BULLETIN DE LA S. M. F.

ERNEST COROMINAS

Contribution à la théorie de la dérivation d'ordre supérieure

Bulletin de la S. M. F., tome 81 (1953), p. 177-222

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1953__81__177_0>

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DE LA DÉRIVATION D'ORDRE SUPÉRIEUR

PAR M. ERNEST COROMINAS.

Introduction.

Le problème suivant, qui m'a été posé par M. J. Rey Pastor, est à l'origine de mes recherches.

Est-il possible d'étendre aux dérivées d'ordre supérieur ou quotients différentiels, les théorèmes classiques sur la dérivation formelle des séries? Ce problème m'a vite conduit à un autre plus général.

Est-il possible d'étendre aux quotients différentiels les théorèmes fondamentaux du Calcul différentiel, c'est-à-dire, les théorèmes de Rolle, de l'accroissement fini, etc.?

J'y réponds par l'affirmative, en appliquant uniformément un procédé de démonstration, duquel on peut tirer tous les théorèmes qui sont à la base du Calcul différentiel. Ces théorèmes et leurs applications constituent la première partie de cette thèse.

Ces questions étaient d'autant plus intéressantes que M. A. Denjoy (1) avait déjà montré l'intérêt qui s'attache à l'étude des quotients différentiels. Il leur a donné corps en résolvant, parmi d'autres questions, les trois problèmes fondamentaux que pose toute généralisation de la notion de dérivée, à savoir : établir les liens avec les dérivées classiques; démontrer qu'elles déterminent leurs primitives et donner enfin un calcul totalisant, permettant de remonter de la dérivée à sa primitive.

Le but que j'ai constamment poursuivi est de montrer qu'on peut bâtir parallèlement au Calcul classique et à côté de lui un calcul plus général et non moins commode. On peut donc affirmer que les facilités du Calcul, tel que nous le connaissons, relèvent d'une notion de $n^{\text{ième}}$ ($n > 1$) dérivée plus générale que celle communément employée.

Une seule caractéristique se perd dans cette généralisation : la $(n+m)^{\text{ième}}$ dérivée n'est pas forcément la $n^{\text{ième}}$ dérivée de la $m^{\text{ième}}$ dérivée.

Nous nous sommes borné à l'étude des dérivées d'une seule fonction à une seule variable. Évidemment on peut généraliser le problème au cas d'une ou plusieurs variables, d'une ou plusieurs fonctions en se servant de conditions de

(1) A. DENJOY, *Sur l'intégration des coefficients différentiels d'ordre supérieur* (*Fund. Math.*, t. 25).

contact semblables à celle qui permet de définir les quotients différentiels. Nous signalerons seulement les cas où cette généralisation est immédiate.

A la suite, je donne une rapide description de résultats obtenus et des procédés utilisés.

D'abord, je démontre qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe le $n^{\text{ième}}$ quotient différentiel $f_n(x_0)$ (*voir* § 5) est qu'il existe la limite itérée

$$\lim_{x_{n+1} \succ x_0} \lim_{x_n \succ x_0} \dots \lim_{x_1 \succ x_0} \Delta^n[x_1, \dots, x_{n+1}; f(x)],$$

où $\Delta^n[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f(x)]$ désigne le $n^{\text{ième}}$ rapport aux différences de $f(x)$ aux points $x_1, \dots, x_{n+1}$.

Alors, on a

$$\frac{1}{n!} f_n(x_0) = \Delta^n[x_0, \dots, x_0; f(x)],$$

où ce dernier rapport désigne la précédente limite itérée.

Je donne ensuite la condition nécessaire et suffisante pour que les fonctions $x_i = x_i(h)$ $(i = 1, \dots, n+1)$, qui convergent vers x_0 avec $h \to 0$, soient telles qu'on ait

$$\lim_{h=0} \Delta^n[x_i; f(x)] = \frac{1}{n!} f_n(x_0),$$

où $f(x)$ est n'importe quelle fonction différentiable d'ordre n au point x_0.

Ces deux théorèmes nous donnent deux nouvelles définitions du $n^{\text{ième}}$ quotient différentiel.

Afin d'établir les théorèmes de la valeur moyenne nous commençons par relationner le $n^{\text{ième}}$ rapport aux différences sur les points $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ avec les $n^{\text{ièmes}}$ rapports sur les groupes de points

$$x_1 < y_{1,1} < y_{1,2} < \dots < y_{1,s_1} < x_2 < y_{2,1} < \dots < x_n < y_{n,1} < y_{n,2} < \dots < y_{n,s_n} < x_{n+1}.$$

Une expression de ce type est forcément compliquée, sauf pour les premiers ordres. Aussi, nous nous bornons à signaler que le premier rapport est une moyenne arithmétique pondérée des seconds.

Par exemple, dans le cas particulier où les intervalles $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, ... sont égaux et où ils viennent subdivisés en un nombre égal d'intervalles également égaux $(r - 1 = s_1 \dots = s_n)$, le $m^{\text{ième}}$ coefficient de pondération, ${}_{r-1}C_m^n$, est le nombre de combinaisons qu'on peut former avec n éléments pris de m en m sans qu'un même élément puisse être répété plus de $r - 1$ fois.

Grâce à cette propriété de moyenne et à la continuité des rapports aux différences par rapport aux arguments, on démontre qu'à un groupe de points $x_i (i = 1, \dots, n+1)$, distincts deux à deux, on peut attacher un point c intérieur au diamètre $\delta(x_1, \dots, x_{n+1})$ tel que

$$\Delta^n[x_1, \dots, x_{n+1}; f(x)] = \frac{1}{n!} f_n(c).$$

Nous avons là la généralisation du théorème de l'accroissement fini et de Rolle.

Dans ce même ordre d'idées nous démontrons les théorèmes III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI et XII. Tous sont des théorèmes du type qu'on appelle souvent de la valeur moyenne du Calcul différentiel et qui sont plus précis que leurs homonymes du Calcul intégral. Parmi eux et leurs applications figurent la propriété de Darboux (ou continuité de Darboux), le théorème de Cauchy (th. VIII), le théorème généralisé de l'accroissement fini (th. XI), la démonstration que le $n^{\text{ième}}$ quotient différentiel détermine sa primitive à un polynome de $(n-1)^{\text{ième}}$ degré près, la démonstration que le $n^{\text{ième}}$ quotient différentiel du $m^{\text{ième}}$ quotient est le $(n+m)^{\text{ième}}$ quotient différentiel et enfin qu'un $n^{\text{ième}}$ quotient différentiel borné sur un segment est également la $n^{\text{ième}}$ dérivée ordinaire de la même fonction.

Cette dernière question présente une grande similitude avec un théorème de nature taubérienne.

Un problème ayant trait à une propriété locale des fonctions différentiables d'ordre supérieur commande une grande partie des développements postérieurs.

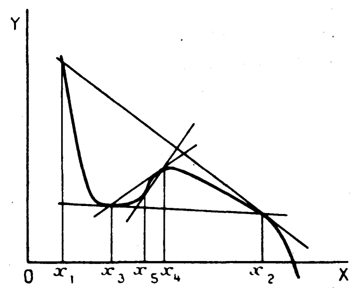

Fig. 1.

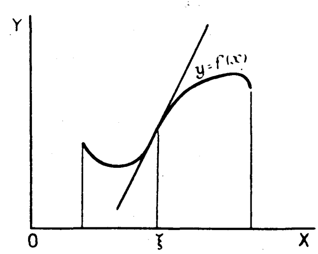

Fig. 2.

Il s'agit de savoir sous quelles conditions une fonction différentiable d'ordre n possède un point de maximum (minimum) d'ordre n. Ces points sont la généralisation pour n quelconque des points tels que les points ($n=0$), où une fonction continue atteint son maximum (minimum), et des points tels que les points d'inflexion des deux espèces ($n=1$).

L'idée générale de la démonstration de l'existence d'un point de maximum d'ordre 1 (point d'inflexion descendant) pour les fonctions différentiables non linéaires est la suivante :

Je définis par récurrence (*fig.* 1) la suite $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots$, de façon à ce que : x_2 soit le point où la fonction continue de x, $[x_1, x] = \dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ atteint son maximum; x_3 soit le point où $[x_2, x]$ atteint son maximum; ... ; x_i soit le point où $[x_{i-1}, x]$ atteint sa valeur maximum, ...

On démontre alors sans difficulté que : *a*. la suite x_i est convergente; *b*. que la suite $v_i = [x_{i-1}, x_i]$ $(i=1, 2, \ldots)$ est monotone et converge vers $f'(\xi)$, où $\xi = \lim\limits_{i=\infty} x_i$ et *c*. le point ξ est un point de maximum d'ordre 1 de $f(x)$ (*fig.* 2).

Les points *a*, *b* et *c* se laissent généraliser pour n quelconque si l'on admet que la suite des pentes $v_i = \triangle^n[x_{i-n}, \ldots, x_i; f(x)]$ est bornée.

Pour $n=1$, $\lim\limits_{i=\infty}[x_{i-1}, x_i] = f'(\xi)$, du fait que $x_i \to \xi$ et que ξ est compris entre x_{i-1} et x_i. On sait en effet que la dérivée ordinaire et la dérivée d'intervalle sont une seule et même chose.

Des artifices de la même nature permettent dans le cas où $n = 2,3$ de conclure que v_i converge vers la dérivée correspondante au point ξ. Malheureusement ces artifices ne sont plus applicables dès que $n > 3$.

C'est ainsi que la nécessité de donner une démonstration, du fait que v_i est bornée pour n quelconque, m'a amené à introduire tout un système de notions et raisonnements nouveaux. Ils constituent une sorte d'Algèbre infinitésimale. Une analogie nous fera mieux saisir de quoi il s'agit.

Si au lieu de prendre — comme c'est le cas dans l'Algèbre courante — un polynome de $n^{\text{ième}}$ degré nous prenons un polynome $\varphi_i(x)$ à degré borné où i « est infiniment grand » et au lieu des différents nombres x nous prenons les différents $x = x(i)$ pour i « infiniment grand », les uns et les autres satisfaisant certaines conditions de régularité, nous aurons là l'objet d'étude de cette Algèbre.

Un cas particulier est le cas où $\varphi_i(x)$ et les $x = x(i)$ sont « très proches » respectivement d'un polynome et des différents nombres réels (ou imaginaires, s'il s'agit du plan complexe), c'est-à-dire où $\varphi_i(x)$ converge vers un polynome $\varphi(x)$ et les différents $x_1(i)$, $x_2(i)$, ... vers des nombres x_1, x_2, ... avec $i \to \infty$. C'est donc, avant tout, un problème de type asymptotique, puisqu'il s'agit d'un polynome et des nombres qui s'approchent asymptotiquement d'un polynome et des nombres fixes.

On peut ramener le cas général au cas précédent moyennant un double changement d'échelle, c'est-à-dire, en exigeant que $\varphi_i(x)$ et les $x = x(i)$ prises aux échelles φ_i et a_i s'approchent respectivement d'un polynome et des différents nombres fixes, ce qui revient à dire que $\frac{\varphi_i(x)}{\varphi_i}$ est convergeant pour les différents $x = x(i)$ tels que $\frac{x(i)}{a_i}$ converge vers les différents nombres réels.

Une certaine imprécision domine cette Algèbre. En effet, toute propriété asymptotique valable pour un $x_1 = x_1(i)$ particulier est également valable pour n'importe quelle fonction équivalente à $x_1(i)$. On peut donc dire que toute relation est satisfaite à une équivalence près.

On est donc amené à remplacer $x_1 = x_1(i)$ — qui joue ici le rôle analogue à celui d'un nombre dans l'Algèbre courante — par l'ensemble des fonctions équivalentes à $x_1(i)$. C'est cet ensemble que nous appelons nombre ou point asymptotique et qui, nous supposons, varie ou est défini dans un champ asymptotique, l'un et l'autre étant les analogues des nombres réels et de l'ensemble des nombres réels. Les différentes fonctions appartenant aux différents nombres asymptotiques sont toutes du même ordre infinitésimal que a_i (abstraction faite des fonctions appartenant à l'élément nul du champ).

On conçoit aisément la possibilité de définir plusieurs champs en prenant a_i des différents ordres infinitésimaux. On est donc amené à introduire les champs asymptotiques multiples.

La nature spéciale de la fonction à étudier — un polynome variable à degré borné — permet de se borner à l'étude des champs multiples comprenant un nombre *fini* de champs asymptotiques, ce qui a d'heureuses conséquences puisqu'il écarte les difficultés inhérentes à la nature non archimédienne des grandeurs variables, par exemples les infiniments petits.

L'étude asymptotique en question comprend :

1° Un exposé de caractère général, qui, nous semble-t-il, a un intérêt qui dépasse le problème qui lui a donné naissance.

2° La démonstration du théorème qui traduit au langage asymptotique le problème qui nous occupe. La démonstration de ce théorème nous a demandé de longs efforts. Le théorème correspondant algébrique, dont il est la traduction au cas asymptotique, n'offre pas, par contre, de difficultés apréciables.

La première partie comprend :

a. L'étude des conditions de régularité.

b. Une Algèbre élémentaire sur un champ asymptotique simple. On y étudie particulièrement les ordres de multiplicité d'un polynome-somme par rapport aux ordres de multiplicité des termes de l'addition.

c. Des théorèmes qui permettent de calculer les différents ordres de grandeurs de $\varphi_i(x)$ dans les différents champs asymptotiques appartenant à un champ multiple en fonction de la situation des racines asymptotiques. La même étude comparative entre deux polynomes $\varphi_i(x)$ et $\psi_i(x)$.

Le théorème du point 2° permet de clore ces considérations asymptotiques.

Ceci étant posé je donne une démonstration des points *a*, *b* et *c* sous l'hypothèse que ν_i est bornée.

Ensuite, et moyennant deux applications successives du théorème asymptotique, je démontre qu'il est absurde de supposer ν_i non bornée.

On peut remarquer *a posteriori* qu'il n'y a rien d'étonnant à ce que l'étude des quotients différentiels soulève des questions telles que l'étude asymptotique précédente. En effet, dans la définition même des quotients différentiels on a, d'un côté, un polynome, le polynome de contact, et une condition infinitésimale, la condition de contact. On a là, en somme, des polynomes qui approchent d'une position limite et des valeurs de x qui s'approchent du point de contact, c'est-à-dire, les deux éléments essentiels de nos problèmes asymptotiques.

Du théorème sur l'existence des points de maximum (minimum) d'ordre n on en peut déduire les théorèmes de l'accroissement fini, etc. C'est ce procédé qui généralise les démonstrations classiques du même fait et non les procédés basés sur la formule de la moyenne arithmétique pondérée.

Mais où ce théorème s'avère indispensable, c'est dans l'étude des coefficients différentiels (qui sont la généralisation des nombres dérivés). En effet, grâce à ce théorème, on démontre que les coefficients différentiels vérifient le théorème de Dini-Lebesgue, c'est-à-dire, que $n\,!\,\Delta^n[x_1, \ldots, x_n + 1\,;\, f(x)]$ et les quatre coefficients différentiels au point x ont les mêmes bornes, $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ et x variant indifféremment sur $[a, b]$.

J'en déduis qu'un coefficient différentiel fini d'ordre n détermine sa primitive à un polynome près de degré $n - 1$.

Je généralise ces résultats à un ensemble parfait P. Ainsi je démontre que les bornes de $n!\,\triangle^n[x_1, \ldots, x_n+1; f]$ et les bornes de $n!\,\triangle^n[a, a, \ldots, a, b, \ldots, b; f]$ coïncident, les x_i et les a et b variant indifféremment sur P, a et b étant consécutifs sur P, c'est-à-dire, coïncidents ou extrêmes d'intervalle contigus. Dans ce cas $n!\,\mathbf{D}^n[a, \ldots, a, f]$ représente n'importe quel nombre compris entre les quatre coefficients différentiels spéciaux à P.

Nous démontrons un théorème sur les sommets d'ordre p (points où les deux quotients différentiels latéraux d'ordre p sont distincts). Je démontre en effet que si $f(x)$ admet des différentielles latérales d'ordre n sur $[a, b]$, on a : 1° Les sommets d'ordre $p < n$ constituent un ensemble clairsemé ainsi que les sommets d'ordre n dont l'angle s'écarte de 0 ou de 2π plus de $\alpha > 0$; 2° les sommets d'ordre n constituent un ensemble tout au plus dénombrable. Ce sont des raisonnements introduits par M. A. Denjoy qui m'ont permis de démontrer ce théorème.

Ensuite je démontre, en donnant des contre-exemples, l'impossibilité de généraliser les cas restants du théorème de M. Denjoy sur les nombres dérivés. Ainsi le seul cas qui se laisse généraliser, c'est le cas que M. Denjoy a lui-même généralisé. Un de ces contre-exemples montre que les quatre coefficients peuvent être $+\infty$ sur une pleine épaisseur du continu.

La généralisation des théorèmes sur la dérivation formelle des séries et des suites constitue enfin la dernière partie de cette thèse.

Je tiens à saisir l'occasion qui m'est fournie d'exprimer mon admiration pour l'œuvre lumineuse et profonde de M. Arnaud Denjoy dont je me suis tant inspiré et qui est à l'origine de ce champ de recherches qui recèle de si grandes richesses. Je tiens spécialement à cœur de lui témoigner ma reconnaissance de l'honneur qu'il m'a fait en me permettant de participer à l'activité mathématique parisienne.

Qu'il me soit permis d'exprimer mon affectueuse gratitude à M. Gustave Choquet qui s'est constamment enquis de mes recherches et à qui je dois des conseils amicaux.

