BULLETIN DE LA S. M. F.

PAUL JAFFARD

Théorie arithmétique des anneaux du type de Dedekind. II

Bulletin de la S. M. F., tome 81 (1953), p. 41-61
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1953__81__41_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

THÉORIE ARITHMÉTIQUE DES ANNEAUX DU TYPE DE DEDEKIND. II;

PAR M. PAUL JAFFARD.

Cet article fait suite au précédent [1]. Nous y employons les mêmes définitions. Nous désignerons le premier article par T. A. T. D. Nous avons montré au paragraphe III de T. A. T. D. comment l'arithmétique des idéaux dans un anneau du type de Dedekind est profondément liée à celle des surclasses des groupes de valeurs totalement ordonnés qui lui sont canoniquement associés. Dans le cas où ces groupes de valeurs sont archimédiens, la structure simple de leurs surclasses nous a permis, au paragraphe IV, d'étudier en détail la divisibilité des idéaux dans un anneau de multiplication uniforme du type de Dedekind.

Ici, nous étudions d'abord la structure des surclasses d'un groupe abélien totalement ordonné. Nous en déduisons l'arithmétique de ces surclasses, ce qui nous permet d'étudier en détail la divisibilité des idéaux dans des anneaux de multiplication du type de Dedekind en ne supposant plus qu'ils soient uniformes. Dans cette catégorie entrent, par exemple, les anneaux de valuation (commutatifs) les plus généraux.

Un groupe abélien totalement ordonné peut être considéré comme un groupe topologique. Nous étudions d'abord la structure du complété d'un tel groupe. Si G est un groupe abélien totalement ordonné et A une surclasse (ou s-idéal) de G, nous montrons ensuite que l'on peut associer à A un sous-groupe isolé bien déterminé H de G tel que si φ est l'homomorphisme canonique (croissant) de G sur $\Gamma = G/H$ et $\hat{\Gamma}$ le complété du groupe ordonné Γ, la surclasse A puisse être définie de l'une des deux manières suivantes :

$$x \in A \rightleftharpoons \varphi(x) \geqq a \qquad (a \in \Gamma)$$

ou

$$x \in A \rightleftharpoons \varphi(x) > a \qquad (a \in \hat{\Gamma}).$$

Une fois déterminées les formes que peuvent prendre les différentes surclasses de G, nous étudions les conditions pour que, A et B étant deux telles surclasses, il existe une surclasse X telle que $A = B + X$.

Nous étudions ensuite, suivant les formes de A et B, le nombre des surclasses X qui satisfont à l'égalité $A + B = A + X$.

[1] P. JAFFARD, *Théorie arithmétique des anneaux du type de Dedekind* (*Bull. Soc. Math.*, t. 80, 1952, p. 61-100).

Nous appliquons enfin les résultats obtenus à l'étude des anneaux de multiplication du type de Dedekind. Nous précisons la structure des idéaux fractionnaires d'un tel anneau. Nous étudions en particulier le nombre des idéaux $\mathfrak{r}$ qui satisfont à l'égalité $\mathfrak{ab} = \mathfrak{ar}$, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ étant deux idéaux d'un tel anneau.

Les groupes ordonnés intervenant ici étant, sauf mention expresse du contraire, abéliens et totalement ordonnés, nous négligerons de le rappeler à chaque fois et nous parlerons seulement de groupe ordonné. Nous supposerons également que tous les groupes intervenant ici ont plus d'un élément.

1. Soit G un groupe (totalement) ordonné et $(P_\iota)_{\iota \in \Pi}$ l'ensemble de ses surclasses premières différentes de G_+ ([2]). Cet ensemble est totalement ordonné par la relation

$$P_\alpha \leqq P_\beta \rightleftharpoons P_\alpha \supset P_\beta.$$

On considérera l'ensemble Π des indices comme totalement ordonné par

$$\alpha \leqq \beta \rightleftharpoons P_\alpha \leqq P_\beta.$$

On voit qu'il existe une surclasse première P_ω inférieure à toutes les autres c'est celle définie par

$$x \in P_\omega \rightleftharpoons x > 0.$$

Par contre, il peut ne pas exister de surclasse première supérieure à toutes les autres.

Si $\alpha \in \Pi$ et s'il existe un indice β qui soit immédiatement supérieur à α, on notera $\beta = \alpha + 1$.

Le groupe G est archimédien si et si seulement $\Pi = \{\omega\}$.

ι étant un indice contenu dans Π, on désigne par H_ι le sous-groupe isolé ([2]) de G engendré par les éléments de G_+ non contenus dans P_ι. On posera encore $G_\iota = G/H_\iota$. Si φ_ι est l'application canoniqne de G sur G_ι, G_ι est canoniquement ordonné par la relation d'ordre

$$\varphi_\iota(a) \geqq 0 \rightleftharpoons \exists h \in H_\iota \quad \text{avec} \quad a + h \geqq 0.$$

Remarquons que

$$\varphi_\iota(a) > \varphi_\iota(b) \rightarrow a > b. \tag{1}$$

L'ensemble ordonné des surclasses premières de G_ι est isomorphe à Π_ι, Π_ι étant le sous-ensemble de Π défini par

$$\xi \in \Pi_\iota \rightleftharpoons \xi \geqq \iota.$$

Si $\alpha \leqq \beta$, on voit qu'il existe une application canonique croissante $\varphi_{\beta\alpha}$ de G_α sur G_β. Si $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$, on a

$$\varphi_{\gamma\alpha} = \varphi_{\gamma\beta}\, \varphi_{\beta\alpha}.$$

On définit sur G une topologie canonique en prenant pour système fondamental de voisinages de o l'ensemble $\mathcal{V} = (V_a)_{a \in P_\omega}$ ainsi défini

$$x \in V_a \rightleftharpoons |x| < a.$$

([2]) W. Krull, *Allgemeine Bewertungstheorie* (*J. Reine angew. Math.*, t. 167, 1951, p. 160-196).

Cette topologie est compatible avec la structure de groupe de G. Elle est discrète si et si seulement o admet un successeur immédiat, c'est-à-dire si P_ω admet un plus petit élément e, auquel cas $P_\omega = (e)$.

Remarque. — G étant muni de sa topologie canonique, il faut remarquer que la topologie canonique de $G_\iota = G/H_\iota$ n'est pas en général la topologie quotient de celle de G : on sait, en effet, que pour la topologie quotient $\varphi_\iota(\mathcal{V})$ est un système fondamental de voisinage de o dans G_ι. Or, si $\iota > \omega$, $H_\iota \ni h > 0$. Par suite, $V_h \in \mathcal{V}$ et $\varphi_\iota(V_h) = \{0\}$, la topologie quotient est donc discrète, ce qui n'est pas toujours le cas de la topologie canonique, car la surclasse maximale de G_ι peut fort bien ne pas admettre de plus petit élément.

Théorème 1. — *Si* G *est un groupe discret non archimédien, la surclasse première maximale* P_ω *admet un sucesseur immédiat* $P_{\omega+1}$.

Soit G un tel groupe et $P_\omega = (e)$. Il est facile de voir que $\bigcup_{\iota \neq \omega} P_\iota$ est une surclasse première qui est successeur immédiat de P_ω.

2. Nous nous proposons maintenant de déterminer la structure du groupe G complété de G.

Si G est discret, on a évidemment $\hat{G} = G$.

Si G est archimédien (non discret), on sait que G est isomorphe à un sous-groupe dense de R (groupe additif ordonné des nombres réels ordinaires). Si G est alors considéré comme plongé dans R, on voit que $\hat{G} = R$. Supposons donc désormais que G soit non discret et non archimédien.

1° *Il existe une surclasse première* $P_{\omega+1}$ *immédiatement supérieure à* P_ω. — Posons alors

$$H = H_{\omega+1} \quad \text{et} \quad G' = G_{\omega+1} = G/H.$$

G′ et H sont des groupes ordonnés; on voit, d'autre part, que $P_{\omega+1}$ étant immédiatement supérieur à P_ω, H est un groupe archimédien que l'on peut supposer dense dans R (puisque G est non discret).

A chaque classe de G suivant H attachons un représentant. Si $x \in G$, $\bar{x}$ désignera la classe à laquelle appartient x $(\bar{x} \in G')$.

On établit de la façon suivante une relation biunivoque ψ entre G et l'ensemble produit $G' \times H$. Si $x \in G$ et si a est le représentant de la classe $\bar{x}$, on posera

$$\psi(x) = (\bar{x}, x - a),$$

H étant considéré comme un sous-ensemble de R, $G' \times H$ peut être considéré comme un sous-ensemble de $G' \times R$. On peut maintenant définir ainsi une loi de composition $x, y \to x + y$ sur $G' \times R$: si $x = (\bar{a}, r)$ et $y = (\bar{b}, q)$, a, b et c étant les représentants respectifs de $\bar{a}$, $\bar{b}$ et $\bar{a} + \bar{b}$, on posera

$$x + y = (\bar{c}, (a + b - c) + r + q).$$

Il est facile de voir que cette loi de composition fait de $G' \times R$ un groupe abélien $\mathfrak{G}$.

La relation

$$(a, r) \geqq 0 \rightleftarrows (\bar{a} > 0 \text{ ou } \bar{a} = 0 \text{ et } r \geqq 0)$$

en fait un groupe ordonné à condition que l'on ait pris soin de choisir o comme représentant de la classe $\bar{o}$.

Si, par l'application ψ, on identifie G à $G' \times H$, G devient un sous-groupe (ordonné) de $\mathfrak{G}$. Puisque H est dense dans R, on voit qu'à tout élément x strictement positif contenu dans $\mathfrak{G}$, on peut faire correspondre un élément $a \in G$ tel que $x \geqq a > 0$. On en déduit que la topologie canonique définie sur $\mathfrak{G}$ induit sur G sa topologie canonique. On voit, de plus, que G est dense dans $\mathfrak{G}$.

