Bulletin de la S. M. F.

Yvonne Fourès-Bruhat

Résolution du problème de Cauchy pour des équations hyperboliques du second ordre non linéaires

Bulletin de la S. M. F., tome 81 (1953), p. 225-288

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1953__81__225_0>

RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE CAUCHY POUR DES ÉQUATIONS HYPERBOLIQUES DU SECOND ORDRE NON LINÉAIRES;

PAR Mme YVONNE FOURÈS-BRUHAT.

INTRODUCTION.

Le but de ce Mémoire est la résolution du problème de Cauchy pour les équations hyperboliques du second ordre à un nombre quelconque de variables, non linéaires, du type suivant [1] :

$$A^{\lambda\mu}\frac{\partial^2 u}{\partial x^\lambda\,\partial x^\mu}+f=0 \qquad (\lambda,\ \mu=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Les coefficients $A^{\lambda\mu}$ et f sont des fonctions des inconnues u, de leurs dérivées partielles premières et des variables x^α.

Les résultats s'appliquent aux systèmes d'équations de la forme

$$(\mathrm{E}) \qquad A^{\lambda\mu}\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^\lambda\,\partial x^\mu}+f_s=0 \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ \mathrm{N}),$$

où les coefficients $A^{\lambda\mu}$ et f_s sont les fonctions des N inconnues u_t, de leurs dérivées partielles premières et des variables x^α, les coefficients $A^{\lambda\mu}$ étant les mêmes pour les N équations [2].

Sous l'hypothèse que les coefficients $A^{\lambda\mu}$ et f_s possèdent un certain nombre (fini) de dérivées continues par rapport à tous leurs arguments et que la forme quadratique $A^{\lambda\mu}X_\lambda X_\mu$ est de type hyperbolique normal ($A^{nn}>0$, $A^{ij}X_iX_j$ définie <0, x^n désignant ainsi la variable « temporelle » et x^i les $n-1$ variables « spatiales »), je montre que la solution d'un problème de Cauchy donné relati-

---

(1) J'utiliserai dans tout ce Mémoire la convention de sommation d'Einstein (suppression du signe de sommation dans les termes où un indice figure deux fois) Les indices grecs varieront de 1 à n, les indices latins de 1 à $n-1$.

(2) Les équations de la Relativité générale sont de cette forme en coordonnées isothermes (*cf.* Darmois [3], Lichnerowicz [8]).

vement à (E) par des fonctions $u(x^i, 0)$, $\frac{\partial u}{\partial x^n}(x^i, 0)$ suffisamment dérivables (un nombre fini de fois) est solution d'un système d'équations intégrales $\mathcal{J}$. Ces équations sont résolubles par la méthode ordinaire des approximations successives dans le cas où les coefficients $A^{\lambda\mu}$ (mais pas nécessairement f_s) sont des fonctions données des variables; je montre que cette solution est effectivement solution du problème de Cauchy donné (approximation par des fonctions analytiques). Pour résoudre le problème de Cauchy pour des équations non linéaires, je les approche par les équations du type précédent obtenues en remplaçant dans les $A^{\lambda\mu}$ les inconnues par des fonctions données. Une nouvelle série d'approximations successives permet alors de construire la solution du problème de Cauchy pour les équations données. Cette solution possède des dérivées jusqu'à un certain ordre, inférieur à l'ordre de dérivabilité des données de Cauchy. La résolution est faite localement : à des données initiales portées par un domaine d compact d'une variété initiale $x^n = 0$ correspond une solution dans un tronc de cône de base d.

Le système d'équations intégrales $\mathcal{J}$ est obtenu pour des équations à un nombre pair de variables par une extension de la méthode donnée pour les équations à quatre variables ([3]) : j'intègre sur le conoïde caractéristique des combinaisons linéaires des équations (E) et des équations dérivées par rapport à x^n jusqu'à l'ordre $\frac{n}{2} - 2$. Les coefficients de ces combinaisons sont des fonctions auxiliaires, définies et continues sur le conoïde caractéristique, excepté au sommet où elles possèdent une singularité ([4]).

L'ensemble de ces opérations (dérivations par rapport à x^n, multiplication par des fonctions auxiliaires et intégration sur le conoïde caractéristique) se réduit pour l'équation des ondes :

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^{n^2}} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{(\partial x^i)^2} = f(x^\alpha)$$

à la composition avec la solution élémentaire σ, distribution au sens de Schwartz dont le support est le demi cône caractéristique

$$(x^n)^2 - \sum_{i=1}^{n-1} (x^i)^2 = 0, \qquad x^n \geqq 0 \qquad (n \text{ pair}),$$

qui vérifie :

$$L\sigma = \delta.$$

Prenons pour paramètres représentatifs d'un point du cône caractéristique ses $n-1$ coordonnées d'espace x^i, et pour dérivation transversale au cône la dérivation $\frac{\partial}{\partial x^n}$.

([3]) *Acta Math.*, t. 88, 1952, p. 141-224. Nous désignerons ce Mémoire par A.

([4]) Une méthode analogue est utilisée par Sobolef [15] pour donner une solution généralisée du problème de Cauchy pour une équation linéaire à coefficients analytiques.

La solution élémentaire, distribution portée par le cône ([5]) peut s'écrire

$$\sigma = \sum_{p=0}^{k} \frac{\partial^p}{(\partial x^n)^p} \sigma_p,$$

où les σ_p sont les extensions à l'espace entier de distributions définies sur le cône (c'est-à-dire dans l'espace des variables x^i), et où k est un nombre que nous déterminerons $\left(k = \frac{n}{2} - 2\right)$.

Désignons par $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\right]$ la dérivation par rapport à x^i d'une distribution définie sur le cône et par $[\varphi]$ la restriction au cône d'une fonction indéfiniment différentiable φ des variables x^α. Posons, sur le cône, $x^i = p_i x^n$, on a

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\right][\varphi] = \left[\frac{\partial}{\partial x^i}\varphi\right] + p_i\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^n}\right].$$

D'où l'on déduit

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x^i} = \sum_{p=0}^{k} \left\{ \frac{\partial^p}{(\partial x^n)^p} \frac{\partial}{[\partial x^i]} \sigma_p - \frac{\partial^{p+1}}{(\partial x^n)^{p+1}} \sigma_p p_i \right\},$$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{(\partial x^i)^2} = \sum_{p=0}^{k} \left\{ \frac{\partial^p}{(\partial x^n)^p} \left[\frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}\right] \sigma_p - \frac{\partial^{p+1}}{(\partial x^n)^{p+1}} \left(\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\right] \sigma_p\right) p_i \right.$$
$$\left. - \frac{\partial^{p+1}}{(\partial x^n)^{p+1}} \left[\frac{\partial}{\partial x^i}\right](\sigma_p p_i) + \frac{\partial^{p+2}}{(\partial x^n)^{p+2}} \sigma_p p_i^2 \right\}.$$

On voit que dans

$$L\sigma = \frac{\partial^2 \sigma}{(\partial x^n)^2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \sigma}{(\partial x^i)^2},$$

les termes en $\frac{\partial^{p+2}}{(\partial x^n)^{p+2}}$ disparaissent puisque, sur le cône caractéristique, $\Sigma p_i^2 = 1$, et l'on trouve

$$L\sigma = -\sum_{p=0}^{k} \frac{\partial^p}{(\partial x^n)^p} \Delta\sigma_p + \sum_{p=0}^{k} \frac{\partial^{p+1}}{(\partial x^n)^{p+1}} \left\{ 2p_i \left[\frac{\partial}{\partial x^i}\right] \sigma_p + \sigma_p \left[\frac{\partial}{\partial x^i}\right] p_i \right\},$$

aù l'on a désigné par Δ le laplacien $\sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^{i^2}}\right]$.

Pour que $L\sigma$ soit égal à la mesure δ, il faut et il suffit donc que les équations suivantes soient vérifiées :

(1) $$\mathcal{D}_0 \equiv -\Delta\sigma_0 = \delta,$$

(2) $$\begin{cases} \mathcal{D}_p \equiv -\Delta\sigma_p + 2p_i\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\right]\sigma_{p-1} + \sigma_{p-1}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\right]p_i = 0 \qquad (p = 1, \ldots, k), \\ \mathcal{D}_k \equiv 2p_i\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\right]\sigma_k + \sigma_k\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\right]p_i = 0. \end{cases}$$

([4]) *Cf.* Hadamard [6], M. Riesz [10], Leray [7].

Le système (2) se présente comme un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre, soit :

$$-\Delta\sigma_p + 2\frac{\partial}{\partial x^n}\sigma_{p-1} + \sigma_{p-1}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\right]p_i = 0,$$

où x^n est ici la variable ([6]) définie sur le cône caractéristique par $(x^n)^2 = \Sigma(x^i)^2$. On déduit, d'autre part, de $x^i = p_i x^n$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\right]p_i = \frac{n-2}{x^n}.$$

Les équations (2) s'écrivent finalement :

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathcal{O}_p \equiv -\Delta\sigma_p + \dfrac{n-2}{x^n}\sigma_{p-1} + 2\dfrac{\partial}{\partial x^n}\sigma_{p-1} = 0 & (p = 1, \ldots, k), \\ \mathcal{O}_k \equiv 2\dfrac{\partial}{\partial x^n}\sigma_k + \dfrac{n-2}{x^n}\sigma_k = 0. \end{cases}$$

Ces équations ont pour solutions des fonctions de x^n, définies et continues, sauf pour $x^n = 0$, que nous obtenons en résolvant les équations (2) par récurrence à partir de la dernière dont nous prenons pour solution la fonction σ_k suivante :

$$\sigma_k = \sigma = \frac{\alpha_k}{(x^n)^{\frac{n}{2}-1}} = \left(\sum_{i=1}^{n-1}(x^i)^2\right)^{\frac{1}{2}-\frac{n}{4}} \qquad (x^n > 0),$$

où α_k est un nombre pour l'instant arbitraire.

Nous avons alors :

$$\Delta\sigma_k = -\frac{\left(1-\frac{n}{2}\right)\left(2-\frac{n}{2}\right)}{(x^n)^{\frac{n}{2}+1}}\alpha_k.$$

Nous déterminons la fonction $\sigma_{k-1} = \sigma\chi_{k-1}$ par l'équation $\mathcal{O}_k = 0$ qui s'écrit

$$\frac{\partial\chi_{k-1}}{\partial x^n} = \frac{\Delta\sigma_k}{2\,\sigma} = -\frac{\left(1-\frac{n}{2}\right)\left(2-\frac{n}{2}\right)}{2}\frac{1}{(x^n)^2}.$$

Nous choisissons pour χ_{k-1} la fonction obtenue en intégrant l'égalité précédente entre $-\infty$ et x^n :

$$\chi_{k-1} = \frac{\left(1-\frac{n}{2}\right)\left(2-\frac{n}{2}\right)}{2}\frac{1}{x^n}$$

qui nous donne pour σ_{k-1} la fonction suivante :

$$\sigma_{k-1} = \frac{\left(1-\frac{n}{2}\right)\left(2-\frac{n}{2}\right)}{2}\frac{\alpha_k}{(x^n)^{\frac{n}{2}}}.$$

([6]) Pour les changements de variable sur les distributions, *voir* Leray [7].

Nous déterminons successivement les fonctions σ_p à l'aide de l'équation $\mathcal{O}_{p+1} \equiv 0$. Nous trouvons pour σ_p

$$\sigma_p = \frac{\alpha_p}{(x^n)^{\frac{n}{2}-1-p+k}} \qquad (x^n > 0),$$

où les α_p sont des nombres déterminés au facteur α_k près.

On a, en particulier,

$$\sigma_0 = \frac{\alpha_0}{(x^n)^{\frac{n}{2}-1+k}}.$$

D'où, en prenant $k = \frac{n}{2} - 2$,

$$\sigma_0 = \frac{\alpha_0}{(x^n)^{n-3}}.$$

Cette fonction vérifie, de plus, l'équation (1), à un facteur numérique près, puisqu'elle vérifie

$$\Delta\sigma_0 = -\alpha_0(n-3)\Omega_0\,\delta,$$

où Ω_0 est l'aire de la sphère de rayon 1 dans l'espace des x^i ($n-1$ dimensions). Nous prendrons le nombre α_k tel que l'on ait

$$-\alpha_0(n-3)\Omega_0 = 1.$$

Les fonctions correspondantes,

$$\sigma_p = \frac{\alpha_p}{(x^n)^{n-3-h}},$$

déterminent alors une solution élémentaire σ de l'équation des ondes qui donne la formule de résolution suivante pour cette équation

$$u(x_0^\alpha) = \sigma \star \mathrm{L}u = \int \cdots \int_{\mathrm{V}} \sigma_p \left[\frac{\partial^p \mathrm{L}u}{(\partial x^n)^p}\right] dx^1 \ldots dx^{n-1},$$

où V est le demi-cône

$$\Sigma(x_0^i - x^i)^2 = (x_0^n - x^n)^2, \qquad x_0^n - x^n > 0.$$

C'est la méthode précédente que je généralise aux équations à coefficients variables et qui me permet de résoudre le problème de Cauchy pour les équations non linéaires.

Équations linéaires. — Considérons une équation linéaire hyperbolique du deuxième ordre à un nombre pair de variables

$$\mathrm{L}u \equiv \mathrm{A}^{\lambda\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + \mathrm{B}^\lambda \frac{\partial u}{\partial x^\lambda} = f(u, x^\lambda),$$

où les $\mathrm{A}^{\lambda\mu}$ et B^λ seront des fonctions données des variables, régulières, c'est-à-dire possédant un certain nombre, fini. de dérivées.

Nous désignons par L^* l'opérateur adjoint de L et cherchons une distribution vérifiant l'égalité

$$L^*\sigma = \delta(x_0^\alpha) - \mathcal{L},$$

où $\mathcal{L}$ est une mesure portée par le conoïde caractéristique de sommet x_0^α; σ est alors une « paramétrix », approximation de la solution élémentaire relative au point x_0^α. Nous cherchons Σ sous la forme :

$$\sigma = \sum_{p=0}^{k} \frac{\partial^p}{(\partial x^n)^p} \sigma_p,$$

où les σ^p seraient des fonctions définies sur le conoïde caractéristique, de la forme $\frac{\omega_p}{(x_0^n - x^n)^{n-3-p}}$, les ω_p étant des fonctions continues et bornées.

Nous déterminons ces fonctions par des équations différentielles analogues aux équations (2). La fonction σ_0 ne vérifie plus l'égalité $\Delta\sigma_0 = \delta$, mais seulement $\Delta\sigma_0 = -\mathcal{L} + \delta$, où $\mathcal{L}$ est une fonction qui possède la propriété suivante :

$$\lim_{x^n = x_n^0} (x_0^n - x^n)^{n-1} \mathcal{L} = 0.$$

On peut alors écrire

$$(\sigma L u) = (u L^* \sigma) \qquad \text{(produits scalaires)},$$

d'où

$$u(x_0^\alpha) = \int \cdots \int_V \left\{ [u]\mathcal{L} + \sum_{v=0}^{k} \sigma_p \left[\frac{\partial^p L u}{(\partial x^n)^p} \right] \right\} dx^1 \ldots dx^{n-1},$$

où V est le demi-conoïde caractéristique $x_0^n - x^n > 0$ et où $[f]$ désigne la valeur sur ce conoïde d'une fonction f des variables x^α.

Ces équations, équations intégrales aux inconnues u, se résolvent par la méthode ordinaire des approximations successives et permettent la résolution du problème de Cauchy.

Les résultats s'étendent sans difficulté aux systèmes d'équations de la forme

$$A^{\lambda\mu} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + B_0^{t\lambda} \frac{\partial u_t}{\partial x^\lambda} + f_s = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, N),$$

où les coefficients des dérivées secondes sont les mêmes pour les N équations, et aux équations non linéaires en appliquant les résultats précédents à des équations mises sous la forme (3) après les dérivations par rapport aux variables x^α.

J'utilise au chapitre III le système d'équations intégrales $\mathcal{J}$ à la résolution du problème de Cauchy pour les équations non linéaires. Il me faut passer par l'intermédiaire d'équations approchées, car les intégrales figurant dans $\mathcal{J}$ ne sont bornées que sous des hypothèses de dérivabilité faites sur les coefficients $A^{\lambda\mu}$ qui porteraient, dans le cas non linéaire général, sur les fonctions inconnues.

La solution des équations à un nombre m impair ($n = 2m - 1$) de variables s'obtient à partir de la solution des équations à un nombre pair ($n = 2m$) de variables par la méthode de descente. La variable supplémentaire x^0 introduite n'est d'ailleurs autre que la distance géodésique (dont le carré est désigné par $-$ R dans le cas des coefficients constants) qui n'intervenait que par la valeur zéro qu'elle prend sur le conoïde caractéristique pour les équations à $n = 2m$ variables et intervient par toutes ses valeurs réelles ($-R \geqq 0$, intérieur du conoïde caractéristique) dans le cas $n = 2m + 1$, où les dérivations figurant dans l'expression de la solution élémentaire ([7]) (coefficients constants) sont fractionnaires.

Les formules obtenues par la méthode de descente sont en fait identiques à celles que l'on obtiendrait par la résolution directe des équations à $2m + 1$ variables

CHAPITRE I.

Équations linéaires.

1. Nous considérons dans ce chapitre un système de N équations aux dérivées partielles du second ordre, à N fonctions inconnues u_s et n (pair) variables x^α, hyperboliques et linéaires, soit :

$$\text{(E)} \qquad A^{\lambda\mu}\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + B_s^{t\lambda}\frac{\partial u_t}{\partial x^\lambda} + f_s = 0 \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n).$$

Les coefficients $A^{\lambda\mu}$ (qui sont les mêmes pour les N équations), $B_s^{t\lambda}$, f_s sont des fonctions données des variables x^α. Les équations E_s sont supposées du type hyperbolique normal : $A^{nn} > 0$, $A^{ij}X_iX_j$, forme quadratique, définie < 0.

Nous formerons, en vue de résoudre le problème de Cauchy relatif à (E), un système d'équations intégrales vérifié par les solutions. Nous obtiendrons ce système de manière analogue à celle utilisée pour les équations à quatre variables : nous intégrerons *sur le conoïde caractéristique* des combinaisons linéaires des équations E et des équations dérivées par rapport à x^n (les équations E intervenaient seules pour quatre variables). Les coefficients de ces combinaisons linéaires seront des fonctions auxiliaires, solutions d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, qui admettent au sommet du conoïde caractéristique une singularité.

Nous ferons dans tout ce chapitre les hypothèses suivantes sur les coefficients des équations (E) :

2. Hypothèses sur les coefficients. — Dans le domaine D de l'espace des variables x^α, centré en un point $\overline{N}$ de coordonnées $\overline{x^i}$, 0, et défini par :

$$0 \leqq x^n \leqq \varepsilon, \qquad |x^i - \overline{x^i}| \leqq d.$$

1° Les coefficients $A^{\lambda\mu}$, $B_s^{\rho\lambda}$ et f_s admettent des dérivées partielles continues et bornées jusqu'aux ordres respectivement $2k+4$, $2k+2$ et k, par rapport aux variables respectivement x^α (pour $A^{\lambda\mu}$ et $B_s^{\rho\lambda}$) et x^n (pour f_s).

2° La forme quadratique $A^{\lambda\mu}X_\lambda X_\mu$ est de type hyperbolique normal à un carré

([7]) Leray donne pour cette solution une formule générale valable pour les équations à un nombre pair et impair de variables (*cf.* [7]).

positif et $n-1$ carrés négatifs. Nous supposerons : $A^{nn} > 0$, forme quadratique $A^{ij}X_iX_j$ définie < 0.

3° Les dérivées d'ordres respectivement $2k+4$, $2k+2$ et k des coefficients $A^{\lambda\mu}$, $B_s^{r\lambda}$ et f_s satisfont à des conditions de Lipschitz données.

Nous désignerons par borne B tout nombre fini déterminé par les bornes précédentes (bornes des coefficients, de leurs dérivées partielles et bornes figurant dans les conditions de Lipschitz).

A. — Conoïde caractéristique.

3. Les surfaces caractéristiques du système d'équations aux dérivées partielles (E) sont solutions du système différentiel :

$$F \equiv A^{nn} + 2A^{in}p_i + A^{ij}p_ip_j = 0,$$
$$dx^n + p_i\,dx^i = 0.$$

Les caractéristiques de ce système différentiel, bicaractéristiques des équations (E), satisfont aux équations différentielles :

$$\frac{dx^i}{A^{ij}p_j + A^{in}} = \frac{dx^n}{A^{nn} + A^{in}p_i} = \frac{-dp_i}{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x^i} - p_i\frac{\partial F}{\partial x^n}\right)} = d\lambda_1, \tag{3.1}$$

λ_1 étant un paramètre auxiliaire ([8]).

Le conoïde caractéristique Σ_0 de sommet $M_0(x_0^\alpha)$ est la surface caractéristique engendrée par les bicaractéristiques issues de M_0. Ces courbes sont définies par des fonctions $x^\alpha(\lambda_1, p_i^0, x_0^\alpha)$ et $p_i(\lambda_1, p_i^0, x_0^\alpha)$, solutions des équations (3.1) et prenant respectivement pour $\lambda_1 = 0$ (correspondant au sommet M_0 de Σ_0) les valeurs x_0^α et p_i^0. Les p_i^0 ainsi introduits sont $n-1$ paramètres qui définissent la bicaractéristique envisagée et satisfont à l'identité :

$$A_0^{nn} + 2A_0^{in}p_i^0 + A_0^{ij}p_i^0p_j^0 = 0.$$

Nous supposerons provisoirement que les coefficients $A^{\lambda\mu}$ prennent en M_0 les valeurs suivantes :

$$A_0^{nn} = 1, \qquad A_0^{in} = 0, \qquad A_0^{ij} = -\delta_i^j$$

et poserons, par exemple,

$$p_1^0 = \cos\lambda_2, \qquad p_2^0 = \sin\lambda_2\cos\lambda_3, \qquad \ldots, \qquad p_{n-1}^0 = \sin\lambda_2\sin\lambda_3\ldots\sin\lambda_{n-1}.$$

4. Nous appellerons *domaine* Λ tout domaine de variation des paramètres λi défini par des inégalités de la forme suivante :

$$|\lambda_1| \leqq \varepsilon, \qquad 0 \leqq \lambda_2 \leqq \pi, \qquad 0 \leqq \lambda_3 \leqq 2\pi, \qquad \ldots, \qquad 0 \leqq \lambda_{n-1} \leqq 2\pi,$$

où ε est un nombre positif qui ne dépend que des bornes B.

([8]) Ces bicaractéristiques sont les géodésiques de longueur nulle de la métrique riemanienne $A_{\lambda\mu}\,dx^\lambda\,dx^\mu$ (*Cf.* M. Riesz [10]).

Les hypothèses faites sur les coefficients $A^{\lambda\mu}$ permettent de montrer [9] qu'il existe un domaine Λ tel que les équations intégrales suivantes :

$$(4.1)\qquad \begin{cases} x^\alpha = \displaystyle\int_0^{\lambda_1} T^\alpha \, d\lambda_1 + x_0^\alpha, \\ p_i = \displaystyle\int_0^{\lambda_1} R_i \, d\lambda_1 + p_i^0, \end{cases}$$

où :

$$T^i = A^{ij} p_j + A^{in}, \qquad T^n = A^{nn} + A^{in} p_i$$

aient dans Λ une solution unique continue et bornée $x^\alpha(x_0^\lambda, \lambda_i)$, $p_i(x_0^\lambda, \lambda_i)$ satisfaisant aux inégalités

$$|x^i - \bar{x}^i| \leq d, \qquad |x^n| \leq \varepsilon.$$

Ces fonctions $x^\alpha(x_0^\lambda, \lambda_i)$ et $p_i(x_0^\lambda, \lambda_i)$ définissent donc un domaine V du conoïde caractéristique Σ_0 de sommet M_0, intérieur à D.

