 3, 1952, p. 290-297).

[6] J. Dixmier, *Sur la réduction des anneaux d'opérateurs* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 68, 1951, p. 185-202).

[7] H. A. Dye, *The Radon-Nikodym theorem for finite rings of operators* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 72, 1952, p. 243-280).

[8] E. L. Griffin, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 58, 1952, p. 480; Abstracts 428-429.

[9] I. Kaplansky, *Projections in Banach algebras* (*Ann. Math.*, t. 53, 1951, p. 235-249.)

[10] F. J. Murray et J. von Neumann, *On rings of operators* II (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 41, 1937, p. 208-248).

[11] F. J. Murray et J. von Neumann, *On rings of operators* IV (*Ann. Math.*, t. 44, 1943, p. 716-808).

[12] J. von Neumann, *On rings of operators* III (*Ann. Math.*, t. 41, 1940, p. 94-161).

[13] J. von Neumann, *On some algebraical properties of operator rings* (*Ann. Math.*, t. 44, 1943, p. 709-715).

[14] M. A. Naimark, *Anneaux d'opérateurs dans les espaces hilbertiens* [*Uspekhi Mat. Nauk*, vol IV, t. 4, 1949, p. 83-147 (en russe)].

[15] R. Pallu de la Barrière, *Algèbres auto-adjointes faiblement fermées et algèbres hilbertiennes de classe finie* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 1994-1995).

[16] R. Pallu de la Barrière, *Isomorphisme des *-algèbres faiblement fermées d'opérateurs* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 795-797).

[17] R. Schatten, *A theory of cross-spaces* (*Ann. Math. Studies*, Princeton, 1950).

[18] J. D. Tamarkin et A. Zygmund, *Proof of a theorem of Thorin* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 50, 1944, p. 279-282).