Montrons que $\mathfrak{G}$ est complet.

Soit $\mathcal{F}$ un filtre de Cauchy sur $\mathfrak{G}$. Soit $H \ni h > 0$. Il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que x, $y \in A \rightarrow |x - y| < h$. On voit alors que si $x, y \in A$ et si $x = (\bar{a}, r)$, $y = (\bar{b}, q)$, on a $\bar{a} = \bar{b}$. $\mathcal{F}$ induit un filtre de Cauchy sur la coupe $\bar{a} \times R$ de $\mathfrak{G}$ suivant $\bar{a}$, d'où un filtre de Cauchy sur R qui converge vers r, puisque R est complet. On voit que $\mathcal{F}$ converge vers $(\bar{a}, r)$. $\mathfrak{G}$ est bien complet et l'on voit qu'ici $\hat{G} = \mathfrak{G}$.

L'homomorphisme $\varphi_{\omega+1}$ de G sur G' se prolonge naturellement en un homomorphisme croissant de $\hat{G}$ sur G' que l'on notera encore $\varphi_{\omega+1}$. Plus généralement, si $\iota \geqq \omega$, φ_ι se prolonge en un homomorphisme de $\hat{G}$ sur G_ι.

2° *Il n'existe pas de surclasse première immédiatement supérieure à* P. — Soit Π' le sous-ensemble de Π formé par les indices strictement supérieurs à ω. Π' n'admet pas de plus petit élément. Les groupes $(G_\iota)_{\iota \in \Pi'}$ seront considérés comme munis de la topologie discrète. A tout couple d'indices α, $\beta \in \Pi'$ tels que $\alpha \leqq \beta$ est attaché un homomorphisme $\varphi_{\beta\alpha}$ de G_α sur G_β. Comme $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$ entraîne $\varphi_{\gamma\alpha} = \varphi_{\gamma\beta}\varphi_{\beta\alpha}$, cette famille de groupes admet une certaine limite projective $\mathfrak{G}$. Comme pour tout élément $a \in G$, on a pour $\alpha \leqq \beta$, $\varphi_{\beta\alpha}(\varphi_\alpha(a)) = \varphi_\beta(a)$, on voit qu'il existe un homomorphisme ψ de G dans $\mathfrak{G}$.

Montrons que cet homomorphisme est un isomorphisme.

Soit $x \in G$, tel que $\psi(x) = 0$. Ceci montre que pour tout $\iota \in \Pi'$, on a $\varphi_\iota(x) = 0$. Donc $x \notin \bigcup_{\iota \in \Pi'} P_\iota$. On peut toujours, en remplaçant au besoin x par $-x$, supposer $x \geqq 0$. Mais $\bigcup_{\iota \in \Pi'} P_\iota$ est une surclasse première $P_{\omega'}$. Comme ω' est inférieur à tous les indices contenus dans Π', on voit que $\omega' = \omega$. Donc $x \notin P_\omega$ et, par suite, $x = 0$. ψ est bien un isomorphisme. On considérera désormais G comme un sous-groupe de $\mathfrak{G}$. L'homomorphisme φ_ι de G sur G_ι se prolonge en un homomorphisme (que l'on notera encore φ_ι) de $\mathfrak{G}$ sur G_ι.

Il est facile de voir que l'on définit sur $\mathfrak{G}$ une structure de groupe ordonné en posant

$$x \in \mathfrak{G}_+ \rightleftarrows (\text{pour tout } \iota \in \Pi', \ \varphi_\iota(x) \geqq 0).$$

Cette structure d'ordre sur $\mathfrak{G}$ induit sur G la structure d'ordre initiale. Elle définit sur $\mathfrak{G}$ une topologie canonique. Si $0 < x \in \mathfrak{G}$, $\exists \iota \in \Pi'$ tel que $\varphi_\iota(x) > 0$. Soit $\iota > \xi \in \Pi'$. Dans G_ξ il existe un élément $\varphi_\xi(a)$ ($a \in G$) tel que $\varphi_\xi(x) > \varphi_\xi(a) > 0$. (Il suffit de prendre $a \in H_\iota$, $a \notin H_\xi$). On voit alors que dans $\mathfrak{G}$ on a $x > a > 0$. On en déduit que la topologie canonique définie sur $\mathfrak{G}$ est compatible avec la topologie canonique sur G.

Montrons que $\mathfrak{G}$ est complet.

Soit $\mathcal{F}$ un filtre de Cauchy sur $\mathfrak{G}$ et soit $\iota \in \Pi'$. $\exists a \subset \mathfrak{G}$ tel que $\varphi_\iota(a) = 0$ et $a > 0$. $\exists A \in \mathcal{F}$ tel que $x, y \in A \rightarrow |x - y| < a$. Donc si $x, y \in A$, $\varphi_\iota(x) = \varphi_\iota(y)$. Au filtre $\mathcal{F}$ et à l'indice $\iota \in \Pi'$ correspond donc un élément bien déterminé $f_\iota \in \mathfrak{G}_\iota$ tel que tout ensemble contenu dans $\mathcal{F}$ contienne un élément x avec $\varphi_\iota(x) = f_\iota$.

Si $\alpha \leqq \beta$, on a évidemment $\varphi_{\beta\alpha}(f_\alpha) = f_\beta$. Par suite, les f_ι définissent un élément $f \in \mathfrak{G}$. Le filtre $\mathcal{F}$ converge vers f et $\mathfrak{G}$ est complet.

Montrons que G est dense dans $\mathfrak{G}$:

Soit $a \in \mathfrak{G}$ et V un voisinage de a. Par définition, $\exists x \in \mathfrak{G}$ tel que $x > 0$ et $|y - a| < x$ entraîne $y \in V$. Mais on a vu qu'il existe $h \in G$ tel que $x > h > 0$. Soit ι tel que $\varphi_\iota(h) > 0$ et $a' \in G$ tel que $\varphi_\iota(a') = \varphi_\iota(a)$. On a $|a - a'| < h < x$, donc $a' \in V$ et G est bien dense dans $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{G}$ est ici le complété $\hat{G}$ de G.

Remarque. — On voit encore que $\hat{G}$ est la limite projective topologique des groupes G_ι, chaque G_ι étant considéré comme muni de la topologie quotient de G par H_ι (topologie qui est discrète si $\iota > \omega$).

La considération de ces deux cas, ainsi que celle des cas où G est discret ou archimédien montre que l'on peut énoncer le

THÉORÈME 2. — *Si* G *est un groupe (totalement) ordonné, son complété* G *peut être totalement ordonné. Cette structure d'ordre prolonge celle de* G *et définit sur* $\hat{G}$ *une topologie identique à sa topologie initiale.*

Exemple. — Soit $G = \sum_{n \in Z_+} Z_n$, somme directe des groupes Z_n, où chaque Z_n est pris isomorphe au groupe ordonné des entiers ordinaires, et G étant ordonné lexicographiquement (si $a \in G$, $a > 0$ si et si seulement la première composante non nulle de a est positive). On voit qu'ici P_ω n'admet pas de surclasse première qui lui soit immédiatement supérieure. On a $\hat{G} = \prod_{\iota \in Z_+} Z_n$, produit direct lexicographique des groupes Z_n. Ici $\hat{G} \neq G$.

On a vu que, quel que soit G et $\iota \in \Pi$, l'homomorphisme φ_ι de G sur G_ι se prolonge en un homomorphisme (encore noté φ_ι) de $\hat{G}$ sur G_ι.

3. Nous allons maintenant déterminer la forme des différentes surclasses du groupe ordonné G.

Remarquons d'abord que si $\iota \in \Pi$ et si A est une surclasse de G, $\varphi_\iota(A)$ est une surclasse de G_ι. La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait

$$x \in A \rightleftharpoons \varphi_\iota(x) \in \varphi_\iota(A)$$

est que $A + H_\iota \subset A$.

Soit Π' le sous-ensemble de Π ainsi défini

$$\iota \in \Pi' \rightleftharpoons A + H_\iota \subset A$$

Si $\iota \in \Pi'$ et $\xi \leqq \iota$, on a évidemment $\xi \in \Pi'$. D'autre part, $\omega \in \Pi'$.

Soit $H = \bigcup_{\iota \in \Pi'} H_\iota$. H est un sous-groups isolé de G, puisqu'il en est ainsi de chaque H_ι. On a évidemment $A + H \subset A$. On a, d'autre part, $H \neq G$. En effet, si l'on avait $H = G$, l'égalité $A + G = G$ impliquerait $A = G$, ce qui est incompatible avec le fait que A, étant une surclasse, est bornée inférieurement. Puisque $H \neq G$, les éléments de G_+ qui n'appartiennent pas à H forment une surclasse première P_α (on a $H = H_\alpha$). Puisque $H + H_\alpha \subset A$, on voit que $\alpha \in \Pi'$ et Π' admet un plus grand élément α.

Donc :

Théorème 3. — *A étant une surclasse de G, il existe une surclasse première* P_α *telle que*

$$x \in A \rightleftharpoons \varphi_\alpha(x) \in \varphi_\alpha(A)$$

et telle que toute autre surclasse première ayant cette propriété contienne P_α,

α sera appelé l'*indice caractéristique* de la surclasse A.

Corollaire 1. — *α est l'indice caractéristique de la surclasse* P_α.

On a, d'une part $P_\alpha + H_\alpha \subset P_\alpha$, car si $\exists p \in P$, $h \in H_\alpha$, avec $p + h = a \notin P_\alpha$, $-h \notin P_\alpha$ entraînerait $a - h = p \notin P_\alpha$, d'où une contradiction. D'autre part, si $\beta > \alpha$, $\exists b \in H_\beta \cap P_\alpha$. $\varphi_\beta(b) = 0$ entraîne $\varphi_\beta(P_\alpha) = (0)$, or $0 \notin P_\alpha$

Le corollaire se déduit alors immédiatement de la démonstration du théorème 3.