J'adresse enfin mes remerciements à M. Paul Dubreil qui a bien voulu me faire l'honneur de faire partie du Jury.

Sur la définition des quotients différentiels.

1. Nous dirons avec M. Denjoy que, $f(x)$, continue et définie sur $[a, b]$, possède au point x une *différentielle d'ordre n* si $x+h$ appartenant à $[a, b]$, $f(x+h)$ est la somme d'un polynome en h et d'un infiniment petit d'ordre supérieur à n, h étant l'infiniment petit principal.

Le coefficient de $\frac{h^n}{n!}$ dans le polynome, soit $f_n(x)$, sera appelé le $n^{\text{ième}}$ *quotient différentiel de f au point x*, et le produit $h^n f_n$ recevra le nom de différentielle $n^{\text{ième}}$ de f au point x.

Si $f(x)$ admet des dérivées continues des $(n-1)$ premiers ordres au voisinage de x et une dérivée du $n^{\text{ième}}$ ordre $f^{(n)}(x)$ au point x, on sait que $f(x+h)$ est la somme d'un polynome en h dont le coefficient de $\frac{h^p}{p!}$ $(1 \leq p \leq n)$ est $f^{(p)}(x)$

et d'un infiniment petit d'ordre supérieur à n. Ce qui revient à dire que, si $f(x)$ est dérivable n fois au point x, $f(x)$ admet des quotients différentiels des n premiers ordres au point x qui coïncident avec les dérivées du même ordre.

La réciproque n'est pas exacte, dès que $n \geqq 2$.

En effet, soit par exemple $f(x) = e^{-x^{-2}} \sin e^{x^{-2}}$ pour $x \neq 0$ avec $f(0) = 0$.

Pour $x \neq 0$, $f(x)$ est analytique et par suite admet une différentielle de tout ordre donné, les quotients différentiels étant égaux aux dérivées du même ordre.

Pour $x = 0$, les quotients différentiels sont tous nuls, $f(x)$ étant un infiniment petit d'ordre supérieur à tout ordre donné.

Or, l'oscillation de $f'(x) = f_1(x)$ au point $x = 0$, est infinie. De sorte que les dérivées d'ordre au moins égal à 2 n'existent pas à l'origine. Les quotients différentiels de tous ordres, bien qu'existant en tout point x, sont donc discontinus à l'origine.

On peut réaliser des circonstances analogues à celle-ci dans tous les points d'un ensemble E fermé ([2]).

Toutefois, pour $n = 1$, les définitions de dérivée et de quotient différentiel sont équivalentes.

2. D'après la définition adoptée, $f(x)$, différentiable d'ordre n, admet *a fortiori* une différentielle de tout ordre entier p si $1 \leqq p \leqq n$, et l'égalité

$$(1) \qquad f(x+h) = f(x) + hf_1(x) + \ldots + \frac{h^p}{p!} f_p(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!}[f_n(x) + \varepsilon_n(x, h)]$$

détermine, pour h non nul, un nombre $\varepsilon_n(x, h)$ tendant vers zéro avec h, x demeurant invariable.

On peut écrire (1) sous la forme équivalente

$$(2) \qquad f(x+h) = f(x) + hf_1(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f_n(x) + o(h^n).$$

Ainsi le $n^{\text{ième}}$ quotient différentiel est défini *directement à partir de* $f(x)$, différant en cela de la $n^{\text{ième}}$ dérivée, qui exige pour être définie, l'existence, la continuité et la connaissance des dérivées intermédiaires au voisinage de x. Ce qui n'est pas le cas du $n^{\text{ième}}$ quotient différentiel.

Toutefois, bien que la définition de $f(x)$ soit directe à partir de $f(x)$, elle est en même temps une définition des quotients différentiels intermédiaires au même point.

Les différences que révèlent les deux systèmes de dérivation tiennent exclusivement aux différences des définitions, car la seule caractéristique des dérivées classiques qui ne se retrouve pas dans les quotients différentiels est la suivante : $f_{n-m}(x_0)$ existant ~~au~~ point x_0 n'entraîne pas que $f_{n+m}(x_0)$ soit le $m^{\text{ième}}$ quotient au point x_0 de $f_n(x)$, supposé existant au voisinage de x_0.

3. **Rapport aux différences.** — Voici quelques définitions du Calcul de différences finies qui nous seront d'une grande utilité.

([2]) *Voir*, M. A. Denjoy, *Fund. Math.*, t. 25, p. 277.

Désignons par $[x_0,\ x_1]$ le rapport aux différences de $f(x)$ correspondant aux points x_0 et x_1 défini par l'égalité

$$[x_0,\ x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}.$$

De même soit $[x_0,\ x_1,\ x_2]$ le rapport aux différences de deuxième ordre de $f(x)$ correspondant aux points x_0, x_1 et x_2 défini par

$$[x_0,\ x_1,\ x_2] = \frac{[x_0,\ x_1] - [x_1,\ x_2]}{x_0 - x_1}.$$

Procédant de la sorte nous définirons des rapports aux différences du $n^{\text{ième}}$ ordre. Ainsi

$$[x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n] = \frac{[x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}] - [x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n]}{x_0 - x_n}.$$

Le schéma suivant est particulièrement utile pour le calcul numérique des rapports aux différences :

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & f(x_0) & & & & \\
 & & [x_0,\ x_1] & & & \\
x_1 & f(x_1) & & [x_0,\ x_1,\ x_2] & & \\
 & & [x_1,\ x_2] & & [x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3] & \\
x_2 & f(x_2) & & [x_1,\ x_2,\ x_3] & & \ddots \\
 & & [x_2,\ x_3] & & & \\
\ldots & \ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots & [x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n] \\
\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & & \\
\ldots & \ldots\ldots & & [x_{n-2},\ x_{n-1},\ x_n] & [x_{n-3},\ x_{n-2},\ x_{n-1},\ x_n] & \\
 & & [x_{n-1},\ x_n] & & & \\
x_n & f(x_n) & & & &
\end{array}$$

En remplaçant x_0 par x nous avons par définition

$$\begin{gathered}
f(x) = f(x_1) + (x - x_1)[x,\ x_2] \\
[x,\ x_2] = [x_1,\ x_2] + (x - x_2)[x,\ x_1,\ x_2] \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[x,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}] = [x_1,\ \ldots,\ x_n] + (x - x_n)[x,\ x_1,\ \ldots,\ x_n].
\end{gathered}$$

D'où, en remplaçant successivement et en remontant, nous obtenons

$$\begin{aligned}
(3)\quad f(x) = f(x_1) &+ (x - x_1)[x_1,\ x_2] + (x - x_1)(x - x_2)[x_1,\ x_2,\ x_3] + \ldots \\
&+ (x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})[x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n] + (x - x_1)\ldots(x - x_n)[x,\ x_1,\ \ldots,\ x_n]
\end{aligned}$$

qui est la formule d'interpolation de Newton.

Si $f(x)$ est un polynome de $n^{\text{ième}}$ degré, $[x,\ x_1]$ est de $(n-1)^{\text{ième}}$ degré, $[x,\ x_1,\ x_2]$ est de $(n-2)^{\text{ième}}$ degré, $\ldots$ et $[x,\ x_1,\ \ldots,\ x_n]$ est une constante.

Par définition

$$[x_1,\ x_2] = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2},$$

ainsi nous obtenons

$$[x_1,\ x_2,\ x_3] = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)} + \frac{f(x_3)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

et par induction

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}] = \frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_{n+1})}$$
$$+ \frac{f(x_2)}{(x_2-x_3)(x_2-x_4)\ldots(x_2-x_1)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{f(x_{n+1})}{(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\ldots(x_{n+1}-x_n)},$$

ou encore

$$(4) \qquad [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}] = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=1}^{n+1}{}'(x_i-x_j)},$$

où $\prod_{j=1}^{n+1}{}'$ indique que j prend toutes les valeurs de 1 à $n+1$, sauf la valeur i.

On peut écrire la même formule sous la forme

$$(5) \qquad [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}] = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(x_i)}{\varphi'(x_i)}$$

où

$$\varphi(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n+1}).$$

Dans ces formules on voit que le $n^{\text{ième}}$ rapport aux différences est fonction symétrique de ses arguments.

Si $f(x)$ est un polynome de $n^{\text{ième}}$ degré, $[x, x_1, \ldots, x_n]$ est une constante, donc la formule d'interpolation de Newton peut s'écrire

$$(6) \quad f(x) = f(x_1) + (x-x_1)[x_1, x_2] + \ldots + (x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})[x_1, x_2, \ldots, x_n]$$
$$+ (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}],$$

(4) peut prendre encore la forme

$$(7) \quad [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}] = \begin{vmatrix} f(x_1) & f(x_2) & \ldots & f(x_{n+1}) \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_{n+1}^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \ldots & x_{n+1}^{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{n+1} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1^n & x_2^n & \ldots & x_{n+1}^n \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_{n+1}^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \ldots & x_{n+1}^{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{n+1} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

Les $n^{\text{ièmes}}$ rapports aux différences sont appelés aussi différences divisées de $n^{\text{ième}}$ ordre ou encore pentes d'ordre n.

Le $n^{\text{ième}}$ rapport $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}]$ nous le noterons aussi $\triangle^n[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}]$ ou encore $\triangle^n[x_1, \ldots, x_{n+1}; f(x)]$ suivant que nous aurons besoin de souligner l'ordre du rapport ou l'ordre du rapport et la fonction à laquelle il s'applique. Dans le cas où les points d'application sont désignés par une lettre, par exemple E, nous écrirons $\triangle^n[\mathrm{E}; f(x)]$, qui représente le $n^{\text{ième}}$ rapport de $f(x)$ sur les $n+1$ points E.

4. Les différences divisées ont été définies dans l'hypothèse que les points d'application sont distincts deux à deux, les formules de définition n'ayant aucun sens dans le cas où l'un des dénominateurs est nul.

Néanmoins, on peut leur donner un sens dans ce cas-là, pourvu que $f(x)$ possède un $n^{\text{ième}}$ quotient différentiel aux points de coïncidence.

Ainsi si $f(x)$ continue admet un $n^{\text{ième}}$ quotient différentiel dans le segment $[a, b]$, nous définirons $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}]$ — les $x_1, \ldots, x_{n+1}$ appartenant à $[a, b]$ — au moyen de l'égalité

$$(8) \qquad [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}] = \lim_{y_1=x_1} \lim_{y_2=x_2} \ldots \lim_{y_{n+1}=x_{n+1}} [y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}]$$

qui permet de donner un sens aux différences correspondantes à des groupes de points pouvant coïncider partiellement ou globalement si toutefois la limite itérée en question existe. Démontrons que tel est le cas si $f(x)$ est différentiable d'ordre n.

Supposons par exemple que

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{n+1} = x_0,$$

et que $f(x)$ soit continue et différentiable d'ordre n au point x_0.

D'après les définitions de quotient différentiel et de différence divisée on a

$$[x, x_0] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f_1(x_0) + \frac{x - x_0}{2\,!} f_2(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^{n-1}}{n\,!} [f_n(x_0) + \varepsilon_n(x_0, x - x_0)],$$

d'où l'on calcule la limite

$$[x_0, x_0] = \lim_{x=x_0} [x_1, x_0] = f_1(x_0).$$

De même, on a

$$[x, x_0, x_0] = \lim_{x_1=x_0} [x, x_0, x_1] = \lim_{x_1=x_0} \frac{[x, x_0] - [x_0, x_1]}{x - x_1} = \frac{[x, x_0] - [x_0, x_0]}{x - x_0}$$

et par suite

$$[x, x_0, x_0] = \frac{1}{2\,!} f_2(x_0) + \frac{x - x_0}{3\,!} f_3(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^{n-2}}{n\,!} [f_n(x_0) + \varepsilon_n(x_0, x - x_0)].$$

Supposons maintenant démontrée l'existence de $\Delta^p[x, x_0, \ldots, x_0]$ et de $\Delta^p[x_0, \ldots, x_0]$ et la validité de la formule

$$(9, p) \qquad \Delta^p[x, x_0, \ldots, x_0] = \frac{1}{p\,!} f_p(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^{n-p}}{n\,!} [f_n(x_0) + \varepsilon_n(x_0, x - x_0)],$$

donc de

$$(10, p) \qquad \Delta^p[x_0, \ldots, x_0] = \frac{1}{p\,!} f_p(x).$$

Posons

$$\Delta^{p+1}[x, x_1, \ldots, x_{p+1}] = \frac{\Delta^p[x, x_1, \ldots, x_p] - \Delta^p[x_1, \ldots, x_{p+1}]}{x - x_{p+1}}.$$

D'où, puisque les limites itérées des termes du numérateur du second membre pour $x_1 \to x_0$, $x_2 \to x_0$, $\ldots$, $x_{p+1} \to x_0$ existent — comme nous venons de le supposer à l'instant — il vient

$$\Delta^{p+1}[x, x_0, \ldots, x_0] = \frac{\Delta^p[x, x_0, \ldots, x_0] - \Delta^p[x_0, \ldots, x_0]}{x - x_0}.$$

Rapprochant celle-ci de (9) et (10) on obtient

$$\Delta^{p+1}[x, x_0, \ldots, x_0] = \frac{1}{(p+1)!} f_{p+1}(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^{n-p-1}}{n!} [f_n(x_0) + \varepsilon_n(x_0, x-x_0)],$$

$$\Delta^{p+1}[x_0, \ldots, x_0] = \frac{1}{(p+1)!} f_{p+1}(x_0).$$

En somme, les formules $(9, p)$ et $(10, p)$ sont exactes pour $p = 1$, $p = 2$ et, si elles le sont pour $p = p$, elles le sont également pour $p + 1$, donc elles le sont aussi pour $p = 1$, $p = 2$, ... et $p = n$,

En particulier pour $p = n$, nous avons

$$(9, n) \qquad \Delta^n[x, x_0, \ldots, x_0] = \frac{1}{n!}[f_n(x_0) + \varepsilon_n(x_0, x - x_0)],$$

$$(10, n) \qquad \Delta^n[x_0, \ldots, x_0] = \frac{1}{n!} f_n(x_0).$$

D'une façon analogue on peut démontrer l'existence de $\Delta^n[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]$ quelle que soit la position des points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ dans $[a, b]$ pourvu que $f_n(x)$ existe dans $[a, b]$. Par exemple, pour qu'il existe, $\Delta^8[a, a, b, b, b, c, c, c, c; f]$ il suffit d'admettre l'existence de $f_1(a)$, $f_2(b)$ et $f_3(c)$ $(a \neq b,\ a \neq c,\ b \neq c)$.

Réciproquement si $\Delta^n[x_0, \ldots, x_0; f(x)]$ existe, c'est-à-dire, si la limite itérée

$$\lim_{x_2 = x_0} \lim_{x_3 = x_0} \ldots \lim_{x_{n+1} = x_0} \Delta^n[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f(x)]$$

existe et est finie, $f(x)$ est continue et différentiable d'ordre n au point x_0.

Démonstration. — Nous dirons qu'une différence divisée est (s, r) quand elle est de $s^{\text{ième}}$ ordre et le nombre de ses arguments égaux à x_0 est $r + 1$, les autres arguments étant distincts de x_0 et distincts deux à deux.

Par définition on sait que

$$\Delta^s[x_1, x_2, \ldots, x_{s-r+1}, x_{s-r+2}, \ldots, x_{s+1}]$$
$$= \frac{\Delta^{s-1}[x_1, x_2, \ldots, x_{s-r+1}, x_{s-r+2}, \ldots, x_s] - \Delta^n[x_2, \ldots, x_{s-r+1}, x_{s-r+2}, \ldots, x_{s+1}]}{x_1 - x_{s+1}},$$

où nous supposons les arguments différents de x_0 et distincts deux à deux.

Admettons pour l'instant l'existence des rapports (s, r) et $(s-1, r-1)$. Prenons donc les limites successives quand $x_{s+1} \to x_0$, $x_s \to x_0$, ..., $x_{s-r+2} \to x_0$, c'est-à-dire que

$$\Delta^s[x_1, \ldots x_{s-r}, x_{s-r+1}, x_0, \ldots, x_0]$$
$$= \frac{\Delta^{s-1}[x_1, \ldots, x_{s-r}, x_{s-r+1}, x_0, \ldots, x_0] - \Delta^{s-1}[x_2, \ldots, x_{s-r}, x_{s-r+1}, x_0, \ldots, x_0]}{x_1 - x_0}.$$

Alors les limites du premier membre et du premier terme du numérateur existent quand $x_{s-r+1} \to x_0$, ces limites étant respectivement des différences divisées (s, r) et $(s-1, r-1)$.

Ce qui entraîne l'existence de la limite du deuxième terme du numérateur, autrement dit l'existence d'une différence divisée $(s-1, r)$.

En somme l'existence des différences (s, r) et $(s-1, r-1)$ entraîne l'existence des différences $(s-1, r)$.

Par hypothèse la différence (n, n) existe. Or, cette différence, $\Delta^n[x_0, \ldots, x_0, x_0]$, étant définie à partir de la fonction $\Delta^n[x_0, \ldots, x_0, x]$ $\left(\Delta^n[x_0, \ldots, x_0] = \lim_{x=x_0} \Delta^n[x, x_0, \ldots, x_0]\right)$, cela revient à dire que l'existence d'une différence (n, n) entraîne l'existence des différences $(n, n-1)$. De même l'existence d'une différence $(n, n-1)$ entraîne l'existence des différences $(n, n-2)$. De proche en proche nous constaterons l'existence des différences $(n, n), (n, n-2), \ldots, (n, 0)$.