Remarquons que dans ce voisinage V du sommet de Σ_0 la correspondance entre les paramètres (x^n, λ_n) et (λ_1, λ_n) est biunivoque. En effet, nous avons :

$$\frac{\partial x^n}{\partial \lambda_1} = T^n = A^{nn} + A^{in} p_i = \frac{A^{nn}}{2} - A^{ij} p_i p_j \geq \frac{A^{nn}}{2} > 0$$

5. **Dérivées des fonctions $x^i(x_0^\lambda, \lambda_i)$ et $p_i(x_0^\lambda, \lambda_i)$.** — Les hypothèses faites sur les coefficients $A^{\lambda\mu}$ montrent encore qu'il existe un domaine Λ tel que, dans Λ, les fonctions x^i et p_i admettent des dérivées partielles par rapport aux p_j^0 [donc par rapport aux λ_u $(u = 2, \ldots, n-1)$] jusqu'à l'ordre $2k+3$ continues et bornées. Nous désignons ces fonctions par $y_j^i = \frac{\partial x^i}{\partial p_j^0}$, $z_j^i = \frac{\partial p_i}{\partial p_j^0}$ et y_{jh}^i, z_{jh}^i, ..., avec des notations évidentes. Nous désignerons par X une quelconque des fonctions x^i, p_i, y_j^i, z_j^i, ... Ces fonctions satisfont à des équations intégrales obtenues par dérivation sous le signe somme des équations (4.1). Ces équations sont de la forme :

$$X = \int_0^{\lambda_1} E(X) \, d\lambda_1 + X_0,$$

où E est un polynôme des fonctions X ainsi que des coefficients $A^{\lambda\mu}$ et de leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre $2k+4$.

Ces équations peuvent se mettre sous la forme équivalente suivante :

$$X = \int_{x_0^n}^{x^n} E(X) \, dx^n + X_0,$$

[9] L'existence des solutions des équations intégrales (4.1) dans Λ est donnée immédiatement par la méthode des approximations successives. L'intégrale première

$$A^{nn} + 2A^{in} p_i + A^{ij} p_i p_j = 0$$

permet, en fait, de construire ces solutions dans tout domaine où les coefficients $A^{\lambda\mu}$ satisfont aux hypothèses B.

où $E(X)$ désigne cette fois le quotient par T^n (>0 dans Λ) du polynôme $E(X)$ précédent.

Paramètres x^i, domaine Λ_η. — Nous verrons qu'il sera souvent commode de prendre pour paramètres représentatifs d'un point de Σ_0 ses $n-1$ coordonnées d'espace x^i. Cette représentation est en correspondance biunivoque avec la représentation au moyen des paramètres λ_j dans un domaine Λ_η déduit de Λ par exclusion d'un voisinage arbitrairement petit du point $\lambda_1 = 0$ correspondant au sommet de Σ_0 (*cf.* A, chap. I, § 17).

6. **Relations satisfaites par les fonctions inconnues sur le conoïde Σ_0.** — Nous désignons par $[\varphi]$ la valeur sur Σ_0 d'une fonction φ des quatre coordonnées x^α. $[\varphi]$ est une fonction des $n-1$ paramètres représentatifs d'un point de Σ_0. Soient x^i ces $n-1$ paramètres, d'après l'identité valable sur Σ_0 :

$$dx^n + p_i\,dx^i = 0.$$

Nous avons :

$$\frac{\partial[\varphi]}{\partial x^i} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\right] - \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^n}\right] p_i.$$

Cette identité permet d'écrire les relations satisfaites par les fonctions u_s sur le conoïde caractéristique sous la forme :

$$\begin{aligned} E_s \equiv [A^{ij}]\frac{\partial^2[u_s]}{\partial x^i\,\partial x^j} &+ \{[A^{ij}]p_i p_j + 2A^{in}p_i + A^{nn}\}\left[\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^{n^2}}\right] \\ &+ 2\{[A^{ij}]p_j + [A^{in}]\}\frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{\partial u_s}{\partial x^n}\right] + \left[\frac{\partial u_s}{\partial x^n}\right][A^{ij}]\frac{\partial p_i}{\partial x^j} + [B_s^{r\lambda}]\left[\frac{\partial u_r}{\partial x^\lambda}\right] + [f_s] = 0. \end{aligned}$$

Nous posons :

$$C \equiv [A^{ij}]p_i p_j + 2[A^{in}]p_i + [A^{nn}].$$

Nous remarquons que :

$$C = 0.$$

Les équations $[E_s] = 0$ ne contiennent que les dérivées secondes des fonctions u_s qui peuvent être obtenues par dérivation sur Σ_0, ce qui était prévu, Σ_0 étant une surface caractéristique.

B. — Fonctions auxiliaires.

7. Nous considérons N^2 fonctions auxiliaires σ_s^r. Nous formons les N combinaisons linéaires $\sigma_s^r[E_r]$ et nous les transformons par la formule classique $vLu - uL^*v = \operatorname{div}\vec{h}$, où L^* désigne l'opérateur adjoint de l'opérateur différentiel L.

Nous obtenons ainsi, en utilisant l'expression (6.2) de $[E_r]$, par des calculs simples identiques à ceux faits dans A (chap. I, § 5), l'identité suivante :

$$\sigma_s^r[E_r] \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}E_s^i + [u_r]L_s^r + \sigma_s^r[f_r] - \left[\frac{\partial u_r}{\partial x^n}\right]D_s^r + \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^{n2}}\right]\sigma_s^r C = 0.$$

avec :

$$
(7.1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&E_s^l \equiv [A^{ij}]\sigma_s^r\left[\frac{\partial u_r}{\partial x^j}\right] - [u_r]\frac{\partial}{\partial x^j}([A^{ij}]\sigma_s^r) + 2\sigma_s^r\{[A^{ij}]p_j + [A^{in}]\}\left[\frac{\partial u_r}{\partial x^n}\right] + B_l^{ri}[u_r]\sigma_s^l,\\
&L_s^r \equiv \frac{\partial^2([A^{ij}]\sigma_s^r)}{\partial x^i\,\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^i}([B_l^{ri}]\sigma_s^l),\\
&D_s^r \equiv \sigma_s^r\left\{2\frac{\partial}{\partial x^i}([A^{ij}]p_j + [A^{in}]) - [A^{ij}]\frac{dp_j}{dx^i}\right\}\\
&\qquad + 2([A^{ij}]p_j + [A^{in}])\frac{\partial \sigma_s^r}{\partial x^i} - ([B_l^r] + [B_l^{ri}]p_l)\sigma_s^l,\\
&C \equiv [A^{ij}]p_i p_j + 2[A^{in}]p_i + [A^{nn}] = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Si nous voulons appliquer la méthode qui nous a permis d'obtenir la résolution des équations à quatre variables, il nous faut choisir des fonctions σ_s^r satisfaisant à $D_s^r = 0$. Mais les fonctions que nous pouvons ainsi déterminer n'ont pas en général une singularité d'un ordre tel que l'on puisse obtenir des formules de Kirchoff, exprimables en termes d'intégrales bornées. Nous verrons, par contre que si nous considérons des combinaisons linéaires des équations E_s, mais aussi des équations dérivées de E_s par rapport à x^n un certain nombre de fois $\left(\frac{n}{2} - 2\right)$, nous pourrons obtenir de telles formules.

8. Équations dérivées par rapport à x^n. — Désignons par $E_s^{(l)}(v)$ la quantité suivante, fonction des variables x^α et de N fonctions v_s :

$$E_s^{(l)}(v) \equiv \frac{\partial^l A^{\lambda\mu}}{\partial x^{n^l}}\frac{\partial^2 v_s}{\partial x^\lambda\,\partial x^\mu} + \frac{\partial^l B_s^{t\lambda}}{\partial x^{n^l}}\frac{\partial v_t}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial^l f_s}{\partial x^{n^l}}$$

et posons :

$$\bar{E}_s^{(l)}(v) \equiv E_s^{(l)}(v) - \frac{\partial^l f_s}{\partial x^{n^l}}.$$

Nous avons

$$E_s^{(0)}(v) = E_s(v) \qquad \text{et} \qquad \bar{E}_s^{(l)}(v) = \bar{E}_s(v).$$

Avec ces notations, nous avons :

$$\frac{\partial E_s}{\partial x^n} \equiv E_s^{(1)}(u) + \bar{E}_s\left(\frac{\partial u}{\partial x^n}\right).$$

Nous poserons de façon générale :

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^{n^m}} = u_m.$$

Les dérivées par rapport à x^n des équations E_s s'écriront alors :

$$\frac{\partial^l E_s}{\partial x^{n^l}} \equiv \sum_{p=0}^{l} C_p^l\,\bar{E}_s^{(l-p)}(u_p) + \frac{\partial^l f_s}{\partial x^{n^l}}.$$

Les C_p^l sont des nombres (coefficients du binôme).

Nous avons ainsi mis les équations $\frac{\partial^l E_s}{\partial x^{n^l}}$ sous forme d'une somme de termes formellement analogues aux premiers membres des équations (E) elles-mêmes. Nous désignerons par $\left[\frac{\partial^l E_s}{\partial x^{n^l}}\right]$ la valeur de $\frac{\partial^l E_s}{\partial x^{n^l}}$ sur le conoïde caractéristique.

9. Combinaisons $\sum_{l=0}^{k} \sigma^r_{s(l)} \frac{\partial^l E_s}{\partial x^{nl}}$. — Nous considérons kN^2 fonctions auxiliaires (k est un nombre pour l'instant arbitraire) que nous désignons par $\sigma^r_{s(l)}$ et nous formons les combinaisons linéaires :

$$\sum_{l=0}^{k} \sigma^r_{s(l)} \frac{\partial^l E_s}{\partial x^{nl}} \equiv \sum_{l=0}^{k} \sigma^r_{s(l)} \left\{ \sum_{p=0}^{l} C^l_p [\overline{E}^{(l-p)}_s(u_p)] + \left[\frac{\partial^l f_s}{\partial x^{nl}}\right] \right\}.$$

Nous avons pour chaque produit $\sigma^r_{s(l)}[\overline{E}^{(l-p)}_s]$ une identité analogue à (7.1) qui s'écrit :

$$\sigma^r_{s(l)}[E^{(l-p)}_s(u_p)] \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} E^{i(l-p)}_{s(l)}(u_p) + [u_{rp}] L^{r(l-p)}_{s(l)} + \sigma^r_{s(l)} C^{(l-p)} \left[\frac{\partial^2 u_{rp}}{\partial x^{n^2}}\right] - \left[\frac{\partial u_{rp}}{\partial x^n}\right] D^{r(l-p)}_{s(l)}$$

$L^{r(l-p)}_{s(l)}$, $D^{r(l-p)}_{s(l)}$, $C^{(l-p)}$ sont formés à partir des coefficients $\frac{\partial^{l-p} B^{i\lambda}_s}{\partial x^{nl-p}}$, $\frac{\partial^{l-p} A^{\lambda\mu}}{\partial x^{nl-p}}$ des équations $\overline{E}^{(l-p)}_s$, et des fonctions $\sigma^r_{s(l)}$ comme les fonctions L^r_s, D^r_s et C étaient formées à partir des coefficients $A^{\lambda\mu}$, $B^{i\lambda}_s$ et des fonctions σ^r_s. Pour obtenir $E^{i(l-p)}_{s(l)}(u_p)$, il faut de plus remplacer dans E^i_s [*cf.* (7.1)] u_s et $\frac{\partial u_s}{\partial x^i}$ par u_{sp} et $\frac{\partial u_{sp}}{\partial x^i}$.

Sommons par rapport à l les identités précédentes multipliées par C^l_p, et ordonnons les identités obtenues par rapport à u_{rp}, en remarquant que

$$\frac{\partial u_{rp}}{\partial x^n} = u_{r,p+1}, \qquad \frac{\partial^2 u_{rp}}{\partial x^{n^2}} = u_{rp+2}$$

Nous obtenons :

$$\sum_{l=0}^{k} \sigma^r_{s(l)} \left[\frac{\partial^l E_s}{\partial x^{nl}}\right] \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{E}^i_s + [u_{rp}] \mathcal{L}^{r(p)}_s + \sum_{l=0}^{k} \frac{\partial^l f_s}{\partial x^{nl}} \sigma^r_{s(l)} = 0, \tag{9.1}$$

avec

$$\left\{\begin{aligned} &\mathcal{L}^{r(0)}_s = \sum_{l=0}^{k} L^{r(l)}_{s(l)}, \\ &\mathcal{L}^{r(1)}_s = \sum_{l=0}^{k} \{ C^1_l L^{r(l-1)}_{s(l)} - D^{r(l)}_{s(l)} \}, \\ &\mathcal{L}^{r(p)}_s = \sum_{l=0}^{k} \{ C^p_l L^{r(l-p)}_{s(l)} - C^{p-1}_l D^{r(l-p+1)}_{s(l)} + C^{p-2}_l \sigma^r_{s(l)} C^{(l-p+2)} \} \end{aligned}\right. \tag{9.2}$$

et

$$\mathcal{E}^i_s = \sum_{l=o}^{k} \sum_{p=0}^{l} C^p_l E^{i(l-p)}_{s(l)}(u_p).$$

10. Fonctions σ^r_s. — Nous choisirons les fonctions σ^r_s de manière à ce que les coefficients des dérivées des u de la forme $u_p(p = 1, 2, \ldots, k+2)$ soient nuls. L'équation correspondant à $p = k + 2$ étant une identité, car $C^{(0)} \equiv 0$[*cf.* (7.1)], nous obtenons les équations qui s'écrivent :

$$\sum_{l=p}^{k} C^p_l L^{r(l-p)}_{s(l)} - \sum_{l=p-1}^{k} C^{p-1}_l D^{r(l-p+1)}_{s(l)} + \sum_{l=p-2}^{k} C^{p-2}_{(l)} \sigma^{r(l)}_s C^{(l-p+2)} = 0 \qquad (p = 1, \ldots, k+1). \tag{10.1}$$

Nous allons montrer que ces équations permettent de déterminer les fonctions $\sigma^r_{s(l)}$ par récurrence, les équations correspondant à $p = h + 1$ ne contenant que les fonctions $\sigma^r_{s(l)}$, où $l \geqq h$.

11. Détermination de $\sigma^r_{s(k)}$. — Nous voyons d'abord que les équations correspondant à $p = k + 1$ ne contiennent comme fonctions inconnues que $\sigma^r_{s(k)}$: Nous savons, en effet, que $C^{(0)} = C = 0$ (propriété du conoïde caractéristique); ces équations s'écrivent donc

$$- D^r_{s(k)} + C^l_k \sigma^r_{s(k)} C^{(1)} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sigma^r_{s(k)} \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial x^i}([A^{ij}] p_j + [A^{in}]) - [A^{ij}] \frac{\partial p_i}{\partial x^j} \right\} + 2([A^{ij}] p_j + [A^{in}]) \frac{\partial \sigma^r_{s(k)}}{\partial x^i}$$
$$- ([B^{rn}_t] + [B^{ri}_t] p_i) \sigma^t_{s(k)} - C^l_k \sigma^r_{s(k)} C^{(1)} = 0.$$

Ces équations sont tout à fait analogues à celles déterminant les fonctions σ^r_s pour les équations à quatre variables (*cf.* A, chap. I, § 5).

Nous poserons

$$\sigma^r_{s(k)} = \sigma \omega^r_{sk()},$$

σ satisfaisant à

$$2 \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} \{ [A^{ij}] p_j + [A^{in}] \} + \sigma \frac{\partial}{\partial x^i} \{ [A^{ij}] p_j + [A^{in}] \} = 0.$$

On montre, comme dans A (chap. I, § 9), que cette équation s'écrit

$$2 \Delta \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_1} + \sigma \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda_1} = 0, \tag{11.1}$$

Δ désignant le déterminant $\frac{D(x^i)}{D(\lambda_j)}$ dont les éléments sont

$$\frac{\partial x^i}{\partial \lambda_1} = [A^{ij}] p_j + [A^{in}],$$
$$\frac{\partial x^i}{\partial \lambda_u} = y^i_j \frac{\partial p^0_j}{\partial \lambda_u}.$$

La solution générale de (11.1) est

$$\sigma = \frac{f(p^0_i)}{|\Delta|^{\frac{1}{2}}}, \tag{11.5}$$

où f est une fonction arbitraire.

Remarquons que σ est infinie pour $\lambda_1 = 0$, puisque y^i_j, donc Δ, est alors nul. Nous avons

$$y^i_j = \int_0^{\lambda_1} \frac{\partial T^i}{\partial p^0_j} \partial \lambda_1$$

et nous voyons aisément que $\frac{y^i_j}{\lambda_1}$ est une fonction continue et bornée dans A dont la valeur pour $\lambda_1 = 0$ est

$$\lim_{\lambda_1 = 0} \frac{y^i_j}{\lambda_1} = -\delta^i_j.$$

Pour pouvoir étudier aisément la fonction σ et ses dérivées, nous introduirons, comme dans [A] (chap. I, § 12), les nouvelles variables μ_j

$$\mu_j = \lambda_1 p_j^0$$

et désignerons par D le déterminant fonctionnel

$$\mathrm{D} = \frac{\mathrm{D}(x^i)}{\mathrm{D}(\mu_j)}, \tag{11.2}$$

dont les éléments continus et bornés dans Λ sont

$$\frac{\partial x^i}{\partial \mu_j} = \frac{\partial x^i}{\partial \lambda_j}\frac{\partial \lambda_1}{\partial \mu_j} + \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_u}\frac{\partial \lambda_u}{\partial \mu_j} = \mathrm{T}^i p_j^0 + \frac{y_k^i}{\lambda_1}(\delta_j^k - p_j^0 p_k^0);$$

D est donc une fonction continue et bornée dans Λ dont la valeur pour $\lambda_1 = 0$ est

$$\lim_{\lambda_1=0} \mathrm{D} = -1;$$

en effet,

$$\lim_{\lambda_1=0} \frac{\partial x^i}{\partial \mu_j} = -\delta_i^j.$$

Nous avons, d'autre part

$$\Delta = \frac{\mathrm{D}(x^i)}{\mathrm{D}(\lambda_j)} = \frac{\mathrm{D}(x^i)}{\mathrm{D}(\mu_k)}\frac{\mathrm{D}(\mu_k)}{\mathrm{D}\lambda_j)} = \mathrm{D}d,$$

où l'on a posé

$$\frac{\mathrm{D}(\mu_k)}{\mathrm{D}(\lambda_j)} = \Phi_0 \lambda_1^{n-2} = d;$$

Φ_0 est un polynome donné des p_i^0 (quotient par $d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-1}$ de l'élément d'aire de la sphère unité en coordonnées polaires).

Nous verrons alors qu'il sera commode de prendre $|\Phi_0|^{\frac{1}{2}}$ pour fonction f définissant σ; nous aurons ainsi

$$\sigma = \frac{1}{\lambda^{\frac{n}{2}-1}|\mathrm{D}|^{\frac{1}{2}}}. \tag{11.4}$$

Dérivées de σ. — Les dérivées $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ d'une fonction φ quelconque définie sur Σ_0 sont données en fonction des $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_j}$ par

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_j}\frac{\Delta_i^j}{\Delta}, \tag{11.3}$$

σ, fonction algébrique de λ_1, p_i^0, $[\mathrm{A}^{\lambda\mu}]$, y_i^j possède, d'après les hypothèses de dérivabilité faites sur les coefficients $\mathrm{A}^{\lambda\mu}$ des dérivées partielles par rapport aux λ_i (et par rapport aux x_i) jusqu'à l'ordre $2k+2$.

12. Détermination des ω_s^r. — σ satisfaisant à l'équation (11.1), les ω_s^r doivent être solutions des équations suivantes (équations différentielles)

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1}\omega_s^r - \mathrm{Q}_t^r \omega_s^t - \mathrm{Q}\omega_s^r - \frac{1}{2}\mathrm{C}^{(1)}\omega_s^r = 0,$$

avec

$$(12.1)\qquad \left\{\begin{aligned} Q_t^r &= \frac{1}{2}\left\{[B_t^{rn}]+[B_t^{ri}]p_i\right\},\\ Q &= -\frac{1}{2}\left\{p_j\frac{\partial}{\partial x^i}[A^{ij}]+\frac{\partial}{\partial x^i}[A^{in}]\right\}.\end{aligned}\right.$$

Les hypothèses faites sur les coefficients $A^{\lambda\mu}$ et $B_s^{t\lambda}$ montrent l'existence, dans Λ, de fonctions ω_s^r solutions des équations (12.1) et des équations intégrales suivantes :

$$(12.2)\qquad \omega_s^r=\int_0^{\lambda_1}\left(Q_t^r\omega_s^t+Q\omega_s^r+\frac{1}{2}C^{(1)}\omega_s^r\right)d\lambda_1+\delta_s^r$$

qui sont des équations intégrales linéaires à noyaux bornés. Ces fonctions ω_s^r ont dans Λ des dérivées partielles continues et bornées par rapport aux p_i^0 jusqu'à l'ordre $2k+2$; ces dérivées partielles $\frac{\partial\omega_s^r}{\partial y_i^0}$, $\frac{\partial^2\omega_s^r}{\partial p_i^0\,\partial p_j^0}$, ..., que nous désignons par ω_{si}^r, ω_{sij}^r, satisfont aux équations intégrales (12.2); elles s'annulent pour $\lambda=1$ et les fonctions $\frac{\omega_{si}^r}{\lambda_1}$, $\frac{\omega_{sij}^r}{\lambda_1}$, ... sont continues et bornées dans Λ.

Nous désignerons par Ω l'une quelconque des fonctions ω_s^r, ω_{si}^r, ... Les équations intégrales vérifiées par les fonctions Ω sont de la forme suivante :

$$\Omega=\int_0^{\lambda_1}F(\Omega)\,d\lambda_1+\Omega_0,$$

où F est une forme linéaire des fonctions Ω dont les coefficients sont des polynomes des coefficients $A^{\lambda\mu}$, $B_s^{t\lambda}$, de leurs dérivées partielles jusqu'aux ordres respectivement $2k+4$ et $2k+3$, et des fonctions X.

Ces équations peuvent se mettre sous la forme équivalente suivante :

$$\Omega=\int_{x_0^n}^{x^n}F(\Omega)\,dx^n+\Omega_0,$$

où F désigne le quotient par T^n des F figurant dans l'égalité précédente.

13. Détermination de $\sigma_{s(h)}^r$ ($h=k-1$, ..., 0). — Nous allons détruire les fonctions $\sigma_{s(h)}^r$ par récurrence. Il est clair que, si l'on suppose connues les fonctions $\sigma_{s(l)}^r$ ($l\geqq h+1$), les équations (10.1) correspondant à $p=h+1$ ne contiennent comme inconnues que $\sigma_{s(h)}^r$. Ces équations s'écrivent, en effet :

$$(13.1)\qquad -D_{s(h)}^r+C_h^1\sigma_{s(h)}^r C^{(1)}=\sum_{l=h+1}^{k}\left\{C_l^h D_{s(l)}^{r(l-h)}-C_l^{h+1}L_{s(l)}^{r(l-h-1)}-C_l^{h-1}\sigma_{s(l)}^r C^{(l-h+1)}\right\}.$$

Supposons données les $\sigma_{s(h)}^r$ ($l\geqq h+1$) possédant des dérivées partielles jusqu'à l'ordre $2(l+1)$, les deuxièmes membres sont alors des quantités connues, les premiers membres contiennent comme seules inconnues les $\sigma_{s(h)}^r$ et sont identiques aux premiers membres des équations (10.1), au coefficient numériqne $C_h^1=h$ près.