Corollaire 2. *A et B étant deux surclasses de G et A ayant pour indice caractéristique α, on a*

$$B \subset A \rightleftharpoons \varphi_\alpha(B) \subset \varphi_\alpha(A).$$

En effet, $B \subset A$ implique évidemment $\varphi_\alpha(B) \subset \varphi_\alpha(A)$, Réciproquement, si $\varphi_\alpha(B) \subset \varphi_\alpha(A)$ et si $x \in B$. on a $\varphi_\alpha(x) \in \varphi_\alpha(A)$, donc $x \in A$ et $B \subset A$.

A partir de maintenant, on pourrait passer directement à l'étude de la structure des surclasses. L'étude de l'addition montrerait que $P_\alpha = A + A^{-1}$ dans le cas ou $A + A^{-1} \neq (0)$ et $P_\alpha = P_\omega$ si $A + A^{-1} = (0)$. Mais ceci peut se montrer directement et l'on obtient ainsi une nouvelle démonstration du théorème 3.

Théorème 4. — *A étant une surclasse quelconque de G, $A + A^{-1}$ est une surclasse première de G. Si $A + A^{-1} \neq (0)$, on a $A + A^{-1} = P_\alpha$, α étant l'indice caractéristique de A. Si $A + A^{-1} = (0)$, A a pour indice caractéristique ω.*

Montrons d'abord que $A + A^{-1}$ est une surclasse première :

$A + A^{-1}$ est entière d'après la définition de A^{-1}. Soient donc $x, y \in G_+$ tels que $x + y \in A + A^{-1}$. On peut écrire $x + y = a + b (a \in A,\ b \in A^{-1})$. Comme $x = a + (b - y)$ et $a \in A$, si $x \notin A + A^{-1}$, on a $b - y \notin A^{-1}$. Mais alors, par définition, $\exists a' \in A$ avec $a' + (b - y) < o$ ou $y > a' + b$, mais $a' + b \in A + A^{-1}$ entraîne $y \in A + A^{-1}$. $A + A^{-1}$ est bien une surclasse première. Si $A + A^{-1} = (o)$, on a $o = a + b\,(a \in A,\ b \in A^{-1})$, mais alors on voit facilement que $A = (a)$ et $A^{-1} = (-a)$.

Si l'on est dans ce dernier cas, on posera $P_\alpha = P_\omega$. Sinon, on posera $P_\alpha = A + A^{-1}$. Montrons maintenant que α est l'indice caractéristique de A. Pour cela montrons d'abord que

$$\varphi_\alpha(x) \in \varphi_\alpha(A) \to x \in A\,;$$

1° Supposons que $\varphi_\alpha(A)$ n'ait pas de plus petit élément; alors si $\varphi_\alpha(x) \in \varphi_\alpha(A)$, $\exists a \in A$ avec $\varphi_\alpha(x) > \varphi_\alpha(a)$. On en déduit $x > a$ et $x \in A$. Ceci montre accessoirement que si ι est un indice strictement supérieur à l'indice caractéristique, de A, $\varphi_\iota(A)$ est une surclasse principale de G_ι.

2° Supposons que $\varphi_\alpha(A)$ ait un plus petit élément $\varphi_\alpha(a)$. On peut supposer $a \in A$. Si $\varphi_\alpha(x) \in \varphi_\alpha(A)$, on a $\varphi_\alpha(x) \geqq \varphi_\alpha(a)$. Si $\varphi_\alpha(x) > \varphi_\alpha(a)$, le raisonnement précédent montre que $x \in A$. Si $\varphi_\alpha(x) = \varphi_\alpha(a)$, on peut écrire $x = a + h\,(h \in H_\alpha)$. Si $h \geqq o$, on a par définition $x \in A$. Supposons $h < o$. D'après la définition de α, on voit que $-h \notin A + A^{-1}$. Or $-h = a - x\,(a \in A)$, donc on a nécessairement $-x \notin A^{-1}$ et $\exists b \in A$ avec $b - x < o$ ou $b < x$, ce qui montre encore que $x \in A$. Pour montrer que α est l'indice caractéristique de A, il suffit maintenant de montrer que si ι est un indice tel que

$$\varphi_\iota(x) \in \varphi_\iota(A) \to x \in A, \tag{2}$$

on a $\iota \leqq \alpha$.

Soit donc un indice ι tel que la relation (2) se trouve vérifiée. Si $\iota = \omega$, on a évidemment $\iota \leqq \alpha$. Supposons donc que $\iota \neq \omega$, c'est-à-dire que $H_\iota \neq \{o\}$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que nous ayons $\iota > \alpha$. On a alors $A + A^{-1} \not\subset P_\iota$. Donc $\exists a \in A$ et $a' \in A^{-1}$ tels que $a + a' \notin P_\iota$. Comme $a + a' \geqq o$, on en déduit $h = a + a' \in H_\iota$. Comme $H_\iota \neq \{o\}$, $\exists h' \in H_\iota$ tel que $h' < o$.

On a

$$\varphi_\iota(a - h + h') = \varphi_\iota(a) \in \varphi_\iota(A).$$

Par suite, $a - h + h' \in A$; $a' \in A^{-1}$ entraîne alors

$$h' = a + a' - h + h' \geqq o \qquad \text{ou} \qquad h' \geqq o,$$

ce qui contredit $h' < o$.

Le théorème 4 est donc complètement démontré.

On a montré également le

THÉORÈME 5. — *Si* A *est une surclasse de* G *ayant* α *pour indice caractéristique et si* $\iota > \alpha$, $\varphi_\iota(A)$ *est une surclasse principale de* G_ι.

Les théorèmes 3 et 4 montrent que l'étude de la structure de la surclasse A, d'indice caractéristique α, se ramène à celle de la surclasse $\varphi_\alpha(A)$ dans G_α. Or dans G_α la surclasse $\varphi_\alpha(A) + (\varphi_\alpha(A))^{-1}$ est égale, soit à (o), soit à la surclasse maximale de G_α.

On est donc ramené à étudier la structure des surclasses ayant ω pour indice caractéristique.

Supposons donc que A admette ω pour indice caractéristique. Si $A + A^{-1} = (0)$, on a vu que A est une surclasse principale. Sa structure est alors parfaitement connue.

Supposons donc que $A + A^{-1} = P_\omega \neq (0)$. Si $\hat{G}$ est le complété de G et si $a \in \hat{G}$, on désignera par $((a))$ la surclasse de G définie par

$$(3) \qquad x \in ((a)) \rightleftharpoons (x \in G \text{ et } x > a).$$

Dans le cas où G est un groupe archimédien, on sait (T. A. T. D., § IV) qu'il existe un élément $a \in \hat{G}$ tel que $A = ((a))$. Montrons qu'il en est de même dans le cas où G n'est pas archimédien. Deux cas sont alors à considérer :

1° ω *admet un successeur immédiat* $\omega + 1$. — Reprenons les notations du paragraphe 2 :

$$H = H_{\omega+1}, \qquad G' = G_{\omega+1}, \qquad G = G' \times H \qquad \text{et} \qquad G = \mathfrak{G} = G' \times R.$$

D'après le théorème 5, la surclasse $\varphi_{\omega+1}(A)$ est principale. Soit $\varphi_{\omega+1}(A) = (\varphi_{\omega+1}(a))$. Si $\varphi_{\omega+1}(x) > \varphi_{\omega+1}(a)$, on a $x \in A$. Si $\varphi_{\omega+1}(x) < \varphi_{\omega+1}(a)$, on a $x \notin A$. Comme $\omega + 1$ est supérieur à l'indice caractéristique de A, on voit qu'il existe $b, c \in G$ tels que $\varphi_{\omega+1}(b) = \varphi_{\omega+1}(c) = \varphi_{\omega+1}(a)$ et tels que $b \in A$, $c \notin A$. On voit alors que la coupe de A suivant $\bar{a}$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $x \in H$ tels que $(\bar{a}, x) \in A$ est une surclasse Γ de H. Cette surclasse ne peut être principale, sans cela A le serait aussi, contrairement à l'hypothèse. Comme H est archimédien, on en déduit l'existence d'un élément $r \in R$ tel que $\Gamma = ((r))$. On a, par définition, $d = (\bar{a}, r) \in \hat{G}$. On voit alors que $A = ((d))$.

2° *n'admet pas de successeur immédiat.*

Reprenons encore les notations du paragraphe 2 : Π' désigne l'ensemble des indices strictement supérieurs à ω. $\mathfrak{G} = \hat{G}$ est la limite projective des groupes $(G_\iota)_{\iota \in \Pi'}$.

Le théorème 5 montre qu'à tout indice $\iota \in \Pi'$ correspond un élément $a_\iota \in G_\iota$ tel que $\varphi_\iota(A) = (a_\iota)$. Il est facile de voir que si $\xi, \eta \in \Pi'$ et si $\xi \leq \eta$, on a $\varphi_{\eta\xi}(a_\xi) = a_\eta$. On en déduit que A définit sans ambiguïté un élément a de $\hat{G}$ tel que $\varphi_\iota(a) = a_\iota \, (\iota \in \Pi')$. La surclasse A étant supposée non principale, on voit immédiatement à partir des définitions que $A = ((a))$.

On voit donc que dans tous les cas possibles si A est une surclasse non principale admettant ω pour indice caractéristique, il existe un élément a du complété $\hat{G}$ de G tel que $A = ((a))$.

Soit maintenant A une surclasse quelconque de G et α son indice caractéristique, $\hat{G}_\alpha$ le complété du groupe ordonné G_α. Si G_α n'est pas discret, il existe un élément α_α de $\hat{G}_\alpha$ défini sans ambiguïté et tel que l'on ait, soit $\varphi_\alpha(A) = (a_\alpha)$, soit $\varphi_\alpha(A) = ((A_\alpha))$. Si G_α est discret, il admet un plus petit élément strictement positif e_α. En ce cas, il existe encore un élément a_α de $\hat{G}_\alpha$ tel que $\varphi_\alpha(A) = (a_\alpha)$

[on a ici $\varphi_\alpha(A) = ((a_\alpha - e_\alpha))$]. Dans les deux cas, l'élément a_α défini sans ambiguïté sera dit l'*élément caractéristique de la surclasse* A.