D'autre part les différences $(n, 0), (n-1, 0), \ldots, (1, 0)$ existent, puisque par définition elles sont des différences qui ne contiennent que des arguments distincts deux à deux.

Ainsi dans le tableau suivant :

$$
\begin{array}{llllll}
(n, n) & & & & & \\
(n, n-1) \to & (n-1, n-1) & & & & \\
 & \uparrow & & & & \\
\ldots\ldots & & & & & \\
(n, r) & \to (n-1, r) \ldots \to & (s, r) \to & (s-1, r) \ldots \to & (r, r) & \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\
(n, r-1) \to & (n-1, r-1) \ldots\ldots \to & & (s-1, r-1) \ldots\ldots \to & (r-1, r-1) & \\
 & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \\
\ldots\ldots & & & & & \\
(n, 1) & \to (n-1, 1) \ldots\ldots \to & & (s-1, 1) \ldots\ldots & & \to (1, 1) \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
(n, 0) & \to (n-1, 0) \ldots\ldots \to & & (s-1, 0) \ldots\ldots & & \to (1, 0)
\end{array}
$$

on a :

1° Les éléments de la première colonne et de la dernière file existent.

2° N'importe quel élément existe pourvu qu'existent les deux éléments d'où partent les flèches convergeant vers lui.

De ces deux règles on en peut déduire l'existence de tous les éléments du tableau.

Par conséquent si dans (6) nous faisons $x_1 = x_0$ et nous prenons les limites successives quand $x_2 \to x_0$, $x_3 \to x_0$, ... et $x_n \to x_0$, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(x_0) + (x - x_0)[x_0, x_0] + \ldots + (x - x_0)^{n-1} \Delta^{n-1}[x_0, x_0, \ldots, x_0] \\
+ (x - x_0)^n \Delta^n[x_0, \ldots, x_0, x].
\end{aligned}
$$

Or l'égalité

$$\Delta^n[x_0, \ldots, x_0, x] = \Delta^n[x_0, \ldots, x_0] + \frac{1}{n!} \varepsilon_n(x_0, x - x_0)$$

détermine un nombre $\varepsilon_n(x_0, x - x_0)$ qui tend vers zéro avec $x - x_0$ du fait que

$$\lim_{x=x_0} \Delta^n[x_0, \ldots, x_0, x] = \Delta^n[x_0, \ldots, x_0].$$

Donc l'égalité

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)[x_0, x_0] + \ldots + (x - x_0)^n \Delta^n[x_0, \ldots, x_0] + (x - x_0) \frac{1}{n!} \varepsilon_n(x_0, x - x_0),$$

obtenue en plaçant la seconde dans la première, nous permet d'affirmer que $f(x)$ est continue et différentiable d'ordre n au point x_0 et que

$$f_p(x_0) = p!\, \Delta^n[x_0, \ldots, x_0] \qquad (p = 1, 2, \ldots, n). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

En somme :

Théorème I. — *La condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ soit continue et différentiable d'ordre n au point x_0 est qu'il existe,* $\Delta^n[x_0, \ldots x_0 f(x)]$, *c'est-à-dire la limite itérée*

$$\lim_{x_n = x_0} \ldots \lim_{x_1 = x_0} \Delta^n[x_0, x_1, \ldots, x_n; f(x)].$$

5. Théorème II. — *La condition nécessaire et suffisante pour que, pour n'importe quelle fonction $f(x)$ continue et différentiable d'ordre n au point x_0 on ait*

$$\lim_{h=0} \Delta^n[x_0 + h_i(h); f(x)] = \frac{1}{n!} f_n(x_0)$$

[les $h_i(h)$ tendant vers zéro avec h], *est que le groupe de fonctions $h_i(h)$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ vérifient les $n+1$ relations*

$$h_i(h) = O\left(\sqrt{\prod_{j=1}^{n+1}{}' (h_i(h) - h_j(h))}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1), \qquad \textit{avec} \quad h \to 0.$$

Ces dernières relations peuvent être formulées en disant qu'il existe un nombre K indépendant de h tel qu'on ait

$$\frac{|h_i(h)|}{d_i(h)} < K \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1),$$

où $d_i(h)$ désigne la moyenne géométrique des distances du point $x_i = x_0 + h_i(h)$ aux autres points $x_j = x_0 + h_j(h)$ $(j \neq i)$, arguments du rapport aux différences $\Delta^n[x_i; f(x)]$.

Démonstration. — *La condition est suffisante.*

En effet, en prenant des différences divisées dans (1), il vient

$$\Delta^n[x_0 + h_i(h); f] = \frac{1}{n!} f_n(x_0) + \Delta^n\left[x_0 + h_i(h);\ \frac{1}{n!}(x - x_0)^n \varepsilon_n(x_0, x - x_0)\right]$$

et sous forme explicite [formule (4)] :

$$\Delta^n[x_0 + h_i; f] = \frac{1}{n!} f_n(x_0) + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{h_i^n(h)}{n! \prod_{j=1}^{n+1}{}' (h_i - h_j)} \varepsilon_n,$$

d'où d'après l'hypothèse, il s'ensuit

$$\left| \Delta^n[x_0 + h_i; f] - \frac{1}{n!} f_n(x_0) \right| < \frac{K^n}{n!} \sum_{i=1}^{n+1} |\varepsilon_n(x_0, h_i)|$$

et par suite

$$\lim_{h=0} \Delta^n[x_0 + h_i; f] = \frac{1}{n!} f_n(x_0).$$

La condition est nécessaire. C'est-à-dire si elle n'est pas satisfaite on doit être en mesure de définir une fonction $f(x)$ continue et différentiable d'ordre n au point x_0, telle que la limite, $\lim\limits_{h=0} \Delta^n[x_i; f(x)]$, n'existe pas, ou en tout cas, si elle existe, on ait

$$\frac{1}{n!} f_n(x_0) \neq \lim_{h=0} \Delta^n[x_i; f] \qquad (x_i = x_0 + h_i(h)).$$

Nous définirons donc $f(x)$ de façon à ce que $\lim\limits_{h=0} \Delta^n[x_i; f(x)]$ n'existe pas.

Soit, par exemple,

$$f(x) = f(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}[f_n(x_0) + \varepsilon_n(x_0, x - x_0)];$$

où $f(x_0), \ldots, f_n(x_0)$ sont des nombres fixes (indépendants de x_0) donnés librement et où $\varepsilon_n(x_0, x - x_0)$ est une fonction de $x - x_0$, tendant vers zéro, avec $x - x_0$, que nous définirons par la suite.

Une fonction, telle que $f(x)$, est évidemment différentiable d'ordre n et $f_n(x_0)$ est son $n^{\text{ième}}$ quotient différentiel.

Soit, par exemple,

$$\left| \frac{h_1^n(h)}{\prod\limits_{j=1, n+1}' (h_1(h) - h_j(h))} \right| < K$$

une des inégalités :

$$\left| \frac{h_i(h)}{\prod\limits_{j=1, n+1}' (h_i(h) - h_j(h))} \right| < K \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1),$$

n'ayant pas lieu par hypothèse. Donc, on peut définir une suite $h_1, h_2, \ldots, h_s, \ldots$ convergeant vers zéro, telle qu'on ait, en même temps

$$\lim_{s=\infty} \left| \frac{h_1(h_s)}{\prod\limits_{j=1, n+1}' (h_i(h_s) - h_j(h))} \right| = \infty,$$

$$\max_{1 \leq i \leq n+1} [|h_i(h_{s+1})|] < \min_{1 \leq i \leq n+1} [|h_i(h_s)| \neq 0] \qquad (s = 1, 2, \ldots),$$

cette dernière n'exigeant qu'une décroissance suffisamment rapide des $h_i(h_s)$ non nulles, ce qui est toujours possible, les $h_1(h)$ tendant vers zéro avec h. Cette dernière condition nous permet d'affirmer que pour $h_i(h_s)$ et $h_j(h_r)$ non nulles, on a

$$h_i(h_s) \neq h_j(h_r),$$

moyennant seulement $s \neq r$.

Posons

$$K(s) = \left| \frac{h_1^n(h_s)}{\prod\limits_{j=1}^{n+1} (h_1(h_s) - h_j(h_s))} \right|$$

et

$$|\varepsilon_n(x_0, h_i(h_s))| = K^{-\frac{1}{2}}(s)$$

en prenant comme signe de $\varepsilon_n(x_0, h_i(h_s))$ le signe de

$$\frac{h_i^n(h_s)}{\prod_{j=1}^{n+1}{}'(h_i(h_s)-h_j(h_s))}$$

On peut, donc, remarquer que $\varepsilon_n(x_0, h)$ a été définie pour un nombre infini de valeurs de $h \neq 0 [h = h_i(h_s)$, où $i = 1, \ldots, n+1$ et $s = 1, \ldots]$ *toutes différentes deux à deux* et de façon à ce que $\varepsilon_n(x_0, h) = o(h)$. En effet $h_i(h_s) \neq h_j(h_r)$ dès que $s \neq r$, et en outre, on a $h_i(h_s) \to 0$ et $K^{-\frac{1}{2}}(s) \to 0$ avec $s \to \infty$.

Ensuite, on peut écrire

$$\Delta^n[x_0 + h_i(h_s); h^n \varepsilon_n(x_0, x - x_0)] = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{h_i(h_s)}{\prod_{j=1}^{n+1}{}'(h_i(h_s)-h_j(h_s))} \varepsilon_n(x_0, h_i(h_s)),$$

où les termes de l'addition sont non négatifs, les $\varepsilon_n(x_0, h_i(h_s))$ ayant les mêmes signes que leurs facteurs. Par suite le premier terme ne peut dépasser la somme; par conséquent

$$\Delta^n[x_0 + h_i(h_s); h^n \varepsilon_n(x_0, x - x_0)] \geq \frac{h_1(h_s)}{\prod{}'(h_1 - h_j)} \varepsilon_n(x_0, h_1(h_s))$$

et

$$\Delta^n[x_0 + h_i(h_s); h^n \varepsilon_n] \geq K^{\frac{1}{2}}(s),$$

d'où il vient

$$\left| \Delta^n[x_0 + h_i(h_s); f] - \frac{1}{n!} f_n(x_0) \right| \geq \frac{1}{n!} K^{\frac{1}{2}}(s)$$

et par suite

$$\lim_{s \to \infty} \Delta^n[x_0 + h_i(h_s); f] = \infty,$$

donc, $\Delta^n[x_0 + h_i(h); f(x)]$ ne peut avoir comme limite $\frac{1}{n!} f_n(x_0)$.

C. Q. F. D.

Nous allons donner des critères nous permettant de décider si un groupe de points $x_i(h)$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, convergeant vers x_0 avec $h \to 0$, satisfont ou non la condition du théorème II, c'est-à-dire si pour ces $x_i(h)$ et si pour toute fonction $f(x)$ différentiable d'ordre n au point x_0, on a

$$\Delta^n[x_i(h); f] \to \frac{1}{n!} f_n(x_0), \qquad \text{avec} \quad h \to 0$$

ou si par contre cette relation n'a pas lieu pour toutes ces fonctions.

Par exemple :

Critère I. — *Si la longueur du diamètre $\delta(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ est partiellement infiniment plus petite que la distance maximum $m = m(h)$ des points $x_i = x_i(h)$ à leur point limite x_0, c'est à dire si l'on a*

$$|\delta(x_1, \ldots, x_{n+1})| = o(m)$$

pour une suite partielle de valeurs de h, h_1, h_2, $\ldots$, h_s, $\ldots$ *convergeant vers zéro, alors les conditions du théorème* II *ne sont pas satisfaites.*

En effet

$$\max_{1 \leq i \leq n+1} \frac{|h_i^n|}{\left|\prod_{j=1}^{n+1}{}' (h_i - h_j)\right|} > \frac{m^n}{|\delta^n(x_1, \ldots, x_{n+1})|},$$

du fait que par définition le maximum des h_i est m et le plus grand des nombres $|x_i - x_j| = |h_i - h_j|$ est la longueur $|\delta(x_1, \ldots, x_{n+1})|$. Or $\frac{m}{|\delta(x_1, \ldots, x_{n+1})|}$ tend vers l'infini pour $h = h_s$ et $s \to \infty$, et par suite les conditions du théorème II ne sont pas satisfaites.

Dire que la longueur du diamètre (*fig.* 3 et 3 *bis*) $\delta(x_1, \ldots, x_{n+1})$ est partiellement infiniment plus petite que m, équivaut à dire que la plus petite et plus

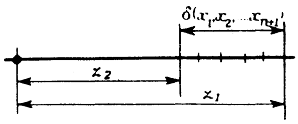

Fig. 3.

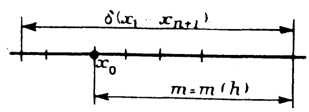

Fig. 3 *bis*.

grande parmi les différences $x_1 - x_0$, $x_2 - x_0$, $\ldots$, $x_{n+1} - x_0$, soient z_1 et z_2, sont partiellement équivalentes, c'est-à-dire,

$$\lim_{s=\infty} \frac{z_1}{z_2} = 1.$$

Par contre :

Critère II. — *Les conditions du théorème* II *sont satisfaites si les distances mutuelles des points* x_i, $x_i - x_j = h_i - h_j$, *sont du même ordre infinitésimal que la plus grande des distances des points* x_i *au point limite* x_0, *c'est-à-dire, du même ordre que le nombre* m.

Dans ce cas $\frac{h_i}{h_i - h_j}$ $(i, j = 1, \ldots, n+1, i \neq j)$ est borné et par suite les $n+1$ nombres $h_i^n : \prod_{j=1,\, n+1}' (h_i - h_j)$, fonctions de h, sont bornées et lesdites conditions sont satisfaites.

Dans le cas où x_0 appartient au segment-diamètre $\delta(x_1, \ldots, x_{n+1})$,

$$|\delta(x_1, \ldots, x_{n+1})| = \delta(h) \qquad \text{et} \qquad m = m(h)$$

sont évidemment du même ordre infinitésimal puisque (*fig.* 3 *bis*)

$$\frac{\delta(h)}{2} \leq m(h) \leq \delta(h).$$

Donc on peut énoncer le critère suivant :

Critère III. — *Dans le cas où le point limite* x_0 *appartient constamment* *au segment-diamètre* $\delta(x_1, \ldots, x_{n+1})$ *et où les distances mutuelles* $x_i - x_j$ ($i \neq j$ *et* $i, j = 1, \ldots, n+1$) *sont toutes du même ordre infinitésimal, avec* $h \to 0$, *les points du groupe* $x_i(h)$ *satisfont les conditions du théorème* II.

Un cas particulier du critère II est celui où

$$x_i = x_0 + hk_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

et où les k_i sont des constantes distinctes deux à deux.

Sur les théorèmes de la valeur moyenne.

6. Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

Théorème III. — $f(x)$ *étant une fonction continue et différentiable d'ordre* n *sur un segment* $[a, b]$, *si* E *désigne un ensemble de* $n+1$ *points de* $[a, b]$ *distincts deux à deux, il existe au moins un point* c *intérieur au segment-diamètre de* E *tel que*

$$\Delta^n[E; f(x)] = \frac{1}{n!} f_n(c).$$

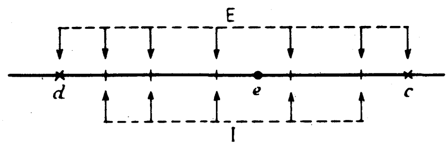

Fig. 4.

Démontrons d'abord l'identité

$$\Delta^n[E; f(x)] = \sum_{X \in C(A)} p(X)\, \Delta^n[X; f(x)], \tag{13}$$

où

1° E et A sont deux ensembles finis de points dont les segments-diamètres $\delta(E)$ et $\delta(A)$ sont les mêmes; E contient $n+1$ points appartenant à A et les points de A et de E sont distincts deux à deux.

2° C(A) désigne l'ensemble de tous les groupes de $n+1$ points de A qui sont consécutifs par rapport à A. Ainsi si $X_1 \in C(A)$, alors un point de A, ou appartient à X_1, ou il est extérieur au segment-diamètre $\delta(X_1)$.

3° Les nombres $p(X)$ sont tels que

$$p(X) > 0 \qquad \text{pour tous les } X \in C(A), \tag{14}$$

$$\sum_{X \in C(A)} p(X) = 1. \tag{15}$$

Dans le cas où A ne contient qu'un point de plus que E la démonstration est la suivante :

Soient c et d (*fig.* 4) les points extrêmes de E, et I l'ensemble des points restants de E ou points de E intérieurs à $\delta(E)$.

Soit e un point intérieur à $[c, d]$ et non appartenant à E. D'après la définition des différences divisées, on a

$$\Delta^n[c, d, \mathrm{I}; f(x)] = \frac{\Delta^{n-1}[c\mathrm{I}; f] - \Delta^{n-1}[d\mathrm{I}; f]}{c-d},$$

d'où

$$\Delta^n[c, d, \mathrm{I}; f(x)] = \frac{\Delta^{n-1}[c\mathrm{I}; f] - \Delta^{n-1}[e\mathrm{I}; f]}{c-e}\,\frac{c-e}{c-d} + \frac{\Delta^{n-1}[e\mathrm{I}; f] - \Delta^{n-1}[d\mathrm{I}; f]}{e-d}\,\frac{e-d}{c-d},$$

c'est-à-dire

$$(16) \qquad \Delta^n[c, d, \mathrm{I}; f] = \frac{c-e}{c-d}\Delta^n[ce\mathrm{I}; f] + \frac{e-d}{c-d}\Delta^n[ed\mathrm{I}; f],$$

où

$$\frac{c-e}{c-d} + \frac{e-d}{c-d} = 1$$

et

$$\frac{c-e}{c-d} > 0, \qquad \frac{e-d}{c-d} > 0,$$

du fait que $e \in]c, d[$. En outre les $n+2$ éléments de A, $ced\mathrm{I}$, permettent de former $n+2$ groupes de $n+1$ points, mais les seuls parmi eux qui sont consécutifs par rapport à A sont ceux qui s'obtiennent en enlevant à A un des points extrêmes, c'est-à-dire, les groupes $ce\mathrm{I}$ et $ed\mathrm{I}$. (16) réalise donc l'identité (13) dans le cas où A ne contient qu'un point de plus que E.