Nous résoudrons les équations (13.1) en posant

$$\sigma^r_{s\,(h)} = \sigma\alpha^r_{s\,(h)},$$

avec toujours

$$\sigma = \frac{\Phi_0}{|\Delta|^{\frac{1}{2}}}.$$

Les nouvelles inconnues $\alpha^r_s\ (h)$ satisfont à des équations différentielles linéaires analogues aux équations (12.1) satisfaites par les ω^r_s, mais avec seconds membres, soit

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\alpha^r_{s\,(h)} + Q^r_t\alpha^t_{s\,(h)} + \left(Q + \frac{h}{2}C(1)\right)\alpha^r_{s\,(h)} = \varphi^r_{s\,(h)},$$

où l'on a posé

$$\varphi^r_{s\,(h)} = \frac{\displaystyle\sum_{l=h+1}^{k}\left\{C^h_l D^{r(l-h)}_{s(l)} - C^{h+1}_l L^{r(l-h-1)}_{s(l)} - C^{h-1}_l \sigma^r_{s(l)} C(l-h+1)\right\}}{2\sigma}.$$

Nous résoudrons ce système par la méthode classique, en posant

$$\alpha^r_{s\,(h)} = \sum_{t=1}^{N}\omega^r_{t\,(h)}\chi^t_{s\,(h)}.$$

Les $\omega^r_{t(h)}$ sont les solutions des équations sans second membre correspondant aux équations (13.1) : ce sont des fonctions continues et bornées, possédant des dérivées partielles jusqu'à l'ordre $2h+2$ dans un domaine Λ. Les $\omega^r_{t(h)}$ et leurs dérivées partielles par rapport aux p^0_l satisfont à des équations intégrales tout à fait analogues (au facteur numérique h près) à (12.2),

Les $\omega^r_{t(h)}$ constituent, dans un domaine Λ, un système de solutions fondamentales des équations sans second membre correspondant à (13.1) : le déterminant ω d'éléments $\omega^r_{t(h)}$ est en effet $\neq 0$ dans un domaine Λ, puisque c'est un polynome des $\omega^r_{t(h)}$ dont la valeur pour $\lambda_1 = 0$ est

$$\omega = 1 \qquad \text{puisque} \quad [\omega^r_{t(h)}]_{\lambda_1=0} = \delta^r_t.$$

Désignons par $\hat{\omega}^r_{t(h)}$ le quotient par ω du mineur associé à $\omega^r_{t(h)}$. Les équations satisfaites par $\chi^r_{s(h)}$ s'écrivent

$$\omega^r_{t(h)}\frac{\partial\chi^t_{s(h)}}{\partial\lambda_1} = \varphi^r_{s(h)},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial\chi^t_{s\,(h)}}{\partial\lambda_1} = \varphi^r_{s(h)}\hat{\omega}^t_{r(h)}. \tag{13.2}$$

Les fonctions suivantes :

$$\chi^t_{s\,(h)} = \int_{\lambda_1}^{\varepsilon}\varphi^r_{s(h)}\hat{\omega}^r_{t\,(h)}\,d\lambda_1 + \chi_\varepsilon,$$

où χ_ε est une quantité donnée indépendante de λ_1 et où ε désigne, la valeur de λ_1 correspondant à la frontière du domaine Ω sont des fonctions définies et connues dans Ω et sont solutions des équations (13.2).

Nous choisirons χ_ε de manière à ce que les intégrales que nous obtiendrons dans les formules de Kirchoff soient uniformément convergentes dans Λ. Nous verrons qu'il en sera ainsi si nous prenons [10] :

$$\chi_s = \int_{\varepsilon}^{-\infty} \frac{\lim\limits_{\lambda_1=0} \lambda_1^{k-h+1} \varphi^r_{s(h)} \hat{\omega}^t_{r(h)}}{\lambda_1^{k-h+1}} d\lambda_1. \tag{13.3}$$

En paramètres x^n, λ_u les fonctions $\chi^t_{s(h)}$ sont données par les formules suivantes :

$$\chi^t_{s(h)} = \int_{x_n}^{0} \frac{\varphi^r_{s(h)} \hat{\omega}^t_{r(h)}}{T^n} dx^n + \int_{0}^{-\infty} \frac{\lim\limits_{x^n=x^n_0} (x^n - x^n_0)^{k-h+1} \varphi^r_{s(h)} \hat{\omega}^t_{r(h)}}{T^n (x^n - x^n_0)^{k-h+1}} dx^n$$

et sont définies dans les domaines $\Lambda(x^\alpha_0)$ déterminés par l'intersection du conoïde caractéristique du sommet x^α_0 avec la surface initiale, seuls domaines où nous aurons à les utiliser.

Nous avons ainsi construit les fonctions

$$\sigma^r_{s(h)} = \sigma \omega^r_{t(h)} \chi^t_{s(h)}$$

connaissant les fonctions $\sigma^r_{s(k)}$ $(l \geqq h+1)$ supposées dérivables jusqu'à l'ordre $2(l+1)$.

14. Notons que *les fonctions $\sigma^r_{s(h)}$ définies au moyen de ces fonctions $\chi^r_{s(h)}$ admettent dans Λ des dérivées partielles par rapport aux x^i jusqu'à l'ordre* $2(h+1)$. Rappelons que σ et $\omega^r_{s(h)}$ admettent des dérivées partielles jusqu'à l'ordre $2h+2$ et étudions les dérivées de $\chi^t_{s(h)}$.

Nous avons l'égalité

$$\frac{\partial \chi^t_{s(h)}}{\partial x_l} = \frac{\partial \chi^t_{s(h)}}{\partial x^n} T^n \frac{\Delta^1_l}{\Delta} + \frac{\partial \chi^t_{s(h)}}{\partial p^l_0} \frac{\partial p^0_l}{\partial \lambda_u} \frac{\Delta^u_l}{\Delta}. \tag{14.1}$$

$\varphi^r_{s(h)}$ est le quotient par σ d'un polynome des coefficients de (E), de leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre $k-h-1$, des fonctions $\sigma^r_{s(l)}$ $(l \geqq h+1)$ et de leurs dérivées partielles premières et secondes (*cf.* les expressions de $L^{r(l)}_s$, $D^{r(l)}_s$, $C^{(l)}$; $\varphi^r_{s(h)}$ admet donc dans Λ_η des dérivées partielles par rapport aux x^i (donc aussi par rapport aux λ_j) continues et bornées, jusqu'à l'ordre $2(h+1)$ si les $\sigma^r_{s(l)}$ $(l \geqq h+1)$ possèdent de telles dérivées jusqu'à l'ordre $2(l+1)$. On voit finalement que les $\chi^t_{s(h)}$ admettent dans Λ_η des dérivées partielles par rapport aux x^i jusqu'à l'ordre $2(h+1)$, continues et bornées. Il en est de même de $\chi^r_{s(h)}$.

Nous avons donc (§ 13 et 14) construit kN^2 fonctions $\sigma^r_{s(h)}$ possédant dans Λ_n

---

[10] Nous avons été guidés dans ce choix par les équations à coefficients constants, où les fonctions

$$\sigma_{(h)} = \frac{\omega^h}{(x^n_0 - x^n)^{n-3-h}}$$

sont obtenues par intégration par rapport à x^n de $-\infty$ à x^n (*cf.* Introduction). L'introduction de χ_t revient à prolonger au delà de la surface initiale $x^n \equiv 0$ les bicaractéristiques (qui pourraient cesser d'exister ou se recouper) issues de M_0 définissant le conoïde caractéristique. Cette introduction est indispensable pour éviter de voir apparaître, dans les intégrales, des quantités de la forme $\frac{1}{x^n}$, non bornées au voisinage de la surface initiale.

des dérivées partielles continues et bornées jusqu'à l'ordre $2(h+1)$, satisfaisant aux conditions (10.1).

15. **Intégration des relations fondamentales** (9.1). — Prenons, pour fonctions auxiliaires $\sigma^r_{s(l)}$ les fonctions que nous venons de déterminer. Les relations (9.1) s'écrivent alors

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\mathcal{E}^i_s + [u_n]\sum_{l=0}^{k} \mathrm{L}^{r(l)}_{s(l)} + \sigma^r_{s(l)}\sum_{l=0}^{k}\frac{\partial^l f s}{\partial x^{n l}} = 0, \tag{15.1}$$

avec

$$\mathcal{E}^i_s = \sum_{l=0}^{k}\sum_{p=0}^{l} \mathrm{C}^l_p \mathrm{E}^{i(l-p)}_{s(l)}(u_p).$$

Nous intégrerons les équations ainsi obtenues sur une portion V_η d'hypersurface du conoïde caractéristique Σ_0 limitée par les hypersurfaces $x^n=0$ (cette hypersurface portera dans la suite les données de Cauchy) et $x^n = x^n_0 - \eta$. Si la coordonnée x^n_0 est suffisamment petite, le domaine V_η ainsi défini est simplement connexe et admet pour frontières les domaines à $n-2$ dimensions S_0 et S_η découpés sur Σ_0 par les hypersurfaces $x^n=0$ et $x^n = x^n_0 - \eta$. Dans V_η, toutes les quantités figurant dans les équations (15.1) sont continues et bornées. Nous pouvons donc intégrer les équations (15.1) dans V_η ; l'application de la formule de Green nous donne alors le résultat suivant :

$$\begin{aligned} &\int\cdots\int_{V_\eta}\sum_{l=0}^{k}\left\{[u_r]\mathrm{L}^{r(l)}_{s(l)} + \frac{\partial^l f_s}{\partial x^{n l}}\sigma^r_s(l)\right\}d\mathrm{V} \\ &+\int\cdots\int_{S_\eta}\mathcal{E}^i_s\cos(n, x^i)\,d\mathrm{S} = \int\cdots\int_{S_0}\mathcal{E}^i_s\cos(n, x^i)\,d\mathrm{S}, \end{aligned} \tag{15.2}$$

où $d\mathrm{V}$, $d\mathrm{S}$ et $\cos(n, x^i)$ désignent respectivement dans l'espace des $n-1$ variables x^i, l'élément de volume, l'élément d'aire d'une surface $x^n = $ const. et les cosinus directeurs de la normale à une telle surface orientée vers l'extérieur.

Nous allons maintenant chercher la limite, si elle existe, des relations intégrales (15.2) quand η tend vers zéro, c'est-à-dire quand λ_1 tend vers zéro (ce qui correspond au sommet du conoïde caractéristique). Il nous faut pour cela étudier le comportement au voisinage de $\lambda_1 = 0$ des fonctions $\sigma^r_{s(h)}$.

16. **Étude du comportement au voisinage du sommet du conoïde caractéristique ($\lambda_1 = 0$) des fonctions $\sigma^r_{s(h)}$ et de leurs dérivées.** — Nous étudierons aussi de façon précise l'expression de ces quantités en fonction des quantités suivantes :

— Paramètres λ_1, p^0_i ;

— Coefficients $A^{\lambda\mu}$ et $B^{i\lambda}_s$ des équations E et leurs dérivées partielles par rapport aux variables x^α, jusqu'aux ordres respectivement $2k+4$ et $2k+2$. Nous désignerons ces quantités par A et B ;

— Fonctions $x^i, p_i, y^j_i, \ldots$, définies aux paragraphes 3 et 5 déterminant le conoïde caractéristique : nous avons désigné l'une quelconque de ces fonctions par X. Les X sont des fonctions de λ_1, p_i^0 continues et bornées dans Λ et satisfont à des relations intégrales de la forme suivante :

$$X = \int_0^{\lambda_1} E(X)\, d\lambda_1 + X_0;$$

— Fonctions $\frac{y_i^j}{\lambda_1}$, $\frac{y_{ih}^j}{\lambda_1}$, ...; ces fonctions, continues et bornées dans Λ, seront désignées par $\tilde{X}$.

Nous désignerons par fraction de type $\mathcal{R}$ une fraction rationnelle des quantités ci-dessus dont le dénominateur est une puissance du déterminant D défini par (11.2) : une telle fraction est continue et bornée dans Λ.

Les égalités suivantes :

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial x^i} = \frac{\Delta_i^1}{\Delta} = p_j^0 \frac{D_i^j}{D}, \qquad \lambda_1 \frac{\partial p_h^0}{\partial x^i} = (\delta_j^h - p_j^0 p_h^0)\frac{D_i^j}{D}$$

dont la démonstration se trouve dans A (chap. I, § 12) $\left(D_i^j\right.$ désigne le mineur relatif à l'élément $\frac{\partial x^i}{\partial \mu_j}$ du déterminant $\left.D\right)$ montrent que $\frac{\partial\lambda_1}{\partial x^i}$ et $\lambda_1 \frac{\partial p_h^0}{\partial x^i}$ sont des fractions de type $\mathcal{R}$. De façon générale, nous allons montrer que le *produit par* λ_1 *de la dérivée par rapport à* x^i *d'une fraction de type* $\mathcal{R}$ *est de type* $\mathcal{R}$:

$$\lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{R}(A, \lambda_1, p_i^0, X, \tilde{X}) \quad \text{est de type } \mathcal{R}.$$

Il suffit pour le démontrer de prouver que $\lambda_1 \frac{\partial X}{\partial x^i}$ et $\lambda_1 \frac{\partial \tilde{X}}{\partial x^i}$ sont de type $\mathcal{R}$.

1° Les dérivées partielles par rapport aux p_i^0 des fonctions X sont des fonctions X (de la forme $\lambda_1 \tilde{X}$ pour $X = x^i, y_j^i, y_j^{ih}, \dots$), et les dérivées $\frac{\partial X}{\partial \lambda_1}$ sont des polynomes des A et X. On en conclut que $\lambda_1 \frac{\partial X}{\partial x^i}$ est une fraction de type $\mathcal{R}$. De plus, $\frac{\partial X}{\partial x^i}$ est de type $\mathcal{R}$ pour $X = x^i, y_j^i, y_j^{ih}, \dots$.

2° Les dérivées partielles des $\tilde{X}$ sont de la forme

$$\frac{\partial \tilde{X}}{\partial x_i} = \frac{1}{\lambda_1}\frac{\partial X}{\partial x_i} - \frac{\tilde{X}}{\lambda_1},$$

puisqu'on a

$$\tilde{X} = \frac{X}{\lambda_1},$$

le X considéré étant $y_j^i, y_j^{ih}, \dots$

$$\lambda_1 \frac{\partial \tilde{X}}{\partial x^i} = \frac{\partial X}{\partial x^i} - \tilde{X}$$

est alors de type $\mathcal{R}$.

17. Expression de σ et de ses dérivées. — σ, d'après la formule (11.4) est égal à

(17.1) $$\sigma = \lambda_1^{1-\frac{n}{2}} |D|^{-\frac{1}{2}}.$$

$\lambda_1^{\frac{n}{2}-1}\sigma$ est donc la racine carrée d'une fraction de type $\mathcal{R}$, $\frac{1}{D}$, à numérateur non nul.

Les dérivées partielles premières de σ se déduisent de la formule (17.1)

$$(17.2)\qquad \frac{\partial\sigma}{\partial x^i} = |D|^{-\frac{1}{2}}\lambda_1^{-\frac{n}{2}}\left\{\frac{\partial\lambda_1}{\partial x^i}\left(1-\frac{n}{2}\right)-\frac{1}{2}\lambda_1\frac{\partial D}{\partial x^i}D^{-1}\right\}.$$

On en déduit que $\lambda_1^{\frac{n}{2}}\frac{\partial\sigma}{\partial x^i}$ est de la forme $|D|^{-\frac{1}{2}}\mathcal{R}$. On voit de même, par dérivation de (17.2) que les dérivées partielles secondes de σ, $\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^i\partial x^j}$ sont telles que le produit $\lambda_1^{\frac{n}{2}+1}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^i\partial x^j}$ est de la forme $|D|^{-\frac{1}{2}}\mathcal{R}$.

18. Dérivées des ω_s^r. — Nous avons désigné par Ω une quelconque des fonctions $\omega_{s(h)}^r$ et de ses dérivées par rapport aux p_0^i jusqu'à l'ordre $2k+2$. Nous désignerons encore par fraction de type $\mathcal{R}$ une fraction rationnelle, de dénominateur $D^m\omega^{m'}$ (ω est le déterminant d'éléments ω_s^r, $\neq 0$ dans Λ; m et m' sont des entiers ≥ 0) des fonctions A, B, X, $\tilde{X}$, Ω. Une fraction $\mathcal{R}$ est encore continue et bornée dans Λ. Les dérivées $\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial p_h^0}$ et $\lambda_1\frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x^i}$ sont de type $\mathcal{R}$. On en déduit en particulier que $\lambda_1\frac{\partial\Omega}{\partial x^i}$ et $\lambda_1^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^i\partial x^j}$ sont de type $\mathcal{R}$.

Remarquons que $\frac{\partial\Omega}{\partial x^i}$ et $\lambda_1\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^i\partial x^j}$ sont, de plus, des fonctions continues et bornées, étant des fractions rationnelles des mêmes quantités que $\mathcal{R}$ et, de plus de $\tilde{\Omega}=\frac{\Omega}{\lambda_1}$, où Ω désigne ici une des fonctions ω_{si}^r, ω_{sij}^r, ...

19. Expression et comportement au voisinage de $\lambda_1 = 0$ de $\chi_{s(h)}^r$. — Nous allons montrer que les fonctions $\lambda_1^h\chi_{s(k-h)}^r$ sont continues et bornées dans Λ. Nous procéderons pour cela par récurrence et montrerons que l'ordre en λ_1 de $\chi_{s(k-h-1)}^r$ est supérieur d'une unité à l'ordre de $\chi_{s(k-h)}^r$. Nous verrons ainsi que les fonctions $\sigma_{s(0)}^r$ sont d'ordre $k+\frac{n}{2}-1$. Pour un choix convenable de k, les intégrales (15.2) seront convergentes (les limites des intégrales n-2[ièmes] étant non nulles) quand $\eta\to 0$ et nous pourrons obtenir des formules de Kirchoff.

1° Étudions les premières fonctions $\chi_{s(h)}^r$: $\chi_{s(k-1)}^r$, et ses dérivées.

a. Rappelons que $\chi_{s(k-1)}^i$ est donné par l'égalité suivante :

$$\chi_{s(k-1)}^i = \int_{\lambda_1}^{\varepsilon}\varphi_{s(k-1)}^r\,\hat{\omega}_{r(k-1)}^i\,d\lambda_1 + \chi_\varepsilon$$

avec

$$\varphi_{s(k-1)}^r = \frac{k\,D_{s(k)}^{r(1)} - L_{s(k)}^r - \sigma_{s(k)}^r\,C^{(2)}C_k^2}{2\lambda_1^{1-\frac{n}{2}}\,|D|^{-\frac{1}{2}}}.$$

Nous reportant aux expressions (7.1) de D_s^r et L_s^r et sachant que $\sigma_{s(k)}^r = \sigma\omega_{s(k)}^r$, les résultats des paragraphes précédents montrent que $\lambda_1^2 \varphi^r_{s(k-1)} \hat{\omega}^t_{r(k-1)}$ est une fraction de type $\mathcal{R}$.

Nous avons, d'autre part [*cf.* (13.3)],

$$\chi_\varepsilon = \int_\varepsilon^\infty \frac{\lim\limits_{\lambda_1=0} \lambda_1^2 \varphi^r_{s(k-1)} \hat{\omega}^t_{r(k-1)}}{\lambda_1^2} d\lambda_1.$$

$\chi^t_{s(k-1)}$ est donc de la forme suivante :

$$\chi^t_{s(k-1)} = \int_{\lambda_1}^\varepsilon \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^2} d\lambda_1 + \int_\varepsilon^{-\infty} \frac{\mathcal{R}_0}{\lambda_1^2} d\lambda_1, \tag{19.1}$$

$\mathcal{R}$ étant continue et bornée dans Λ, et $\mathcal{R}_0$ désignant la valeur pour $\lambda_1 = 0$, l'égalité précédente montre que $\lambda_1 \chi^t_{s(k-1)}$ est une fonction continue et bornée dans Λ.

b. Dérivées de $\chi^t_{s(k-1)}$. — L'égalité (19.2) s'écrit aussi

$$\chi^t_{s(k-1)} = \int_{x^n}^0 \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^2} dx^n + \int_0^{-\infty} \frac{\mathcal{R}_0}{\lambda_1^2} dx^n. \tag{19.2}$$

Les dérivées $\frac{\partial \chi^t_{s(k-1)}}{\partial x_l}$ sont données par la formule (14.1). Nous savons, d'autre part, que les dérivées $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p^0_j}$ d'une fraction de type $\mathcal{R}$ sont aussi de type $\mathcal{R}$, nous en concluons que les dérivées $\frac{\partial \chi^t_{s(k-1)}}{\partial x^l}$ sont de la forme suivante :

$$\frac{\partial \chi^t_{s(k-1)}}{\partial x^l} = \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^2} + \left\{ \int_{x^n}^0 \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^2} dx^n + \int_0^{-\infty} \frac{\mathcal{R}_0}{\lambda_1^2} dx^n \right\} \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1}. \tag{19.3}$$

On trouve de manière analogue que $\frac{\partial^2 \chi^t_{s(k-1)}}{\partial x^i \partial x^j}$ est de la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \chi^t_{s(k-1)}}{\partial x^l \partial x^j} = \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^3} + \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^2} \left\{ \int_{x^n}^0 \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^2} dx^n + \int_0^{-\infty} \frac{\mathcal{R}_0}{\lambda_1^2} dx^n \right\}. \tag{19.4}$$

Les formules ainsi obtenues montrent que, dans Λ, $\lambda_1^2 \frac{\partial \chi^t_{s(k-1)}}{\partial x^l}$ et $\lambda_1^3 \frac{\partial^2 \chi^t_{s(k-1)}}{\partial x^l \partial x^j}$ sont des fonctions continues et bornées.

Nous pouvons maintenant étudier l'expression et le comportement au voisinage $\lambda_1 = 0$ des fonctions $\sigma^r_{s(k-1)}$. Ces fonctions sont données par l'égalité suivante :

$$\sigma^r_{s(k-1)} = \sigma \omega^r_t \chi^t_{s(k-1)}$$

et sont donc de la forme

$$\sigma^r_{s(k-1)} = \frac{1}{|D|^{\frac{1}{2}}} \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^{\frac{n}{2}-1}} \left\{ \int_{\lambda_1}^\varepsilon \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^2} d\lambda_1 + \int_\varepsilon^{-\infty} \frac{\mathcal{R}_0}{\lambda_1^2} d\lambda_1 \right\};$$

$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p^0_h}$ et $\lambda_1 \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda_1}$ étant de type $\mathcal{R}$, nous voyons que les dérivées des fonctions $\sigma^r_{s(k-1)}$ sont de la forme suivante :

$$\frac{\partial \sigma^r_{s(k-1)}}{\partial x^l} = \frac{1}{|D|^{\frac{1}{2}}} \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^{\frac{n}{2}}} \left\{ \int_{\lambda_1}^\varepsilon \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^2} d\lambda_1 + \int_\varepsilon^{-\infty} \frac{\mathcal{R}_0}{\lambda_1^2} d\lambda_1 \right\} + \frac{1}{|D|^{\frac{1}{2}}} \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^{\frac{n}{2}+1}},$$

$$\frac{\partial^2 \sigma^r_{s(k-1)}}{\partial x^l \partial x^j} = \frac{1}{|D|^{\frac{1}{2}}} \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^{\frac{n}{2}+1}} \left\{ \int_{\lambda_1}^\varepsilon \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^2} d\lambda_1 + \int_\varepsilon^{\infty} \frac{\mathcal{R}_0}{\lambda_1^2} d\lambda_1 \right\} + \frac{1}{|D|^{\frac{1}{2}}} \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^{\frac{n}{2}+2}}.$$

2° Les expressions précédentes des fonctions $\sigma^r_{s(k-1)}$ et de leurs dérivées permettent de montrer que les fonctions $\chi^r_{s(k-2)}$ [données par la formule générale (13.3) sont de la forme suivante :

$$\chi^r_{s(k-2)} = \int_{\lambda_1}^{\varepsilon}\left\{\frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^2}\left[\int_{\lambda_1}^{\varepsilon}\frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^2}\,d\lambda_1 + \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\mathcal{R}_0}{\lambda_1^2}\,d\lambda_1\right] + \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^3}\right\}d\lambda_1 + \chi_\varepsilon,$$

avec

$$\chi_\varepsilon = \int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\lim\limits_{\lambda_1=0}\lambda_1^3\left\{\frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^2}\left[\int_{\lambda_1}^{\varepsilon}\frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^2}\,d\lambda_1 + \int_{\varepsilon}^{-\infty}\frac{\mathcal{R}_0}{\lambda_1^2}\,d\lambda_1\right] + \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^3}\right\}d\lambda_1}{\lambda_1^3}.$$

Il est facile de voir que $\chi^r_{s(k-2)}$ peut être écrit sous la forme suivante ([11]) :

$$\chi^r_{s(k-2)} = \int_{\lambda_1}^{-\infty}\left\{\frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^2}\int_{\lambda_1}^{-\infty}\frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^2}\,d\lambda_1 + \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^3}\right\}d\lambda_2.$$

Cette formule nous fait prévoir la forme générale des fonctions $\chi^r_{s(k-h)}$. Nous posons

$$\chi^r_{l(k-h)} = \int_{\lambda_1}^{-\infty}\Phi_h\,d\lambda_1$$

et nous allons construire par récurrence les fonctions Φ_h. Nous supposons que $\Phi_l(l \leqq h)$ est construit à partir de fractions de type $\mathcal{R}$ par addition, multiplication, division par λ_1^m (m entier positif) et intégration par rapport à λ_1 (de λ_1 à $-\infty$), et que les dérivés $\frac{\partial\Phi_l}{\partial p_i^0}$ sont de la même forme que Φ_l, tandis que les dérivées $\frac{\partial\Phi_l}{\partial\lambda_1}$ sont de la forme $\frac{\mathcal{R}}{\lambda_1}\Phi^l$ $\left(\Phi_l = \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^2}\text{ possède toutes ces propriétés}\right)$. Montrons alors que Φ_{h+1} possède ces propriétés, ce qui nous donnera en même temps une expression de Φ_{h+1} en fonction des $\Phi_l(l \leqq h)$.