On peut énoncer le

Théorème 6. — *Soit* A *une surclasse de* G *ayant pour indice caractéristique* α *et* $\hat{G}_\alpha$ *le groupe complété du groupe ordonné* G_α. *On peut définir sans ambiguïté un élément* α_α *de* $\hat{G}_\alpha$, *qui sera dit l'élément caractéristique de* A *et tel que l'on ait, soit* $\varphi_\alpha(A) = (a_\alpha)$, *soit* $\varphi_\alpha(A) = ((a_\alpha))$.

Si l'on a $\varphi_\alpha(A) = (a_\alpha)$, *on a évidemment* $a_\alpha \in G_\alpha$.

Si $\iota > \alpha$, l'élément a_ι de G_ι tel que $\varphi_\iota(A) = (a_\iota)$ sera dit l'*élément caractéristique de* A *relativement à l'indice* ι. Dans le cas où $\iota = \alpha$, on dira encore que l'élément caractéristique α_α de A est l'élément caractéristique de A relativement à l'indice α.

Corollaire. — *Si la surclasse* A *admet relativement aux indices* ξ *et* η $(\xi \leqq \eta)$ *les éléments caractéristiques* a_ξ *et* a_η *on a* $\varphi_{\eta\xi}(a_\xi) = a_\eta$.

Ceci est immédiat si l'on remarque que, suivant les conventions faites au n° 2, $\varphi_{\eta\xi}$ peut être considéré comme un homomorphisme de $\hat{G}_\xi$ sur G_η. a_α étant l'élément caractéristique de A, la surclasse A sera dite *quasi fermée* si $\varphi_\alpha(A) = (a_\alpha)$, *quasi ouverte* si $\varphi_\alpha(A) = ((a_\alpha))$.

Théorème 7. — *Soit* α *l'indice caractéristique de la surclasse* A. *Si* $\iota < \alpha$, *il n'existe aucun élément* a_ι *de* G_ι *tel que l'on ait* $\varphi_\iota(A) = (a_\iota)$ *ou* $\varphi_\iota(A) = ((a_\iota))$.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un tel élément a_ι. Comme $\alpha > \iota \, \exists h \in H_\alpha \cap P_\iota$. Puisque $\varphi_\iota(h) \neq 0$, en vertu des définitions de (a_ι) et $((a_\iota))$, $\exists b \in A$ tel que $a_\iota \leqq \varphi_\iota(b) \leqq a_\iota + \varphi_\iota(h)$. Comme ι est inférieur à l'indice caractéristique de A, $\varphi_\iota(b - 2h) < a_\iota$ implique $b - 2h \notin A$.

Mais $\varphi_\alpha(b - 2h) = \varphi_\alpha(b) \in \varphi_\alpha(A)$ et α ne peut être l'indice caractéristique de A, contrairement à l'hypothèse. D'où le théorème.

Corollaire 1. — *L'indice caractéristique de la surclasse* A *est le plus petit indice* ι *tel que* $\varphi_\iota(A)$ *soit de la forme* (a_ι) *ou* $((a_\iota))$ *avec* $a_\iota \in \hat{G}_\iota$.

Corollaire 2. — *Étant donné un indice* α *et un élément* a_α *de* $\hat{G}_\alpha$, *il existe toujours une surclasse* A *de* G *qui admet* α *pour indice caractéristique et* a_α *comme élément caractéristique.*

Soit la surclasse A_α de G_α définie par $A_\alpha = (a_\alpha)$ si $a_\alpha \in G_\alpha$ et par $A_\alpha = ((a_\alpha))$ si $a_\alpha \notin G_\alpha$, et soit la surclasse A de G définie par

$$x \in A \rightleftharpoons \varphi_\alpha(x) \in A_\alpha.$$

On a $\varphi_\alpha(A) = A_\alpha$ et, par définition, l'indice caractéristique de A est supérieur ou égal à α. Il ne peut lui être strictement supérieur en vertu du théorème 7. Il lui est donc égal, d'où le corollaire.

Remarque. — Dans le corollaire 2, A est défini sans ambiguïté, sauf dans le cas où G_α n'est pas discret et où $a_\alpha \in G$, car on peut alors prendre A_α égal à (a_α) ou à $((a_\alpha))$.

Corollaire 3. — *Si la surclasse* B *a un indice caractéristique* β *strictement supérieur à l'indice caractéristique de* A, *on a*

$$B \subset A \rightleftharpoons \varphi_\beta(B) > \varphi_\beta(A)$$

c'est-à-dire $\varphi_\beta(B) \subset \varphi_\beta(A)$ *et* $\varphi_\beta(B) \neq (A)$).

Supposons $B \subset A$. On a $\varphi_\beta(B) \subset \varphi_\beta(A)$. Mais, puisque β est supérieur à l'indice caractéristique de A, $\exists x \in G$ tel que $\varphi_\beta(x) \in \varphi_\beta(A)$ et $x \notin A$. On ne peut avoir $\varphi_\beta(x) \in \varphi_\beta(B)$, sans cela on aurait $x \in B$ et, par suite, $x \in A$. On a donc bien $\varphi_\beta(B) > \varphi_\beta(A)$.

Réciproquement, supposons $\varphi_\beta(B) > \varphi_\beta(A)$. Si $x \in B$, $\exists a \in A$ tel que $\varphi_\beta(x) > \varphi_\beta(a)$. Donc $x > a$ et $x \in A$.

En comparant ce corollaire au corollaire 2 du théorème 3, on voit que pour qu'une surclasse soit entière (c'est-à-dire contenue dans G_+), il faut et il suffit que son élément caractéristique soit strictement positif si elle est quasi fermée et différente de G_+, qu'il soit positif ou nul si elle est quasi ouverte.

4. A et B étant deux surclasses du groupe ordonné G, nous nous proposons maintenant de déterminer la forme de la surclasse $A + B = C$.

Soient α, β et γ les indices caractéristiques respectifs de A, B et C.

On remarque que pour tout indice $\iota \in \Pi$, on a

$$\varphi_\iota(A + B) = \varphi_\iota(A) + \varphi_\iota(B).$$

Montrons d'abord que $\gamma = \sup(\alpha, \beta)$:

On voit que si $\iota \leqq \sup(\alpha, \beta)$, $A + B + H_\iota \subset A + B$, donc $\iota \leqq \gamma$. Par suite $\gamma \geqq \sup(\alpha, \beta)$.

Supposons maintenant $\iota > \sup(\alpha, \beta)$ on en déduit l'existence de deux éléments x et y tels que $x \notin A$, $y \notin B$, $\varphi_\iota(x) \in \varphi_\iota(A)$ et $\varphi_\iota(y) \in \varphi_\iota(B)$. On a donc $\varphi_\iota(x + y) \in \varphi_\iota(C)$. Mais si l'on avait $x + y \in C$, on aurait $x + y = a + b$ avec $a \in A$, $b \in B$. Comme $x = a + (b - y)$, $x \notin A$ entraînerait $b - y < 0$ ou $y > b$, ce qui impliquerait $y \in B$, d'où une contradiction. On voit donc que $\iota > \gamma$. On a bien $\gamma = \alpha = \sup(\alpha, \beta)$.

C est alors parfaitement déterminé par

$$\varphi_\alpha(C) = \varphi_\alpha(A) + \varphi_\alpha(B).$$

On voit alors, comme dans le cas archimédien, en se reportant au groupe $\hat{G}_\alpha$, que $\varphi_\alpha(C)$ est une surclasse principale de G_α si et si seulement il en est de même de $\varphi_\alpha(A)$ et $\varphi_\alpha(B)$.

On voit encore que l'élément caractéristique de la surclasse C est la somme des éléments caractéristiques des surclasses A et B relativement à l'indice α. D'où

Théorème 8. — A *et* B *étant deux surclasses de* G *d'indices caractéristiques respectifs* α *et* β, $A+B$ *a pour indice caractéristique* $\sup(\alpha, \beta)=\gamma$. *L'élément caractéristique de* $A+B$ *est la somme des éléments caractéristiques de* A *et de* B *relativement à l'indice* γ. $A+B$ *est quasi ouverte si et si seulement l'une des surclasses* A *ou* B *a pour indice caractéristique* γ *et est quasi ouverte.*

A et B étant deux surclasses de G, A est dite *divisible par* B si et si seulement il existe une surclasse X telle que $A=B+X$. α et β étant les indices caractéristiques respectifs de A et de B, le théorème 7 montre que si une telle surclasse X existe, on a nécessairement $\alpha \geqq \beta$ et que si $\varphi_\alpha(A)$ est principale, il en est de même de $\varphi_\alpha(B)$. Supposons réciproquement que ces conditions soient remplies.

Si a_α et b_α sont les éléments caractéristiques de A et de B relativement à l'indice α, on considère la surclasse C, d'indice caractéristique α, admettant $a_\alpha - b_\alpha$ comme élément caractéristique, telle que $\varphi_\alpha(C)=(a_\alpha - b_\alpha)$ si A est quasi fermée et $\varphi_\alpha(C)=((a_\alpha - b_\alpha))$ si A est quasi ouverte. On voit alors que $A=B+C$. D'où ;

Théorème 9. — A *et* B *étant deux surclasses de* G *d'indices caractéristiques respectifs* α *et* β, A *est divisible par* B *si et si seulement les deux conditions suivantes sont remplies :*

1° $\alpha \geqq \beta$;
2° *Si* $\alpha=\beta$ *et si* B *est quasi ouverte, il en est de même de* A.