Une remarque nous permettra de nous élever de ce cas simple au cas général. Posons

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{m} p_i x_i, \qquad \text{où } p_i \geqq 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

On dit alors que le nombre $\bar{x}$ est une moyenne arithmétique pondérée des nombres x_i, p_i étant le poids attaché à x_i. Cette opération linéaire est transitive, c'est-à-dire : une moyenne pondérée de moyennes pondérées est aussi une moyenne pondérée. En effet, si

$$x_i = \sum_{j=1}^{s} p_{i,j} y_j, \qquad \bar{x} = \sum_{i=1}^{m} p_i x_i,$$

où les p sont non négatifs et tels que

$$\sum_{j=1}^{s} p_{i,j} = 1, \qquad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$$

on a

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{s} p_{i,j} y_j,$$

d'où

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{s} q_j x_j, \qquad \text{où} \quad q_j = \sum_{i=1}^{m} p_i p_{i,j}$$

et par suite $q_j \geqq 0$ et

$$\sum_{j=1}^{s} q_j = 1,$$

car

$$\sum_{j=1}^{s} q_j = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{m} p_i p_{i,j} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{s} p_i p_{i,j} = \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Cela étant, soient $A_1 = E$, A_2, ..., $A_m = A$ des ensembles de points où chaque ensemble contient le précédent plus un point, le premier et le dernier ensemble étant respectivement les ensembles E et A déjà définis. Soit $C(A_r)$ l'ensemble des groupes de $n+1$ points appartenant à A_r et consécutifs par rapport à A_r.

Nous avons vu il y a un instant que (13) avait lieu pour E et $A \equiv A_2$.

Supposons maintenant que (13) a lieu pour E et $A = A_s$, où $s = 1, 2, \ldots, r$.

Écrivons, donc,

$$\Delta^n[E; f(x)] = \sum_{X \in C(A_r)} p(X)\, \Delta^n[X; f(x)], \tag{17}$$

où $p(X) > 0$ pour tout $X \in C(A_r)$, avec

$$\sum_{X \in C(A_r)} p(X) = 1. \tag{18}$$

Et démontrons que pour tout $X \in C(A_r)$, on a

$$\Delta^n[X; f(x)] = \sum_{Y \in C(A_{r+1})} p_X(Y)\, \Delta^n[Y; f], \tag{19}$$

où $X \in C(A_r)$, $p_X(Y) \geqq 0$ pour $Y \in C(A_{r+1})$, avec

$$\sum_{Y \in C(A_{r+1})} p_x(Y) = 1.$$

En effet si X appartient en plus à $C(A_{r+1})$, c'est-à-dire si le point de A_{r+1} qui n'appartient pas à A_r est extérieur au segment-diamètre de X, l'identité

$$\Delta^n[X; f(x)] = \Delta^n[X; f(x)]$$

coïncide avec (19) moyennant :

$$\begin{array}{lll} p_X(Y) = 1 & \text{pour } Y \equiv X, & \\ p_X(Y) = 0 & \text{pour } Y \not\equiv X & \text{et} \quad Y \in C(A_{r+1}), \end{array}$$

poids qui sont non négatifs et dont la somme est l'unité.

En somme $\Delta^n[X; f(x)]$ est une moyenne arithmétique pondérée des rapports $\Delta^n[Y; f(x)]$, où $Y \in C(A_{r-1})$ dans le cas où $X \in C(A_{r+1})$.

Soit maintenant $X \notin C(A_{r+1})$. Ainsi X appartenant à $C(A_r)$ est tel que le point de A_{r+1} qui n'appartient pas à A_r est intérieur à $\delta(X)$. Soient c et d les extrêmes du segment-diamètre de X, I les points restants de X et e le point appartenant à A_{r+1} et non à A_r. D'après (16), on a

$$\Delta^n[X; f] = \frac{c-e}{c-d}\Delta^n(ceI; f] + \frac{e-d}{c-d}\Delta^n[deI; f]$$

qui coïncide avec (19) moyennant

$$
\begin{array}{lll}
p_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y}) = \dfrac{c-e}{c-d} & \text{pour} & \mathrm{Y} \equiv (ce\mathrm{I}) \in \mathrm{C}(\mathrm{A}_{r+1}), \\
p_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y}) = \dfrac{e-d}{c-d} & \text{»} & \mathrm{Y} \equiv (de\mathrm{I}) \in \mathrm{C}(\mathrm{A}_{r+1}), \\
p_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y}) = 0 & \text{»} & \mathrm{Y} \not\equiv (ce\mathrm{I}),\ (de\mathrm{I}); \quad \mathrm{Y} \in \mathrm{C}(\mathrm{A}_{r+1}).
\end{array}
$$

Le groupe $(\mathrm{X}e)$ est un groupe de $n+2$ points consécutifs par rapport à A_{r+1}, donc en éliminant successivement ses deux points extrêmes, nous obtenons les groupes $(ce\mathrm{I})$ et $(de\mathrm{I})$ ayant un point de moins chacun, mais qui sont toujours consécutifs par rapport à A_{r+1}.

Remarquons encore que ces p sont négatifs et leur somme est l'unité.

En somme, (19) a lieu dans les deux cas, c'est-à-dire pour $\mathrm{X} \in \mathrm{C}(\mathrm{A}_r)$.

Donc :

1° D'après (17), $\triangle^n[\mathrm{E}; f]$ est une moyenne pondérée des nombres $\triangle^n[\mathrm{X}; f]$, où $\mathrm{X} \in \mathrm{C}(\mathrm{A}_r)$.

2° Chacun de ces derniers nombres est à son tour une moyenne pondérée des nombres $\triangle^n[\mathrm{Y}, f]$, où $\mathrm{Y} \in \mathrm{C}(\mathrm{A}_{r+1})$. On peut conclure donc que $\triangle^n[\mathrm{E}; f]$ est la moyenne des nombres $\triangle^n[\mathrm{Y}; f]$ où $\mathrm{Y} \in \mathrm{C}(\mathrm{A}_{r+1})$.

En résumé, (13) a lieu pour $\mathrm{E} = \mathrm{E}$ et $\mathrm{A} = \mathrm{A}_r$ et si elle a lieu pour $\mathrm{E} = \mathrm{E}$ et $\mathrm{A} = \mathrm{A}_r$ elle a lieu aussi pour $\mathrm{E} = \mathrm{E}$ et $\mathrm{A} = \mathrm{A}_{r+1}$.

Par induction elle aura lieu pour $\mathrm{E} = \mathrm{E}$ et $\mathrm{A} = \mathrm{A}_m$. C. Q. F. D.

Cela étant, rappelons la propriété essentielle des moyennes :

Une moyenne arithmétique pondérée d'un ensemble de nombres dont les poids sont non nuls ou coïncident avec tous ces nombres, ou, s'ils sont inégaux, elle reste comprise entre le plus petit et le plus grand des susdits nombres.

Par exemple si $p_i > 0$ et si le diamètre des x_i est non nul, alors

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{m} p_i x_i > \left(\sum_{i=1}^{m} p_i \right) a = a,$$

où a est le plus petit parmi les nombres x_i. Et de même pour le maximum. Si $x_i = a$, évidemment

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{m} p_i x_i = \sum_{i=1}^{m} p_i a = a.$$

Nous avons maintenant les éléments suffisants pour parfaire la démonstration de notre théorème.

7. Soit A_1 un ensemble de points renfermant en plus des points de E les points que divisent en deux moitiés les segments dont les extrémités sont des points consécutifs de E. Ainsi E et A_1 contiennent respectivement $n+1$ et $2n+1$ points.

D'après (13), pour $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1$, $\triangle^n[\mathrm{E}; f]$ est une moyenne des $n^{\text{ièmes}}$ différences divisées de f prises sur des points consécutifs de A_1.

Il peut arriver deux cas :

a. $\triangle^n[\mathrm{E}; f] = \triangle_n[\mathrm{X}; f]$ pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{C}(\mathrm{A}_1)$.

b. Cette égalité n'est pas exacte pour tous les X de $C(A_1)$.

Dans le cas *a* nous définirons E_1 comme étant n'importe lequel des X appartenant à $C(A_1)$ et intérieurs à $\delta(A_1)$.

Dans le cas *b* on peut donner X_1 et X_2 appartenant à $C(A_1)$ tels que

$$\Delta^n[X_1; f] < \Delta^n[E; f] < \Delta^n[X_2; f].$$

Soient, pour fixer les idées, $a_1 < b_1 < \ldots < l_1$ et $a_2 < b_2 < \ldots < l_2$ les deux groupes X_1 et X_2 des points.

Posons

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= a_2\lambda + a_1(1-\lambda), \\ b(\lambda) &= b_2\lambda + b_1(1-\lambda), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l(\lambda) &= l_2\lambda + l_1(1-\lambda) \end{aligned}$$

et désignons l'ensemble des $n+1$ valeurs figurant dans les premiers membres par $\Gamma(\lambda)$.

Évidemment les $n+1$ fonctions de $\Gamma(\lambda)$ sont continues, monotones et inégales sur le segment $[0, 1]$. Donc $\Delta^n[\Gamma(\lambda); f]$ est une fonction continue de λ sur le segment $[0, 1]$ et qui dans leurs extrémités prend les valeurs $\Delta^n[X_1; f]$ et $\Delta^n[X_2; f]$.

Par conséquent, il existe un nombre λ_1 compris entre 0 et 1, tel que

$$\Delta^n[\Gamma(\lambda_1); f] = \Delta^n(E; f).$$

Posons

$$E_1 \equiv \Gamma(\lambda_1).$$

Le groupe de points E_1 est intérieur au diamètre $\delta(X_1 \cup X_2)$ et par suite à $\delta(E)$.

Si maintenant nous répétons ce même procédé, nous définirons un ensemble de points E_2, fonction de E_1.

De proche en proche nous définirons une suite $E, E_1, E_2, \ldots, E_r, \ldots$, telle que

1°
$$\Delta^n[E; f] = \Delta^n[E_r; f].$$

2° Le segment-diamètre $\delta(E_r)$ est intérieur au segment-diamètre $\delta(E_{r+1})$, c'est-à-dire

$$\delta(E_{r+1}) \subset \mathring{\delta}(E_r).$$

3° Le rapport entre la plus grande et la plus petite parmi les distances mutuelles des couples de points de E_r est plus petit ou égal au rapport correspondant fourni par le groupe de points de E.

4°
$$|\delta(E_r)| \leq \frac{dn}{2^r},$$

où d est la plus grande parmi les distances entre points consécutifs de E.

Le premier alinéa découle de la définition même des E_r.

Le deuxième alinéa a lieu par définition dans le cas *a*, et dans le cas *b*, d'après ce que nous venons de dire.

Troisième alinéa : En divisant par moitiés les segments déterminés par des points consécutifs, le rapport mesurant leur disproportion maximum demeure invariable. La deuxième opération du cas b respecte encore ce nombre, ou en tout cas le fait diminuer.

Quatrième alinéa : Le segment le plus long de E_r, entre points consécutifs, étant tout au plus la moitié du segment le plus long de E_{r+1}, vaudra en longueur tout au plus $\frac{d}{2^r}$, donc le diamètre de E_r vaut tout au plus $\frac{dn}{2^r}$.

Cela étant, soit c le point appartenant à tous les segments-diamètres emboîtés $\delta(E_r)$. Ce point est univoquement déterminé, les segments-diamètres de la suite $\delta(E_1)$, $\delta(E_2)$, ... étant chacun inclus dans leur précédent et leur longueur tendant vers zéro. Ainsi $(E_r) \rightarrow (c, c, \ldots, c)$, avec $r \rightarrow \infty$.

En outre les propriétés $(E_r) \rightarrow (c, c, \ldots, c)$, $c \in \mathring{\delta}(E_r)$ et 3° nous permettent d'affirmer que (critère III, p. 26)

$$\lim_{r=\infty} \Delta^n[E_r; f(x)] = \frac{1}{n!} f_n(c),$$

laquelle avec 1° nous donne

$$\Delta^n[E; f(x)] = \frac{1}{n!} f_n(c),$$

où c appartient à $\delta(E)$. C. Q. F. D.

8. Théorème VI. — *Si $f_n(c)$ n'est pas la valeur maximum ou minimum du $n^{ième}$ quotient différentiel de $f(x)$ dans le voisinage Δ de c, alors il existe un groupe de points* E *distincts deux à deux et appartenant à Δ tels que*

$$\Delta^n[E; f(x)] = \frac{1}{n!} f_n(c).$$

A un certain point de vue ce théorème est la réciproque du précédent, à ces différences près : a. la restriction imposée au point c de n'être pas un point où $f_n(x)$ atteint un maximum ou minimum et b. qu'on n'exige plus que c soit intérieur à $\delta(E)$. Voici deux exemples qui montrent la nécessité de ces deux restrictions.

Soit $f(x) = x^3$ et $c = 0$. $f'(x) = 3x^2$ atteint son minimum au point $c = 0$. Or. toutes les pentes $\Delta[E; f(x)]$ sont positives et par suite il n'existe aucun couple des points E dont la pente soit égale à $f'(c) = 0$.

Soit $f(x) = x^3 . \left(2 + \sin\frac{1}{x^3}\right)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. $f'(x)$ oscille de $-\infty$ à $+\infty$ au voisinage de $c = 0$, donc $f'(x)$ n'atteint pas sa valeur maximum ou minimum au point c. Les pentes $\Delta[E, f(x)]$ sont positives pourvu que les deux points de E tombent de part et d'autre de l'origine. Enfin $f'(0) = 0$, d'où l'égalité $\Delta[E; f] = f'(0)$ exige que les deux points de E soient du même signe. Donc, en aucun cas, $c = 0$ ne peut être intérieur à $\delta(E)$ si

$$\Delta[E; f] = \frac{1}{n!} f_n(c).$$

Voici la démonstration du théorème.

D'après l'hypothèse on peut donner d et e appartenant à Δ, tels que

$$f_n(e) < f_n(c) < f_n(d),$$

$f_n(c)$ n'étant pas le maximum ou minimum de $f_n(x)$ dans Δ.

Ensuite, on peut donner E et D appartenant à Δ, tels que

$$\Delta^n[E; f] < \frac{1}{n!} f_n(c) < \Delta^n[D; f(x)],$$

du fait que $f_n(e)$ et $f_n(d)$ sont des limites de différences divisées dont les arguments tendent respectivement vers e et d (th. II).

Soit maintenant $\Gamma(\lambda)$ l'ensemble des $n+1$ nombres

$$\gamma_i(\lambda) = e_i(1-\lambda) + \lambda d_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1),$$

où les groupes de points $e_1 < e_2 < \ldots < e_{n+1}$ et $d_1 < d_2 < \ldots < d_{n+1}$ sont respectivement les groupes E et D. Donc $\Gamma(0) = E$ et $\Gamma(1) = D$.

Ainsi $\Delta^n[\Gamma(\lambda); f]$ prend toutes les valeurs comprises entre $\Delta^n[E; f]$ et $\Delta^n[D; f]$ quand λ varie de 0 à 1 ; et par suite il existe un nombre λ_1, $0 < \lambda_1 < 1$, tel que

$$\Delta^n[\Gamma(\lambda_1); f] = \frac{1}{n!} f_n(c)$$

et par suite $\Gamma(\lambda_1)$ réalise les conditions que le théorème prévoit pour E, puisque $\Gamma(\lambda_1)$ appartient à $\delta(E \cup D)$ et à plus forte raison à Δ.

9. Une conséquence du précédent théorème est que les quotients différentiels jouissent de la propriété de Darboux.

Soit, par exemple,

$$f_n(a) < f_n(b)$$

et μ un nombre compris entre $f_n(a)$ et $f_n(b)$.

Cela étant posé, soient $A \equiv (a_1, \ldots, a_{n+1})$ et $B \equiv (b_1, \ldots, b_{n+1})$ des groupes de points de $[a, b]$ proches respectivement de a et b et choisis de façon à ce que, $\Delta^n[a_i; f(x)]$ et $\Delta^n[b_i; f]$ s'approchent suffisamment de $\frac{1}{n!} f_n(a)$ et $\frac{1}{n!} f_n(b)$ (th. II), pour qu'on ait

$$\Delta^n[a_i; f(x)] < \frac{1}{n!}\mu < \Delta^n[b_i; f(x)].$$

D'après la continuité de $\Delta^n[a_i(1-\lambda) + \lambda b_i; f(x)]$ par rapport à λ, on sait que

$$\Delta^n[c_i; f] = \frac{1}{n!}\mu,$$

où $c_i = a_i(1-\lambda_1) + b_i\lambda_1$, λ_1 étant positif et plus petit que l'unité, donc $c_i \in [a, b]$.

Or, d'après le théorème III il existe $c \in \delta(c_i) \subset [a, b]$, tel que

$$\Delta_n[c_i; f] = \frac{1}{n!} f_n(c), \qquad \text{d'où} \qquad f_n(c) = \mu. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

En somme, on peut affirmer qu'un quotient différentiel prend dans un segment $[a, b]$ toutes les valeurs comprises entre les valeurs qu'il prend aux extrémités dudit segment, μ étant n'importe laquelle de ces valeurs intermédiaires.