Il résulte, en effet, des hypothèses faites sur Φ_l que les dérivées des fonctions $\chi^r_{s(k-l)}$ [qui sont données par l'égalité (19.3)] sont de la forme suivante :

$$\frac{\partial\chi^r_{s(k-h)}}{\partial x^i} = \mathcal{R}\Phi_l + \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^2}\int_{\lambda_1}^{-\infty}\Phi_l\,d\lambda_1,$$

$$\frac{\partial^2\chi^r_{s(k-h)}}{\partial x^i\,\partial x^j} = \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1}\Phi_l + \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^2}\int_{\lambda_1}^{-\infty}\Phi_l\,d\lambda_1;$$

Φ_{h+1} est une forme linéaire des fonctions $\chi^r_{s(k-l)}(l \leqq h)$ et de leurs dérivées partielles premières et secondes, dont les coefficients sont donnés par la formule (13.1). Les expressions de σ, ω^r_s et de leurs dérivées montrent alors que Φ_{h+1} est de la forme suivante :

$$\Phi_{h+1} = \sum_{l=1}^{h}\left\{\frac{\mathcal{R}}{\lambda_1}\Phi_l + \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^2}\int_{\lambda_1}^{-\infty}\Phi_l\,d\lambda_1\right\} + \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^2}. \tag{19.5}$$

([11]) Il est entendu que quand une fraction de type $\mathcal{R}$ figure sous un signe d'intégration par rapport à λ_1, elle doit être remplacée, en dehors de A, par sa valeur pour $\lambda_1 = 0$.

On vérifie immédiatement que les dérivées $\frac{\partial\Phi_{h+1}}{\partial p_j^q}$ sont de la même forme que Φ_{h+1} et que les dérivées $\frac{\partial\Phi_{h+1}}{\partial\lambda_1}$ sont de la forme $\frac{\mathcal{R}}{\lambda_1}\Phi_{h+1}$. C. Q. F. D.

La formule (19.5) permet de trouver l'expression générale de Φ_{h+1} en termes d'intégrations par rapport à λ_1 et de fractions rationnelles $\frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^m}$ à partir de $\Phi_1 = \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^2}$.

20. Comportement au voisinage de $\lambda_1 = 0$ de $\chi^r_{s(k-h)}$. — Les résultats obtenus pour $h = 1$ et $h = 2$ et la forme de Φ_h nous laissent prévoir que, pour tout h, $\lambda_1^{h+1}\Phi_h$ est continu et borné dans Λ. Supposons donc que cette propriété soit vraie pour $l \leq h$, montrons qu'elle est vraie pour $h+1$. On déduit de (19.5)

$$\lambda_1^{h+2}\Phi_{h+1} = \sum_{l=1}^{h}\left\{\mathcal{R}\lambda_1^{l+1}\Phi_l + \mathcal{R}\lambda_1^l\int_{\lambda_1}^{-\infty}\Phi_l\,d\lambda\right\} + \lambda_1^h\mathcal{R}.$$

D'où l'on conclut immédiatement que $\lambda_1^{h+2}\Phi_{h+1}$ est continu et borné dans Λ.

C. Q. F. D.

Nous obtenons alors pour les fonctions $\chi^r_{s(k-h)}$ les résultats suivants :

Les fonctions

$$\lambda_1^h\chi^r_{s(k-h)},\quad \lambda_1^{h+1}\frac{\partial\chi^r_{s(k-h)}}{\partial x^i},\quad \lambda_1^{h+2}\frac{\partial^2\chi^r_{s(k-h)}}{\partial x^i\,\partial x^j}$$

sont continues et bornées dans Λ.

21. Comportement de $\sigma^r_{s(h)}$. — Nous sommes maintenant en mesure de connaître le comportement au voisinage de $\lambda_1 = 0$ des fonctions $\sigma^r_{s(h)}$. Ces fonctions sont données par l'égalité suivante :

$$\sigma^r_{s(h)} = \sigma\omega^r_{t(h)}\chi^t_{s(h)}.$$

D'après les conclusions des paragraphes précédents, nous voyons que

$$\lambda_1^{\frac{n}{2}+k-h-1}\sigma^r_{s(h)},\quad \lambda_1^{\frac{n}{2}+k-h}\frac{\partial\sigma^r_{s(h)}}{\partial x^i},\quad \lambda_1^{\frac{n}{2}+k-h+1}\frac{\partial^2\sigma^r_{s(h)}}{\partial x^i\,\partial x^j}$$

sont des fonctions continues et bornées dans Λ.

22. Limite quand η tend vers zéro des relations intégrales (15.2). — La correspondance entre les paramètres x^i et λ_j étant biunivoque, nous pouvons écrire les intégrations figurant dans (15.2) au moyen du paramètre λ_j si elles sont convergentes. Calculons tout d'abord en fonction de ces paramètres les éléments d'aire et de volume dS et dV. Nous trouvons (*cf.* chap. I, A, § 18) que

$$dV = dx^1\ldots dx^{n-1} = \Delta\,d\lambda_1\ldots d\lambda_{n-1}$$

et

$$ds\cos(n, x^i) = \frac{p_i\Delta}{A^{nn} + A^{jn}p_j}\,d\lambda_1\ldots d\lambda_{n-1}.$$

Les relations intégrales (15.2) s'écrivent donc en paramètres λ_t :

$$(22.1)\qquad \int_{V_\eta}\cdots\int\left([u_r]L^{r(l)}_{s(l)}+\left[\frac{\partial^l f_s}{\partial x^{n^l}}\right]\sigma^r_{s(l)}\right)\Delta d\lambda_1\ldots d\lambda_{n-1}$$
$$+\int_{S_\eta}\cdots\int\frac{\mathcal{E}^l_s\Delta p_l}{A^{nn}+A^{jn}p_j}d\lambda_2\ldots d\lambda_{n-1}=\int_{S_\eta}\cdots\int\frac{\mathcal{E}^l_s\Delta p_l}{A^{nn}+A^{jn}p_j}d\lambda_2\ldots d\lambda_{n-1}.$$

Nous noterons ces équations de la façon suivante :

$$\int_{V_\eta}\cdots\int H\,d\lambda_1\ldots d\lambda_{n-1}+\int_{S_\eta}\cdots\int I\,d\lambda_2\ldots d\lambda_{n-1}=\int_{S_0}\cdots\int I\,d\lambda_2\ldots d\lambda_{n-1}.$$

D'après les exprèssions (9.2) de $\mathcal{E}^l_s$ est le fait que $\frac{\Delta}{\lambda_1^{n-2}}=D\Phi_0$ est continu et borné dans Λ, nous voyons que les intégrales $n-2$-uples portent sur des quantités de la forme $\lambda_1^{\frac{n}{2}-k-2}\mathcal{S}$, où $\mathcal{S}$ est une fonction continue et bornée dans Λ : en effet, tous les termes de $\lambda_1^{\frac{n}{2}+k}\,\mathcal{E}^l_s p_l$ tendent vers zéro avec λ_1 à l'exception peut-être du terme

$$\lambda_1^{\frac{n}{2}+k}[A^{lj}][u_r]\frac{\partial\sigma^r_{s(0)}}{\partial x^j}p_l$$

qui est continu et borné. $\frac{\Delta\mathcal{E}^l_s p_l}{A^{nn}+A^{jn}p_j}\lambda_1^{-\frac{n}{2}+k+2}$ est donc continu et borné dans Λ.

Ces intégrales $n-2$-uples seront donc convergentes, la limite de l'intégrale $\int_{S_\eta}\cdots\int\cdots$ étant peut être non nulle, si

$$k=\frac{n}{2}-2.$$

Nous prendrons donc $k=\frac{n}{2}-2$ et nous montrerons d'une part que l'intégrale étendue à S_η tend à une constante près, vers $u(x^\alpha_0)$ quand $\eta\to 0$; d'autre part que, grâce au choix fait des fonctions auxiliaires, les intégrales $n-1$-uples sont absolument convergentes : tous les termes de H sont bornés à l'exception des termes $[A^{ij}]\frac{\partial^2\sigma^r_{s(0)}}{\partial x_i\partial x^j}[u_r]$, dont le produit par λ_1 est une fonction continue et bornée dans Λ. Nous montrerons que cette fonction a pour limite zéro quand $\lambda_1\to 0$ et que H est absolument intégrable dans Λ.

23. Avant d'étudier la limite pour $\eta=0$ des relations intégrales, il nous faut calculer les *valeurs pour* $\lambda_1=0$ *des diverses fonctions que nous venons de considérer.*

Rappelons tout d'abord que

$$\lim_{\lambda_1=0}\frac{\Delta^1_l}{\Delta}=\lim_{\lambda_1=0}\frac{p^0_j D^j_l}{D}=p^0_l,$$
$$\lim_{\lambda_1=0}\frac{\partial p^0_h}{\partial\lambda_u}\frac{\Delta^u_l}{\Delta}\lambda_1=-\delta^h_l+p^0_l p^0_h.$$

Limites relatives à σ. — Nous avons posé (*cf.* § 11)

$$\sigma = \frac{\Phi_0}{\Delta^{\frac{1}{2}}},$$

c'est-à-dire

$$\sigma = \frac{1}{\lambda_1^{\frac{n}{2}-1} |D|^{\frac{1}{2}}}.$$

Nous avons donc

$$\lim_{\lambda=0} \lambda_1^{\frac{n}{2}-1} \sigma = 1.$$

Les quantités que nous écrivons étant continues et bornées dans Λ (en particulier au voisinage de $\lambda_1 = 0$), les calculs suivants sont validés : nous avons pour $\lambda_1 = 0$:

$$\lambda_1^{\frac{n}{2}-1} \frac{\partial\sigma}{\partial p_h^0} = 0, \qquad \lambda_1^{\frac{n}{2}} \frac{\partial\sigma}{\partial\lambda_1} = 1 - \frac{n}{2} \qquad \text{pour } \lambda_1 = 0,$$

d'où

$$\lambda_1^{\frac{n}{2}} \frac{\partial\sigma}{\partial x^i} = -p_i^0\left(1 - \frac{n}{2}\right) \qquad \text{pour } \lambda_1 = 0$$

et

$$(23.1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\lambda_1^{\frac{n}{2}+1} \frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x^i}\right) = \frac{n}{2}\left(1 - \frac{n}{2}\right)p_i^0, \\ &\lambda_1^{\frac{n}{2}} \frac{\partial}{\partial p_h^0}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x^i}\right) = -\delta_i^h\left(1 - \frac{n}{2}\right). \end{aligned} \right.$$

Calculons la limite pour $\lambda_1 = 0$ de $\lambda_1^{\frac{n}{2}+1} \sum_{i=1}^{n=1} \frac{\partial^2\sigma}{\partial x^{i^2}}$, qui interviendra dans les équations déterminant $\sigma^r_{s(k-1)}$

Nous posons

$$\lim_{\lambda_1=0} \lambda_1^{\frac{n}{2}+1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2\sigma}{\partial x^{i^2}} = \overline{M}_{0(k)}.$$

D'où

$$\lim_{\lambda_1=0} \lambda_1^{\frac{n}{2}+1} [A^{ij}] \frac{\partial^2 \sigma^r_{s(k)}}{\partial x^i\, \partial x^j} = -\delta^r_s \overline{M}_{0(k)}.$$

Nous déduisons des égalités (23.1)

$$(23.2) \qquad \overline{M}_{0(k)} = \left(1 - \frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2} - 2\right).$$

Nous voyons que $\overline{M}_{0(k)}$ est différent de zéro pour $n > 4$.

Limites relatives à $\sigma^r_{s(h)}$. — Nous savons que tous les termes de $\lambda_1^{\frac{n}{2}+h-h} \varphi^r_{s(h)}$ tendent vers zéro avec λ_1, à l'exception peut-être du terme

$$\lambda_1^{\frac{n}{2}+k-h} [A^{ij}] \frac{\partial^2 \sigma^r_{hs(+1)}}{\partial x^i\, \partial x^j},$$

qui est continu et borné dans Λ.

Nous montrerons que la valeur de cette fonction pour $\lambda_1 = 0$ est de la forme $\delta^r_s \overline{\mathrm{M}}_{0(h+1)}$ où $\overline{\mathrm{M}}_{0(h+1)}$ désigne un nombre différent de zéro pour $h+1 \neq 0$ et égal à zéro pour $h+1=0$. Supposons pour cela que $\lambda_1^{\frac{n}{2}+k-l+1}[\mathrm{A}^{ij}]\dfrac{\partial^2 \sigma^r_{s(l)}}{\partial x^i \partial x^j}$ a pour valeur pour $\lambda_1 = 0$ le nombre $\delta^r_s \overline{\mathrm{M}}_{0(l)}$ pour $l \geqq h+1$ et calculons la valeur pour $\lambda_1 = 0$ de $\lambda_1^{\frac{n}{2}+k-h+1}[\mathrm{A}^{ij}]\dfrac{\partial^2 \sigma^r_{s(h)}}{\partial x^i \partial x^j}$. Rappelons que

$$\sigma^r_{s(h)} = \sigma\omega^r_{l(h)}\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{\varphi^q_{s(h)}\hat{\omega}^l_{q(h)}}{2\sigma}\,d\lambda_1,$$

avec

$$\lim_{\lambda_1=0}\lambda_1^{\frac{n}{2}-1}\sigma\omega^r_{l(h)} = \delta^r_l,$$

$$\lim_{\lambda_1=0}\lambda_1^{k-h+1}\frac{\varphi^q_{s(h)}\hat{\omega}^l_{q(h)}}{2\sigma} = \frac{1}{2}\,\delta^l_s\,\overline{\mathrm{M}}_{0(h+1)},$$

d'où

$$\lim_{\lambda_1=0}\lambda_1^{k-h}\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{\varphi^q_{s(h)}\hat{\omega}^l_{q(h)}}{2\sigma} = \frac{1}{2(k-h)}\,\delta^l_s\,\overline{\mathrm{M}}_{0(h+1)}$$

et

$$\lim_{\lambda_1=0}\lambda_1^{\frac{n}{2}+k-h-1}\sigma^r_{s(h)} = \frac{1}{2(k-h)}\,\delta^r_s\,\overline{\mathrm{M}}_{0(h+1)}.$$

Nous en déduisons

$$\lim_{\lambda_1=0}\lambda_1^{\frac{n}{2}+k-h}\frac{\partial\sigma^r_{s(a)}}{\partial p^0_i} = 0,$$

$$\lim_{\lambda_1=0}\lambda_1^{\frac{n}{2}+k-h}\frac{\partial\sigma^r_{s(h)}}{\partial\lambda_1} = -\left(\frac{n}{2}+h-k-1\right)\frac{1}{2(k-h)}\,\delta^r_s\,\overline{\mathrm{M}}_{0(h+1)}.$$

Donc

$$\lim_{\lambda_1=0}\lambda_1^{\frac{n}{2}+k-h}\frac{\partial\sigma^r_{s(h)}}{\partial x^i} = \frac{\frac{n}{2}+k-h-1}{2(k-h)}\,\delta^r_s\,\overline{\mathrm{M}}_{0(h+1)}p^0_i, \tag{23.3}$$

un calcul sans difficulté montre de même que

$$\lim_{\lambda_1=0}\lambda_1^{\frac{n}{2}+k-h+1}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2\sigma^r_{s(h)}}{\partial x^{i2}} = \frac{\left(\frac{n}{2}+k-h-1\right)\left(-\frac{n}{2}+k-h+2\right)}{2(k-h)}\,\delta^r_s\,\overline{\mathrm{M}}_{0(h+1)}.$$

Ce qui est bien un nombre de la forme $\delta^r_s\overline{\mathrm{M}}_{0(h)}$.

Nous reportant à l'expression (**23.3**) de $\overline{\mathrm{M}}_{0(k)}$, nous trouvons l'expression générale de $\overline{\mathrm{M}}_{0(h)}$ sous la forme suivante :

$$\overline{\mathrm{M}}_{0(h)} = \frac{\displaystyle\prod_{l=n}^{k}\left(\frac{n}{2}+k-l-1\right)\left(-\frac{n}{2}+k-l+2\right)}{2^{k-h-1}\displaystyle\prod_{l=h}^{k-1}(k-l)},$$

c'est-à-dire, puisque $k = \frac{n}{2} - 2$,

$$\overline{\mathrm{M}}_{0(h)} = \frac{\prod_{l=0}^{k} - \left(\frac{n}{2} - 1 + k - l\right) l}{2^{k-h-1} \prod_{l=h}^{k=1} (k-l)}. \tag{23.4}$$

Nous voyons que $\overline{\mathrm{M}}_{0(h)}$ est $\neq 0$ pour $0 < h$ si $n > 4$.

24. Limites relatives à $\sigma^r_{s(0)}$. — Ces limites jouent seules un rôle dans le calcul effectif des limites des intégrales (22.1) quand $\eta \to 0$. Nous avons vu, en effet, que tous les termes intervenant dans ces intégrales tendent vers zéro avec λ_1, excepté des termes contenant les dérivées de $\sigma^r_{s(0)}$.

1° Les formules (23.2) et (23.3) montrent que

$$\lim_{\lambda_1=0} \lambda_1^{n-2} \frac{\partial \sigma^r_{s(0)}}{\partial x^l} = - \delta^r_s p^0_l \frac{\prod_{l=0}^{k} \left(\frac{n}{2} - 2 - 3\right)}{\prod_{l=0}^{k-1} (n-3-l)} \frac{\Gamma(k)}{2^k} = - \delta^r_s p^0_l \mathrm{K}_n. \tag{24.1}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda_1=0} \lambda_1^{n-2} [\mathrm{A}^{ij}] p_j [u_r] \frac{\partial \sigma^r_{s(0)}}{\partial x^i} &= - p^0_l \, u_s(x^\alpha_0) \lim \lambda_1^{n-2} \frac{\partial \sigma^r_s}{\partial x^l} \\ &= \mathrm{K}_n [u_s], \end{aligned} \tag{24.2}$$

où K_n, donné par (24.1), est un nombre non nul. Cette égalité permettra de calculer la limite des intégrales $n - 2$-uples.

2° Il résulte de l'expression générale de $\overline{\mathrm{M}}_{0(h)}$ que $\overline{\mathrm{M}}_{0(0)} = 0$, donc

$$\lim_{\lambda_1=0} \lambda_1^{n-1} [\mathrm{A}^{ij}] \frac{\partial^2 \sigma^r_{s(0)}}{\partial x^i \partial x^j} = 0.$$

Tous les termes de H, à l'exception de

$$\mathrm{H}_1 = [\mathrm{A}^{ij}] \frac{\partial^2 \sigma^{s(0)}_r}{\partial x^i \partial x^j} \Delta [u_r];$$

sont bornés dans Λ $\left(\text{rappelons que } \frac{\Delta}{\lambda_1^{n-2}} \text{ est borné dans } \Lambda\right)$, $\lambda_1 \mathrm{H}_1$ est borné dans Λ et a pour limite zéro quand $\lambda_1 = 0$. Nous montrerons que H_1, donc aussi H est absolument intégrable dans Λ.

25. Étude de

$$\mathrm{H}_1 = [\mathrm{A}^{ij}] \frac{\partial^2 \sigma^r_{s(0)}}{\partial x^i \partial x^j} \Delta [u_r];$$

$\frac{\Delta}{\lambda_1^{n-2}} [u_r]$ étant continu et borné dans Λ, étudions H'_1

$$\mathrm{H}'_1 = [\mathrm{A}^{ij}] \frac{\partial^2 \sigma^r_{s(0)}}{\partial x^i \partial x^j} \lambda_1^{n-2}.$$

Puisque $\sigma^{r}_{s(0)} = \sigma\omega^{r}_{t(0)}\chi^{t\,0)}_{(s}$, il résulte des propriétés de σ, ω^{r}_{t} et de leurs dérivées (*cf.* § 11 et 12) que $\lambda_1^{n-2}\frac{\partial^2\sigma^{r}_{s(0)}}{\partial x^i\,\partial x^j}$ est une forme linéaire de

$$\lambda_1^{\frac{n}{2}-1}\frac{\partial^2\chi^{r}_{s(0)}}{\partial x^i\,\partial x^j},\quad \lambda_1^{\frac{n}{2}-2}\frac{\partial\chi^{r}_{s(0)}}{\partial x^i},\quad \lambda_1^{\frac{n}{2}-3}\chi^{r}_{s(0)}$$

dont les coefficients sont des fonctions continues et bornées dans Λ de la forme $\frac{\mathcal{R}}{|D|^{\frac{1}{2}}}$.

$\lambda_1 H'_1$ est donc une fonction continue et bornée dans Λ dont la valeur pour $\lambda_1 = 0$ [*cf.* (24.1)] est

$$\lim_{\lambda_1=1}\lambda_1 H'_1 = 0.$$

Nous pouvons donc écrire

$$\lambda_1 H'_1\,|D|^{\frac{1}{2}} = \lambda_1 H'_1\,|D|^{\frac{1}{2}} - \lim_{\lambda_1=0}\lambda_1 H'_1\,|D|^{\frac{1}{2}}$$

sous forme d'un polynome de fractions du type $\mathcal{R}$, de

$$\lambda_1^{\frac{n}{2}}\frac{\partial^2\chi^{r}_{s(0)}}{\partial x^i\,\partial x^j},\quad \lambda_1^{\frac{n}{2}-1}\frac{\partial\chi^{r}_{s(0)}}{\partial x^i},\quad \lambda_1^{\frac{n}{2}-2}\chi^{s(0)}_{r},$$

et de quantités de la forme $\mathcal{R} - \mathcal{R}_0$ (où $\mathcal{R}_0$ est la valeur de $\mathcal{R}$ pour $\lambda_1 = 0$),

$$\lambda_1^{\frac{n}{2}}\frac{\partial^2\chi^{r}_{s(0)}}{\partial x^i\,\partial x^j} - \lim_{\lambda_1=0}\lambda_1^{\frac{n}{2}}\frac{\partial^2\chi^{r}_{s(0)}}{\partial x^2\,\partial x^2},\quad \ldots,\quad \lambda_1^{\frac{n}{2}-2}\chi^{r}_{s(0)} - \lim_{\lambda_1=0}\lambda_1^{\frac{n}{2}-2}\chi^{r}_{s(0)}$$

dont les termes sont du premier degré au moins par rapport à l'ensemble de ces dernières quantités (formule de Taylor).

$H'_1\,|D|^{\frac{1}{2}}$ est donc une forme linéaire de $\frac{1}{\lambda_1}(\mathcal{R} - \mathcal{R}_0)$,

$$\frac{1}{\lambda_1}\left[\lambda_1^{\frac{n}{2}}\frac{\partial^2\chi^{r}_{s(0)}}{\partial x^i\,\partial x^j} - \lim_{\lambda_1=0}\lambda_2^{\frac{n}{2}}\frac{\partial^2\chi^{r}_{s(0)}}{\partial x^i\,\partial x^j}\right],\quad \ldots,\quad \frac{1}{\lambda_1}\left[\lambda_1^{\frac{n}{2}-2}\chi^{r}_{s(0)} - \lim_{\lambda=0}\lambda_1^{\frac{n}{2}-2}\chi^{r}_{s(0)}\right]$$

dont tous les coefficients sont continus et bornés dans Λ. Étudions les quantités précédemment énumérées.

1° Les quantités de la forme $\frac{\mathcal{R} - \mathcal{R}_0}{\lambda_1}$ sont continues et bornées dans Λ.

Il résulte, en effet, des équations vérifiées par les fonctions X et Ω,

$$X = \int_0^{\lambda_1} E(X)\quad d\lambda_1 + X_0,$$

$$\Omega = \int_0^{\lambda_1} F(X, r)\,d\lambda_1 + \Omega_0$$

que les fonctions $\frac{X - X_0}{\lambda_1}$ et $\frac{\Omega - \Omega_0}{\lambda_1}$ sont continues et bornées dans Λ. Les hypothèses de dérivabilité faites sur les coefficients $A^{\lambda\mu}$ ([12]) permettent de montrer

([12]) Nous verrons au chapitre III qu'il est essentiel que les résultats suivants, qui permettent de montrer la convergence des intégrales figurant dans nos foruules de Kirchoff, ne fassent pas intervenir la dérivabilité des autres coefficients (B^{λ}_{s} et f_s) des équations (E).