A et B étant deux surclasses de G d'indices caractéristiques respectifs α et β, étudions maintenant la forme de $A:B=C$. Soit γ l'indice caractéristique de C. Deux cas sont à distinguer :

I. $\beta \leqq \alpha$. — $x \in A:B \rightleftharpoons B+(x) \subset A$. Donc en vertu du corollaire 2 du théorème 3

$$x \in A:B \rightleftharpoons \varphi_\alpha(x) \in \varphi_\alpha(A):\varphi_\alpha(B).$$

Posons

$$\varphi_\alpha(A)=A_\alpha, \qquad \varphi_\alpha(B)=B_\alpha \qquad \text{et} \qquad \varphi_\alpha(x)=x_\alpha.$$

On en déduit donc $\gamma \geqq \alpha$.

Soient a_α et b_α les éléments caractéristiques de A et B relativement à l'indice α. On voit comme dans le cas d'un groupe archimédien (*voir* T. A. T. D., § IV) que $A_\alpha : B_\alpha=(a_\alpha - b_\alpha)$, sauf dans les deux cas suivants :

1° $a_\alpha - b_\alpha \notin G_\alpha$;
2° $A_\alpha=((a_\alpha))$ et $B_\alpha=(b_\alpha)$.

Dans ces deux cas, on a $A_\alpha : B_\alpha=((a_\alpha - b_\alpha))$.

Le théorème 7 montre donc que $\beta \leqq \alpha$ entraîne $\gamma=\alpha$.

II. $\alpha < \beta$. — On a encore $x \in A:B \rightleftharpoons B+(x) \subset A$. Mais, en vertu du corollaire 3 du théorème 7, on voit que cette dernière relation équivaut à

$$\varphi_\beta(B)+(\varphi_\beta(x)) > \varphi_\beta(A).$$

Posons

$$\varphi_\beta(A) = A_\beta, \qquad \varphi_\beta(B) = B_\beta \qquad \text{et} \qquad \varphi_\beta(x) = x_\beta$$

Soient a_β et b_β les éléments caractéristiques de A et B relativement à l'indice β. Ici on a $A_\beta = (a_\beta)$.

Il est facile de voir que $B_\beta + (x_\beta) > (a_\beta)$, c'est-àdire $B_\beta + (x_\beta) \subset ((a_\beta))$, équivaut à $x_\beta \in ((a_\beta - b_\beta))$, sauf dans le cas où $B_\beta = ((b_\beta))$ avec $b_\beta \in \hat{G}_\beta$.

On en déduit que dans le cas II, $\gamma = \beta$.

On a, en particulier, le

Théorème 10. — *Étant données deux surclasses* A *et* B *d'indices caractéristiques respectifs* α *et* β, *la surclasse* $C = A : B$ *a pour indice caractéristique* $\gamma = \sup(\alpha, \beta)$. *L'élément caractéristique* c_γ *de* C *est la différence* $a_\gamma - b_\gamma$ *des éléments caractéristiques de* A *et* B *relatifs à* γ, *sauf dans le cas où,* $\beta = \gamma$ *étant strictement supérieur à* α, G_β *est discret, auquel cas on a* $c_\gamma = a_\gamma - b_\gamma + e_\gamma$, e_γ *étant l'élément minimal de* G_γ.

A étant une surclasse quelconque de G, on déduit de ce qui précède la forme de $A^{-1} = G_+ : A$. Soient α et a_α l'indice et l'élément caractéristiques de A. Deux cas sont à distinguer :

I. $\alpha = \omega$. — A^{-1} a pour indice caractéristique ω et l'on a $A^{-1} = (-a_\omega)$, sauf si $a_\omega \notin G$, auquel cas $A^{-1} = ((-a_\omega))$.

II. $\omega < \alpha$. — A^{-1} a pour indice caractéristique α. On a $(A^{-1})_\alpha = ((-a_\alpha))$ si $A_\alpha = (a_\alpha)$ et $(A^{-1})_\alpha = (-a_\alpha)$ si $A_\alpha = ((a_\alpha))$ et $a_\alpha \in G_\alpha$.

On retrouverait à partir de là que, α étant l'indice caractéristique de A, on a $A + A^{-1} = P_\alpha$, sauf dans le cas où A est une surclasse principale.

Soit A une surclasse d'indice caractéristique α. Comme $\varphi_\alpha(P_\alpha) = ((0))$, on voit que P_α^{-1} est la surclasse ayant pour indice caractéristique α et telle que $\varphi_\alpha(P_\alpha^{-1}) = (0)$. En vertu du théorème 9, on voit que A divise P_α^{-1} si et si seulement A est quasi fermée. En particulier, P_α divise P_α^{-1} si et si seulement G_α est discret. On peut donc énoncer les

Théorème 11. — *La surclasse* A *est quasi fermée si et si seulement* A *divise* $(A + A^{-1})^{-1}$.

Théorème 12. — α *étant l'indice caractéristique de la surclasse* A, *le groupe* G_α *est discret si et si seulement on est dans l'un des deux cas suivants :*

1° A *n'est pas principale et* $A + A^{-1}$ *divise* $(A + A^{-1})^{-1}$;
2° A *est principale et* $P_\omega = P_\alpha$ *divise* P_ω^{-1}.

5. A, B et X étant des surclasses du groupe G, cherchons quelles conditions doivent remplir A et B pour que l'égalité

$$A + B = A + X$$

implique $B = X$.

Désignons par α, β et ξ les indices caractéristiques respectifs de A, B et X. Posons, d'autre part,

$$\gamma = \sup(\alpha, \beta), \qquad A_\gamma = \varphi_\gamma(A), \qquad B_\gamma = \varphi_\gamma(B),$$
$$X_\gamma = \varphi_\gamma(X), \qquad C = (A + B):A \qquad \text{et} \qquad C_\gamma = \varphi_\gamma(C).$$

On voit que γ est l'indice caractéristique de C.

Pour que l'on ait $B = X$, il faut et il suffit que l'on ait $\beta = \xi$ et $B_\beta = B_\xi$. Or, en vertu du théorème 8, $A + B = A + X$ équivaut aux égalités

$$\sup(\alpha, \beta) = \sup(\alpha, \xi) = \gamma, \tag{4}$$
$$A_\gamma + B_\gamma = A_\gamma + X_\gamma. \tag{5}$$

Pour que X soit déterminé d'une manière unique, il est donc nécessaire que la relation (5) détermine X_γ d'une manière unique. La relation (4) montre que $\xi \leqq \gamma$, donc X possède, ainsi que A et B, un élément caractéristique par rapport à l'indice γ. Soient a_γ, b_γ et x_γ ces éléments. La relation (5) montre que l'on a $x_\gamma = b_\gamma$. En examinant les différents cas qui peuvent se présenter et en s'appuyant sur le théorème 8, on voit que l'on a $B_\gamma = X_\gamma$, sauf dans le cas où $A_\gamma = ((a_\gamma))$ et $b_\gamma \in G_\gamma$. Dans ce cas, $\alpha = \gamma$ et A est une surclasse quasi ouverte. L'étude faite au paragraphe précédent montre qu'alors $C_\gamma = (b_\gamma)$. A et C ayant alors même indice caractéristique, A étant quasi ouverte et C quasi fermée, on en déduit que dans ce cas A ne divise pas C.

Réciproquement, supposons que A ne divise pas C. On déduit alors du théorème 9 que l'on a $\alpha = \gamma$, que A est quasi ouverte et C quasi fermée. Puisque C est quasi fermée, on a $b_\gamma \in G_\gamma$. Comme $A_\gamma = ((a_\gamma))$, on en déduit qu'alors X_γ n'est pas déterminée d'une manière unique.

Donc la condition nécessaire et suffisante pour que l'égalité (5) détermine X_γ d'une manière unique est que A divise $C = (A + B):A$.

Supposons maintenant que cette condition soit vérifiée. On voit qu'alors X est univoquement déterminée si et si seulement X ne peut avoir un indice caractéristique strictement inférieur à γ. En effet, la surclasse B' définie par

$$y \in B' \rightleftarrows \varphi_\gamma(y) \in B_\gamma \tag{6}$$

est telle que $A + B = A + B'$ et a pour indice caractéristique γ. Donc, si X peut avoir un indice caractéristique strictement inférieur à γ, l'équation $A + B = A + X$ admet au moins deux solutions. Mais si X ne peut avoir un indice caractéristique strictement inférieur à γ, on aura nécessairement $X = B'$, puisqu'on a supposé X_γ nécessairement égal à $B'_\gamma = B_\gamma$.

Or, X étant supposé univoquement déterminé, l'indice caractéristique de X ne peut être strictement inférieur à γ que si les trois conditions suivantes sont simultanément remplies :

$$\alpha = \gamma = \sup(\alpha, \beta), \tag{7}$$
$$B_\gamma = (b_\gamma), \tag{8}$$
$$\gamma \neq \omega. \tag{9}$$

En effet, si la condition (7) n'est pas réalisée, l'égalité (4) montre que l'on doit nécessairement avoir $\xi = \gamma$.

Si la condition (8) n'est pas réalisée, puisque X_γ est univoquement déterminé, on a encore $\xi = \gamma$ en vertu du théorème 5.

Enfin, si la condition (9) n'est pas réalisée, on a $\gamma = \omega$ et l'indice caractéristique de X ne peut être inférieur à γ.

Supposons réciproquement que les conditions (7), (8) et (9) se trouvent réalisées. Soit $b \in G$ tel que $\varphi_\gamma(b) = b_\gamma$ et soit $x \in b + H_\gamma$. On voit que la surclasse $X = (x)$ vérifie $A + B = A + X$. Comme H_γ contient une infinité d'éléments, l'équation en X, $A + B = A + X$, admet une infinité de solutions. Pour exprimer simultanément, d'une manière intrinsèque ces trois conditions, nous sommes amenés à distinguer deux cas :

I. G_α *n'est pas un groupe discret.* — Comme on a déjà supposé que A divisait C, la condition (8) implique $A_\gamma = (a_\gamma)$. Comme $\alpha = \gamma \neq \omega$, on déduit du paragraphe précédent que $(A^{-1})_\gamma = \varphi_\gamma(A^{-1}) = ((-a_\gamma))$. Donc A^{-1} ne divise pas $A + B$.