10. **Théorème V.** — *$f(x)$ étant continue et différentiable d'ordre $m+n$ sur le segment-diamètre $\delta(e_i+d_j)$, on peut donner c intérieur à $\delta(e_i+d_j)$, tel que*

$$\Delta_x^n[e_i;\ \Delta_y^m[d_j;\ f(x+y)]] = \frac{1}{m!\,n!} f_{m+n}(c),$$

où les e_i sont distincts deux à deux ainsi que les d_j.

La démonstration est tout à fait analogue à celle du paragraphe 6.

On commence en établissant également l'identité analogue

$$(20)\qquad \Delta_x^n[\mathrm{E};\ \Delta_y^m[\mathrm{D};\ f(x+y)]] = \sum_{\substack{\mathrm{X}\in \mathrm{C(A)} \\ \mathrm{Y}\in \mathrm{C(B)}}} p(\mathrm{X},\mathrm{Y})\,\Delta_x^n[\mathrm{X};\ \Delta_y^m[\mathrm{Y};\ f(x+y)]],$$

où, 1°, E et D sont respectivement des sous-ensembles de A et B avec les mêmes segments-diamètres; 2° C(A) et C(B) désignent respectivement les groupes de points de $n+1$ et $m+1$ points consécutifs de A et B; et enfin, 3°, les nombres $p(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ sont non négatifs pour $\mathrm{X}\in\mathrm{C(A)}$ et $\mathrm{Y}\in\mathrm{C(B)}$ et tels que

$$\sum_{\substack{\mathrm{X}\in \mathrm{C(A)} \\ \mathrm{Y}\in \mathrm{C(B)}}} p(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = 1.$$

Cette formule peut être établie de la façon suivante :

D'après (13), on a

$$\Delta_y^m[\mathrm{D};\ f(x+y)] = \sum_{\mathrm{Y}\in \mathrm{C(B)}} p(\mathrm{Y})\,\Delta_y^m[\mathrm{Y};\ f(x+y)],$$

avec

$$\sum_{\mathrm{Y}\in \mathrm{C(B)}} p(\mathrm{Y}) = 1,$$

d'où, en prenant le $n^{\text{ième}}$ rapport sur les points E, il vient

$$(21)\qquad \begin{cases} \Delta_x^n[\mathrm{E};\ \Delta_y^m[\mathrm{D};\ f(x+y)]] = \displaystyle\sum_{\mathrm{Y}\in \mathrm{C(B)}} p(\mathrm{Y})\,\Delta_x^n[\mathrm{E};\ \Delta_y^m[\mathrm{Y};\ f(x+y)], \\ \qquad\qquad \text{avec } \displaystyle\sum_{\mathrm{Y}\in \mathrm{C(B)}} p(\mathrm{Y}) = 1. \end{cases}$$

Appliquons maintenant (13) à la fonction de x, $\Delta_y^m[\mathrm{Y};\ f(x+y)]$, et aux ensembles E et A. On obtient ainsi

$$(22)\qquad \begin{cases} \Delta_x^n[\mathrm{E};\ \Delta_y^m[\mathrm{Y};\ f(x+y)]] = \displaystyle\sum_{\mathrm{X}\in \mathrm{C(A)}} p_{\mathrm{Y}}(\mathrm{X})\,\Delta_x^n[\mathrm{X};\ \Delta_y^m[\mathrm{Y};\ f(x+y)]], \\ \qquad\qquad \text{avec } \displaystyle\sum_{\mathrm{X}\in \mathrm{C(A)}} p_{\mathrm{Y}}(\mathrm{X}) = 1 \end{cases}$$

pour toute $\mathrm{Y}\in\mathrm{C(B)}$.

En somme, d'après (21), le nombre $\Delta_x^n[E; \Delta_y^m[D; f(x+y)]]$ est une moyenne arithmétique des nombres $\Delta_x^n[E; \Delta_y^m[Y; f(x+y)]]$ [Y variant dans C(B)] dont chacun est, d'après (22), une moyenne arithmétique des nombres $\Delta_x^n[X; \Delta_y^m[Y; f(x+y)]]$, où $X \in C(A)$ et $Y \in C(B)$.

Or, la moyenne arithmétique pondérée est une opération transitive, autrement dit, une moyenne de moyennes est encore une moyenne. Ainsi le nombre $\Delta_x^n[E; \Delta_y^m[D; f(x+y)]]$ est une moyenne arithmétique des nombres $\Delta_x^n[X; \Delta_y^m[Y; f(x+y)]]$, X et Y variant respectivement dans C(A) et C(B). C'est ce qui exprime la formule (20), avec

$$\sum_{\substack{X \in C(A) \\ Y \in C(B)}} p(X, Y) = 1 \qquad \text{et} \qquad p(X, Y) \geqq 0.$$

La formule (20) étant établie, soient E le groupe de $n+1$ points,

$$e_1 < e_2 < \ldots < e_{n+1}$$

et A le groupe de $2n+1$ points

$$e_1 < \frac{e_1+e_2}{2} < e_2 < \frac{e_2+e_3}{2} < \ldots < e_n < \frac{e_n+e_{n+1}}{2} < e_{n+1};$$

soient D le groupe de points

$$d_1 < d_2 < \ldots < d_{n+1}$$

et B le groupe

$$d_1 < \frac{d_1+d_2}{2} < d_2 < \ldots < d_n < \frac{d_n+d_{n+1}}{2} < d_{n+1}.$$

Introduisons la fonction d'ensemble $k(E)$, fonction qui désigne le nombre

$$\max_{\substack{1 \leqq i \leqq n \\ 1 \leqq j \leqq n}} \frac{e_{i+1}-e_i}{e_{j+1}-e_j} = \frac{\max\limits_{1 \leqq i \leqq n} (e_{i+1}-e_i)}{\min\limits_{1 \leqq i \leqq n} (e_{i+1}-e_i)}.$$

D'après ces définitions E est un sous-ensemble de A et

$$\delta(E) \equiv \delta(A), \qquad k(E) = k(A).$$

De même,

$$D \subset B, \qquad \delta(D) \equiv \delta(B) \qquad \text{et} \qquad k(D) = k(B).$$

La formule est donc applicable aux ensembles E, D, A et B et par suite le nombre

$$\Delta_x^n[E; \Delta_y^m[D; f(x+y)]]$$

est une moyenne arithmétique des nombres fournis par l'expression

$$\Delta_x^n[X; \Delta_y^m[Y; f(x+y)]],$$

où X et Y varient respectivement dans C(A) et C(B), ce qui nous permet d'affirmer que parmi ces derniers nombres il y en a de plus petits ou égaux et de plus grands ou égaux que leur moyenne, c'est-à-dire

$$(23) \quad \Delta_x^n[X_1; \Delta_y^m[Y_1; f(x+y)]] \leqq \Delta_x^n[E; \Delta_y^m[D; f(x+y)]] \leqq \Delta_x^n[X_2; \Delta_y^m[Y_2; f(x+y)]].$$

Posons

$$x_i(\lambda) = x_{1,i}(1-\lambda) + x_{2,i}\lambda \qquad (i = 1, \ldots, n+1),$$
$$y_j(\lambda) = y_{1,j}(1-\lambda) + y_{2,j}\lambda \qquad (j = 1, \ldots, m+1),$$

où les groupes de points $x_{1,1} < \ldots < x_{1,n+1}$, $x_{2,1} < \ldots < x_{2,n+1}$, $y_{1,1} < \ldots < y_{1,m+1}$ et $y_{2,1} < \ldots < y_{2,m+1}$ désignent les points des groupes X_1, X_2, Y_1, Y_2. Désignons maintenant par $X(\lambda)$ et $Y(\lambda)$ respectivement les groupes $x_i(\lambda)$ et $y_j(\lambda)$.

Remarquons que la fonction de λ

$$\Delta_x^n[X(\lambda);\ \Delta_y^m[Y(\lambda); f(x+y)]]$$

est une fonction continue sur le segment $[0, 1]$ qui, aux extrémités 0 et 1, prend les valeurs des membres extrêmes de (23). On peut donc donner un nombre $\lambda_1 \in [0, 1]$, tel que l'on ait

$$(24)\quad \Delta_x^n[E_1;\ \Delta_y^m[D_1; f(x+y)]] = \Delta_x^n[E;\ \Delta_y^m[D; f(x+y)]], \quad \text{où}\quad E_1 \equiv X(\lambda_1), \quad D_1 \equiv Y(\lambda_1).$$

Désignons par k, Δ et δ respectivement les nombres

$$\max[k(E), k(D)], \quad \max\Big[\max_{1\leq i\leq n} \Delta e_i, \max_{1\leq j\leq m} \Delta d_j\Big] \quad \text{et} \quad \min\Big[\min_{1\leq i\leq n} \Delta e_i, \min_{1\leq j\leq m} \Delta d_j\Big].$$

On démontre alors sans difficultés (*fig.* 5) que

a. $$\delta(E_1) \subset \delta(X_1 \cup X_2) \subset \delta(E);$$

b. $$k(E_1) = \frac{\max \Delta e_{1,i}}{\min \Delta e_{1,i}} \leq \frac{\frac{1}{2}\max \Delta e_i}{\frac{1}{2}\min \Delta e_i} = k(E) \leq k;$$

c. $$\frac{1}{2}\min \Delta e_i \leq \Delta e_{1,i} \leq \frac{1}{2}\max \Delta e_i, \qquad \frac{1}{2}\delta \leq \Delta e_{1,i} \leq \frac{1}{2}\Delta,$$

ainsi que les relations analogues pour D_1 et D.

Si nous répétons ensuite les mêmes raisonnements à partir de E_1 et D_1 nous obtiendrons ainsi E_2 et D_2. De proche en proche nous définirons les deux suites

$$E,\ E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_r,\ \ldots,$$
$$D,\ D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_r,\ \ldots,$$

lesquelles, d'après (24), a, b et c vérifient :

1° $$\Delta_x^n[E_r;\ \Delta_y^m[D_r; f(x+y)]] = \Delta_x^n[E;\ \Delta_y^m[D; f(x+y)]];$$

2° $$\delta(E) \supset \delta(E_1) \supset \delta(E_2), \quad \ldots, \quad \delta(D) \supset \delta(D_1) \supset \delta(D_2) \supset \ldots;$$

3° $$k(E_r) \leq k, \quad k(D_r) \leq k \quad (r = 1, 2, \ldots);$$

4° $$\frac{\delta}{2^r} \leq \Delta e_{r,i} \leq \frac{\Delta}{2^r}, \quad \frac{\delta}{2^r} \leq \Delta d_{r,i} \leq \frac{\Delta}{2^r}.$$

D'après 2° et 4° les segments $\delta(E_r)$ ainsi que les segments $\delta(D_r)$ ($r = 1, 2, 3, \ldots$) ne contiennent respectivement qu'un seul point, soient x_0 et y_0. D'où $x_0 \in \delta(E)$ et $y_0 \in \delta(D)$.

Nous allons démontrer que $x_0 \in \delta(E)$, $y_0 \in \delta(D)$, $(E_r) \to (x_0, \ldots, x_0)$, $(D_r) \to (y_0, \ldots, y_0)$ et 3° entraînent ($r \to \infty$) :

$$\Delta_x^n[E_r;\ \Delta_y^m[D_r; f(x+y)]] \to \frac{1}{m!\,n!} f_{m+n}(x_0 + y_0).$$

En effet, posons

$$f(x+y)=f(x_0+y_0)+\frac{x+y-x_0-y_0}{1\,!}f_1(x_0+y_0)+\ldots$$
$$+\frac{(x+y-x_0-y_0)^{m+n}}{(m+n)\,!}[f_{m+n}(x_0+y_0)+\varepsilon_{m+n})x_0+y_0,\ x+y-x_0-y_0)],$$

d'où il vient

$$\Delta_x^n[\mathrm{E}_r;\ \Delta_y^m[\mathrm{D}_r;\ f(x+y)]]$$
$$=\frac{1}{m\,!\ n!}f_{n+m}(x_0+y_0)+\Delta_x^n\left[\mathrm{E}_r;\ \Delta_y^m\left[\mathrm{D}_r;\frac{(x+y-x_0-y_0)^{m+n}}{(m+n)\,!}\varepsilon_{m+n}\right]\right].$$

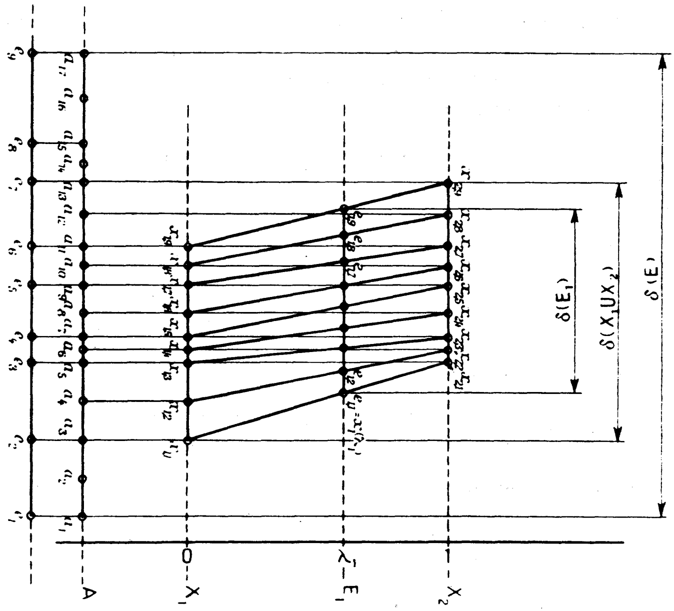

Fig. 5.

Or, la dernière différence divisée peut se calculer [d'après (4)] :

$$\Delta_y^m\left[\mathrm{D}_r;\frac{1}{(m+n)\,!}(x+y-x_0-y_0)^{m+n}\varepsilon_{m+n}\right]$$
$$=\sum_{j=1'}^{m+1}\frac{(d_{r,j}+x-x_0-y_0)^{m+n}}{(m+n)\,!\displaystyle\prod_{j'=1}^{m+1}{}'(d_{r,j}-d_{r,j'})}\varepsilon_{m+n}(x_0+y_0\,;\ d_{x,j}+x-y_0-x_0),$$

d'où une nouvelle application de (4) nous donnera

$$\Delta_x^n\left[\mathrm{E}_r;\ \Delta_y^m\left[\mathrm{D}_r;\frac{(x+y-x_0-y_0)^{n+m}}{(n+m)\,!}\varepsilon_{n+m}\right]\right]$$
$$=\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1'}^{m+1}\frac{(e_{r,i}+d_{r,j}-x_0-y_0)^{m+n}}{(n+m)!\displaystyle\prod_{i'=1}^{n+1}{}'(e_{r,i}-e_{r,i'})\prod_{j'=1}^{m+1}{}'(d_{r,j}-d_{r,j'})}\varepsilon_{m+n}(x_0+y_0,\ e_{r,i}+d_{r,j}-x_0-y_0).$$

Cette dernière peut s'écrire sous la forme

$$\Delta_x^n\left[E_r;\ \Delta_y^m\left[D_r;\frac{(x+y-x_0-y_0)^{m+n}}{(m+n)!}\varepsilon_{m+n}\right]\right]$$
$$=\frac{1}{(m+n)!}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m+1}\prod_{i'=1}^{n+1}{}'\frac{e_{r,i}+d_{r,j}-x_0-y_0}{e_{r,i}-e_{r,i'}}$$
$$\times\prod_{j'=1}^{m+1}{}'\frac{e_{r,i}+d_{r,j}-x_0-y_0}{d_{r,j}-d_{r,j'}}\varepsilon_{m+n}(x_0+y_0,\ e_{r,i}+d_{r,j}-x_0-y_0).$$

Soit maintenant ε_r le plus grand des nombres $|\varepsilon_{m+n}(x_0+y,\ e_{r,j}+d_{r,j}-x_0-y_0)|$ $(i=1,\ \ldots,\ n+1\,;\ j=1,\ \ldots,\ m+1)$. $\varepsilon_r\to 0$, du fait que $e_{r,i}\to x_0$ et $d_{r,j}\to y_0$ (avec $r\to\infty$) et que $f(x)$ est différentiable d'ordre $m+n$ au point $x_0+y_0\in\delta(e_i+d_j)$.

Or, $x_0\in\delta(E_r)$ et 4° entraînent

$$|e_{r,i}-x_0|\leqq|\delta(E_r)|=\sum_{i=1}^{n}\Delta e_{r,i}\leqq\frac{1}{2^r}n\Delta.$$

On a aussi

$$|e_{r,i}-e_{r,i'}|\geqq\min\Delta e_{r,i}\geqq\frac{1}{2^r}\delta.$$

Et de même

$$|d_{r,j}-y_0|\leqq\frac{n\Delta}{2^r}\qquad\text{et}\qquad|d_{r,j}-d_{r,j'}|\geqq\frac{\delta}{2^r},$$

D'où, en remplaçant les valeurs, il vient

$$\left|\Delta_x^n\left[E_r;\ \Delta_y^m\left[D_r;\frac{(x+y-x_0-y_0)^{m+n}}{m+n}\varepsilon_{m+n}\right]\right]\right|\leqq\frac{(m+1)(n+1)}{(m+n)!}\ \frac{2^{m+n}\ n^{m+n}\ \Delta^{m+n}}{\delta^{m+n}}\varepsilon_r$$

et par suite, le premier membre tend vers zéro avec $r\to\infty$, ou, si l'on veut, le nombre

$$\Delta_x^n[E_r;\ \Delta_y^m[D_r;f(x+y)]]-\frac{1}{n!\ m!}f_{n+m}(x_0+y_0)$$

tend vers zéro, c'est-à-dire, il est nul, puisque d'après 1° il est constant, donc pour $c=x_0+y_0\in\delta(e_i+d_j)$, on a

$$\Delta_x^m[E;\ \Delta_y^m[D;f(x+y)]]=\frac{1}{n!\ m!}f_{n+m}(c)$$

et le théorème est démontré.