(*cf.* démonstrations analogues dans chap. I, A, § 15) que les quantités $\frac{A - A_0}{\lambda_1}$ et $\frac{\tilde{X} - \tilde{X}_0}{\lambda_1}$ qui interviennent dans H'_1 sont continues et bornées.

2° Les quantités $\frac{1}{\lambda_1}\left\{\lambda_1^{\frac{n}{2}-2}\chi^r_{s(0)} - \lim_{\lambda_1=0}\lambda_1^{\frac{n}{2}-2}\chi^r_{s(0)}\right\}$, et les quantités analogues formées avec les dérivées premières et secondes de $\chi^r_{s(0)}$ sont absolument intégrables dans Λ : nous démontrerons cette propriété par récurrence à partir de la propriété suivante de $\chi^r_{s(k-1)}$.

a. $\frac{1}{\lambda_1}\left\{\lambda_1\chi^r_{s(k-1)} - \lim_{\lambda_1=0}\lambda_1\chi^r_{s(k-1)}\right\}$ est absolument intégrable dans Λ. En effet, nous avons vu [*cf.* (19.1)] que $\chi^r_{s(k-1)}$ est de la forme suivante :

$$\chi^r_{s(k-1)} = \int_{\lambda_1}^{-\infty} \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^2}\, d\lambda_1.$$

Nous avons donc

$$\lim \lambda_1 \chi^r_{s(k-1)} = \mathcal{R}_0,$$

d'où nous déduisons l'égalité suivante :

$$(25.1) \qquad \frac{1}{\lambda_1}\left\{\lambda_1\chi^r_{s(k-1)} - \lim_{\lambda_1=0}\lambda_1\chi^r_{s(k-1)}\right\} = \int_{\lambda_1}^{-\infty} \frac{\mathcal{R} - \mathcal{R}_0}{\lambda_1^2}\, d\lambda_1.$$

Nous avons vu que $\frac{\mathcal{R} - \mathcal{R}_0}{\lambda_1}$ était continu et borné dans Λ.

$$\left|\frac{\mathcal{R} - \mathcal{R}_0}{\lambda_1}\right| \leq M$$

et s'annulle, par définition, pour $\lambda_1 > \varepsilon$.

$\int_{\lambda_1}^{-\infty} \frac{\mathcal{R} - \mathcal{R}_0}{\lambda_1^2}\, d\lambda_1$ est donc absolument intégrable dans Λ. Nous avons, en effet

$$\left|\int_{\lambda_1}^{-\infty} \frac{\mathcal{R} - \mathcal{R}_0}{\lambda_1^2}\, d\lambda_1\right| = \left|\int_{\lambda_1}^{\varepsilon} \frac{\mathcal{R} - \mathcal{R}_0}{\lambda_1^2}\, d\lambda_1\right| \leq 2\, M\, |\operatorname{Log} \lambda_1|,$$

d'où

$$\left|\int_0^{\lambda_1}\left|\int_{\lambda_1}^{-\infty} \frac{\mathcal{R} - \mathcal{R}_0}{\lambda_1^2}\, d\lambda_1\right| d\lambda_1\right| \leq 2 M\, |\lambda_1(1 + |\operatorname{Log}\lambda_1|)|.$$

La quantité (25.1) est donc absolument intégrable dans Λ; nous voyons de plus que l'intégrale considérée est aussi petite que l'on veut pour $|\lambda_1|$ assez petit.

b. Montrons que la quantité

$$\chi_h \equiv \frac{1}{\lambda_1}\left\{\lambda_1^h \chi^r_{s(k-h)} - \lim_{\lambda_1=0}\lambda_1^h \chi^r_{s(k-h)}\right\}$$

est absolument intégrable dans Λ s'il en est ainsi des quantités analogues formées avec $\chi^r_{s(k-l)}$ pour $l < h$.

Rappelons que $\chi^r_{s(k-h)}$ est donné par l'égalité suivante :

$$\chi^r_{s(k-h)} = \int_{\lambda_1}^{-\infty} \Phi_h\, d\lambda_1.$$

Nous avons vu que $\lambda_1^{h+1}\Phi_h = \Phi^h$ est une fonction continue et bornée dans Λ. En dehors de $\Lambda(|\lambda_1| > \varepsilon|)$, nous remplaçons Φ_h par $\frac{\Phi_0^h}{\lambda_1^{h+1}}$, Φ_0^h désignant la valeur de Φ^h pour $\lambda_1 = 0$. Il est clair que $\lambda_1^h \int_{\lambda_1}^{-\infty} \Phi_h \, d\lambda_1$ est une fonction continue et bornée dans Λ dont la valeur pour $\lambda_1 = 0$ est

$$\lim_{\lambda_1=0} \lambda_1^h \int_{\lambda_1}^{-\infty} \Phi_h \, d\lambda_1 = \lambda_1^h \int_{\lambda_1}^{-\infty} \frac{\Phi_0^h}{\lambda_1^{h+1}} \, d\lambda_1.$$

Nous avons montré au paragraphe **19** que Φ_h est de la forme suivante :

$$\Phi_h = \sum_{l=1}^{h-1} \left\{ \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1} \Phi_l + \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^2} \int_{\lambda_1}^{-\infty} \Phi_l \, d\lambda_1 \right\} + \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^2}$$

et nous avons

$$\chi_h = \frac{1}{\lambda_1} \left\{ \lambda_1^h \int_{\lambda_1}^{-\infty} \Phi_h \, d\lambda_1 - \lim_{\lambda_1=0} \lambda_1^h \int_{\lambda_1}^{-\infty} \Phi_h \, d\lambda_1 \right\}.$$

Nous voyons donc que χ_h peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\chi_h = \chi'_h + \frac{1}{\lambda_1} \Bigg\{ & \lambda_1^h \int_{\lambda_1}^{\infty} \left(\frac{\mathcal{R}\Phi_{h-1}}{\lambda_1} + \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^2} \int_{\lambda_1}^{-\infty} \Phi_{h-1} \, d\lambda_1 \right) d\lambda_1 \\ & - \lim_{\lambda_1=0} \lambda_1^h \int_{\lambda_1}^{-\infty} \left(\frac{\mathcal{R}\Phi_{h-1}}{\lambda_1} + \frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^2} \int_{\lambda_1}^{-\infty} \Phi_{h-1} \, d\lambda_1 \right) d\lambda_1 \Bigg\},\end{aligned}$$

où χ'_h désigne une fonction continue et bornée dans Λ.

C'est-à-dire

$$(25.2) \quad \begin{aligned}\chi_h = \chi'_h + \lambda_1^{h-1} \Bigg\{ & \int_{\lambda_1}^{-\infty} \frac{\mathcal{R}\Phi^{h-1} - \mathcal{R}_0 \Phi_0^{h-1}}{\lambda_1^{h+1}} \, d\lambda_1 \\ & + \int_{\lambda_1}^{-\infty} \left(\frac{\mathcal{R}}{\lambda_1^2} \int_{\lambda_1}^{-\infty} \frac{\Phi^{h-1}}{\lambda_1^h} \, d\lambda_1 - \frac{\mathcal{R}_0}{\lambda_1^2} \int_{\lambda_1}^{-\infty} \frac{\Phi_0^{h-1}}{\lambda_1^h} \, d\lambda_1 \right) d\lambda_1 \Bigg\}.\end{aligned}$$

Nous supposerons que χ_{h-1} est absolument intégrable dans Λ et nous montrerons qu'il en est de même de χ_{h-1}. Plus précisément, nous supposerons vérifiée l'inégalité suivante (13) :

$$\left| \lambda_1^{h-2} \int_{\lambda_1}^{-\infty} \frac{|\Phi^{h-1} - \Phi_0^{h-1}|}{\lambda_1^h} \, d\lambda_1 \right| \leq B \, |\operatorname{Log}|\lambda_1||$$

qui entraîne

$$|\chi_{h-1}| \leq B \, |\operatorname{Log}|\lambda_1||.$$

Nous remarquons alors que

$$\left| \lambda_1^{h-1} \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{|\Phi^{h-1} - \Phi_0^{h-1}|}{\lambda_1^{h+1}} \, d\lambda_1 \right|$$

est inférieure à la quantité précédente. Nous avons vu, d'autre part, que $\frac{\mathcal{R} - \mathcal{R}_0}{\lambda_1}$ est

(13) Les inégalités écrites dans ce paragraphe peuvent n'être valables que pour $|\lambda_1|$ assez petit. Nous savons, par ailleurs, que les quantités étudiées sont continues et bornées en dehors d'un voisinage de $\lambda_1 = 0$.

continu et borné; il suffit donc de mettre $\mathcal{R}\Phi^{h-1} - \mathcal{R}_0\Phi_0^{h-1}$ sous la forme $(\mathcal{R} - \mathcal{R}_0)\Phi^{h-1} + \mathcal{R}_0(\Phi^{h-1} - \Phi_0^{h-1})$ pour obtenir une inégalité de la forme suivante :

$$\left| \lambda_1^{h-1} \int_{\lambda_1}^{-\infty} \frac{|\mathcal{R}\Phi^{h-1} - \mathcal{R}_0\Phi_0^{h-1}|}{\lambda_1^{h+1}} d\lambda_1 \right| \leqq B\,|\operatorname{Log}\lambda_1|.$$

Par une transformation analogue, nous voyons que le terme suivant dans l'expression (25.2) de χ_h est inférieure à la quantité suivante :

$$\left| \lambda_1^{h-1} \int_{\lambda_1}^{-\infty} \left\{ \frac{|\mathcal{R} - \mathcal{R}_0|}{\lambda_1^2} \int_{\lambda_1}^{-\infty} \frac{|\Phi^{h-1}|}{\lambda_1^h} d\lambda_1 + \frac{|\mathcal{R}_0|}{\lambda_1^2} \int_{\lambda_1}^{-\infty} \frac{|\Phi^{h-1} - \Phi_0^{h-1}|}{\lambda_1^h} d\lambda_1 \right\} d\lambda_1 \right|.$$

Il est facile de voir que

$$\left| \lambda_1^{h-1} \int_{\lambda_1}^{-\infty} \left\{ \frac{|\mathcal{R} - \mathcal{R}_0|}{\lambda_1^2} \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{|\Phi^{h-1}|}{\lambda_1^h} d\lambda_1 \right\} d\lambda_1 \right|$$

est borné et que

$$\left| \lambda_1^{h-1} \int_{\lambda_1}^{-\infty} \left\{ \frac{|\mathcal{R}_0|}{\lambda_1^2} \int_{\lambda_1}^{-\infty} \frac{|\Phi^{h-1} - \Phi_0^{h-1}|}{\lambda_1^h} d\lambda_1 \right\} d\lambda_1 \right|$$

est inférieur à une quantité de la forme $B\,|\operatorname{Log}\lambda_1|$. Nous voyons ainsi que χ_h est intégrable absolument dans Λ et que, plus précisément

$$\left| \lambda_1^{h-1} \int_{\lambda_1}^{-\infty} \frac{|\Phi^h - \Phi_0^h|}{\lambda_1^{h+1}} d\lambda_1 \right| \leqq B\,|\operatorname{Log}\lambda_1|.$$

C. Q. F. D.

Qui entraîne évidemment

$$|\chi_h| \leqq B\,|\operatorname{Log}\lambda_1|.$$

Le raisonnement par récurrence ainsi fait montre donc que les quantités $\chi_h (k \geqq h \geqq 1)$ sont absolument intégrables dans Λ, les intégrales vérifiant des inégalités de la forme suivante :

$$\left| \int_0^{\lambda_1} |\chi_h|\, d\lambda_1 \right| \leqq B\,|\lambda_1|\,(1 + |\operatorname{Log}\lambda_1|).$$

Une démonstration à peu près identique montre que les quantités analogues relatives à $\frac{\partial \chi^r_{s(k-h)}}{\partial x^i}$ et $\frac{\partial^2 \chi^r_{s(k-h)}}{\partial x^i\, \partial x^j}$ sont absolument intégrables, les intégrales vérifiant des inégalités de forme analogue. On en déduit finalement que H_1, donc H est absolument intégrable et vérifie une inégalité de la forme suivante :

$$\left| \int_0^{\lambda_1} |H|\, d\lambda_1 \right| \leqq M\,|\lambda_1 \operatorname{Log}|\lambda_1||, \tag{25.3}$$

où M est une constante qui ne dépend que des bornes B.

26. Limite quand $\eta \to 0$ des relations intégrales (22.1). — Les résultats des paragraphes précédents montrent que les intégrales sont convergentes quand η

tend vers zéro : nous avons montré en effet que H était absolument intégrable et que I était borné dans Λ. Nous avons trouvé, par ailleurs,

$$\lim_{\lambda_1=0} \mathrm{I} = \lim_{\lambda_1=0} [\mathrm{A}^{ij}] \frac{\partial \sigma^r_{s(0)}}{\partial x^i} [u_r] p_i = [u_s]_{\lambda_1=0} \mathrm{K}_n,$$

où K_n est le nombre figurant dans l'égalité (**24**.1), d'où la limite pour $\eta = 0$ des relations intégrales **22**.1

$$(\mathbf{26}.1) \quad \int \cdots \int_{\mathrm{V}} \mathrm{H}\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-1} + \int \cdots \int_{\Sigma_0} \{\mathrm{I}\}_{x^n=0}\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-1} = k_n u_s(x_0^\alpha),$$

où k_n est le produit de K_n par l'aire de la sphère unité à $n-2$ dimensions (Σ_0 désigne la surface de cette sphère).

Pour simplifier le calcul des intégrales précédentes, nous les écrirons en variables x^n, λ_u au lieu de λ_1, λ_u (représentation biunivoque, *cf.* § **4**). Nous obtenons :

$$(1) \quad u_s(x_0^\alpha) = \int_{x^n=0}^{x_0^n} \int \cdots \int_{\Sigma_0} \mathrm{H}\, dx^n\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-1} + \int \cdots \int_{\Sigma_0} \{\mathrm{I}\}_{x^n=0}\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-1}$$

où l'on a posé, cette fois

$$(\mathbf{26}.2) \quad \begin{cases} \mathrm{H} = \dfrac{1}{k_n} \left\{ [u_r] \mathrm{L}^{r(l)}_{s(l)} + \dfrac{\partial^l f_s}{\partial x^{nl}} \sigma^r_{s(l)} \right\} \dfrac{\Delta}{\mathrm{A}^{nn} + \mathrm{A}^{in} p_i}, \\ \mathrm{I} \; = \dfrac{1}{k_n} \left\{ \dfrac{\mathcal{E}^i_s \Delta p_i}{\mathrm{A}^{nn} + \mathrm{A}^{in} p_i} \right\}. \end{cases}$$

Les quantités H et I s'expriment simplement (*cf.* les paragraphes ci-dessus) en fonction :

1° Des quantités $\mathrm{X}(x^i, p_i, y^j_i, z^j_i, y^j_{ih}, \ldots)$, solutions d'équations de la forme :

$$(2) \qquad \mathrm{X} = \int_{x_0^n}^{x^n} \mathrm{E}\, dx^n + \mathrm{X}_0,$$

où E est une des expressions ainsi désignée au paragraphe **5**;

2° Des quantités $\Omega(\omega^r_s, \omega^r_{si}, \ldots)$, solutions d'équations de la forme :

$$(3) \qquad \Omega = \int_{x_0^n}^{x^n} \mathrm{F}\, dx^n + \Omega_0;$$

X et Ω sont les fonctions de x_0^α, x^n, $\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$;

X_0 et Ω_0 sont les valeurs de X et Ω pour $x^n = x_0^n$;

3° Des quantités $\mathrm{U}(x^\alpha)$ et $\mathrm{A}(x^\alpha)$ (fonctions inconnues et coefficients des équations E ainsi que leurs dérivées partielles jusqu'aux ordres respectivement $4 + 2k = n$, $2 + 2k = n - 2$ et 0 pour les $\mathrm{A}^{\lambda\mu}$, $\mathrm{B}^{r\lambda}_s$ et f_s), où x^i doit être remplacé par la fonction X correspondante. Dans I interviennent de plus les quantités $u_p(x^i, 0)$ et $\dfrac{\partial u_p}{\partial x^\alpha}(x^i, 0)$ $\left(p = 0, 1, \ldots, \dfrac{n}{2} - 2\right)$.

Nous voyons ainsi que :

Les équations (1), (2), (3) forment un système de relations intégrales où ne figurent, outre les données $A(x^\alpha)$, que les inconnues X, Ω, U.

D. — Transformation variable.

27. Les formules ci-dessus [(1), (2), (3)] ont été établies dans l'hypothèse où les coefficients $A^{\lambda\mu}$ prennent au point M_0, sommet du conoïde caractéristique, les valeurs particulières $\pm\delta^\mu_\lambda$. Il est aisé d'obtenir des formules analogues, valables en tout point d'un domaine V où les coefficients sont astreints seulement à vérifier les hypothèses d'hyperbolicité normale et de différentiabilité du paragraphe 2 : la méthode est identique à celle utilisée dans A (chap. I, § 22). On considère le changement de variables linéaire, attaché à chaque point M_0 de V où les $A^{\lambda\mu}$ ont les valeurs $A_0^{\lambda\mu}$, suivant

$$y^\alpha = a^0_{\alpha\beta} x^\beta, \qquad x^\beta = a_0^{\alpha\beta} y^\alpha, \tag{27.1}$$

avec

$$a_0^{\alpha\lambda} a_0^{\alpha\mu} = A_0^{\lambda\mu}$$

et, de plus

$$a_0^{in} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad A_0^{nn} = (a_0^{nn})^2.$$

D'après les hypothèses faites sur la forme quadratique $A^{\lambda\mu}X_\lambda X_\mu$ les quantités $a^0_{\alpha\beta}$ et $a_0^{\alpha\beta}$ sont des fonctions continues et bornées des coordonnées x_0^α, dans V.

Si nous écrivons les équations E à l'aide des nouvelles variables y^α, nous obtenons un système qui s'écrit :

$$E^\star \equiv A^{\star\lambda\mu}\frac{\partial^2 u_s}{\partial y^\lambda \partial y^\mu} + B_s^{\star t\lambda}\frac{\partial u_t}{\partial y^\lambda} + f_s = 0,$$

où les coefficients $A^{\star\lambda\mu}$ et $B_s^{\star t\lambda}$ sont :

$$A^{\star\lambda\mu} = A^{\alpha\beta} a^0_{\lambda\alpha} a^0_{\mu\beta}, \qquad B_s^{\star t\lambda} = B_s^{t\alpha} a^0_{\lambda\alpha}.$$

Les $A^{\star\lambda\mu}$ prennent au point M_0 les valeurs suivantes :

$$A_0^{nn} = 1, \qquad A_0^{in} = 0, \qquad A_0^{ij} = -\delta_i$$

et satisfont dans un domaine $V^\star(y)$ correspondant au domaine V par la représentation (27.1) aux hypothèses du paragraphe 2. Nous écrirons donc (*cf.* A, chap. I, § 22) des relations intégrales vérifiées par les solutions des équations $E^\star$, en chaque point de V, copiées sur les relations intégrales (26.2). Nous repasserons ensuite aux variables primitives x^α. Nous remplacerons pour cela le paramètre y^n par $x^n = a^{nn} y^n$ et remplacerons les équations de la forme

$$y^\alpha = \int_{x_0^n}^{x^n} E\, dx^n$$

par leurs combinaisons linéaires de coefficients $a^0_{\alpha\beta}$ qui seront de la forme

$$x^\alpha = \int_{x_0^n}^{x^n} \mathrm{E}\, dx^n + x_0^\alpha$$

(*cf.* calculs identiques dans A, chap. I, § 22). Nous obtiendrons ainsi un *système d'équations intégrales vérifié par les solutions des équations* E *en tout point du domaine* V.

E. — Récapitulation des résultats du chapitre I.

28. Nous considérons un système d'équations aux dérivées partielles linéaires du type

$$A^{\lambda\mu}\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^\lambda\, \partial x^\mu} + B_s^{t\lambda}\frac{\partial u_t}{\partial x^\lambda} + f_s = 0 \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n).$$

Hypothèses. — Dans le domaine D défini par

$$0 \leq x^n \leq \varepsilon, \qquad |x^i - \bar{x}^i| \leq d.$$

1° La forme quadratique $A^{\lambda\mu}X_\lambda X_\mu$ est de type hyperbolique normal $A^{nn} > 0$, forme quadratique $A^{ij}X_iX_j$ définie < 0.

2° Les coefficients $A^{\lambda\mu}$, $B_s^{t\lambda}$ et f_s admettent des dérivées partielles continues et bornées jusqu'aux ordres respectivement n, $n-2$ et $\frac{n}{2}-2$, par rapport aux variables respectivement x^α, x^α et x^n.

3° Les dérivées d'ordres respectivement n, $n-2$ et $\frac{n}{2}-2$ des coefficients $A^{\lambda\mu}$, $B_s^{t\lambda}$ et f_s satisfont à des conditions de Lipschitz données.

Conclusion. — Toute solution des équations E possédant dans D des dérivées partielles jusqu'à l'ordre $\frac{n}{2}-1$, continues et bornées, par rapport aux x^α vérifie, dans D, un système d'équations intégrales $\mathcal{J}$ de la forme suivante :

$$\chi = \int_{x_0^n}^{x^n} \mathrm{E}\, dx^n + \mathrm{X}_0,$$

$$\Omega = \int_{x_0^n}^{x^n} \mathrm{F}\, dx^n + \Omega_0,$$

$$\mathrm{U} = \int_{x_0^n}^{0}\int\cdots\int_{\Sigma_0} \mathrm{H}\, dx^n\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-1} + \int\cdots\int_{\Sigma_0} \mathrm{I}\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-1}.$$

Les quantités E, F, H s'expriment au moyen des coefficients des équations (E) et de leurs dérivées partielles jusqu'aux ordres respectivement

$$2k+4 = n, \qquad 2k+2 = n-2 \qquad \text{et} \qquad k = \frac{n}{2}-2$$

pour $A^{\lambda\mu}$, $B_s^{t\lambda}$ et f_s, ainsi que des fonctions X, Ω et U.

On montre que le système d'équations intégrales $\mathcal{J}$, considéré indépendamment des équations E comme système d'équations aux fonctions inconnues X,

Ω, U admet une solution unique, si l'on remplace dans I, $u(x^i, 0)$ et $\frac{\partial u_p}{\partial x^\alpha}(x^i, 0)$ par des fonctions données, et que cette solution vérifie effectivement les équations E. Nous n'insisterons pas sur cette résolution qui ne sera qu'un cas particulier de la résolution que nous allons donner du problème de Cauchy pour des équations hyperboliques non linéaires.

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS NON LINÉAIRES.
FORMATION DU SYSTÈME D'ÉQUATIONS INTÉGRALES VÉRIFIÉ PAR LES SOLUTIONS.

1. Nous considérons un système F de N équations aux dérivées partielles du second ordre à N fonctions inconnues W_S et n (pair), variables x^α du type suivant :

$$A^{\lambda\mu}\frac{\partial^2 W_S}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + f_S = 0 \qquad (S = 1, 2, \ldots, N;\ \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n).$$

Les coefficients $A^{\lambda\mu}$ et f_S sont des fonctions données des inconnues W_S, de leurs dérivées partielles premières $\frac{\partial W_S}{\partial x^\alpha}$ et des variables x^α.

Nous faisons sur les coefficients $A^{\lambda\mu}$ (qui sont les mêmes pour les N équations) et f_S les hypothèses suivantes :

2. Hypothèses H. — Dans un domaine D de l'espace des variables x^α centré au point $\overline{M}$ de coordonnées $\overline{x^i}$, o et défini par :

$$|x^i - \overline{x^i}| \leq d, \qquad |x^n| \leq \varepsilon$$

et pour des valeurs des fonctions inconnues W_S et de leurs dérivées partielles premières $\frac{\partial W_S}{\partial x^\alpha}$ satisfaisant à :

$$|W_S - \overline{W}_S| \leq l, \qquad \left|\frac{\partial W_S}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \overline{W}_S}{\partial x^\alpha}\right| \leq l,$$

$\left(\overline{W}_S \text{ et } \frac{\partial \overline{W}_S}{\partial x^\alpha} \text{ sont les valeurs de } W_S \text{ et } \frac{\partial W_S}{\partial x^\alpha} \text{ en } \overline{M}\right)$:

a. Les coefficients $A^{\lambda\mu}$ et f_S admettent des dérivées partielles par rapport à tous leurs arguments jusqu'à l'ordre $h + k$.

b. La forme quadratique $A^{\lambda\mu}X_\lambda X_\mu$ est de type hyperbolique normal.