Supposons réciproquement que A^{-1} ne divise pas $A + B$. Les théorèmes 8 et 9 montrent alors que $\alpha \geqq \beta$, que $A + B$ est une surclasse quasi fermée et A^{-1} une surclasse quasi ouverte. A est donc une surclasse quasi fermée. On ne peut avoir $\alpha = \omega$, sans cela A^{-1} serait aussi quasi fermée (et même principale). Par suite, les trois conditions écrites plus haut sont vérifiées et l'équation $A + B = A + X$ admet une infinité de solutions.

II. G_α *est un groupe discret.* — En ce cas, A et A^{-1} sont quasi fermées et A^{-1} divise $A + B$. Il faut donc trouver une nouvelle condition. Comme $\alpha \neq \omega$, on remarque que l'on a alors $A + A^{-1} = P_\alpha = (e_\alpha)$, e_α étant l'élément minimal du groupe G_α. Mais alors si n est un entier positif et si l'on pose $nP = \underbrace{P + \ldots + P}_{n}$, on voit que $\bigcap_{n>0} nP_\alpha = A_{\alpha+1}$ si α n'est pas le plus grand indice contenu dans II et $\bigcap_{n>0} nP_\alpha = \emptyset$ si α est le plus grand indice contenu dans II.

Comme ici $\beta \leqq \alpha$, on voit que dans le cas où $P_{\alpha+1}$ existe, $P_{\alpha+1}$ ne divise pas $A + A^{-1} + B + B^{-1} = P_\alpha + P_\beta$. Donc si les conditions (7), (8) et (9) sont réalisées et si G_α est un groupe discret, on voit que $\bigcap_{n>0} n(A + A^{-1}) = \emptyset$ ou bien que $\bigcap_{n>0} n(A + A^{-1})$ ne divise pas $A + A^{-1} + B + B^{-1}$.

Réciproquement, supposons que $\bigcap_{n>0} n(A + A^{-1}) = \emptyset$ ou bien que $\bigcap_{n>0} n(A + A^{-1})$ ne divise pas $A + A^{-1} + B + B^{-1}$.

En ce cas, on a $\alpha > \omega$. En effet, si l'on avait $\alpha = \omega$, on aurait soit $A + A^{-1} = (0)$, soit $A + A^{-1} = ((0))$. De toutes manières, on aurait $\bigcap_{n>0} n(A + A^{-1}) = A + A^{-1}$. Cet ensemble serait donc une surclasse non vide qui diviserait évidemment

$A + A + B + B^{-1}$. On voit, d'autre part, que G_α est un groupe discret, sans cela on aurait encore

$$\varphi_\alpha(A + A^{-1}) = ((o)) \quad \text{et} \quad \bigcap_{n>0} n(A + A^{-1}) = A + A^{-1}.$$

Puisque G_α est discret, on a $\varphi_\alpha(A + A^{-1}) = (e_\alpha)$. Si $\alpha + 1$ n'existe pas, c'est-à-dire, puisque G_α est discret, si α est le plus grand indice contenu dans Π, on a nécessairement $\beta \leqq \alpha$. Comme G_α est discret, $B_\alpha = (b_\alpha)$ et les conditions (7), (8) et (9) sont remplies. L'équation $A + B = A + X$ ne détermine donc pas X univoquement.

Si $\alpha + 1$ existe, on a

$$\bigcap_{n>0} n(A + A^{-1}) = P_{\alpha+1} \neq \emptyset.$$

Les hypothèses impliquent donc que $P_{\alpha+1}$ ne divise pas $A + A^{-1} + B + B^{-1}$, donc que $\beta < \alpha + 1$ ou $\beta \leqq \alpha$. Les conditions (7), (8) et (9) se trouvent encore remplies et la surclasse X n'est pas déterminée univoquement.

Nous avons donc montré le

THÉORÈME 13. — A *et* B *étant deux surclasses de* G, *pour que l'égalité* $A + B = A + X$ *implique* $B = X$, *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies :*

1° A *divise* $(A + B) : A$;
2° A^{-1} *divise* $A + B$;
3° $\bigcap_{n>0} n(A + A^{-1}) \neq \emptyset$;
4° $\bigcap_{n>0} n(A + A^{-1})$ *divise* $A + A^{-1} + B + B^{-1}$.

Si l'on remarque que dans un groupe archimédien les conditions 2°, 3° et 4° se trouvent toujours vérifiées, on voit que ce théorème contient comme cas particulier le théorème 21 de T. A. T. D.

On a, de plus, le

THÉORÈME 14. — *Si l'équation en* X

$$A + B = A + X \tag{10}$$

n'admet pas une infinité de solutions, elle en admet deux tout au plus.

Soient α et β les indices caractéristiques de A et B et $\gamma = \sup(\alpha, \beta)$. L'équation (10) admet au moins une solution ayant pour indice caractéristique γ : la surclasse B' définie par la relation (6). L'élément caractéristique de X relativement à l'indice γ est b_γ. Comme il n'y a que deux surclasses d'indice caractéristique γ et d'élément caractéristique b_γ, on en déduit que si l'équation (10) admet plus d'une solution, il en existe une, soit Y, d'indice caractéristique η strictement inférieur à γ. On en déduit $\alpha \geqq \beta$. On a aussi $\varphi_\gamma(Y) = (b_\gamma)$. Si b est un élément de G tel que $\varphi_\gamma(b) = b_\gamma$ et si $z \in b + H_\gamma$, on voit que la surclasse $Z = (z)$ est telle que $\varphi_\gamma(Z) = (b_\gamma) = Y_\gamma$. On en déduit que Z est solution de l'équation (10). Or $\gamma > \eta$ implique $\gamma \neq \omega$ et par suite, H_γ a une infinité d'éléments. L'ensemble $b_\gamma + H_\gamma$ ayant une infinité d'éléments, (10) admet une infinité de solutions.

THÉORÈME 15. — *Pour que l'équation* (10) *n'admette au plus que deux solutions quelle que soit la surclasse* B, *il faut et il suffit que* A *ait pour indice caractéristique* ω. *En particulier, pour que cette équation n'admette qu'une solution quel que soit* B, *il faut et il suffit que* A *soit une surclasse principale.*

Soit α l'indice caractéristique de A, soit B une surclasse quasi fermée d'indice caractéristique α. On voit, comme dans la démonstration du théorème 13, que l'équation (10) admet une infinité de solutions si et si seulement $\alpha \neq \omega$. Si, par contre, $\alpha = \omega$, l'équation (10) ne peut admettre que deux solutions : en effet, quel que soit l'indice caractéristique β de B, une surclasse X ne peut être solution que si elle admet le même indice caractéristique. Si A admet pour indice caractéristique ω et est quasi ouverte, on a $A = ((a))$. Si l'on prend $b \in G$ et $B = (b)$, on voit que la surclasse $B' = ((b))$ est bien telle que $A + B = A + B'$. L'équation (10) admet alors ces deux solutions. Mais si A est une surclasse principale, on voit que l'équation (10) ne peut admettre que la solution $X = B$, d'où le théorème.

THÉORÈME 16. — *Pour que l'équation* (10) *n'admette au plus que deux solutions* (*resp. une solution*) *quelle que soit la surclasse* A, *il faut et il suffit que l'on soit dans un des deux cas suivants :*

1° G *est un groupe archimédien* (*resp. discret*); *ou tel que l'élément caractéristique* b_ω *de B n'appartienne pas à G.*

2° *L'indice caractéristique* β *de B est maximal dans l'ensemble* Π *et l'élément caractéristique* b_β *de* B *n'appartient pas à* G_β.

Si l'on est dans le premier cas, le théorème 15 montre que l'équation (10) n'admet au plus que deux solutions. Si G est de plus discret, X est nécessairement égal à B, puisque toutes les surclasses sont principales. Dans le second cas, les indices caractéristiques de A et de X sont nécessairement inférieurs ou égaux à β, donc A et X admettent des éléments caractéristiques a_β et x_β par rapport à β. On a $x_\beta = b_\beta$ et comme $b_\beta \notin G_\beta$, on a $\varphi_\beta(X) = ((b_\beta))$, donc X admet β pour indice caractéristique et $X = B$.

Supposons maintenant que l'on ne soit dans aucun de ces deux cas. Si β n'est pas maximal, $\exists \iota \in \Pi$ avec $\iota > \beta$. Soit A une surclasse d'indice caractéristique ι. Si b_ι est l'élément caractéristique de B relatif à l'indice ι et si b est un élément de B tel que $\varphi_\iota(b) = b_\iota$, tout élément x contenu dans $b + H_\iota$ est tel que la surclasse principale (x) satisfasse à l'équation (10) qui admet alors une infinité de solutions.

Supposons maintenant β maximal. D'après les hypothèses, l'élément caractéristique b_β de B appartient à G_β et $\beta \neq \omega$ (sans cela G serait archimédien). Soit A une surclasse d'indice caractéristique β que l'on choisira quasi ouverte ou quasi fermée suivant que B est quasi ouverte ou quasi fermée. Si $b \in G$ est tel que

$\varphi_\beta(b) \in G_\beta$, on voit que tout élément x contenu dans $b + H_\beta$ (ensemble qui contient une infinité d'éléments puisque $\beta \neq \omega$) est tel que $A + B = A + (x)$. L'équation (10) admet donc une infinité de solutions.

Pour achever la démonstration du théorème, il suffit de remarquer que si G est un groupe archimédien non discret et si l'élément caractéristique b_ω de B appartient à G_ω, il suffit de prendre pour A une surclasse quasi ouverte et l'équation (10) admet alors les solutions (b_ω) et $((b_\omega))$.