11. Le théorème précédent nous permettra de généraliser celui du paragraphe 6 de la façon suivante :

Théorème VI. — *Soit $f(x)$ une fonction continue et différentiable d'ordre $n+m$ sur le segment-diamètre d'un groupe* E *de $m+1$ points distincts. Il existe alors au moins un point c intérieur à $\delta(E)$, tel que*

$$\Delta^m[E;f_n(x)]=\frac{1}{m!}f_{n+m}(c).$$

Il s'agit d'abord de trouver un E′ intérieur à $\delta(E)$, tel que

$$\Delta^m[E';f_n(x)]=\Delta^m[E;f_n(x)].$$

Voici comment on y parvient :

Soit $\delta(A) \equiv \delta(E)$, où A a au moins les points de E plus deux points distincts et distincts des points de E. Parmi les éléments de $C(A)$ il y en a évidemment au moins un qui est intérieur à $\delta(E)$. Désignons-le par E″. Alors, si les différences divisées de $f_n(x)$ correspondantes à E et E″ sont égales, E″ remplit les conditions recherchées.

Par contre, si ces différences divisées sont inégales, par exemple si

$$\Delta^m[E''; f_n(x)] > \Delta^m[E; f_n(x)],$$

alors l'une au moins des différences divisées correspondantes aux éléments de $C(A)$ est forcément plus petite que leur moyenne $\Delta^m[E; f_n(x)]$.

Ainsi on peut choisir E^{IV} appartenant à $C(A)$, tel que

$$\Delta^m[E''; f_n(x)] > \Delta^m(E; f(x)] > \Delta^m[E^{IV}; f_n(x)].$$

Les points de E^{IV} ne sont pas forcément intérieurs à $\delta(E)$.

Plaçons-nous dans ce dernier cas et tâchons de donner E‴ intérieur à $\delta(E)$, tel que sa différence divisée diffère de celle de E^{IV} en moins d'une quantité donnée. Pour ce faire, constatons d'abord que les fonctions $f(x)$ continues au sens de Darboux jouissent au voisinage d'un point x_0 de la propriété suivante : x_0 étant donné il existe une suite $\{x_s\}$ convergeant vers x_0, telle que

$$\lim_{s=\infty} f(x_s) = f(x_0).$$

Soit, par exemple, Δ un voisinage ou demi-voisinage de x_0, où $f(x)$ est continue au sens de Darboux.

Une telle suite existe visiblement, si l'on peut donner une suite $\{x_s\}$ appartenant à Δ et convergeant vers x_0, telle que l'on ait la condition plus forte

$$f(x_s) = f(x_0).$$

Dans le cas contraire et dans un certain demi-voisinage $\Delta' \subset \Delta$ de x_0, l'éga lité $f(x) = f(x_0)$ (pour $x \in \Delta'$) n'a lieu que lorsque $x = x_0$. Soit x_1 un point appartenant à Δ'. D'après la continuité de Darboux $f(x)$ prend toutes les valeurs comprises entre $f(x_1)$ et $f(x_0)$, x parcourant le segment $[x_1, x_0]$. Or, cela étant vrai pour n'importe quel x_1, on peut choisir x_s appartenant à $\left[\frac{x_1}{s}, x_0\right]$ et tel que

$$|f(x_0) - f(x_s)| < \frac{\varepsilon}{s},$$

ce qui revient à dire que

$$\lim_{s=\infty} f(x_s) = f(x_0),$$

les x_s convergent vers x_0 avec $s \to \infty$.

Ainsi nous pouvons choisir une suite de groupes de points D_s intérieurs à $\delta(E)$ et convergeant vers E^{IV}, c'est-à-dire, $m + 1$ suites intérieures à $\delta(E)$ et convergentes vers les $m + 1$ points de E^{IV}, de façon à ce que les valeurs correspondantes de $f_n(x)$ convergent vers les $m+1$ valeurs de $f_n(x)$ aux points de E^{IV}. De cette façon nous aurons

$$\lim_{s=\infty} \Delta^m[D_s; f_n(x)] = \Delta^m[E^{IV}; f_n(x)],$$

les points limites E^{IV} étant distincts deux à deux.

Ainsi pour $s=s_0$, $\Delta^m[D_s; f]$ s'approchera suffisamment de sa limite pour que l'on ait

$$\Delta^m[E; f_n(x)] > \Delta^m[D_{s_0}; f_n(x)],$$

donc, en désignant D_{s_0} par E''', nous pouvons écrire

$$\Delta^m[E''; f_n(x)] > \Delta^m[E; f_n(x_n)] > \Delta^m[E'''; f_n(x)],$$

où E'' et E''' sont tous les deux des groupes de points intérieurs à $\delta(E)$.

Désignons symboliquement par D_x^n l'opérateur dont l'application à $f(x)$ nous donne $f_n(x)$. Cet opérateur étant distributif on peut écrire

$$D_y^n[\Delta_x^m[F; f(x+y)]] = \Delta_x^m[F; D_y^n f(x+y)]$$

et en particulier

$$D_{y=0}^n[\Delta_x^m[F; f(x+y)]] = \Delta_x^m[F; f_n(x)].$$

Or, d'après le théorème IV, à ce $n^{\text{ième}}$ quotient différentiel on peut faire correspondre un ensemble T appartenant à un voisinage de zéro, tel que

$$\Delta_y^n[T; \Delta_x^m[F; f(x+y)]] = \frac{1}{n!} D_{y=0}^n[\Delta_x^m[F; f(x+y)]],$$

cela étant vrai pour n'importe quel voisinage de l'origine.

Ces deux dernières égalités entraînent

$$\Delta_y^n[T; \Delta_x^m[E; f(x+y)]] = \frac{1}{n!} \Delta_x^m[F; f_n(x)].$$

Or, d'après le théorème V, on a

$$\Delta_y^n[T; \Delta_x^m[F; f(x+y)]] = \frac{1}{m!\,n!} f_{m+n}(c),$$

où c est intérieur à $\delta(f_i + t_j)$. D'où en remplaçant

$$\Delta_x^m[F; f_n(x)] = \frac{1}{m!} f_{m+n}(c).$$

Appliquons maintenant ce raisonnement à E'', T'' et E''', T''', les t_j'' et t_k'' appartenant à un voisinage de zéro, choisi de façon à ce qu'il soit suffisamment petit pour que les groupes de points $e_k'' + t_j''$ et $e_i''' + t_k'''$ soient intérieurs à $\delta(E)$, comme le sont en effet les groupes e_k'' et e_i'''. On a donc

$$\Delta^m[E''; f_n(x)] = \frac{1}{m!} f_{m+n}(c'') \qquad (c'' \in \delta(E)],$$

$$\Delta^m[E'''; f_n(x)] = \frac{1}{m!} f_{m+n}(c''') \qquad (c''' \in \delta(E)],$$

d'où

$$\frac{1}{m!} f_{m+n}(c'') > \Delta^m[E; f_n(x)] > \frac{1}{m!} f_{m+n}(c''').$$

Enfin, la propriété de Darboux nous permet d'affirmer l'existence de c intérieur à $[c'', c''']$, donc à $\delta(\mathrm{E})$, tel que

$$\Delta^m[\mathrm{E}, f_n(x)] = \frac{1}{m!} f_{m+n}(c). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

12. **Théorème VII.** — *$f(x)$ étant continue et différentiable d'ordre n sur le segment $\delta(\mathrm{E})$, il existe au moins un point c intérieur à $\delta(\mathrm{E})$, tel que*

$$\Delta^n[\mathrm{E}; f(x)] = \frac{1}{n!} f_n(c),$$

les points de E *pouvant coïncider partiellement ou totalement.*

Dans le cas où les points de E sont distincts deux à deux, ou dans le cas où $|\delta(\mathrm{E})| = 0$, le théorème est vrai. Le premier cas est le cas du théorème III; le second cas nous fait tomber sur l'identité

$$\frac{1}{n!} f_n(c) = \frac{1}{n!} f_n(c).$$

Pour démontrer le théorème dans les autres cas, il suffit d'établir l'existence d'un groupe C des points distincts deux à deux et appartenant à $\delta(\mathrm{E})$ et tels que

$$\Delta^n[\mathrm{E}; f(x)] = \Delta^n[\mathrm{C}; f(x)].$$

En effet, dans ce cas, d'après le théorème III, il existe un point c intérieur à $\delta(\mathrm{C})$, donc à $\delta(\mathrm{E})$, tel que

$$\Delta^n[\mathrm{C}; f(x)] = \frac{1}{n!} f_n(c).$$

Le point c remplit donc les conditions recherchées.

Ainsi tout reviént à démontrer l'existence du groupe C.

Pour ce faire nous allons étendre la formule (13) au présent cas, où les points de E ne sont pas ni tous distincts deux à deux ni tous égaux ou confondus.

Nous suivrons la démonstration générale à l'aide d'un cas particulier.

On sait que la huitième différence divisée de $f(x)$ sur les points

$$a_1 < a_2 < a_3 < b_1 < b_2 < c_1 < c_2 < c_3 < c_4,$$

est une moyenne arithmétique des différences de huitième ordre de $f(x)$ prises sur des points consécutifs du système plus complet de points

$$a_1 < a_2 < a_3 < \alpha < \beta < b_1 < b_2 < \gamma < c_1 < c_2 < c_3 < c_4,$$

c'est-à-dire, on a

$$\begin{aligned}
[a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3, c_4] = \; & q_1[a_1, a_2, a_3, \alpha, \beta, b_1, b_2, \gamma, c_1] \\
& + q_2[a_2, a_3, \alpha, \beta, b_1, b_2, \gamma, c_1, c_2] \\
& + q_3[a_3, \alpha, \beta, b_1, b_2, \gamma, c_1, c_2, c_3] \\
& + q_4[\alpha, \beta, b_1, b_2, \gamma, c_1, c_2, c_3, c_4],
\end{aligned}$$

avec

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1.$$

Prenons maintenant la limite itérée des deux égalités en faisant tendre successivement a_1 vers a, a_2 vers a, a_3 vers a, b_1 vers b, b_2 vers b, c_1 vers c, c_2 vers c, c_3 vers c, et enfin c_4 vers c, a, b et c étant des nombres compris respectivement entre a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 et c_1, c_2, c_3, c_4.

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}[a, a, a, b, b, c, c, c, c] = \; & p_1[a, a, a, \alpha, \beta, b, b, \gamma, c] \\ & + p_2[a, a, \alpha, \beta, b, b, \gamma, c, c] \\ & + p_3[a, \alpha, \beta, b, b, \gamma, c, c, c] \\ & + p_4[\alpha, \beta, b, b, \gamma, c, c, c, c],\end{aligned}$$

avec

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1,$$

où les points p ont été calculés au moyen des limites itérées d'indétermination. Les limites itérées d'indétermination des q existent, puisque l'égalité

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1$$

exige que ces nombres soient bornés du fait qu'ils sont positifs et leur somme est 1.

En réalité, si l'on examine de plus près la loi de formation des q, on voit aisément que :

1° Ces nombres sont des expressions rationnelles des distances entre les points du système complet.

2° Les dénominateurs des q, par exemple de q_3, sont des longueurs des segments renfermant le segment-diamètre de la respective différence $[a_3, \alpha, \beta, b_1, b_2, \gamma, c_1, c_2, c_3]$, c'est-à-dire renfermant le segment $[a_3, c_3]$.

3° Les numérateurs sont les distances des points introduits ou complémentaires α, β, γ aux points restants.

Les dénominateurs et numérateurs sont donc positifs (sont des distances) et bornés inférieurement : les premiers du fait que dans le second membre les différences contiennent des points du premier système et du système complémentaire et par suite leur diamètre reste borné inférieurement; les seconds parce que les points complémentaires restent à distance bornée inférieurement de tous les autres points.

En résumé, les nombres q sont des fonctions rationnelles des distances, distances qui sont bornées inférieurement et par suite sont des fonctions continues par rapport aux variables a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2 et c_3, c'est-à-dire des fonctions positives et bornées dans les deux sens.

Ainsi les limites d'indétermination dont il a été question sont de vraies limites et par surcroît non nulles.

Ainsi la formule (13) se laisse étendre au cas où E a des points confondus et où A s'obtient en complétant E comme précédemment, c'est-à-dire, avec des points intérieurs à $\delta(E)$, distincts des points de E et distincts entre eux.

Cela étant, soit $A = E \cup B$, où B est un ensemble de $n+1$ points distincts deux à deux appartenant à $\delta(E)$, et où $\delta(B)$ ne contient aucun des points de E, c'est-à-dire que les points de B sont consécutifs dans A. Ainsi B est intérieur à $\delta(E)$ et B est un des éléments de $C(A)$.

Il peut arriver alors que

$$\Delta^n[B; f(x)] = \Delta^n[E; f(x)],$$

auquel cas B réalise les circonstances de C, ou

$$\Delta^n[B; f(x)] \neq \Delta^n[E; f(x)].$$

Soit, par exemple, dans ce cas

$$\Delta^n[B; f] > \Delta^n[E; f],$$

inégalité qui montre que la moyenne arithmétique $\Delta^n[E; f(x)]$ des nombres $\Delta^n[X; f(x)]$ [où $X \in C(A)$] est plus grande qu'un de ces nombres et par suite il existe $D \in C(A)$, tel que

$$\Delta^n[D; f] < \Delta^n[E; f].$$

D'après ce que nous venons de dire, D peut avoir des points confondus, tandis que B ne contient que des points distincts.

La fonction de λ,

$$\Delta^n[d_i\lambda + b_i(1 - \lambda); f(x)]$$

(où les points $d_1 \leqq \ldots \leqq d_{n-1}$ et les points $b_1 < \ldots\ b_{n+1}$ sont les groupes D et B) est une fonction continue aux points λ, tels que $0 \leqq \lambda < 1$, du fait que pour ces valeurs, $b_i \neq b_j$ entraîne $d_i\lambda + b_i(1 - \lambda) \neq d_j\lambda + b_j(1 - \lambda)$. Par contre, au point $\lambda = 1$, les points $d_i\lambda + b_i(1 - \lambda) = d_i$ ne sont pas forcément distincts, néanmoins, la fonction est encore continue. En effet, les rapports entre les distances mutuelles des points de $d_i\lambda + b_i(1 - \lambda)$, qui convergent vers un même point avec $\lambda \to 1$, sont des rapports constants et par suite

$$\lim_{\lambda = 1} \Delta^n[d_i\lambda + b_i(1 - \lambda); f] = \Delta^n[d_i; f(x)].$$

De la continuité de ladite fonction il s'ensuit l'existence d'un nombre λ_1 positif et plus petit que l'unité, tel que

$$\Delta^n[d_i\lambda_1 + b_i(1 - \lambda_1); f] = \Delta^n[E; f(x)],$$

puisque $\Delta^n[E; f(x)]$ reste compris entre les valeurs de la fonction aux points $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$.

Nous venons de voir que les points $d_i\lambda_1 + b_i(1 - \lambda_1)$ sont distincts deux à deux et appartiennent à $\delta(d_i, b_j)$ et par suite à $\delta(E)$. D'où d'après le théorème III existe $c \in \delta(d_i\lambda_1 + b_i(1 - \lambda_1)) \subset \delta(E)$,

$$\Delta^n[d_i\lambda_1 + b_i(1 - \lambda_1); f] = \frac{1}{n!} f_n(c),$$

d'où l'égalité

$$\Delta^n[E; f(x)] = \frac{1}{n!} f_n(c) \qquad [c \in \delta(E)]$$

qui démontre finalement le théorème.

13. Théorème VIII. — *$f(x)$ et $g(x)$ étant continues et différentiables* *d'ordre n sur* $\delta(\mathrm{E})$ *et* $f_n(x)$ *et* $g_n(x)$ *ne s'annulant pas en un même point intérieur à* $\delta(\mathrm{E})$, *il existe au moins un point c intérieur à* $\delta(\mathrm{E})$, *tel que*

$$\frac{\Delta^n[\mathrm{E};\, f(x)]}{\Delta^n[\mathrm{E};\, g(x)]} = \frac{f_n(c)}{g_n(c)},$$

si l'on suppose, bien entendu, que $\Delta^n[\mathrm{E};\, g] \neq 0$.

(Les points de E peuvent être confondus partiellement.)

Posons

$$r = \frac{\Delta^n[\mathrm{E};\, f]}{\Delta^n[\mathrm{E};\, g]}, \tag{25}$$

qui peut s'écrire sous la forme

$$\Delta^n[\mathrm{E};\, f] - r\,\Delta^n[\mathrm{E};\, g] = 0$$

ou encore sous la forme

$$\Delta^n[\mathrm{E};\, f(x) - r\,g(x)] = 0,$$

laquelle d'après le théorème VII entraîne

$$\frac{1}{n\,!} f_n(c) - r\frac{1}{n\,!} g_n(c) = 0, \qquad \text{où} \quad c \in \delta(\mathrm{E}), \tag{26}$$

où l'on voit que $g_n(c) \neq 0$, sinon on aurait $f_n(c) = g_n(c) = 0$, d'où contradiction.