Nous montrerons que, sous ces hypothèses, les solutions $h + k + 2$ fois différentiables des équations F satisfont à un système d'équations intégrales analogue à $\mathcal{J}$: il nous suffira pour cela d'appliquer la méthode du chapitre I aux équations (F′) dérivées h fois [14] (nous prendrons $h \geq 2k + 5$) par rapport aux

---

[14] L'application directe aux équations (F) de la méthode du chapitre I conduirait à des équations intégrales dont les seconds membres contiendraient, outre les quantités X, Ω et W figurant aux premiers membres les dérivées des W jusqu'à l'ordre $2k + 5$.

variables x^α des équations (F), en considérant les coefficients $A^{\lambda\mu}$ et f_S comme des fonctions données des variables x^α. Nous aurons, par exemple,

$$\frac{\delta A^{\lambda\mu}}{\delta x^\alpha} = \frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial W_S}\frac{\partial W_S}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial\left(\frac{\partial W_S}{\partial x^\beta}\right)}\frac{\partial^2 W_S}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} + \frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha}$$

en désignant par δ la différentiation par rapport à x^α d'une fonction considérée comme fonction donnée des variables x^α.

3. **Équations dérivées des équations** (F) **par rapport aux** x^α. — Les équations F étant :

$$\text{(F)} \qquad A^{\lambda\mu}(W_T, W_{T\alpha}, x^\alpha)\frac{\partial^2 W_S}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + f_S(W_T, W_{T\alpha}, x^\alpha).$$

Les équations dérivées par rapport aux x^α s'écrivent :

$$\frac{\delta F_S}{\delta x^{\alpha_1}} \equiv A^{\lambda\mu}\frac{\partial^2 W_{S\alpha_1}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + \left(\frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial x^{\alpha_1}} + \frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial W_T}W_{T\alpha_1} + \frac{\partial A^{\lambda\mu}}{\partial W_{T\alpha}}W_{T\alpha\alpha_1}\right)W_{S\lambda\mu}$$
$$+ \frac{\partial f_S}{\partial x^{\alpha_1}} + \frac{\partial f_S}{\partial W_T}W_{T\alpha_1} + \frac{\partial f_S}{\partial W_{T\alpha}}W_{T\alpha\alpha_1} = 0.$$

Il est clair que les équations dérivées h fois des équations (F) seront de la forme :

$$\text{(F')} \qquad \frac{\delta^h F_S}{\delta x^{\alpha_1}\dots\delta x^{\alpha_h}} \equiv F_s \equiv A^{\lambda\mu}\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + B_s^{t\lambda}\frac{\partial u_t}{\partial x^\lambda} + f_s = 0,$$

où u_s désigne une dérivée $h^{\text{ième}}$ de W_S, et où les coefficients $B_s^{t\lambda}$ ne sont fonctions que de W_T, $W_{T\alpha}$, $W_{T\alpha\beta}$. Les f_s sont fonctions de W_T, $W_{T\beta_1}$, ..., $W_{T\beta_1\dots\beta_h}$.

Nous serons amenés, pour appliquer aux équations F_S les résultats du chapitre I, à dériver k fois par rapport à x^n les équations $\frac{\delta^h F_S}{\delta x^{\alpha_1}\dots\delta x^{\alpha_h}} = 0$.

Il sera important que les équations ne contiennent les dérivées

$$W_{T\alpha_1\dots\alpha_i p} = \frac{\partial^p W_{T\alpha_1\dots\alpha_i}}{\partial x^{n p}} \qquad (\text{avec } i + p > h)$$

que linéairement de manière à pouvoir annuler leurs coefficients en les faisant entrer dans les équations $\mathcal{D}_s^{r(p)} = 0$ déterminant les fonctions auxiliaires : il faut pour cela que les quantités $\frac{\delta^h F_S}{\delta x^{\alpha_1}\dots\delta x^{\alpha_h}}$ soient linéaires par rapport aux dérivées de W_S d'ordre supérieur à $h - k$. Nous pouvons obtenir ce résultat, pour des valeurs convenables de h et k, en remarquant que ces équations sont certainement linéaires par rapport aux dérivées de W_S d'ordre supérieur ou égal à $\frac{h+3}{2}$, l'ordre total des dérivations incluses dans un terme de $\frac{\delta_h F_S}{\delta x^{\alpha_1}\dots\delta x^{\alpha_h}}$ étant $h + 3$.

Les équations $F_s = \frac{\delta^h F_S}{\delta x^{\alpha_1}\dots\delta x^{\alpha_h}} = 0$ peuvent donc s'écrire :

$$\text{(F')} \qquad F_s \equiv A^{\lambda\mu}\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + B_s^{t\lambda}\frac{\partial u_t}{\partial x^\lambda} + \sum_{i=\left[\frac{h+3}{2}\right]}^{h} \Pi_s^{T\lambda_1\dots\lambda_i} W_{T\lambda_1\dots\lambda_i} + f_s = 0,$$

où $\left[\frac{h+3}{2}\right]$ désigne l'entier $\geqq \frac{h+3}{2}$ le plus voisin de $\frac{h+3}{2}$.

$\Pi_s^{t\lambda_1\ldots\lambda_i}$ et f_s sont des fonctions de W_T et de leurs dérivées d'ordre $\leqq \frac{h+3}{2}$, elles ne contiendront pas de dérivées de W_T d'ordre supérieur à $h-k$ si $h-k \geqq \frac{h+3}{2}\cdot$ Nous prendrons donc $h \geqq 2k+3$.

Nous pourrons alors écrire F_s sous la forme :

$$(3.1) \qquad F_s \equiv A^{\lambda\mu}\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + B_s^{t\lambda}\frac{\partial u_t}{\partial x^\lambda} + \sum_{i=h-k}^{h} \Pi_s^{T\lambda_1\ldots\lambda_i} W_{T\lambda_1\ldots\lambda_i} + f_s = 0,$$

où $A^{\lambda\mu}$ est une fonction de W_T, $W_{T\alpha}$; $B_s^{t\lambda}$ est une fonction de W_T, $W_{T\alpha_1}$, $W_{T\alpha\beta}$; f_s est une fonction de W_T, $W_{T\alpha_1} \ldots W_{T\alpha_1\ldots\alpha_{h-k}}$; $\Pi_s^{T\lambda_1\ldots\lambda_i}$ est une fonction de W_S et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $h+3-i$ au plus (puisque l'ordre total des dérivations est $h+3$ et qu'elles apparaissent dans $W_{T\lambda_1\ldots\lambda_i}$ à l'ordre i).

4. Application aux équations (F′) des résultats du chapitre I. — Si nous considérons W, W_α, $W_{\alpha\beta}$ comme des fonctions données des variables x^α, les équations (F′) sont un système d'équations linéaires du type (E), mais où figurent en outre les termes $\sum_{i=h-k}^{h} \Pi_s^{T\lambda_1\ldots\lambda_i} W_{T\lambda_1\ldots\lambda_i}$.

Nous allons montrer que les équations $\sum_{l=0}^{k}\sigma_{s(l)}^{r}\frac{\delta^l F_s}{\delta x^{nl}}$ se mettent cependant sous une forme analogue à (9.1) (chap. I). En effet :

Équations dérivées des équations F_s *par rapport à* x^n. — Nous désignons comme au chapitre I par $\overline{F}_s^{(l)}$ la quantité suivante :

$$\overline{F}_s^{(l)}(v) = \frac{\delta^l A^{\lambda\mu}}{\delta x^{nl}}\frac{\partial^2 v_s}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + \frac{\delta^l B_s^{t\lambda}}{\delta x^{nl}}\frac{\partial v_t}{\partial x^\lambda},$$

Nous posons, d'autre part :

$$\Pi_s^{t(l)} = \frac{\delta^l \Pi_s^t}{\delta x^{nl}}.$$

Les équations dérivées des F_s par rapport à x^n s'écrivent alors :

$$\frac{\delta^l F_s}{\delta x^{nl}} \equiv \sum_{p=0}^{l} C_p^l \left\{ \overline{F}_s^{(l-p)}(u_p) + \sum_{i=h-k}^{h} \Pi_s^{T\alpha_1\ldots\alpha_i(l-p)} W_{T\alpha_1\ldots\alpha_i p} \right\} + \frac{\delta^l f_s}{\delta x^{nl}}.$$

Combinaisons $\sigma_{s(l)}^{r}\left[\frac{\delta^l F_s}{\delta x^{nl}}\right]$. — Des calculs formellement identiques à ceux du cas linéaire (*cf.* § 9, chap. I) conduisent aux identités suivantes :

$$(4.1) \quad \sum_{l=0}^{k}\sigma_{s(l)}^{r}\left[\frac{\delta^l F_s}{\delta x^{nl}}\right] \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}\mathcal{E}_s^i + \sum_{l=0}^{k}\sum_{p=0}^{l}\Bigg\{ [u_{rp}]L_{s(l)}^{r(l-p)} - [u_{rp+1}]D_{s(l)}^{r(l-p)}$$
$$+ \sigma_{s(l)}^{r}\Bigg[[u_{rp+2}]C^{(l-p)} + \left[\frac{\delta^l f_s}{\delta x^{nl}}\right]$$
$$+ C_p^l \sum_{i=n-k}^{h} [\Pi_s^{T\alpha_1\ldots\alpha_i(l-p)}][W_{T\alpha_1\ldots\alpha_i p}] \Bigg]\Bigg\}.$$

Les quantités $L^{r(l-p)}_{s(l)}$, $D^{r(l-p)}_{s(l)}$, $C^{(l-p)}$ et $\mathcal{E}^i_s$ sont formellement identiques aux quantités ainsi désignées dans le cas linéaire (*cf.* § 9, chap. I).

Ordonnons les équations (4.1) par rapport à u_{rp} :

$$(4.2)\quad \sum_{l=0}^{k}\sigma^r_{s(l)}\left[\frac{\delta^l F_s}{\partial x^{nl}}\right]\equiv\frac{\partial}{\partial x^i}\mathcal{E}^i_s+\sum_{l=0}^{k}\sum_{p}\left\{L^{r(l-p)}_{s(l)}-D^{r(l-p+1)}_{s(l)}+\sigma^r_{s(l)}C^{(l-p+2)}\right.$$
$$\left.+\sigma^r_{s(l)}\sum_{i=h-k}^{h}C_l^{h+p-i}\left[\Pi^{T(l-h+i-p)}_{s\alpha_1\ldots\alpha_i}\right]\delta^n_{\alpha_{i+1}}\ldots\delta^n_{\alpha_h}[u_{rp}]\right\}$$
$$+\sum_{l=0}^{k}\sum_{p=0}^{l}\sigma^r_{s(l)}\left\{\left[\frac{\delta^l f_s}{\delta x^{nl}}\right]+\sum_{i=h-k}^{h-p+1}C_l^p\Pi^{(l-p)}_{s\alpha_1\ldots\alpha_i}W_{T\alpha_1\ldots\alpha_i p}\right\}=0.$$

La sommation par rapport à p doit être effectuée entre o et l pour $[u_{rp}]L^{r(l-p)}_{s(l)}$, 1 et $l+1$ pour $[u_{rp}]$ $D^{r(l-p+1)}_{s(l)}$, $i-h$ et l pour les termes de la forme $[u_{rp}]\Pi^{T(l-h+i-p)}_{s\alpha_1\ldots\alpha_i}$. Ces termes en Π ont été obtenus en remarquant que les dérivées d'ordre $i+p$ de W_T de la forme $W_{T\alpha_1\ldots\alpha_i p}$, avec $p+i\geqq h$ peuvent être considérées comme des dérivées d'ordre $p'=p+i-h$ d'une fonction

$$u_r=W_{T\alpha_1\ldots\alpha_i h-i}.$$

Si u_r désigne la fonction $W_{T\alpha_1\ldots\alpha_h}$, nous avons :

$$W_{T\alpha_1\ldots\alpha_i p'}=u_{rp}\,\delta^n_{\alpha_{i+1}}\ldots\delta^n_{\alpha_h};\qquad\text{avec}\quad p'=p+h-i$$

(les $\delta^n_{\alpha_{i+1}}\ldots$ désignent les symboles de Kronecker).

Nous pouvons alors écrire les équations (4.2) sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\mathcal{E}^i_s+[u_r]\mathcal{L}^r_s+\sum_p[u_{rp}]\mathcal{D}^r_{s(p)}+\sum_l\mathcal{G}^{(l)}_r\sigma^r_{s(l)}=0.$$

Dans les coefficients $\mathcal{L}^r_s$, $\mathcal{D}^r_{s(p)}$ et $\mathcal{G}^{(l)}_r$, interviennent les fonctions inconnues W et leurs dérivées jusqu'à l'ordre h au plus. Remarquons que les dérivées d'ordre h, fonctions U, n'interviennent ni dans $\mathcal{L}^r_s$ ni dans $\mathcal{D}^r_{s(p)}$ d'après les considérations précédentes sur les ordres de dérivation.

5. **Détermination des fonctions auxiliaires $\sigma^r_{s(l)}$.** — Les équations déterminant les $\sigma^r_{s(l)}$ s'écrivent :

$$(5.1)\quad \mathcal{D}^r_{s(p)}\equiv\sum_{l=p}^{k}L^{r(l-p)}_{s(l)}+\sum_{l=p-2}^{p}\sigma^r_{s(l)}C^{(l-p+2)}-\sum_{l=p-1}^{k}D^{r(l-p+1)}_{s(l)}$$
$$+\sum_{l=p}^{[k,p+h]}\sum_{i=h+p-l}^{h}\Pi^{T(l-h+i-p)}_{s\alpha_1\ldots\alpha_i}\delta^n_{\alpha_{i+1}}\ldots\delta^n_{\alpha_h}\sigma^r_{s(l)}=0$$

$[k,p+h]$ désigne le plus grand des nombres h et $p+h$.

Ces équations diffèrent des équations (10.1) du cas linéaire par le terme :

$$\sum_{l=p}^{[k,p+h]}\sum_{i=h+p-l}^{h}\Pi^{T(l-h+i-p)}_{s\alpha_1\ldots\alpha_i}\delta^n_{\alpha_{i+1}}\ldots\delta^n_{\alpha_h}\sigma^r_{s(l)}$$

qui ne contient que les $\sigma^r_{s(l)}$, où l est $\geqq p$. Les équations (5.1) permettent donc, comme dans le cas linéaire, de déterminer les $\sigma^r_{s(l)}$ par récurrence : l'équation $\mathcal{O}^r_{s(p)} = 0$ ne contient que les $\sigma^r_{s(l)}$, où l est $\geqq p - 1$.

1° Les fonctions $\sigma^r_{s(k)}$ satisfont aux mêmes équations formelles que dans le cas linéaire (obtenues pour $p = k + 1$). σ sera donc donné par l'expression (11.5), $\omega^r_{s(k)}$ satisfera aux équations intégrales (12.2) (chap. I) et l'on aura

$$\sigma^r_{s(k)} = \sigma\omega^r_{s(k)}.$$

2° Les équations déterminant $\sigma^r_{s(p-1)}$ supposant $\sigma^r_{s(l)}$ connu pour $l \geqq p$ s'obtiennent en considérant les équations $\mathcal{O}^r_{s(p)} = 0$. Ces équations s'écrivent (*cf.* 131, chap. I) :

$$\begin{aligned}(5.2)\qquad & -D^r_{s(p-1)} + \sigma^r_{s(p-1)}(p-1)C^{(1)} \\ & = -\sum_{l=p}^{k}\left\{ L^{r(l-p)}_{s(l)} - D^{r(l-p+1)}_{s(l)} + \sigma^r_{s(l)} C^{(l-p+2)} \right. \\ & \qquad \left. + \sigma^r_{s(l)} \sum_{i=h+p-l}^{h} \Pi^{T(l-h+i-p)}_{s\alpha_1\ldots\alpha_i} \delta^n_{\alpha_{i+1}} \ldots \delta^n_{\alpha_h} \right\} = \varphi^r_{s(p-1)}.\end{aligned}$$

Les deuxièmes membres de ces équations sont des quantités connues, $\varphi^r_{s(p-1)}$, les premiers membres, égalés à zéro, sont identiques formellement aux équations sans second membre (13.1) (chap. I). Nous poserons donc :

$$\sigma^r_{s(p-1)} = \sigma\omega^r_{l(p-1)}\chi^l_{s(p-1)},$$

$\omega^r_{l(p-1)}$ satisfaisant aux équations intégrales (12.2) (chap. I) et $\chi^l_{s(p-1)}$ étant donné par :

$$(5.3)\qquad \chi^r_{s(p-1)} = \int_{\lambda_1}^{-\infty} \frac{\varphi^l_{s(p-1)}\hat{\omega}^r_{l(p-1)}}{2\sigma}\, d\lambda_1.$$

Existence et dérivabilité des $\sigma^r_{s(l)}$. — Les fonctions W étant supposées posséder des dérivées jusqu'à l'ordre $h \geqq 2k + 5$, les coefficients $A^{\lambda\mu}$, $B^{t\lambda}_s$, f_s des équations E_s possèdent, comme au chapitre I, sous les hypothèses H, des dérivées partielles par rapport aux x^α, dans le domaine D, continues et bornées jusqu'aux ordres respectivement $h - 1 \geqq 2k + 4$, $h - 2 \geqq 2k + 3$ et h. Les coefficients $\Pi^T_{s\lambda_1\ldots\lambda_i}$ possèdent des dérivées partielles par rapport aux x^α jusqu'à l'ordre $h - (h + 3 - i) = i - 3$; les coefficients $\Pi^{T(l-h+i-p)}_{s\alpha_1\ldots\alpha_i}$ figurant dans (5.2) possèdent donc des dérivées partielles par rapport aux x^α, continues et bornées, jusqu'à l'ordre $i - 3 - (l - h + i - p) = p + h - k - 3 \geqq 2p$, puisque $h - k - 3 > k \geqq p$. Nous voyons donc que les fonctions $\sigma^r_{s(p-1)}$ déterminées par (5.2) possèdent des dérivées partielles jusqu'à l'ordre $2p$, comme au chapitre I, si les fonctions $\sigma^r_{s(l)}(l \geqq p)$ possèdent des dérivées partielles jusqu'à l'ordre $2l + 2$. $\sigma^r_{s(k)}$, donné par la même formule qu'au chapitre I, possédant des dérivées partielles jusqu'à l'ordre $2k + 2$, nous voyons que les fonctions $\sigma^r_{s(l)}(l \leqq k)$ possèdent, comme au chapitre I, des dérivées partielles par rapport aux x^α jusqu'à l'ordre $2l + 2$.

6. Comportement au voisinage du sommet du conoïde caractéristique. — Les W et leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre h étant supposées continues et bornées dans (D), les $\sigma^r_{s(l)}$ auront le même comportement au voisinage de $\lambda_1 = 0$ qu'au chapitre I (les coefficients Π et leurs dérivées, continues et bornées, n'introduiront aucun changement).

Si nous prenons, comme dans le cas linéaire, $k = \frac{n}{2} - 2$ nous obtiendrons des formules de Kirchoff vérifiées par les solutions $h + 2 + k$ fois différentiables des équations (F) analogues aux formules (26.1) du chapitre I. Ces formules s'écrivent :

$$(6.1) \qquad \mathrm{K}u(x_0^\alpha) = \int_{x_0^n}^{0} \int \cdots \int_{\Sigma_0} \mathrm{H}\, dx^n\, d\lambda_2\, d\lambda_3 \ldots d\lambda_{n-1} + \int \cdots \int_{\Sigma_0} \mathrm{I}\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-1},$$

avec

$$\mathrm{H} = \left\{ \sum_{l=0}^{k} \left[\mathrm{L}^{r(l)}_{s(l)} + \sum_{i=h-l}^{h} \Pi^{\mathrm{T}(l-h+l)}_{s\alpha_1\ldots\alpha_i}\, \delta^n_{\alpha_{i+1}} \ldots \delta^n_{\alpha_h} \right] u_r \right.$$
$$\left. + \sum_{p=0}^{l} \sum_{i=n-k}^{h-p-1} \Pi^{\mathrm{T}(l-p)}_{s\alpha_1\ldots\alpha_i} [\mathrm{W}_{\mathrm{T}\alpha_1\ldots\alpha_i p}] + \left[\frac{\partial^l f_s}{\partial x^{nl}} \right] \right\} \frac{\Delta}{[\mathrm{A}^{nn}] + [\mathrm{A}^{in}] p_i},$$
$$\mathrm{I} = \sum_{l=0}^{k} \sum_{p=0}^{l} \left\{ \mathrm{E}^{i(l-p)}_{s(l)}(u_p) \frac{\Delta p_i}{[\mathrm{A}^{nn}] + [\mathrm{A}^{in}] p_i} \right\}_{x^n=0}$$

Les quantités E^i_s, L^r_s, ... sont formellement identiques aux quantités ainsi désignées au chapitre I, calculées à partir des coefficients $\mathrm{A}^{\lambda\mu}$ et $\mathrm{B}^{i\lambda}_s$. Les équations (6.1) sont valables en tout point de D; à condition de considérer comme effectuée sur les coefficients la transformation définie au paragraphe 27 du chapitre I.

La quantité H est donc une fonction algébrique des coefficients $\mathrm{A}^{\lambda\mu}$, $\mathrm{B}^{i\lambda}_s$ et Π, f_s ainsi que de leurs dérivées partielles par rapport aux x^α jusqu'aux ordres respectivement $k + 2$ et k et des fonctions $\mathrm{X}(x^i, p_i, \ldots, z^i_{j_1\ldots j_{k+3}})$ et $\Omega(\omega^r_{s(p)} \ldots \omega^r_{sj_1\ldots j_{k+2}(p)})$.

Ces fonctions X et Ω satisfont aux mêmes équations qu'au chapitre I, soit :

$$(6.2) \qquad \mathrm{X} = \int_{x_0^n}^{x^n} \mathrm{E}(x)\, dx^n + \mathrm{X}_0,$$

$$(6.3) \qquad \Omega = \int_{x_0^n}^{x^n} \mathrm{F}(\mathrm{X}, \Omega)\, dx^n + \Omega_0,$$

X_0 et Ω_0, valeurs de X et Ω pour $x^n = x_0^n$ sont des fonctions données de x_0^α, $\lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}$.

L'ensemble des relations intégrales (6.1), (6.2), (6.3) fait intervenir les dérivées des coefficients $\mathrm{A}^{\lambda\mu}$, $\mathrm{B}^{i\lambda}_s$, $\Pi^i_{s\alpha_1\ldots\alpha_i}$ et f_s par rapport aux x^α jusqu'aux ordres respectivement $4 + 2k$, $2 + 2k$, $2k - h + i$ et k (*cf.* chap. I, § 28, conclusion). Ces coefficients $\mathrm{A}^{\lambda\mu}$, $\mathrm{B}^{i\lambda}_s$, $\Pi^i_{s\alpha_1\ldots\alpha_i}$ et f_s dépendant des fonctions inconnues W et de leurs dérivées partielles par rapport aux x^α jusqu'aux ordres respectivement 1, 2, $h + 3 - i$ et $h - k$, nous constatons que les relations intégrales (6.1), (6.2), (6.3) font intervenir les dérivées partielles des W jusqu'à l'ordre $5 + 2k$ et non les dérivées d'ordre plus élevé. Il suffira donc de prendre $h \geq 5 + 2k$ pour que les relations intégrales ne contiennent pas de dérivées des W d'ordre supérieur à h, c'est-à-dire pas de dérivées des fonctions U.

Si nous joignons aux relations (6.1), (6.2), (6.3) les relations suivantes, nécessairement vérifiées par les solutions h fois différentiables des équations (F) :

$$W_{S\alpha_1\ldots\alpha_p}(x^\alpha) = \int_0^{x^n} W_{S\alpha_1\ldots\alpha_p n}\, dx^n + W_{S\alpha_1\ldots\alpha_p}(x^i, 0).$$

Nous obtenons un système d'équations intégrales $\mathcal{J}$, dont les deuxièmes membres ne contiennent pas d'autres inconnues que les premiers membres, vérifié par les solutions $h+k+2$ fois différentiables des équations (F).

CHAPITRE III.

Résolution du problème de Cauchy.