6. G étant un groupe totalement ordonné, $\mathfrak{S}$ l'ensemble des surclasses de G et $A \in \mathfrak{S}$, cherchons à déterminer un sous-ensemble $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{S}$ qui soit le plus grand possible tel que les éléments de $\mathfrak{G}$ forment un groupe par rapport à l'addition et tel que $A \in \mathfrak{G}$.

Supposons qu'un tel ensemble $\mathfrak{G}$ existe et soit E l'élément unité du groupe $\mathfrak{G}$. Il existe de même une surclasse $A' \in \mathfrak{G}$ telle que $A + A' = E$. Si α et ε sont les indices caractéristiques respectifs de A et E, l'équation $A + A' = E$ montre que $\varepsilon \succeq \alpha$. L'équation $A + E = A$ montre, d'autre part, que $\alpha \succeq \varepsilon$. On en déduit donc $\varepsilon = \alpha$ et comme dans ce raisonnement on peut remplacer A par toute autre surclasse contenue dans $\mathfrak{G}$, on voit que toutes ces surclasses ont pour indice caractéristique α.

L'équation $A + E = A$ montre que E admet pour élément caractéristique o et que si A est quasi fermée, il en est de même de E. L'équation $A + A' = E$ montre que si E est quasi fermée il en est de même de A. Donc E est en même temps que A quasi ouverte ou quasi fermée. Comme on peut ici remplacer A par toute autre surclasse contenue dans $\mathfrak{G}$, on voit que toutes ces surclasses sont, en même temps que A, quasi ouvertes ou quasi fermées. Or, le théorème 8 montre que toutes les surclasses de G qui ont même indice caractéristique que A et qui sont en même temps que A quasi ouvertes ou quasi fermées forment un groupe additif. Ce groupe est isomorphe à G_α si ces surclasses sont quasi fermées et isomorphe à $\hat{G}_\alpha$ si ces surclasses sont quasi ouvertes (ceci n'est d'ailleurs possible que si G_α n'est pas discret). En résumé :

Théorème 17. — G *étant un groupe ordonné et* A *une surclasse de* G *d'indice caractéristique* α, *parmi tous les groupes additifs de surclasses qui contiennent* A, *il en existe un, soit* $\mathfrak{G}_A$, *qui contient tous les autres. Il se compose de toutes les surclasses d'indice caractéristique* α *qui sont en même temps que* A *quasi ouvertes ou quasi fermées. L'application* $X \to x$ *qui fait correspondre à toute surclasse contenue dans* $\mathfrak{G}_A$ *son élément caractéristique est un isomorphe de* $\mathfrak{G}_A$ *sur* G_α *si* A *est quasi fermée et de* $\mathfrak{G}_A$ *sur* $\hat{G}_\alpha$, *groupe complété de* G_α, *si* A *est quasi ouverte.*

7. Soit $\mathfrak{O}$ un anneau de multiplication du type de Dedekind [1], K son corps des quotients, $(\mathfrak{p}_\iota)_{\iota \in I} = \mathfrak{P}$ l'ensemble de ses idéaux premiers différents de $\mathfrak{O}$.

---

[1] *Voir* T. A. T. D. § III.

Soit M le sous-ensemble de Π tel que $\iota \in M$ si et si seulement $\mathfrak{p}_\iota$ est un idéal maximal. On ordonnera Π par la relation d'ordre

$$\alpha \geqq \beta \rightleftharpoons \mathfrak{p}_\alpha \subset \mathfrak{p}_\beta. \tag{11}$$

On sait (³) que l'on peut définir une famille canonique de valuations de K, soit $\mathcal{V} = (v_\mu)_{\mu \in M}$ qui soit une famille de définition de $\mathcal{O}$, régulière, arithmétiquement utilisable et formée de valuations deux à deux indépendantes sur $\mathcal{O}$. Dans le cas particulier où M se compose d'un seul élément μ, $\mathcal{O}$ est un anneau de valuation et v_μ la valuation correspondante.

Soit G_μ le groupe de valeurs correspondant à v_μ si $\mu \in M$. C'est un groupe totalement ordonné auquel on peut appliquer les considérations des paragraphes précédents.

Dans ce paragraphe, lorsque nous parlerons d'idéaux il s'agira de $\mathcal{O}$-idéaux fractionnaires. Lorsque nous dirons qu'un idéal $\mathfrak{b}$ divise un idéal $\mathfrak{a}$, cela signifiera qu'il existe un idéal (fractionnaire) $\mathfrak{c}$ tel que $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$.

Étant donné un $\mathcal{O}$-idéal $\mathfrak{a}$ et un indice $\mu \in M$, l'ensemble $v_\mu(\mathfrak{a})$ est une surclasse de G_μ. On désignera par $M(\mathfrak{a})$ le sous-ensemble de M composé des indices μ tels que $v_\mu(\mathfrak{a})$ soit différent de $G_{\mu+} = (o)$. On sait que $M(\mathfrak{a})$ est fini. On a vu (T. A. T. D., th. 16) que si à chaque indice $\mu \in M$ on associe une surclasse A_μ de G_μ, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un idéal $\mathfrak{a}$ tel que $v_\mu(\mathfrak{a}) = A_\mu$ pour tout $\mu \in M$ est qu'il existe un sous ensemble fini M' de M tel que $\mu \notin M'$ entraîne $A_\mu = G_{\mu+}$. L'idéal $\mathfrak{a}$ est alors défini d'une manière unique par

$$x \in \mathfrak{a} \rightleftharpoons (\text{pour tout } \mu \in M,\ v_\mu(x) \in A_\mu). \tag{12}$$

Soit $\mathfrak{p}_\iota \in \mathfrak{T}$. Comme $\mathcal{O}$ est un anneau du type de Dedekind, il existe un et un seul indice μ contenu dans M tel que $\mathfrak{p}_\mu \supset \mathfrak{p}_\iota$. μ sera dit l'indice minimal correspondant à l'indice ι. En considérant comme équivalents deux indices α et β auxquels correspond le même indice minimal, on voit que l'on partage Π en classe d'équivalence; α et β appartiennent à une même classe si et si seulement $\mathfrak{p}_\alpha$ et $\mathfrak{p}_\beta$ appartiennent à une même strie. Chaque classe contient un et un seul élément de M. On désignera par $E(\iota)$ la classe à laquelle appartient l'élément ι. Si $\mu \in E(\iota) \cap M$, on voit que $E(\iota)$ est isomorphe à l'ensemble des surclasses premières de G_μ. Si P_ι est la surclasse première de G_μ qui correspond à l'indice ι, c'est-à-dire si $P_\iota = v_\mu(\mathfrak{p}_\iota)$, on notera G_ι le groupe quotient de G_μ par le sous-groupe isolé correspondant à cette surclasse première. On voit que si $\alpha, \beta \in \Pi$ et si $\beta \geqq \alpha$, il existe un homomorphisme canonique croissant $\varphi_{\beta\alpha}$ de G_α sur G_β. Si ι est un indice quelconque contenu dans Π et si $\mu \in E(\iota) \cap M$, on peut définir une application v_ι de K^* (ensemble des éléments non nuls du corps K) sur G_ι en posant pour tout $a \in K^*$

$$v_\iota(a) = \varphi_{\iota\mu}(v_\mu(a)). \tag{13}$$

Il est facile de voir que cette application est une valuation du corps K qui coïncide avec une des valuations précédemment définies dans le cas où $\iota \in M$.

A tout élément $\iota \in P$ correspond donc une valuation v_ι de K par le groupe totalement ordonné G_ι.

$\mathfrak{a}$ étant un idéal et $\iota \in \Pi$, on voit que $v_\iota(\mathfrak{a})$ est une surclasse de G_ι : en effet d'après la relation (12), si $\mu \in E(\iota) \cap M$, $v_\mu(\mathfrak{a})$ est une surclasse de G_μ. Donc $v_\iota(\mathfrak{a}) = \varphi_{\iota\mu}(v_\mu(\mathfrak{a}))$ est une surclasse de G_ι.

Si $\{\mu\} = E(\iota) \cap M$, la surclasse $v_\mu(\mathfrak{a})$ de G_μ a un indice caractéristique $\alpha \in E(\iota)$ et un élément caractéristique $\alpha_\alpha \in G_\alpha$. Si $\iota \geqq \alpha$, $v_\iota(\mathfrak{a})$ admet un élément caractéristique relativement à l'indice ι, soit a_ι. Nous dirons encore que α est un *indice caractéristique de l'idéal* $\mathfrak{a}$, que a_α est un *élément caractéristique de* $\mathfrak{a}$ et que a_ι est l'*élément caractéristique de* $\mathfrak{a}$ *relativement à l'indice* ι. Le corollaire 1 du théorème 3 montre, en particulier, que pour tout $\iota \in \Pi$, ι est un indice caractéristique de $\mathfrak{p}_\iota$, ses autres indices caractéristiques étant des indices minimaux. On voit que tout idéal $\mathfrak{a}$ admet un et un seul indice caractéristique dans chacune des classes d'équivalence $E(\iota)$.

On rappelle (T. A. T. D., § III) que si $\mathfrak{a}$ est un idéal quelconque et si $\mu \in M$, l'idéal $\mathfrak{a}_\mu$ défini par

(14) $$x \in \mathfrak{a}_\mu \rightleftharpoons (v_\iota(x) \geqq 0 \text{ si } \iota \in M \text{ et } \iota \neq \mu;\ v_\iota(x) \in v_\iota(\mathfrak{a}))$$

est appelé la composante de $\mathfrak{a}$ relativement à l'idéal maximal $\mathfrak{p}_\mu$. La composante $\mathfrak{a}_\mu$ sera dite *quasi fermée* (resp. *quasi ouverte*) si la surclasse $v_\mu(\mathfrak{a}) = v_\mu(\mathfrak{a}_\mu)$ de G_μ est quasi fermée (resp. quasi ouverte). L'idéal $\mathfrak{a}$ sera dit *quasi fermé* si toutes ses composantes sont quasi fermées.