Enfin rapprochant (25) et (26), il vient

$$\frac{\Delta^n[\mathrm{E};\, f]}{\Delta^n[\mathrm{E};\, g]} = \frac{f_n(c)}{g_n(c)}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si nous faisons $n = 1$ nous retombons sur un théorème de Cauchy qui sert à établir la règle dite de l'Hôpital.

La même démonstration est applicable à $f_n(x)$ et à $g_n(x)$ au lieu de $f(x)$ et $g(x)$, si $f(x)$ et $g(x)$ sont supposés admettre des quotients différentiels d'ordre $m+n$ ne s'annulant pas simultanément et si au lieu du théorème VII nous appliquons le théorème VI.

Théorème IX. — *$f(x)$ et $g(x)$ étant différentiables d'ordre $m+n$ sur $\delta(\mathrm{E})$ et $f_{m+n}(x)$ et $g_{m+n}(x)$ ne s'annulant pas simultanément à l'intérieur de $\delta(\mathrm{E})$, il existe au moins un point intérieur, c tel que*

$$\frac{\Delta^m[\mathrm{E};\, f_n(x)]}{\Delta^m[\mathrm{E};\, g_n(x)]} = \frac{f_{m+n}(c)}{g_{m+n}(c)},$$

où $\Delta^m[\mathrm{E};\, g_n(x)] \neq 0$, *les points de* E *étant distincts.*

14. Théorème X. — *$f(x)$ et $g(x)$ étant continues et différentiables d'ordre n sur $[ab]$, les n-1 premiers quotients différentiels de f et g étant nuls au point a et $f_n(x)$ et $g_n(x)$ ne s'annulant pas simultanément à l'intérieur de $[a, b]$, sous ces conditions on peut donner un point c intérieur à $[a, b]$ tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f_n(c)}{g_n(c)}, \qquad \text{où} \quad g(b) \neq g(a).$$

Démonstration. — Posons

$$r = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)},$$
$$k(x) = f(x) - f(a) - r(g(x) - g(a)),$$

d'où

$$k(a) = k(b) = k_1(a) = \ldots = k_{n-1}(a) = 0.$$

Or, d'après la formule d'interpolation de Newton :

$$k(b) = k(a) + (x-a)[a, a] + \ldots + (x-a)^{n-1} \Delta^{n-1}[a, \ldots, a] + (x-a)^n \Delta^n[a, a, \ldots, a, b],$$

où

$$k(b) = k(a) = 0, \qquad [a, a] = k'(a) = 0, \qquad \ldots, \qquad \Delta^{n-1}[a, \ldots, a] = \frac{1}{n-1\,!} k_{n-1}(a) = 0$$

sont nuls. En remplaçant les valeurs, il vient

$$\Delta^n[a, \ldots, a, b;\ k(x)] = 0$$

et par suite il existe c intérieur à $[a, b]$ tel que (th. VII)

$$k_n(c) = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad f_n(c) - r\,g_n(c) = 0 \qquad \text{où} \qquad g_n(c) \neq 0,$$

sinon on aurait $f_n(c) = g_n(c) = 0$, d'où contradiction. Ainsi cette dernière égalité entraîne

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f_n(c)}{g_n(c)}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

En particulier si $g(x) = (x-a)^n$, on a le théorème :

THÉORÈME XI. — *Si $f(x)$ est différentiable d'ordre n sur $[a, b]$ et $f_1(a) = \ldots = f_{n-1}(a) = 0$, il existe c intérieur à $[a, b]$, tel que*

$$f(b) - f(a) = (b-a)^n \frac{f_n(c)}{n\,!}.$$

Ce théorème est évidemment la généralisation du théorème généralisé de l'accroissement fini de Lagrange.

THÉORÈME XII. — *Si $f(x)$ et $g(x)$ sont continues et admettent des $(n+m)^{\text{ièmes}}$ quotients différentiels ne s'annulant pas simultanément sur $[a, b]$ et si*

$$f_{n+1}(a) = g_{n+1}(a) = \ldots = f_{n+m-1}(a) = g_{n+m-1}(a) = 0,$$

il existe un point intérieur c, tel que

$$\frac{f_n(b)-f_n(a)}{g_n(b)-g_n(a)} = \frac{f_{n+m}(c)}{g_{n+m}(c)},$$

si toutefois $g_n(b) \neq g_n(a)$.

En effet, d'après le théorème IX pour $m = 1$, on a successivement

$$\frac{f_n(b)-f_n(a)}{g_n(b)-g_n(a)} = \frac{f_{n+1}(c_1)}{g_{n+1}(c_1)} = \ldots = \frac{f_{n+m}(c_m)}{g_{n+m}(c_m)}, \qquad \text{où} \quad a < c_m < \ldots < c_1 < b$$

et par suite pour $c = c_m \in [a, b]$, on a

$$\frac{f_n(b) - f_n(a)}{g_n(b) - g_n(a)} = \frac{f_{n+m}(c)}{g_{n+m}(c)}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

En particulier si l'on fait $g(x) = (x - a)^{n+m}$, on obtient le théorème :

Théorème XIII. — *Si $f(x)$ continue, admet un quotient différentiel d'ordre $n+m$ sur le segment $[a, b]$ et si l'on a $f_{m+1}(a) = f_{m+2}(a) = \ldots = f_{m+n-1}(a) = 0$ alors il existe au moins un point intérieur c à $[a, b]$, tel que*

$$f_m(b) - f_m(a) = \frac{(x-a)^n}{n!} f_{n+m}(c).$$

Si nous appliquons maintenant le théorème de l'accroissement fini généralisé au résidu

$$T(x) = f(x) - f(a) - \frac{(x-a)}{1!} f_1(a) - \ldots - \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f_{n-1}(a),$$

on obtient

$$T(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} T_n(a + \delta(x-a)) = \frac{(x-a)^n}{n!} f_n(c),$$

d'où

$$f(x) = f(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f_{n-1}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f_n(c).$$

C'est-à-dire, *la formule de Taylor avec le résidu de Lagrange s'étend aux cas des quotients différentiels.*

Cette même formule est valable si au lieu de $f(x)$ et de ses premiers quotients différentiels il s'agit de $f_m(x)$ et des quotients différentiels $f_{m+1}(x), \ldots f_{m+n}(x)$.

En effet, posons

$$T(x) = f(x) - f(a) - (x-a) f_1(a) - \ldots - \frac{(x-a)^{m+n-1}}{(m+n-1)!} f_{m+n-1}(a),$$

d'où il s'ensuit que

$$T(a) = T'(a) = \ldots = T_{m+n-1}(a) = 0$$

et

$$T_{m+n}(x) = f_{m+n}(x)$$

et

$$T_m(x) = f_m(x) - f_m(a) - \ldots - \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f_{m+n-1}(a).$$

Or, d'après le théorème XIII, on a

$$T_m(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f_{m+n}(c),$$

d'où il vient

$$f_m(x) = f_m(a) + \frac{(x-a)^n}{1!} f_{m+1}(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f_{n+m-1}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f_{m+n}(c).$$

Cette formule ne prouve en aucun cas que $f_{m+1}(a), \ldots, f_{n+m-1}(a)$, soient les $n-1$ premiers quotients différentiels de $f_m(x)$ au point a. Cela serait exact, par exemple, si $f_{m+n}(x)$ vérifiait au voisinage de a la relation

$$f_{m+n}(x)=o\left(\frac{1}{x-a}\right)$$

et à plus forte raison si $f_{m+n}(x)$ était bornée au voisinage de a. Nous reviendrons sur ces questions lorsque nous démontrerons que, dans ce dernier cas, f_{m+n} est une dérivée ordinaire d'ordre $m+n$ de $f(x)$ au point a.

14 *bis*. L'emploi des opérateurs nous permettra de donner, dans un cas particulier, une forme explicite à l'identité (13).

Le cas particulier envisagé est celui où les différences divisées sont à points équidistants et où les n intervalles du premier système viennent subdivisés en le même nombre de points intermédiaires. Ainsi les points de E sont les points $e_i=e_1+(i-1)h$ $(i=1, \ldots, n+1)$ et les points de A sont les points $a_j=a_1+(j-1)k$ $(j=1, \ldots, nr+1)$ où $h=rk$ et $a_1=e_1$.

Rappelons que la différence $\Delta f(x)$ se définit au moyen de l'égalité

$$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x),$$

d'où

$$\Delta^2 f(x)=\Delta f(x+1)-\Delta f(x),$$
$$\Delta^3 f(x)=\Delta^2 f(x+1)-\Delta^2 f(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On peut restreindre ses définitions aux points équidistants $x=1, 2, 3, \ldots$, ou à un système quelconque de points équidistants. Nous nous bornerons aux deux systèmes E et A et nous distinguerons les opérateurs définis par rapport au premier au moyen d'un accent.

Ainsi

$$\boldsymbol{\Delta}' f(e_i)=f(e_{i+1})-f(e_i),$$
$$\boldsymbol{\Delta} f(a_j)=f(a_{j+1})-f(a_j).$$

On voit aisément que

$$\frac{\boldsymbol{\Delta}'^n f(e_1)}{n\,!\,h^n}=\Delta^n[\mathrm{E}; f(x)], \tag{27}$$

$$\frac{\boldsymbol{\Delta}^n f(a_j)}{n\,!\,k^n}=\Delta^n[a_j, \ldots, a_{j+n}; f(x)]. \tag{28}$$

Il suffit en effet pour s'en rendre compte de comparer les définitions respectives des différences et des différences divisées.

Un autre opérateur très utile du Calcul des différences finies est l'opérateur $\mathbf{E}$, c'est-à-dire l'opérateur tel que $\mathbf{E}f(x)=f(x+1)$. Ainsi

$$\mathbf{E}' f(e_i)=f(e_{i+1}), \qquad \mathbf{E} f(a_j)=f(a_{j+1}),$$

on peut donc écrire

$$\boldsymbol{\Delta}' f(e_i)=\mathbf{E}' f(e_i)-f(e_i)=(\mathbf{E}'-\mathbf{1})f(e_i),$$
$$\boldsymbol{\Delta} f(a_j)=\mathbf{E} f(a_j)-f(a_j)=(\mathbf{E}-\mathbf{1})f(a_j)$$

et sous forme symbolique

(29) $$\mathbf{\Delta}' \equiv \mathbf{E}' - \mathbf{1},$$

(30) $$\mathbf{\Delta} \equiv \mathbf{E} - \mathbf{1}.$$

D'après la définition des systèmes de points E et A, on a

$$a_{i.r+1} = e_{i+1}, \qquad a_{(i-1)r+1} = e_i;$$

d'où il vient

$$f(e_{i+1}) = \mathbf{E}' f(e_i), \qquad f(e_{i+1}) = \mathbf{E}^r f(e_i)$$

et par suite on peut écrire symboliquement

(31) $$\mathbf{E}' \equiv \mathbf{E}^r.$$

Les identités (29), (30) et (31) nous permettent d'écrire

$$\mathbf{\Delta}'^n \equiv (\mathbf{E}' - \mathbf{1})^n \equiv (\mathbf{E}^r - \mathbf{1})^n \equiv (\mathbf{E} - \mathbf{1})^n (\mathbf{1} + \mathbf{E} + \ldots + \mathbf{E}^{r-1})^n \equiv \mathbf{\Delta}^n (\mathbf{1} + \ldots + \mathbf{E}^{r-1})^n,$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{\Delta}'^n \equiv \mathbf{\Delta}^n (\mathbf{1} + \mathbf{E} + \mathbf{E}^2 + \ldots + \mathbf{E}^{r-1})^n,$$

d'où, en explicitant, il vient

(32) $$\mathbf{\Delta}'^n \equiv \mathbf{\Delta}^n + {}_{r-1}C_1^n \mathbf{\Delta}^n \mathbf{E} + \ldots + {}_{r-1}C_m^n \mathbf{\Delta}^n \mathbf{E}^m + \ldots + \mathbf{\Delta}^n \mathbf{E}^{n(r-1)},$$

où ${}_{r-1}C_m^n$ désigne le nombre de combinaisons qu'on peut former avec n élément pris de m en m sans qu'un même élément puisse être répété plus de $r - 1$ fois.

En effet, si l'on fait le produit des n expressions

$$\begin{array}{l} 1 + E_1 + \ldots + E_1^{r-1}, \\ 1 + E_2 + \ldots + E_2^{r-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 1 + E_n + \ldots + E_n^{r-1}, \end{array}$$

on obtient une addition de produits de la forme $E_1^{\alpha_1}, E_2^{\alpha_2}, \ldots, E_n^{\alpha_n}$, c'est-à-dire de combinaisons de n objets $E_1, \ldots, E_n$, sans qu'un même objet puisse apparaître plus de $r - 1$ fois. Si l'on fait $E_1 = E_2 = \ldots = E_n = \mathbf{E}$ on peut rassembler les termes $\mathbf{E}^m$ fournis par l'expression $E_n^{\alpha_1}, \ldots, E_n^{\alpha_n}$, où $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = m$. Leur nombre est le nombre de combinaisons qu'on peut former avec n éléments pris de m en m sans qu'un même élément puisse être répété plus de $r - 1$ fois.

D'après ce que nous venons de démontrer, on a

$$(1 + E + \ldots + E^{r-1})^n = \sum_{m=0}^{n(r-1)} {}_{r-1}C_n^m E^m,$$

d'où si l'on fait $E = 1$, il vient

(33) $$\sum_{m=0}^{n(r-1)} {}_{r-1}C_m^n = r^n.$$

Multiplions (32) par $f(e_1) = f(a_1)$:

$$\mathbf{\Delta}'^n f(e_1) = \mathbf{\Delta}^n f(a_1) + {}_{r-1}C_1^n \mathbf{\Delta}^n f(a_2) + \ldots + {}_{r-1}C_m^n \mathbf{\Delta}^n f(a_{m+1}) + \ldots + \mathbf{\Delta}^n f(a_{n(r-1)+1}),$$

d'où

$$\frac{\Delta'^n f(e_1)}{n\,!\,h^n} = \frac{1}{r^n}\left[\frac{\Delta^n f(a)}{n\,!\,k^n} + \ldots + {}_{r-1}C_m^n \frac{\Delta^n f(a_{m+1})}{n\,!\,k^n} + \ldots\right],$$

qui d'après (27), (28) et (33) peut s'écrire sous la forme

$$\mathbb{\Delta}^n[E; f(x)] = \frac{\mathbb{\Delta}^n[X_1; f(x)] + \ldots + {}_{r-1}C_m^n\,\mathbb{\Delta}^n[X_{m+1}; f] + \ldots + \mathbb{\Delta}^n[X_{n(r-1)+1}; f]}{1 \qquad + \ldots + {}_{r-1}C_m^n \qquad + \ldots + \qquad 1},$$

$X_m \equiv (a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+n})$, qui montre bien que le premier membre est une moyenne arithmétique pondérée des différences $\mathbb{\Delta}^n[X_{m+1}; f]$ avec les poids ${}_{r-1}C_m^n$.

Ainsi dans ce cas particulier, les coefficients $p(X_{m+1})$ de la formule (13) s'expriment explicitement au moyen de l'égalité

$$p(X_{m+1}) = \frac{{}_{r-1}C_m^n}{\sum\limits_{m'=1}^{n(r-1)} C_{m'}} = \frac{{}_{r-1}C_m^n}{r^n}.$$

On peut faire à l'aide de procédés similaires une étude des nombres combinatoires avec répétition limitée. Mais cela nous mènerait loin de notre sujet.

Application des théorèmes de la valeur moyenne.

15. Voici un théorème sur l'antérieur genre des questions :

Théorème XIV. — *Le $m^{\text{ième}}$ quotient différentiel d'un $n^{\text{ième}}$ quotient différentiel d'une fonction continue est le $(m+n)^{\text{ième}}$ quotient différentiel de cette même fonction.*

Posons

$$\begin{aligned} T(x) = f(x) - f(a) - \frac{(x-a)}{1\,!} f_1(a) - \ldots - \frac{(x-a)^n}{n\,!} f_n(a) \\ - \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)\,!}[f_n]_1(a) - \ldots - \frac{(x-a)^{n+m}}{(n+m)\,!}[f_n]_m(a), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &T(a) = T_1(a) = \ldots = T_{n-1}(a) = 0, \\ &T_n(x) = f_n(x) - f_n(a) - \frac{(x-a)}{1\,!}[f_n]_1(a) - \ldots - \frac{(x-a)^m}{m\,!}[f_n]_m(a), \\ &T_n(a) = [T_n]_1(a) = \ldots = [T_n]_m(a) = 0. \end{aligned}$$

Donc d'après le théorème de l'accroissement fini

$$T(x) = \frac{(x-a)^n}{n\,!} T_n(c).$$

Or, $T_n(x) = o[(x-a)^m]$ du fait que $[T_n]_1(a), \ldots, [T_n]_m(a)$ sont nuls. Ainsi en remplaçant, il vient

$$T(x) = \frac{(x-a)^n}{n\,!} o[\delta^m (x-a)^m] = o[(x-a)^{n+m}],$$

d'où

$$f(x) = f(a) + (x - a) f_1(a) + \ldots + \frac{(x - a^n)}{n!} f_n(a) + \frac{(x - a)^{n+1}}{(n+1)!} [f^n]_1(a) + \ldots$$
$$+ \frac{(x - a)^{n+m}}{(n+m)!} [f_n]_m(a) + o[x - a)^{n+m}],$$

égalité qui prouve bien que $f_1(a), \ldots, f_n(a), [f_n]_1(a), \ldots, [f_n]_m(a)$ sont les $n + m$ premiers quotients différentiels de $f(x)$ au point a.

