BULLETIN DE LA S. M. F.

D. ANDRÉ

Sur le développement de la fonction elliptique $\mu(x)$ suivant les puissances croissantes du module

Bulletin de la S. M. F., tome 6 (1878), p. 163-165
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__163_1>

Sur le développement de la fonction elliptique $\mu(x)$ suivant les puissances croissantes du module; par M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

(Séance du 10 avril 1878.)

I. Dans le développement, suivant les puissances du module k, de la fonction elliptique $\mu(x)$, les coefficients des puissances successives de k sont des fonctions de x.

Nous nous proposons, dans la présente Note, de déterminer la forme générale de ces fonctions.

II. Pour y parvenir, nous partons de l'équation connue

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} = (2k^2 - 1)\mu - 2k^2\mu^3,$$

que nous écrivons sous cette forme

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} + \mu = 2k^2(\mu - \mu^3), \tag{1}$$

et nous posons simultanément

$$\mu = \nu_0 + \nu_1 k^2 + \nu_2 k^4 + \nu_3 k^6 + \ldots, \tag{2}$$

$$\mu^3 = V_0 + V_1 k^2 + V_2 k^4 + V_3 k^6 + \ldots. \tag{3}$$

En portant ces développements dans l'équation (1), puis égalant aux deux membres de cette équation les coefficients de k^{2i}, nous obtenons l'équation différentielle

$$(4)\qquad \frac{d^2 v_t}{dx^2} + v_t = 2 v_{t-1} - 2 V_{t-1},$$

qui subsiste pour toutes les valeurs entières et non négatives de t, si l'on convient de regarder comme nulles les expressions v_{-1} et V_{-1}.

III. Cette équation (4) nous donne immédiatement

$$v_0 = \cos x;$$

de plus, elle nous permet de calculer, de proche en proche, les fonctions $v_1, v_2, \ldots$, dont nous cherchons à déterminer la forme.

Supposons, en effet, connues toutes les quantités $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{t-1}$, c'est-à-dire tous les v dont l'indice est inférieur à t. Nous pouvons immédiatement calculer V_{t-1}, qui ne dépend que de ces v, et qui est lié à eux par l'équation

$$(5)\qquad V_{t-1} = \frac{1}{(t-1)v_0} \sum_0^{t-2}{}_h (3t - 3 - 4h) V_h v_{t-1-h},$$

laquelle se déduit très-facilement des égalités (2) et (3).

Or, V_{t-1} calculé, v_t s'obtient aussitôt; car on tire sans peine, de l'équation (4), la formule

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} v_t = {} & 2\sin x \int_0^x (v_{t-1} - V_{t-1}) \cos x \, dx \\ & - 2\cos x \int_0^x (v_{t-1} - V_{t-1}) \sin x \, dx. \end{aligned}\right.$$

IV. Pour revenir à la forme des coefficients considérés, appliquons les formules (5) et (6) au calcul des quantités v_1 et v_2, puis écrivons les résultats que nous obtenons au-dessous de l'expression déjà trouvée pour v_0; nous formons le tableau

$$\begin{aligned} v_0 &= \cos x, \\ v_1 &= \frac{1}{16}(-\cos x + \cos 3x) + \frac{x}{4}\sin x, \\ v_2 &= \frac{1}{256}(-9\cos x + 8\cos 3x + \cos 5x) \\ &\quad + \frac{x}{64}(4\sin x + 3\sin 3x) - \frac{x^2}{32}\cos x. \end{aligned}$$

Un examen attentif de ces expressions de ν_0, ν_1, ν_2 nous conduit à poser

$$(7) \qquad \nu_t = \Sigma\, p_{i,j}\, x^{2i} \cos(2j+1)x + \Sigma\, q_{i,j}\, x^{2i+1} \sin(2j+1)x,$$

$p_{i,j}$ et $q_{i,j}$ étant des constantes, i et j des entiers non négatifs, et les Σ s'étendant, le premier à tous les systèmes de valeurs des entiers i et j qui satisfont à la condition $2i+j \leq t$, et le second à tous les systèmes tels que l'on ait

$$2i+1+j \leq t.$$

V. Mais cette égalité (7), prise dans toute sa généralité, n'est écrite que par induction. Vraie évidemment pour ν_0, ν_1, ν_2, on peut douter qu'elle le soit pour les coefficients suivants. Elle l'est cependant, et non-seulement pour les premiers de ces coefficients, mais pour tous, de façon qu'elle exprime la forme générale des fonctions ν et résout notre problème. On le démontre en établissant, à l'aide des formules (5) et (6), que, si elle est exacte pour tous les coefficients ν dont l'indice est inférieur à t, elle l'est encore pour ν_t. Les raisonnements assez longs qu'exige cette démonstration nous paraissent faciles; ils sont tout à fait analogues à ceux que nous avons employés dans notre Mémoire *Sur le développement de la fonction elliptique $\lambda(x)$ suivant les puissances croissantes du module.*

VI. Évidemment, en remplaçant les sinus et cosinus de la formule (7) par leurs développements respectifs suivant les puissances de x, on peut arriver à la forme des coefficients du développement suivant les puissances de x de la fonction elliptique $\mu(x)$. On retrouve par cette voie, pour le cas particulier de $\mu(x)$, les résultats que nous avons présentés à l'Académie des Sciences dans la séance du 10 juillet 1876.