Nous considérons le système hyperbolique non linéaire (F) :

$$\text{(F)} \qquad A^{\lambda\mu}\frac{\partial^2 W_S}{\partial x^\lambda\, \partial x^\mu} + f_S = 0.$$

Le problème de Cauchy relatif au système (F) est le problème de la détermination des solutions de (F) qui prennent, ainsi que leurs dérivées partielles premières, des valeurs données pour $x^n = 0$:

$$W_S(x^i, 0) = \varphi_S(x^i), \qquad \frac{\partial W_S}{\partial x^n}(x^i, 0) = \psi_S(x^i).$$

Remarquons que le problème de Cauchy posé pour une hypersurface d'espace quelconque peut toujours se ramener, par un changement de variables qui ne change pas la forme du système (F), au problème de Cauchy posé pour l'hypersurface $x^n = 0$. Nous résoudrons ce problème de Cauchy localement de manière à mettre en évidence le domaine de dépendance des solutions par rapport aux données initiales. Plus précisément nous montrerons qu'il existe un système de fonctions W_S (et un seul) défini dans un tronc de cône de base (d) et prenant ainsi que leurs dérivées partielles des valeurs données dans (d); (d) désigne un domaine compact de l'hypersurface $x^n = 0$.

Nous utiliserons, pour cette démonstration, le système d'équations intégrales $\mathcal{J}$ obtenu au chapitre II. Les mêmes difficultés que dans le cas de quatre variables (*cf.* A, chap. II, § 5) se rencontrent pour résoudre directement le système d'équations intégrales vérifié par les solutions des équations (F) : les quantités figurant sous le signe d'intégration $n-1$-uple dans les formules de Kirchoff sont absolument intégrables si les $A^{\lambda\mu}$, considérés comme fonctions des x^α, sont suffisamment différentiables, ce qui n'est pas réalisé quand les W_S, $W_{S\alpha}$, ..., u_s sont considérés comme variables indépendantes comme elles doivent l'être dans un essai pratique de résolution du système d'équations intégrales $\mathcal{J}$.

Pour résoudre le problème de Cauchy, nous passerons donc, comme pour quatre variables (*cf.* A, chap. III et Note *C. R. Acad. Sc.*, t. **234**, 1951, p. 585) par l'intermédiaire d'équations approchées obtenues en remplaçant dans $A^{\lambda\mu}$ les fonctions inconnues W_S et $W_{S\alpha}$ par des fonctions données $\overset{(1)}{W}_S$ et $\overset{(1)}{W}_{S\alpha}$ ([15]). De même que pour quatre variables, dans le cas général où les $A^{\lambda\mu}$ sont des fonctions des W_S et $W_{S\alpha}$, nous devrons considérer des équations approchées non des équations données elles-mêmes, mais des équations déjà dérivées par rapport aux x^α de manière à ce que le système d'équations intégrales obtenu ne fasse pas intervenir de dérivées des fonctions d'approximation d'ordre supérieur à l'ordre des dérivées des fonctions inconnues qui y figurent. Nous pourrons alors montrer que les solutions $\overset{(2)}{W}_S$ de ces équations déterminent une représentation de l'espace des fonctions $\overset{(1)}{W}_S$, convenablement choisi, dans lui-même et que cette représentation admet un point fixe qui fournit une solution des équations non linéaires données.

Nous voyons que, pour qu'il en soit ainsi, il faudra certainement dériver préalablement $k+1$ fois les équations données F.

Ces équations s'écrivent, en effet :

$$F_S \equiv A^{\lambda\mu}(W_T, W_{T\alpha}) \frac{\partial^2 W_S}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + f_S(W_T, W_{T\alpha}) = 0.$$

Nous avons à appliquer à ces équations dérivées h fois (*cf.* chap. II) la méthode du chapitre I; c'est-à-dire que, *après k dérivations par rapport à x^n* et multiplication par des fonctions auxiliaires, nous mettons ces équations sous forme d'un système d'équations intégrales qui ne contiennent les inconnues W_S et leurs dérivées partielles *que jusqu'à l'ordre h*. Il est donc nécessaire que ces équations ne fassent pas intervenir de dérivées des fonctions $\overset{(1)}{W}_S$ d'ordre supérieur à h : il faut pour cela que les fonctions W_T et $W_{T\alpha}$ ne soient remplacées par les fonctions données $\overset{(1)}{W}_T$ et $\overset{(1)}{W}_{T\alpha}$ que dans les coefficients $A^{\lambda\mu}$ des équations déjà dérivées $k+1$ fois par rapport aux variables x^α et dans les coefficients $A^{\lambda\mu}$ seulement.

1. Plan du chapitre III. — A. Nous considérons le système F'_1 d'équations intégrodifférentielles obtenu en remplaçant dans les coefficients $A^{\lambda\mu}$ des équations F' dérivées $k+1$ fois par rapport aux x^α des équations données F les fonctions inconnues W_T et $W_{T\alpha}$ par des fonctions données $\overset{(1)}{W}_T$, $\overset{(1)}{W}_{T\alpha}$. Nous formons le système d'équations intégrales $\mathcal{J}_1$ vérifié par les solutions des équations F'_1.

B. Nous montrons que le système $\mathcal{J}_1$ admet une solution unique continue et bornée dans un domaine fixe D, si on le considère comme système d'équations intégrales aux fonctions inconnues X, Ω, W, U.

C. Nous montrons que la solution trouvée de $\mathcal{J}_1$ est solution de F'_1 dans le

([15]) Une méthode analogue est utilisée par Schauder (*Fundam. Math.*, t. 24, 1935), pour démontrer un théorème d'existence pour les équations hyperboliques non linéaires à partir de majorations obtenues pour les équations linéaires. Mais nous verrons que, dans notre cas, il est essentiel de ne linéariser que les coefficients $A^{\lambda\mu}$.

domaine D et satisfait aux mêmes hypothèses que les fonctions d'approximation $\overset{(1)}{W}_T$ et $\overset{(1)}{W}_{T\alpha}$.

D. Nous montrons que la représentation de l'espace des fonctions $\overset{(1)}{W}_T$ dans lui-même défini par la résolution des équations F'_1 admet un point fixe (obtenu par itération). Les fonctions W_T correspondantes sont solutions des équations F'. Nous montrons qu'elles sont solutions des équations F et possèdent des dérivées partielles continues et bornées jusqu'à l'ordre $h-k-1$.

2. **Hypothèses faites dans le chapitre III.** — Nous ferons sur les coefficients $A^{\lambda\mu}$, f_S et les données de Cauchy φ_S, ψ_S les mêmes hypothèses qu'au chapitre II. Nous supposerons de plus vérifiées certaines conditions de Lipschitz, nous réunissons ci-dessous toutes ces hypothèses sous le nom de

Hypothèses B. — 1° Dans le domaine D défini par

$$|x_i-\bar{x}_i|\leq d, \qquad 0\leq x^n\leq \varepsilon$$

et pour des valeurs des fonctions W_S et $W_{S\alpha}$ satisfaisant à

$$|W_S-\varphi_S|\leq l, \qquad |W_{Si}-\varphi_{Si}|\leq l, \qquad |W_{Sn}-\psi_S|\leq l.$$

a. Les coefficients $A^{\lambda\mu}$, f_S admettent des dérivées partielles par rapport à tous leurs arguments jusqu'à l'ordre $2n-3$, continues et bornées.

Les dérivées d'ordre $2n-3$ satisfont à une condition de Lipschitz donnée par rapport à tous leurs arguments.

b. La forme quadratique $A^{\lambda\mu}X_\lambda X_\mu$ est de type hyperbolique normal, le coefficient A^{nn} étant supérieur à un nombre positif donné, la forme quadratique $A^{ij}X_iX_j$ étant définie négative.

Nous remarquons que sous les hypothèses *a* et *b* les coefficients $a_0^{\alpha\beta}$ et $a_{\alpha\beta}^0$ sont continus et bornés ainsi que leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre $2n-3$; les dérivées d'ordre $2n-3$ satisfont à une condition de Lipschitz par rapport à leurs arguments $(x_0^\alpha, W_S(x_0^\alpha), W_{S\alpha}(x_0^\alpha))$.

2° Dans le domaine (d) défini par :

$$|x^i-\bar{x}^i|\leq d,$$

les données de Cauchy φ_S et ψ_S possèdent des dérivées partielles continues et bornées par rapport aux variables x^i jusqu'aux ordres respectivement $2n-2$ et $2n-1$; les dérivées d'ordre $2n-2$ et $2n-1$ satisfaisant à une condition de Lipschitz donnée.

Remarquons que les hypothèses faites sur les données de Cauchy, et celles faites sur les coefficients $A^{\lambda\mu}$ et f_S permettent de montrer que toute solution $\frac{3n}{2}$ fois différentiable du problème de Cauchy posé relativement aux équations (F) a ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre $\frac{3n}{2}-1$ déterminées de façon unique, continues et bornées, dans (d) : les valeurs, dans (d), des dérivées partielles jusqu'à l'ordre $\frac{3n}{2}$, correspondant à une dérivation au plus par rapport à x^n, des solutions W_S du problème de Cauchy posé sont égales aux dérivées correspondantes des fonctions φ_S et ψ_S. Les valeurs, dans (d), des dérivées partielles jusqu'à l'ordre $\frac{3n}{2}$ correspondant à plus d'une dérivation par rapport à x^n s'expriment en fonction des précédentes, par l'intermédiaire des équations (F) et de leurs dérivées partielles par rapport aux x^α jusqu'à l'ordre $\frac{3n}{2}-2$ (*cf.* A, chap. II, § 4). Nous désignerons dans la suite par $\varphi_{S\alpha_1\ldots\alpha_e}$ la valeur, dans D, de la dérivée $W_{S\alpha_1\ldots\alpha_e}$ de la fonction W_S solution du problème de Cauchy considéré.

Nous désignerons par bornes B les différentes bornes figurant dans ces hypothèses (d, ε, l, bornes des coefficients, des données de Cauchy et de leurs dérivées, bornes figurant dans les conditions de Lipschitz), ainsi que tout nombre >0 fini déterminé par ces bornes.

A. — Formation d'un système d'équations intégrales résoluble.

3. **Système** F'. — Le système d'équations données F s'écrivant sous la forme suivante :

$$(\mathrm{F}) \qquad F_S \equiv A^{\lambda\mu}\frac{\partial^2 W_S}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + f_S = 0.$$

Nous désignons par F' le système d'équations déduit de F par $k+1$ dérivations par rapport aux variables x^α

$$(\mathrm{F}') \qquad A^{\lambda\mu}\frac{\partial^2 \varphi_{S'}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + B_{S'}^{T'\lambda}\frac{\partial \varphi_{T'}}{\partial x^\lambda} + f_{S'} = 0.$$

S' et T' désignent une quelconque des combinaisons $S\alpha_1\ldots\alpha_{k+1}$, v_S, désignant ainsi une quelconque des dérivées $k+1^{\text{ième}}$ de la fonction inconnue $W_{S'}$. Les $A^{\lambda\mu}$ sont toujours des fonctions de W_S et $W_{S\alpha}$; les coefficients $B_{S'}^{T'\lambda}$ sont des fonctions de W_S, $W_{S\alpha}$, $W_{S\alpha\beta}$; les $f_{S'}$ sont des fonctions des inconnues W_S et de leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre $k+1$, $W_{S\alpha_1\ldots\alpha_{k+1}}$.

Les solutions $k+3$ fois différentiables du système (F) vérifient le système (F') ainsi que les relations intégrales suivantes :

$$(3.1) \qquad \left\{\begin{array}{l} W_S = \int_0^{x^n} W_{Sn}\,dx^n + \varphi_S, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ W_{S\alpha_1\ldots\alpha_k} = \int_0^{x^n} W_{S\alpha_1\ldots\alpha_k n}\,dx^n + \varphi_{S\alpha_1\ldots\alpha_k}, \end{array}\right.$$

où $\varphi_{S\alpha_1\ldots\alpha_k}$ désigne la valeur pour $x^n=0$ de la fonction $W_{S\alpha_1\ldots\alpha_k}$, correspondant au problème de Cauchy donné.

4. **Système approché** F'_1. — Nous nous donnons un système de fonctions *indépendantes* $\overset{(1)}{W}_{S\alpha_1\ldots\alpha_{k+1}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1} = 1, \ldots, n)$ possédant, dans le domaine (D),

des dérivées partielles continues et bornées jusqu'à l'ordre $h-k-1$ par rapport aux x^α; les dérivées d'ordre $h-k-1$ sont de plus supposées satisfaire à une condition de Lipschitz par rapport aux variables x^i.

Nous définissons les fonctions $\overset{(1)}{W}_{s\alpha_1\ldots\alpha_k}, \ldots, \overset{(1)}{W}_s$ par les relations intégrales suivantes :

$$(4.1)\qquad \begin{cases} \overset{(1)}{W}_{s_1\ldots\alpha_k} = \displaystyle\int_0^{x^n} \overset{(1)}{W}_{s_1\ldots\alpha_k} \overset{(1)}{W}_{s\alpha_1\alpha_k n}\, dx^n + \varphi_{s\alpha_1\ldots\alpha_k}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \overset{(1)}{W}_s = \displaystyle\int_0^{x^n} \overset{(1)}{W}_{sn}\, dx^n + \varphi_s. \end{cases}$$

Nous supposons les fonctions $\overset{(1)}{W}_{s\alpha_1\ldots\alpha_{k+1}}$ choisies de façon que l'on ait, dans (D), les inégalités suivantes :

$$|\overset{(1)}{W}_s - \varphi_s| \leq l, \qquad |\overset{(1)}{W}_{si} - \varphi_{si}| \leq l, \qquad |\overset{(1)}{W}_{sn} - \psi_s| \leq l.$$

Nous pouvons alors remplacer dans les coefficients $A^{\lambda\mu}$ figurant dans le système F' les fonctions W_s et $W_{s\alpha}$ par les fonctions connues $\overset{(1)}{W}_s$ el $\overset{(1)}{W}_{s\alpha}$. Nous obtenons ainsi, en laissant les coefficients $B^{T'}_{S'}$ et $f_{S'}$, inchangés, un système d'équations que nous désignons par F'_1 :

$$F'_1 \equiv \overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu} \frac{\partial^2 v_{s'}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + B^{T'\lambda}_{S'} \frac{\partial v_{T'}}{\partial x^\lambda} + f_{S'} = 0.$$

En adjoignant à ces équations les relations intégrales suivantes :

$$(f'_1)\qquad \begin{cases} W_s = \displaystyle\int_0^{x^n} W_s W_{sn}\, dx^n + \varphi_s, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ W_{s\alpha_1\ldots\alpha_k} = \displaystyle\int_0^{x^n} W_{s\alpha_1\ldots\alpha_k n}\, dx^n + \varphi_{s\alpha_1\ldots\alpha_k}, \end{cases}$$

Nous obtenons un système d'équations intégro-différentiel où les fonctions inconnues $W_{s\alpha}, \ldots, W_{s\alpha_1\ldots\alpha_k}$ ne sont plus nécessairement les dérivées des fonctions W_s.

Nous désignerons dans la suite par $W^0_{s\alpha_1\ldots\alpha_i}$ les dérivées $i^{ièmes}$ par rapport aux x^α des fonctions W_s, par $W^1_{s\alpha_1\ldots\alpha_i}$ les dérivées $i-1^{ièmes}$ par rapport aux x^α des fonctions $W_{s\alpha_1}$, etc.

5. Relations intégrales $\mathcal{J}_1$ vérifiées par les solutions du système F'_1, f'_1. — 1° Les solutions $h-k-1$ fois différentiables du système F'_1, f'_1 vérifient les équations déduites des équations F'_1 par $h-k-1$ dérivations par rapport aux variables x^α. Ces équations sont de la forme suivante :

$$(F''_1)\qquad \overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + \overset{(1)}{B}{}^{t\lambda}_s \frac{\partial u_t}{\partial x^\lambda} + \sum_{l=0}^{h-k} \sum_{i=n-k}^{h-k-1+l} \overset{(1)}{\Pi}{}^{T\lambda_1\ldots\lambda_i}_{sl} W^l_{T\lambda_1\ldots\lambda_i} + \overset{(1)}{f}_s = 0,$$

où u_s désigne une dérivée $h-k-1^{ième}$ de $v_{S'}$.

Les coefficients $\overset{(1)}{B}{}^{i\lambda}_{s}$, $\overset{(1)}{\Pi}{}^{T\lambda_1\ldots\lambda_i}_{sl}$ et $\overset{(1)}{f}_s$ sont des polynomes des coefficients $B^{i'\lambda}_{S'}$, $f_{S'}$, $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$, de leurs dérivées partielles par rapport aux variables x^α et aux fonctions dont ils dépendent (W_S, $W_{S\alpha}$, ..., $W_{S\alpha_1\ldots\alpha_{k+1}}$, $\overset{(1)}{W}_S$, $\overset{(1)}{W}_{S\alpha}$) ainsi que des dérivées partielles de ces fonctions par rapport aux variables x^α jusqu'à l'ordre $h-k-1$.

Les équations F''_1 ne contiennent donc pas de dérivées des fonctions $\overset{(1)}{W}_S$, $\overset{(1)}{W}_{S\alpha}$ d'ordre supérieur à $h-k-1$. Nous savons, d'autre part, que l'indice i affecté à une fonction $W^l_{S\alpha_1\ldots\alpha_i}$ figurant dans les équations F''_1 ne peut être supérieur à $h+3$; F''_1 est, en effet, déduit de F'_1 par $h-k-1$ dérivations, F'_1 étant déduit de F' en remplaçant dans $A^{\lambda\mu}$ les fonctions W_S et $W_{S\alpha}$ par les fonctions d'indice égal $\overset{(1)}{W}_S$ et $\overset{(1)}{W}_{S\alpha}$, et F' déduit de F (où la somme des ordres de dérivation était au plus 3) par $k+1$ dérivations. Le coefficient $\overset{(1)}{B}{}^{i\lambda}_{s}$ de $\frac{\partial u_t}{\partial x^\lambda}$ dépend donc de $\overset{(1)}{W}_S$, $\overset{(1)}{W}_{S\alpha}$, $\overset{(1)}{W}{}^0_{S\alpha}$, $\overset{(1)}{W}{}^1_{S\alpha_1\alpha_2}$ et de W_S, $W_{S\alpha}$, $W^0_{S\alpha}$, $W^1_{S\alpha_1\alpha_2}$. Les coefficients $\overset{(1)}{\Pi}{}^{T\lambda_1\ldots\lambda_i}_{sl}$ de $W^l_{T\lambda_1\ldots\lambda}$ dépendent de $\overset{(1)}{W}{}^p_S$, $\overset{(1)}{W}{}^p_{S\alpha_1\ldots\alpha_{h+3-i}}$ ($p=0$ ou 1) et de W^p_S, ... $W^p_{S\alpha_1\ldots\alpha_{h+3-i}}$ ($p=0$, ..., $k+1$). Enfin le coefficient $\overset{(1)}{f}_S$ dépend de $\overset{(1)}{W}{}^p_S$, ..., $\overset{(1)}{W}{}^p_{S\alpha_1\ldots\alpha_{h-k}}$ ($p=0$ ou 1) et de W^p_S, ..., $W^p_{S\alpha_1\ldots,\alpha_{hk}}$ ($p=0$, ..., $k+1$).

2° Nous adjoignons aux équations F''_1 des relations intégrales nécessairement vérifiées par les solutions $h-k-1$ fois différentiables du système F'_1, f'_1. Ces solutions vérifiaient les relations intégrales suivantes :

$$(f'_1)\qquad W_{S\alpha_1\ldots\alpha_i}=\int_0^{x^n} W_{S\alpha_1\ldots\alpha_i n}\,dx^n+\varphi_{S\alpha_1\ldots\alpha_i}\qquad (0\leqq i\leqq k).$$

Leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre $h-k$ vérifient donc, si elles sont continues et bornées, les relations intégrales suivantes :

$$(f''_1)\qquad W^l_{S\alpha_1\ldots\alpha_i j_1\ldots j_l}=\int_0^{x^n} W^{l+1}_{S\alpha_1\ldots\alpha_i n j_1\ldots j_l}\,dx^n+\varphi_{S\alpha_1\ldots\alpha_i j_1\ldots j_l}$$

(où j_1, ..., j_l désignent des indices de dérivation par rapport aux $n-1$ variables « d'espace » x^i).

Ainsi que les identités suivantes :

$$(5.1)\qquad W^l_{S\alpha_1\ldots\alpha_i n}=W_{S\alpha_1\ldots\alpha_i n}.$$

Remarquons que ces relations permettent de calculer les fonctions $W^i_{S\alpha_1\ldots\alpha_i\ldots\alpha_l}$ ($0\leqq i\leqq k+1$, $0\leqq l\leqq h-1$) au moyen des fonctions $W^{k+1}_{S\alpha_1\ldots\alpha_h}$, fonctions que nous avons désignées par u_s. Les relations F''_1 et f''_1 forment donc (compte tenu des identités 5.1) un système d'équations intégro-différentielles aux fonctions inconnues u_s.

6. Relations intégrales $\mathcal{J}_1$ vérifiées par les solutions du système F''_1, f''_1. — De même que nous considérions au chapitre II les équations aux dérivées partielles non linéaires F' comme des équations linéaires pour chacune de leurs solutions, nous considérerons, pour une solution du système $F''_1 f''_1$ les équations F''_1 comme des équations aux dérivées partielles linéaires par rapport aux fonctions u_s. Montrons que, pour une valeur convenable de h les coefficients $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$, $\overset{(1)}{B}{}^{t\lambda}_s$, $\overset{(1)}{\Pi}{}^{T\lambda_1\ldots\lambda_i}_s$ et $\overset{(1)}{f}_s$ satisfont aux hypothèses faites au chapitre II sur les coefficients $A^{\lambda\mu}$, $B^{t\lambda}_s$, $\Pi^{T\lambda_1\ldots\lambda_i}_s$ et f_s.

a. Les coefficients $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$, $\overset{(1)}{B}{}^{t\lambda}_s$, $\overset{(1)}{\Pi}{}^{T\lambda_1\ldots\lambda_i}_s$ contiennent les fonctions $\overset{(1)}{W}_S$, $\overset{(1)}{W}_{S\alpha}$ et leurs dérivées partielles jusqu'aux ordres respectivement o, 1, $h+3-i$; les fonctions ayant des dérivées partielles par rapport aux x^α jusqu'à l'ordre $h-k-1$, il suffira de prendre $h \geqq 2k+5$ pour que, pour une solution suffisamment différentiable de F''_1, f''_1, et sous les hypothèses B, les coefficients $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$, $\overset{(1)}{B}{}^{t\lambda}_s$ et $\overset{(1)}{\Pi}{}^{T\lambda_1}_{s\ldots\lambda_i}$ possèdent des dérivées partielles par rapport aux variables x^α (dérivations considérées comme effectuées) jusqu'aux ordres respectivement $2k+4$, $2k+2$, $2k-h+i$, les dérivées d'ordre le plus élevé satisfaisant à une condition de Lipsckitz par rapport aux variables x^i.

b. Les coefficients $\overset{(1)}{f}_S$ contiennent les fonctions $\overset{(1)}{W}_S$, $\overset{(1)}{W}_{S\alpha}$ et leurs dérivées partielles par rapport aux variables x^α jusqu'à l'ordre $h-k$; or on déduit de la relation (4.1)

$$\overset{(1)}{W}{}^i_{S\alpha_1\ldots\alpha_i n} = \overset{(1)}{W}_{S\alpha_1\ldots\alpha_i n}, \qquad \text{d'où} \qquad \overset{(1)}{W}{}^l_{S\alpha_1\ldots\alpha_j n} = \overset{(1)}{W}{}^{i+1}_{S\alpha_1\ldots\alpha_i n\ldots\alpha_j}$$

On voit ainsi que les dérivées partielles par rapport à x^n (d'ordre $\leqq k$) des fonctions $\overset{(1)}{W}_S$, $\overset{(1)}{W}_{S\alpha}$ et de leurs dérivées partielles par rapport aux x^α (d'ordre $\leqq h-k$) peuvent se mettre sous forme de dérivées partielles des fonctions $\overset{(1)}{W}_S, \ldots, \overset{(1)}{W}_{S\alpha_1\ldots\alpha_{k+1}}$ par rapport aux x^α (d'ordre $\leqq h-k-1$).

Les coefficients f_S admettent donc des dérivées partielles par rapport à x^n jusqu'à l'ordre k.