La réciproque n'est pas exacte ([3]) et le théorème lui-même non plus si au lieu du continu il s'agit d'un ensemble parfait P et des quotients différentiels définis *spécialement* à P ([4]).

16. Une application importante des théorèmes de la valeur moyenne est celle qui permet de démontrer qu'une fonction continue dont le $n^{\text{ième}}$ quotient différentiel est identiquement nul sur un segment $[a, b]$ est un polynome de $(n - 1)^{\text{ième}}$ degré.

Ce qui est équivalent à démontrer que deux fonctions continues ayant les mêmes $n^{\text{ièmes}}$ quotients différentiels finis diffèrent en un polynome de $(n - 1)^{\text{ième}}$ degré.

M. A. Denjoy a non seulement résolu ce problème, mais aussi le problème plus général, de *calculer effectivement* toute fonction continue douée en tout point d'un segment d'un $n^{\text{ième}}$ quotient différentiel, quand on suppose celui-ci connu. Nous renvoyons au Mémoire déjà cité de *Fundamenta Mathematicæ* où le lecteur trouvera une description complète de cette totalisation.

Voici la généralisation du raisonnement classique.

Soit

$$h(x) = f(x) - g(x),$$
$$f_n(x) = g_n(x) \quad \text{pour} \quad x \in [a, b]$$

d'où

$$h_n(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in [a, b].$$

D'après la formule de Newton :

$$h(x) = h(x_1) + (x - x_1)[x_1, x_2; h] + \ldots + (x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) \Delta^{n-1}[x_1, \ldots, x_n; h]$$
$$+ (x - x_1)\ldots(x - x_n) \Delta^n, [x_1, \ldots, x_n, x; h(x)],$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n, x \in [a, b]$.

Or, d'après le théorème VII,

$$\Delta^n [x_1, x_2, \ldots, x_n, x; h] = \frac{1}{n!} h_n(c) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in [a, b],$$

d'où

$$h(x) = h(x_1) + (x - x_1)[x_1, x_2; h] + \ldots + (x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) \Delta^{n-1}[x_1, \ldots, x_n; h]$$

qui est bien un polynome de $(n - 1)^{\text{ième}}$ degré. C. Q. F. D.

17. Théorème XV. — *Un $n^{\text{ième}}$ quotient différentiel borné est une $n^{\text{ième}}$ dérivée ordinaire.*

([3]) *Voir* A. Denjoy, *Fund. Math.*, t. 25, p. 277.

([4]) *Loc. cit.*, p. 291.

Autrement dit :

Dans le cas où une fonction continue $f(x)$ admet un $n^{ième}$ quotient différentiel borné sur $[a, b]$, $f(x)$ est dérivable n fois sur $[a, b]$ et $f^{(n)}(x) = f_n(x)$.

Démonstration. — Soit x_0 un point de $[a, b]$ et Δ un voisinage de x_0 appartenant à $[a, b]$. Par hypothèse il existe un nombre K, tel que

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < K \qquad \text{pour} \quad x \in [a, b].$$

Posons

$$T(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - hf_1(x_0) - \ldots - \frac{h^n}{n!} f_n(x_0)$$

et par suite

$$T(h) = o(h^n), \tag{34}$$

$f(x)$ admettant un $n^{ième}$ quotient différentiel au point x_0 ; et

$$T\ (o) = T_1(o) = \ldots = T_{n-1}(o) = o,$$
$$T_n(h) = f_n(x_0 + h) - f_n(x_0).$$

Donc le théorème XIII est applicable. Ainsi si nous y prenons 2 et $n - 2$ au lieu respectivement de m et n, il vient

$$T_2(h) = \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} T_n(\delta h) = \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} f_n(x_0 + \delta h) - f_n(x_0)$$

et par hypothèse

$$|T_2(h)| < \frac{K}{(n-2)!} |h^{n-2}|, \qquad \text{où} \quad x_0 + h \in \Delta. \tag{35}$$

Nous allons maintenant démontrer que

$$T_1(h) = o(h^{n-1}), \qquad \text{avec} \quad h \to o,$$

c'est-à-dire qu'il n'existe pas un nombre $a > o$ et une suite $h_i \to o$, avec $i \to \infty$, tels que l'on ait

$$|T_1(h_i)| > a |h_i|^{n-1}, \qquad \text{où} \quad x_0 + h_i \in \Delta. \tag{36}$$

Soit d'abort k un nombre positif et suffisament proche de l'unité pour que l'on ait

$$a - \frac{|1-k|(1+k)^{n-2}K}{(n-2)!} = \alpha > o. \tag{37}$$

Le théorème III et VI nous permettent ensuite d'écrire

$$\frac{T(h_i) - T(kh_i)}{h_i - kh_i} = T_1(h'_i), \tag{38}$$

$$\frac{T_1(h'_i) - T_1(h_i)}{h'_i - h_i} = T_2(h''_i), \tag{39}$$

où l'on a, soit $h_i < h''_i < h'_i < kh_i$, soit $h_i > h''_i > h'_i > kh_i$ et par suite

$$|h'_i - h_i| < |1-k||h_i|, \qquad |h''_i| < (1+k)|h_i|. \tag{40}$$

En rapprochant (34) et (38), il vient

$$(41) \qquad T_i(h'_i) = o(h_i^{n-1}),$$

tandis que de (39) découle

$$|T_1(h'_i)| \geqq |T_1(h_i)| - |h'_i - h_i| |T_2(h''_i)|,$$

d'où d'après (36), (40), (35), (40) et (37), il vient

$$|T_1(h'_i)| > \alpha |h_i^{n-1}|,$$

inégalité qui est visiblement contradictoire avec (41). Il faut donc conclure que

$$T_1(h) = o(h^{n-1}),$$

c'est-à-dire

$$f_1(x_0+h) = f_i(x_0) + hf_2(x_0) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f_n(x_0) + o(h^{n-1}),$$

égalité qui exprime que $f_2(x_0)$ est le premier quotient différentiel ou dérivée de $f_1(x)$ au point x_0 et que $f_{p+1}(x_0)$ est le $p^{\text{ième}}$ quotient différentiel de $f_1(x)$ au point $x_0 (p = 2, \ldots, n-1)$.

On peut refaire la même démonstration avec la fonction $f_1(x)$ dont le $(n-1)^{\text{ième}}$ quotient différentiel est borné au voisinage de x_0. On en conclut successivement que $f_3(x_0)$, ... et $f_n(x_0)$ sont respectivement la dérivée, ... et le $(n-2)^{\text{ième}}$ quotient différentiel de $f_2(x)$ au point x_0.

Somme toute, $f_n(x_0)$ est la $n^{\text{ième}}$ dérivée ordinaire de $f(x)$ au point x_0.

Le théorème est donc démontré, x_0 étant un point quelconque de $[a, b]$.

18. Il est intéressant de souligner l'analogie du théorème précédent avec un théorème dû à M. Hardy. Ce qui est d'autant plus remarquable que lesdits théorèmes et les théories auxquelles ils appartiennent n'ont aucun rapport en apparence.

Le théorème en question s'énonce ainsi

Une série sommable d'ordre $n-1$ au sens de Cesaro dont le terme général est du type $O\left(\frac{1}{i}\right)$, est convergente au sens ordinaire.

C'est un théorème du genre de ceux qu'on appelle taubériens ou inverses.

L'analogie entre les deux théorèmes établit un parallélisme qui fait correspondre les notions suivantes :

Sommabilité Cesaro d'ordre $n-1$	et Différentiabilité d'ordre n;
Convergence ordinaire	et Différentiabilité ordinaire;
$u_i = O\left(\frac{1}{i}\right)$ avec $i \to \infty$	et $f_n(x) = O(1)$ avec $(x \to x_0)$.

Nous nous bornerons au cas plus simple possible, n'ayant d'autre but que d'attirer l'attention sur cette question. Ce qui a l'avantage de réduire la démonstration et par là même de faire ressortir les ressemblances.

Le cas plus simple est celui où $n = 2$, puisque dans le cas où $n = 1$ les deux notions de différentiabilité se confondent ainsi que la sommabilité Cesaro d'ordre $n - 1 = 0$ et la convergence ordinaire.

Nous prendrons encore

$$S = 0 \qquad \text{et} \qquad f(x_0) = f_1(x_0) = f_2(x_0) = 0,$$

où S est la somme au sens de Cesaro de la série $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ et où $x_0 = 0$. Ce qui ne nuit nullement à la généralité, puisque on peut retrancher une série convergeant à une série ou une fonction dérivable deux fois à une fonction sans que la sommabilité Cesaro ou la différentiabilité d'ordre supérieur en soient affectées.

Rappelons que la somme Cesaro d'une série $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ est la limite

$$S = \lim_{i \to \infty} \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_i}{i}, \qquad \text{où} \qquad s_i = \sum_{l=1} u_j.$$

Ainsi l'égalité

$$S = 0$$

est équivalente à l'égalité

$$S_i = o(i), \qquad \text{où} \qquad S_i = \sum_{j=1}^{i} s_j.$$

Les deux théorèmes peuvent alors s'énoncer en disant que les deux relations

$$(\mathrm{H}_1) \qquad S_i = \sum_{j=1}^{i} s_j = o(i) \qquad \Bigg| \qquad f(x) = \int_0^x f_1(x)\,dx = o(x^2)$$

$$(\mathrm{H}_2) \qquad |u_i| < \frac{K}{i} \qquad \Bigg| \qquad |f_2(x)| < K$$

entraînent

$$(\mathrm{T}) \qquad s_i = \sum_{j=1}^{i} u_j = o(1) \qquad \Bigg| \qquad f_1(x) = \int_0^x f_2(x')\,dx' = o(x)$$

où $i \to \infty$ et $x \to 0$.

Démonstration. — Supposons provisoirement que la relation

$$s_1 = o(1) \qquad \Big| \qquad f_1(x) = o(x)$$

ne soit pas satisfaite, c'est-à-dire qu'il soit possible de donner un nombre $a > 0$ et une suite de $i_1, i_2, \ldots, i_r, \ldots$ ($x_1, x_2, \ldots, x_r, \ldots$) divergente (convergeant vers 0^0), tels que l'on ait,

$$(42) \qquad s_{i_r} > a \qquad \Big| \qquad f_1(x_r) > a x_r$$

ou bien

$$(43) \qquad s_{i_r} < -a \qquad \Big| \qquad f_1(x_r) < -a x_r.$$

Supposons par exemple que celle des deux qui a lieu, soit la première inégalité.

Les pentes de $s_i(f_1(x))$, c'est-à-dire les nombres

$$\frac{s_{i+1} - s_i}{1} = u_i \qquad \Big| \qquad \frac{f_1(x) - f_1(x')}{x - x'} = f_2(x'')$$

sont en valeur absolue, plus petites [d'après (H_2)] que $Ki^{-1}(K)$, ce qui entraîne avec (42) (*fig.* 6 et 7) :

$$s_i > a - Ki_r^{-1}(i - i_r) \qquad \Big| \qquad f_1(x) > ax_r - K(x_r - x)$$

et par suite

$$(44) \quad S_{i'_r} - S_{i_r - 1} = \sum_{i=i_r}^{i'_r} s_i > \frac{1}{2} K^{-1} a^2 i_r \qquad \Big| \qquad f(x_r) - f(x'_r) = \int_{x'_r}^{x_r} f_1(x)\,dx > \frac{1}{2} a^2 K^{-1} x_r^2,$$

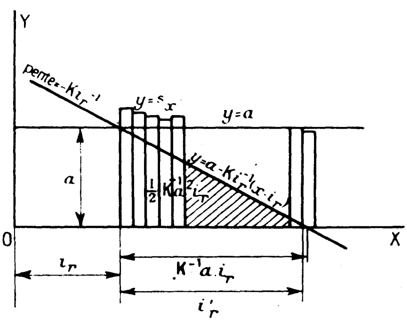

Fig. 6.

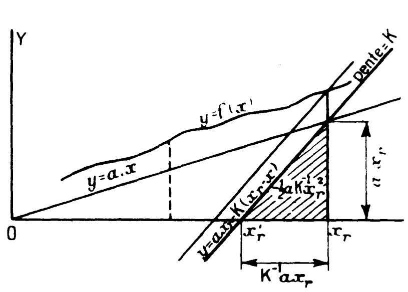

Fig. 7.

où

$$i'_r - i_r = E(K^{-1} a i_r) \qquad \Big| \qquad x_r - x'_r = K^{-1} a x_r,$$

où $E(\theta)$ représente la partie entière de (θ).

D'autre part

$$(45) \quad S_{i'_r} - S_{i_r - 1} = o(i'_r) - o(i_r) = o(i_r) - o(i_r) = o(i_r) \qquad \Big| \qquad f(x_n) - f(x'_r) = o(x_r^2) - o(x_r'^2) = o(x_r^2) - o(x_r^2) = o(x_r^2).$$

Or, (44) et (45) sont contradictoires. D'une façon tout à fait analogue on démontre l'absurdité de l'inégalité (43). Il faut donc conclure que

$$S_i = o(1) \qquad \Big| \qquad f_1(x) = o(x)$$

C. Q. F. D.

L'analogie est donc complète et jusqu'au point que les deux démonstrations ont pu être développées de pair.

En fait ce sont les démonstrations des deux théorèmes qui nous ont mis sur la voie de ce rapprochement et non, comme on serait tenté de le croire, l'idée préconçue de l'existence d'une analogie qui nous aurait conduit premièrement à découvrir le théorème et ensuite à le démontrer.

Par contre, sa généralisation a été obtenue en suivant la généralisation correspondante de M. E. Landau.

On peut remarquer que la précédente démonstration (démonstration du cas où $n = 2$) est basée sur les propriétés des sommes et des intégrales et que par conséquent elle n'est plus applicable quand on veut se servir seulement des moyens propres au Calcul différentiel.

La démonstration du paragraphe 17, par contre, ne fait appel qu'à ces derniers.

19. Le théorème de M. Hardy a été généralisé par M. E. Landau en remplaçant l'hypothèse $u_i = O\left(\frac{1}{i}\right)$ par l'hypothèse plus restreinte $u_i > O\left(\frac{1}{i}\right)$ ou par l'hypothèse symétrique $u_i < O\left(\frac{1}{i}\right)$.

Il vient donc à l'esprit la possibilité de généraliser le théorème XV de la même manière que M. E. Landau a généralisé le théorème de M. Hardy.

Le théorème XV prend alors la forme :

Un $n^{ième}$ quotient différentiel borné supérieurement ou inférieurement est une $n^{ième}$ dérivée ordinaire.

Autrement dit :

Dans le cas où une fonction continue $f(x)$ admet un $n^{ième}$ quotient différentiel borné supérieurement ou inférieurement sur un segment (a, b), $f(x)$ est dérivable n fois et $f^{(n)}(x) = f_n(x)$ sur le même segment.

Démonstration. — Nous suivrons de point en point la démonstration du paragraphe 17.

Soit par hypothèse

$$f_n(x) - f_n(x_0) \qquad (x \in \Delta)$$

et supposons que

$$\text{(36 bis)} \qquad T_1(h_i) > a h_i^{n-1}, \quad \text{avec } a > 0 \quad \text{et} \quad h_i > 0.$$

Nous aurons de même les inégalités (34) ,(38), (39) et (41).

D'une façon analogue, on a

$$\text{(35 bis)} \qquad T_2(h) < \frac{K}{(n-2)!} h^{n-2}.$$

Soit k un nombre positif plus petit que l'unité et suffisamment proche d'elle pour que l'on ait

$$\text{(37 bis)} \qquad a - \frac{(1-k)K}{(n-2)!} > \alpha > 0.$$

Les nombres kh_i, h'_i, h''_i et h_i, ordonnés suivant leur grandeur croissante vérifient

$$\text{(40 bis)} \qquad 0 < h_i - h'_i < (1-k)h_i \quad \text{et} \quad 0 < h''_i < h_i.$$

On obtient encore d'après (39), (36 *bis*), (40 *bis*), (35 *bis*), (40 *bis*) et (37 *bis*)

$$T_1(h_i') > \alpha h_i'^{n-1}$$

qui est absurde d'après (41).

Si l'on suppose encore

$$(36\,ter) \qquad T_1(h_i) < -a h_i^{n-1}, \quad \text{avec} \quad a > 0 \quad \text{et} \quad h_i > 0,$$

les mêmes calculs nous donnent

$$T_1(h_i) < -\alpha h_i^{n-2},$$

où

$$(37\,ter) \qquad \alpha = a - \frac{(k-1)(1+k)^{n-2}K}{(n-2)!} > 0$$

et où $k > 1$ a été choisi suffisamment proche de 1 pour que α soit positif.

On peut donc conclure que

$$T_1(h) = o(h^{n-1}), \quad \text{avec} \quad h > 0 \quad \text{et} \quad h \to 0.$$

Pour les valeurs de $h < 0$, il suffit d'appliquer à $T(-h)$ les mêmes raisonnements pour en arriver à la même égalité. En somme pour $h \to 0$, on a

$$T_1(h) = o(h^{n-1}).$$

Enfin si par hypothèse, on a

$$f_n(x) - f_n(x_0) < -K,$$

nous n'avons qu'à reprendre la même démonstration appliquée à $-T(h)$ pour en arriver à la même conclusion.

Ensuite la démonstration s'achève sans variation [1]. C. Q. F. D.

(Manuscrit reçu le 16 juin 1952.)

---

[1] Le présent Mémoire de M. Corominas est la première partie d'un travail de l'auteur qui comprendra deux autres parties à paraître dans des périodiques différents.