Soit $C(\mathfrak{a})$ le sous-ensemble de Π formé par les indices caractéristiques de l'idéal $\mathfrak{a}$. On désignera par $C'(\mathfrak{a})$ le sous-ensemble de $C(\mathfrak{a})$ formé par les indices ι tels que la surclasse $v_\iota(\mathfrak{a})$ de G_ι soit principale, par $C''(\mathfrak{a})$ l'ensemble $C(\mathfrak{a}) - C'(\mathfrak{a})$. Si pour tout $\alpha \in C(\mathfrak{a})$, a_α désigne l'élément caractéristique de $\mathfrak{a}$ correspondant, on voit alors que $\mathfrak{a}$ est ainsi défini

(15) $$x \in \mathfrak{a} \rightleftharpoons (v_\alpha(x) \geqq a_\alpha \text{ si } \alpha \in C'(\mathfrak{a});\ v_\alpha(x) > a_\alpha \text{ si } \alpha \in C''(\mathfrak{a})).$$

$\mathfrak{a}$ est quasi fermé si et si seulement $C''(\mathfrak{a}) = \emptyset$,

Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux $\mathcal{O}$-idéaux. Comme on sait que pour tout $\mu \in M$ on a

$$v_\mu(\mathfrak{ab}) = v_\mu(\mathfrak{a}) + v_\mu(\mathfrak{b}),$$

on déduit de la formule (13) que l'on a pour tout $\iota \in \Pi$

(16) $$v_\iota(\mathfrak{ab}) = v_\iota(\mathfrak{a}) + v_\iota(\mathfrak{b}) \qquad (\iota \in \Pi).$$

On sait, d'autre part ([3]), que pour tout $\mu \in M$ on a

(17) $$v_\mu(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) = v_\mu(\mathfrak{a}) : v_\mu(\mathfrak{b}) \qquad (\mu \in M)$$

et que $\mathfrak{a}$ est divisible par $\mathfrak{b}$ si et si seulement pour tout $\mu \in M$, la composante de $\mathfrak{a}$ relative à μ est divisible par la composante de $\mathfrak{b}$ relative à μ. On déduit alors du théorème 11 le

Théorème 18. — *L'idéal* $\mathfrak{a}$ *est quasi fermé si et si seulement* $\mathfrak{a}$ *divise* $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1})^{-1}$.

$\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ étant deux idéaux appartenant à une même strie maximale $\mathfrak{p}_\mu$, on voit que l'indice caractéristique de $\mathfrak{a}$ correspondant à μ est supérieur ou égal à l'indice caractéristique de $\mathfrak{b}$ correspondant si et si seulement $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} \subset \mathfrak{b}\mathfrak{b}^{-1}$.

Si $\mathfrak{a}$ est un $\mathcal{O}$-idéal, pour tout indice $\mu \in \mathbf{M}$, on voit que la composante $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1})_\mu$ de $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}$ relative à μ est, soit $\mathcal{O}$, soit l'idéal premier $\mathfrak{p}_\alpha$, α étant l'indice caractéristique de $\mathfrak{a}$ correspondant à l'indice μ. $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}$ est donc un produit d'idéaux premiers. On voit facilement à partir du théorème 9 et des considérations qui précèdent que c'est le plus grand produit d'idéaux premiers qui soit divisible par $\mathfrak{a}$:

THÉORÈME 19. — *$\mathfrak{a}$ étant un $\mathcal{O}$-idéal, parmi tous les produits d'idéaux premiers qui sont divisibles par $\mathfrak{a}$, il en est un qui contient tous les autres, c'est l'idéal $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}$.*

Remarquons encore qu'il résulte du théorème 9 et des définitions le

THÉORÈME 20. — *La condition nécessaire et suffisante pour que le groupe ordonné $G_\iota (\iota \in \Pi)$ soit discret est que $\mathfrak{p}_\iota$ divise $\mathfrak{p}_\iota^{-1}$.*

Le théorème 9 et les considérations qui précèdent permettent d'énoncer le critère de divisibilité suivant :

THÉORÈME 21. — *Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux $\mathcal{O}$-idéaux, pour que $\mathfrak{b}$ divise $\mathfrak{a}$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies :*

1° $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} \subset \mathfrak{b}\mathfrak{b}^{-1}$;
2° $C''(\mathfrak{b}) \cap C'(\mathfrak{a}) = \emptyset$.

La première condition exprime que pour tout $\mu \in M$, l'indice caractéristique de $\mathfrak{b}$ correspondant à μ est inférieur ou égal à l'indice caractéristique correspondant de $\mathfrak{a}$. La deuxième condition exprime que dans le cas où ces deux indices caractéristiques seraient égaux, $\mathfrak{b}_\mu$ ne peut être quasi ouvert sans qu'il en soit de même de $\mathfrak{a}_\mu$.

Le théorème 13 permet immédiatement d'énoncer le :

THÉORÈME 22. — *$\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ étant deux $\mathcal{O}$-idéaux, pour que l'égalité $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{r}$ implique $\mathfrak{b} = \mathfrak{r}$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies :*

1° $\mathfrak{a}$ *divise* $(\mathfrak{a}\mathfrak{b}):\mathfrak{a}$;
2° $\mathfrak{a}^{-1}$ *divise* $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$;
3° $\bigcap_{n>0} (\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1})^n \neq \{0\}$;
4° $\bigcap_{n>0} (\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1})^n$ *divise* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}\mathfrak{b}^{-1}$.

Dans le cas où l'équation en $\mathfrak{r}$

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{r} \tag{18}$$

n'admet pas une infinité de solutions, le théorème 14 permet de donner une limite supérieure du nombre possible des solutions.

Soit $m(\mathfrak{a})$ le nombre des éléments contenus dans $M(\mathfrak{a})$. Il est facile de voir que le nombre des solutions de l'équation (18) est soit infini, soit égal à 1, soit borné supérieurement par $2m(\mathfrak{a})$. En effet, si $\mu \notin M(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a}_\mu = \mathcal{O}$ et $\mathfrak{r}_\mu = \mathfrak{b}_\mu$.

Si $\mu \in M(\mathfrak{a})$, le théorème 14 montre que les surclasses de G_μ satisfaisant à l'équation $v_\mu(\mathfrak{a}) + v_\mu(\mathfrak{b}) = v_\mu(\mathfrak{a}) + X$ sont en nombre infini ou sont en nombre au plus égal à 2. En distinguant le cas particulier où $M(\mathfrak{a}) = \emptyset$, c'est-à-dire $\mathfrak{a} = \mathcal{O}$, on a donc :

THÉORÈME 23. — *Soit $\mathfrak{a}$ un $\mathcal{O}$-idéal différent de $\mathcal{O}$ et $m(\mathfrak{a})$ le nombre des éléments contenus dans $M(\mathfrak{a})$. Si l'équation en $\mathfrak{r}$*

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{r} \tag{18}$$

n'admet pas une infinité de solutions, elle en admet au plus $2m(\mathfrak{a})$.

Remarque. — On peut encore améliorer cette borne en remarquant que si $\mu \in M(\mathfrak{a})$, mais si l'indice caractéristique de $\mathfrak{b}$ contenu dans $E(\mu)$ est strictement supérieur à μ, $v_\mu(\mathfrak{r})$ est parfaitement déterminé.

Le théorème 15 permet d'énoncer le

THÉORÈME 24. — *Pour que l'équation (18) n'admette qu'un nombre fini de solutions [nombre au plus égal à $2m(\mathfrak{a})$] quel que soit l'idéal $\mathfrak{b}$, il faut et il suffit que l'idéal $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}$ soit égal à $\mathcal{O}$ ou à un produit d'idéaux premiers maximaux. En particulier, pour que l'équation (18) n'admette qu'une solution quel que soit l'idéal $\mathfrak{b}$, il faut et il suffit que $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} = \mathcal{O}$, c'est-à-dire que $\mathfrak{a}$ soit engendré par un nombre fini d'éléments.*

Le théorème 17 permet enfin d'énoncer le

THÉORÈME 25. — *$\mathfrak{a}$ étant un $\mathcal{O}$-idéal, parmi tous les groupes multiplicatifs de $\mathcal{O}$-idéaux qui contiennent $\mathfrak{a}$, il en existe un, soit $\mathfrak{G}(\mathfrak{a})$, qui contient tous les autres. Un $\mathcal{O}$-idéal $\mathfrak{b}$ appartient à $\mathfrak{G}(\mathfrak{a})$ si et si seulement $C(\mathfrak{b}) = C(\mathfrak{a})$ et $C'(\mathfrak{b}) = C'(\mathfrak{a})$, c'est-à-dire si l'ensemble des indices caractéristiques de $\mathfrak{b}$ est identique à celui des indices caractéristiques de $\mathfrak{a}$ et si pour tout $\mu \in M$ tel que $\mathfrak{a}_\mu$ soit quasi fermé, il en est de même de $\mathfrak{b}_\mu$.*

$\mathfrak{G}(\mathfrak{a})$ est un groupe partiellement ordonné isomorphe à la somme directe $\sum_{\iota \in C(\mathfrak{a})} \Gamma_\iota$ où $\Gamma_\iota = G_\iota$ si $\mathfrak{a}_\iota$ est quasi fermé et $\Gamma_\iota = \hat{G}_\iota$ si $\mathfrak{a}_\iota$ est quasi ouvert.

En particulier, $\mathfrak{G}(\mathcal{O})$ est le groupe formé par tous les $\mathcal{O}$-idéaux finis. Il est isomorphe à $\sum_{\mu \in M} G_\mu$.

(Manuscrit reçu le 18 novembre 1952).