Les dérivées partielles d'ordre $h-k-1$ des fonctions $\overset{(1)}{W}_{S\alpha_1\ldots\alpha_{k+1}}$ vérifiant une condition de Lipschitz par rapport aux variables x^i, il est clair (étant données les hypothèses B) que les dérivées d'ordre le plus élevé des coefficients $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$, $\overset{(1)}{B}{}^{t\lambda}_s$, $\overset{(1)}{\Pi}{}^{T\lambda_1\ldots\lambda_i}_s$ et $\overset{(1)}{f}_S$ vérifient une conditon de Lipschitz par rapport aux x^i.

On voit finalement que, sous les hypothèses faites sur les coefficients $A^{\lambda\mu}$, f_S (§ 2), et celles faites sur les fonctions d'approximation (§ 4), les coefficients des équations (F''_1) vérifient les hypothèses faites sur les coefficients des équations (F') au chapitre II.

Nous pouvons donc appliquer aux équations (F''_1), comme nous l'avons fait au chapitre II pour les équations (F'), les calculs faits au chapitre I pour transformer le système d'équations aux dérivées partielles (E) en un système d'équations intégrales $\mathcal{J}$. Les équations (F''_1) diffèrent en fait des équations (F') [*f.* (3.1)] du chapitre II par l'existence des termes $\Pi^{T\lambda_1\ldots\lambda_i}_{sl} W^l_{T\lambda_1\ldots\lambda_i}$ ($0 \leqq l \leqq h-k$); nous n'aurons cependant pas de difficulté à écrire, après k dérivations par rapport à x^n et multiplication par les fonctions auxiliaires $\sigma^r_{s(l)}$, les équations (F''_1) sous une forme tout à fait analogue à la forme (4.2) obtenue au chapitre II, c'est-à-dire sous la forme suivante :

$$\sum_{l=0}^{k} \sigma^{r}_{s(l)} \frac{\delta^l F''_{1r}}{(\delta x^n)^l} \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \mathcal{E}^i_s + [u_r] \sum_{l=0}^{k} L^{r(l)}_{s(l)} + \sum_{p=1}^{k+1} [u_{rp}] \varpi^{r}_{s(p)}$$
$$+ \sum_{l=0}^{k} \sigma^{r}_{s(l)} \left\{ \frac{\delta^l f_s}{(\delta x^n)^l} + \sum_{i=h-k}^{h-p-1} \Pi^{T\alpha_1\ldots\alpha_i}_{sj(l-p)} W^j_{T\alpha_1\ldots\alpha_i p} \right\} = 0,$$

où les fonctions $W^j_{S\alpha_1\ldots\alpha_i p}$ correspondant à $i+p \geqq h$ ne figurent que dans $\mathcal{E}^i_s$ et par l'intermédiaire de u_{rp}. Nous remarquons, en effet, que les quantités de la forme $W^j_{S\alpha_1\ldots\alpha_i p}$ (qui désignent, rappelons-le, les dérivées $p^{\text{ièmes}}$ par rapport à x^n des fonctions $W^j_{S\alpha_1\ldots\alpha_i}$) peuvent se mettre sous la forme u_{sp} si $p+i \geqq h$. On déduit en effet des relations (6.1), sachant que $i-j \leqq h-k-1$, donc que $p \geqq k+1-j$:

$$W^j_{S\alpha_1\ldots\alpha_i p} = W^{k+1}_{S\alpha_1\ldots\alpha_i n\ldots n(p-k-1+j)} = u_{sp'},$$

avec

$$p' = p + i - h.$$

Appliquons donc aux équations F''_1 les résultats du chapitre II. Nous obtiendrons successivement :

a. Équations déterminant le conoïde caractéristique. — Les fonctions x^i, p_i déterminant ce conoïde et leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre $2k+3$ sont solutions d'équations intégrales de la forme suivante :

$$(a) \qquad X = \int_{x_0^n}^{x^n} E(X)\,dx^n + X_0.$$

Ces équations ne faisant intervenir que les coefficients $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$ et leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre $2k+4$ ne contiennent pas d'autres fonctions inconnues que les fonctions X. Les raisonnements du chapitre I s'appliquent ici intégralement : les fonctions X sont toutes définies, continues, bornées et vérifient une condition de Lipschitz dans (D). De plus, $\dfrac{X - X_0}{x_0^n - x^n}$ est continu et borné ainsi que $\dfrac{\tilde{X} - \tilde{X}_0}{x_0^n - x^n}$. (Rappelons que $\overset{(1)}{X}$ désigne le quotient par $x_0^n - x^n$ d'une fonction X qui s'annule pour $x^n = x_0^n$.

b. — Équations déterminant les fonctions auxiliaires. — Ces fonctions auxiliaires satisfont aux équations suivantes

$$\varpi^{r}_{s(p)} = 0 \qquad (p = 1, \ldots, k+1)$$

et sont données, comme au chapitre I, par des égalités de la forme :

$$\sigma^{r}_{s(l)} = \sigma\omega^{t}_{s(l)} \chi^{r}_{t(l)},$$

où σ est la fonction suivante, fonction connue des X :

$$\sigma = \frac{\Phi_0}{|\Delta|^{\frac{1}{2}}}$$

et où les $\omega^t_{s(l)}$ sont solutions d'équations intégrales de la forme

$$(b) \qquad \Omega = \int_{x_0^n}^{x_n} \mathrm{F}(\Omega)\,dx^n + \Omega_0.$$

Les $\chi^l_{s(l)}$ sont des fonctions données par des formules identiques aux formules (5.3) du chapitre II.

c. Les fonctions u_s satisfont à des relations intégrales identiques aux relations (6.1) du chapitre II déduites des relations (26.1) du chapitre I. Ces relations sont de la forme suivante :

$$(c) \qquad u = \int_{x_0^n}^{0}\int_{\Sigma_0}\cdots\int \mathrm{H}\,dx^n\,d\lambda_2\ldots d\lambda_{n-1} + \int_{\Sigma_0}\cdots\int \mathrm{I}\,d\lambda_2\ldots d\lambda_{n-1},$$

où I est borné et H absolument intégrable.

d. Nous adjoindrons aux relations (*a*), (*b*), (*c*) les relations intégrales reliant entre elles les fonctions $\mathrm{W}^i_{s\alpha_1\ldots\alpha_j}$ $(0 \leqq i \leqq k+1,\ i \leqq j \leqq h-k-1-i)$, solutions du système intégro-différentiel F''_1, f''_1. Ces relations sont de la forme suivante :

$$(d) \qquad \mathrm{W} = \int_0^{x^n} \mathrm{G}'\,dx^n + \mathrm{W}_0$$

où G est une fonction W ou une fonction U et W_0 une fonction donnée des variables x^i.

Théorème. — *Pour une valeur convenable de h* ($h \geqq 3k+5$), *l'ensemble des relations* (*a*), (*b*), (*c*), (*d*) *forme un système d'équations intégrales aux fonctions inconnues* X, Ω, U, W *ne faisant pas intervenir de dérivées de ces fonctions ni de dérivées des fonctions d'approximation* $\overset{(1)}{\mathrm{W}}$ *d'ordre supérieur à* $h-k-1$.

Nous désignerons ce système d'équations intégrales par $\mathcal{J}_1$ et nous montrerons, par une étude directe, qu'il possède une solution unique.

B. — Résolution du système d'équations intégrales $\mathcal{J}_1$.

7. Considérons, indépendamment des équations initiales (F_1) le système $\mathcal{J}_1$ comme un système d'équations intégrales à quatre groupes de fonctions inconnues X, Ω, W et U. Le système $\mathcal{J}_1$ se compose des quatre groupes d'équations suivantes :

1° Équations intégrales ayant au premier membre une fonction X des coordonnées x_0^α et de $n-1$ paramètres x^n, $\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ (fonctions correspondant aux x^i, p_i, ..., $y^i_{l_1\ldots l_{sk+3}}$, $z^i_{l_1\ldots l_{sk+3}}$ définissant le conoïde caractéristique). Ces équations sont de la forme

$$\mathrm{X}(x_0^\alpha, x^n, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}) = \int_{x_0^n}^{x^n} \mathrm{E}\,dx^n + \mathrm{X}_0(x_0^\alpha, x_0^n, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}).$$

X_0 est une fonction donnée (pour x^i, p_i, y_i^j, ... les valeurs de X_0 sont respectivement x_0^i, p_i^0, 0, ...).

E est une fraction rationnelle de dénominateur :

$$T^{*n} = \overset{(1)}{A}{}^{*nn} + \overset{(1)}{A}{}^{*in} p_i^0$$

des quantités suivantes :

a. Coefficients $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$ et dérivées partielles par rapport à tous leurs arguments jusqu'à l'ordre $2k+4$;

b. Fonctions $\overset{(1)}{W}_s$ et $\overset{(1)}{W}_{s\alpha}$ et dérivées partielles jusqu'à l'ordre $2k+4$;

c. Fonctions X;

d. Quantités $\overset{(1)}{\alpha}{}^0_{\alpha\beta}$ et $\overset{(1)}{\alpha}{}^{\alpha\beta}_0$.

On voit donc que E est une fonction donnée, continue et bornée, des seules inconnues X.

2° Équations ayant au premier membre une fonction Ω des x_0^α et des paramètres x^n, λ_2, ..., λ_{n-1} (fonctions correspondant à $\omega^r_{s(l)}$, ..., $\omega_{si_1\ldots i_{2k+2}(l)}$, de la forme :

$$\Omega = \int_{x_0^n}^{x^n} F\, dx^n + \Omega_0;$$

Ω_0 est une fonction donnée (pour ω_s^r, ω_{si}^r, ... les valeurs de Ω_0 sont δ_s^r. 0, ...).

F est une fraction rationnelle (de dénominateur $T^{*n} = \overset{(1)}{A}{}^{*nn} + \overset{(1)}{A}{}^{*in} p_i$) des quantités suivantes :

a. Coeffficients $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$ et $\overset{(1)}{B}{}^{T\lambda}_S$ et dérivées partielles par rapport à tous leurs arguments jusqu'aux ordres respectivement $2k+3$ et $2k+2$ (c'est-à-dire coefficients $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$, fs et dérivées partielles jusqu'à l'ordre $2k+3$);

b. Fonctions $\overset{(1)}{W}_s$, $\overset{(1)}{W}_{s\alpha}$ et dérivées partielles jusqu'à l'ordre $2k+3$;

c. Quantités $\overset{(1)}{a}{}^0_{\alpha\beta}$ et $\overset{(1)}{a}{}^{\alpha\beta}_0$;

d. Fonctions X et Ω;

e. Fonctions W (correspondant à $W^j_{s\alpha_1\ldots\alpha_i}$, $i < h$).

Les fonctions U ne figurent pas dans F.

3° Équations ayant au premier membre une fonction W des coordonnées x^α. Ces équations sont de la forme

$$W(x^\alpha) = \int_0^{x^n} G\, dx^n + W_0(x^i).$$

Les fonctions W sont les fonctions $W^j_{s\alpha_1\ldots\alpha_i}(i < h)$.

Les G sont des fonctions W ou des fonctions U.

4° Formules de Kirchoff ayant au premier membre une fonction U des coordonnées x_0^α (les U sont les fonctions $W^{k+1}_{s\alpha_1\ldots\alpha_k}$), de la forme

$$U(x_0^\alpha) = \int_{x_0^n}^0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi H\, dx^n\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-1} + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi I\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-1}.$$

a. H, calculé par la formule (8.1) (chap. II) à partir des coefficients des équations F''_1, est défini par des intégrations par rapport à x^n portant sur des fonctions algébriques des coefficients $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$, $\overset{(1)}{B}{}^{i\lambda}_s$, $\overset{(1)}{\Pi}{}^T_{s\alpha_1\ldots\alpha_i}$, $\overset{(1)}{f}_s$, de leurs dérivées partielles et des fonctions X, Ω, W et U.

Nous avons montré au chapitre I que cette fonction H est absolument intégrable si les coefficients $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$ possèdent des dérivées partielles jusqu'à l'ordre $2k+4$.

b. I, comme H, est calculé par la formule (8.1) (chap. II) au moyen des coefficients des équations F''_1. C'est une fonction, définie d'une part par des intégrations par rapport à x^n de fonctions algébriques des mêmes quantités que H, d'autre part par les données de Cauchy, et prise pour la valeur $x^n = 0$ du paramètre x^n; dans les hypothèses faites, I est borné.

8. Résolution des équations (1). — Les équations (1) définissant le conoïde caractéristique sont des équations intégrales non linéaires aux seules fonctions inconnues X :

$$X = \int_{x_0^n}^{x^n} E(X)\,dx^n + X_0. \tag{1}$$

Les E(X) étant bornés et lipschitziens pour des X bornés, les équations (1) admettent une solution unique, continue et bornée, vérifiant les inégalités :

$$|X - X_0| \leqq d$$

dans le domaine Λ défini par les inégalités suivantes :

$$|x_0^i - \bar{x}^i| \leqq d, \qquad |x_0^n| \leqq \varepsilon(x_0^i),$$
$$0 \leqq x^n \leqq x_0^n, \qquad 0 \leqq \lambda_2 \leqq 2\pi, \qquad 0 \leqq \lambda_3 \leqq \pi, \qquad \ldots, \qquad 0 \leqq \lambda_{n-1} \leqq \pi,$$

où $\varepsilon(x_0^i)$ est défini par des inégalités de la forme suivante :

$$\varepsilon(x_0^i) \leqq \frac{d - \Sigma\,|x_0^i - \bar{x}^i|}{M}, \qquad \varepsilon(x_0^i) \leqq \varepsilon,$$

où M désigne un nombre qui ne dépend que des bornes B, et où ε désigne le nombre ainsi nommé dans les hypothèses B. Les $n-1$ fonctions X correspondant aux x^i définissent alors avec la variable x^n un point appartenant au domaine D correspondant à $\varepsilon = \varepsilon(x_0^i)$.

Propriétés des fonctions X. — Les fonctions X solutions des équations (1) possèdent les mêmes propriétés que les fonctions X du chapitre I, puisque les coefficients $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$ possèdent les mêmes propriétés que les fonctions $A^{\lambda\mu}$ de ce chapitre. Nous avons en particulier les résultats suivants :

1° Les foncfions $\tilde{X}$ et $\dfrac{\tilde{X}-\tilde{X}_0}{x_0^n - x^n}$ ($\tilde{X}$ est le quotient par $x_0^n - x^n$ d'une fonction X s'annulant pour $x^n = x_0^n$) sont continues et bornées B dans Λ;

2° Les fonctions X et $\tilde{X}$ vérifient une condition de Lipschitz B par rapport à tous leurs arguments.

9. **Résolution des équations** (2), (3), (4). — Nous considérons le système d'équations intégrales à trois groupes de fonctions inconnues Ω, W et U obtenu en remplaçant dans les équations (2), (3), (4) les fonctions X par les solutions trouvées des équations (1)

$$\Omega = \int_{x_0^n}^{x^n} F\, dx^n + \Omega_0,$$

$$W = \int_0^{x^n} G\, dx^n + W_0,$$

$$U = \int_{x_0^n} \int_{\Sigma_0} \cdots \int H\, dx^n\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-1} + \int_{\Sigma_0} \cdots \int I\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-1}.$$

Espace fonctionnel $\mathcal{F}$. — Nous résoudrons les équations (2), (3), (4) comme dans A (chap. III, § 16) en considérant un espace fonctionnel $\mathcal{F}$. Les coordonnées d'un point de $\mathcal{F}$ étant des fonctions W_1, U_1 et Ω_1 définies et continues dans des domaines D et Λ, prenant pour $x^n = 0$ les valeurs W_0, U_0 et Ω_0 ainsi désignées précédemment et satisfaisant aux inégalités

$$|\Omega_1 - \Omega_0| \leqq N\, |x_0^n - x^n|,$$

où N est un nombre donné, dépendant des bornes B

$$|W_1 - W_0| \leqq l, \qquad |U_1 - U_0| \leqq l,$$

où l est le nombre ainsi désigné dans les hypothèses B.

Nous supposerons de plus que les fonctions Ω_1, W_1 et U_1 satisfont à une condition de Lipschitz respectivement par rapport aux variables x_0^i, x^α et x^i (16).

Nous définissons dans $\mathcal{F}$ la distance de deux points $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}'_1$ par la somme des bornes supérieures, dans les domaines de variation respectifs de leurs arguments, des valeurs absolues des différences de leurs coordonnées

$$d(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}'_1) = \operatorname{Max} \{ \Sigma\, |\Omega'_1 - \Omega_1| + \Sigma\, |W'_1 - W_1| + \Sigma\, |U'_1 - U_1| \}.$$

L'espace $\mathcal{F}$ est alors un espace normé complet et compact (topologie de la convergence uniforme).

Représentation de l'espace $\mathcal{F}$. — Nous remplaçons dans F, G, H, I les inconnues Ω, W, U par les coordonnées Ω_1, W_1, U_1 d'un point de $\mathcal{F}$; nous obtenons ainsi une représentation de $\mathcal{F}$

$$(9.1)\quad \begin{cases} \Omega_2 = \displaystyle\int_{x_0^n}^{x^n} F_1\, dx^n + \Omega_0, \\ W_2 = \displaystyle\int_0^{x^n} G_1\, dx^n + W_0, \\ U_2 = \displaystyle\int_{x_0^n}^{0} \int_{\Sigma_0} \cdots \int H_1\, dx^n\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-1} + \int_{\Sigma_0} \cdots \int I_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-1}. \end{cases}$$

---

(16) Nous ne supposons pas que U_1 (qui n'intervient pas dans F) vérifie une condition de Lipschitz par rapport à x^n.

Nous montrerons qu'il existe un nombre $\varepsilon(x_0^i)$ définissant un domaine A et un domaine D non vides tel que cette représentation est une représentation de l'espace $\mathcal{F}$ dans lui-même et admet un point fixe.

10. 1° Les quantités F_1 et G_1 étant continues et bornées B, il est clair qu'il existe un nombre ε non nul définissant un domaine D tel que pour $|x^n - x_0^n| \leqq \varepsilon$ (c'est-à-dire $x^n \leqq x_0^n \leqq \varepsilon$) les fonctions Ω_2, W_2 soient continues et satisfont aux mêmes inégalités que Ω_1, W_1, dans leurs domaines de définition respectifs.

2° Étudions les fonctions u_2 :

a. La quantité H_1 n'est plus, comme pour quatre variables continue et bornée B, mais il est facile de voir cependant que l'on peut choisir ε définissant D, non vide, tel que U_2 soit continu et borné par la même inégalité que U_1, dans D.

Nous avons vu, en effet, au chapitre I que la quantité H était absolument intégrable (*cf.* § 25, chap. I) si les coefficients $A^{\lambda\mu}$ possédaient des dérivées partielles continues et bornées jusqu'à l'ordre $2k+4$ par rapport aux variables x^α. Les fonctions X solutions des équations (1) possédant les mêmes propriétés qu'au chapitre I et les $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$ admettant des dérivées partielles par rapport à ces fonctions jusqu'à l'ordre $2k+4$ continues et bornées H_1 vérifie une inégalité analogue à l'inégalité (25.7) du chapitre I, c'est-à-dire :

$$\int_{x_0^n}^{0}\int\cdots\int_{\Sigma_0} H_1\, dx^n\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-1} \leqq B\,|x_0^n \log x_0^n|, \tag{10.1}$$

où B désigne une borne B.

b. Rappelons que la quantité I est donnée par l'égalité suivante [17] :

$$I = \frac{1}{R_n}\left\{\frac{\mathcal{E}_s^i\,\Delta p_i}{R^n}\right\}_{x^n=0} = \frac{\Phi_0}{T_n}\left\{\frac{D(x_0^n - x^n)^{n-2}\,\mathcal{E}_s^i p_i}{T^n}\right\}_{x^n=0}, \tag{10.2}$$

avec

$$\mathcal{E}_s^i = \sum_{l=0}^{k}\sum_{p=0}^{l} C_p^l\, E_{s(l)}^{i(l-p)}(u_p).$$

Nous voyons que I_1 est continu et borné (de même que la quantité I du chapitre I, *cf.* § 22).

Les résultats du chapitre I (§ 22) montrent de plus que tous les termes de $E_{s(l)}^{i(l-p)} p_i (x_0^n - x^n)^{n-2}$ figurant dans I_1 sont produits de $x_0^n - x^n$ par des quantités bornées, donc tendent vers zéro quand x^n tend vers x_0^n à l'exception du terme $[u_{r1}]J_1$:

$$J_1 = -\,\omega_{l_1}^r\left[\overset{(1)}{A}{}^{ij}\right]\frac{\partial(\sigma\chi_{s(0)}^l)}{\partial x^i}\,p_j(x^n - x_0^n)^{n-2}. \tag{10.3}$$

Nous allons montrer que J_1 tend vers $\alpha\varphi_s(x_0^i) = \alpha u_0$ quand x^n tend vers x_0^n,

---

(17) Pour simplifier l'écriture, nous supprimons les signes *, correspondant à la transformation variable (§ 26, chap. I), qui devraient figurer dans ces expressions.

α étant une fonction de $\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ dont l'intégrale sur la sphère unité Σ_0 est égale à 1. En effet, les fonctions $\left[\overset{(1)}{A}{}^{ij}\right]$, $(x^n - x^n_0)^{\frac{n}{2}-1}\sigma$ et $(x^n - x^n_0)^{\frac{n}{2}}\dfrac{\partial\sigma}{\partial x^i}$ vérifient des conditions de Lipschitz B par rapport aux fonctions X, les fonctions X (donc aussi p_j) et ω^r_{t1} vérifiant elles-mêmes des conditions de Lipschitz B par rapport à la variable x^n (résultats du chapitre I et hypothèses faites sur Ω_1); nous avons vu, d'autre part, au chapitre I que si les coefficients $A^{\lambda\mu}$ sont suffisamment différentiables (ce qui est le cas pour les $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$), les fonctions $\chi^t_{s(0)}$ vérifient des inégalités de la forme suivante :

$$|x^n - x^n_0|^{\frac{n}{2}-3}\left|\chi^t_{s(0)} - \{\chi^t_{s(0)}\}_{x^n=x^n_0}\right| \leq B\left|\log|x^n - x^n_0|\right|\,|x^n - x^n_0|,$$

$$|x^n - x^n_0|^{\frac{n}{2}-2}\left|\frac{\partial\chi^t_{s(0)}}{\partial x^i} - \left\{\frac{\partial\chi^t_{s(0)}}{\partial x^i}\right\}_{x^n=x^n_0}\right| \leq B\,|x^n - x^n_0|\,\left|\log|x^n - x^n_0|\right|.$$

D'où l'inégalité suivante vérifiée par J_1 :

$$|\{J_1\}_{x^n=0} - \{J_1\}_{x^n=x^n_0}| \leq B\left|x^n_0 \log|x^n_0|\right|, \tag{10.4}$$

où

$$\{J_1\}_{x^n=x^n_0} = K_n\,\delta^r_s,$$

K_n étant le nombre ainsi désigné au chapitre I.

Nous avons, d'autre part, par hypothèse :

$$[u_{r1}]_{x^n=0} = \varphi_r(x^i),$$

où x^i, considéré comme une fonction $X(x^\alpha_0, x^n, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1})$ doit être ici pris pour $x^n = 0$.

Les fonctions X vérifiant une condition de Lipschitz B par rapport à la variable x^n, on a

$$|\{x^i\}_{x^n=0} - x^i_0| = |\{x^i\}_{x^n=0} - \{x^i\}_{x^n=x^n_0}| \leq B\,|x^n_0|.$$

Les $\varphi_r(x^i)$ vérifiant, d'autre part, une condition de Lipschitz B par rapport aux x^i (hypothèses § 2), on a

$$|\varphi_r(x^i) - \varphi_r(x^i_0)| \leq B\,|x^n_0|. \tag{10.5}$$

D'où

$$|\{[u_{r1}]\,J_1\}_{x^n=0} - K_n\,\varphi_s(x^i_0)| \leq B\,|x^n_0|\,|\log|x^n_0||,$$

la quantité I_1 figurant sous le signe d'intégrale $n-2$-uple, donnée par la formule (10.2) étant la somme de $\dfrac{\Phi_0}{k_n}\left\{[u_{r1}]\,J_1\,\dfrac{D(x^n_0 - x^n)^{n-2}}{T^n}\right\}_{x^n=0}$ (k_n, produit de K_n par l'aire de la sphère unité $n-2$-uple) et de termes dont le quotient par x^n_0 est borné B, on trouve finalement :

$$\left|I_1 - \Phi_0\frac{K^n}{k_n}\varphi_s(x^i_0)\right| \leq B\left|x^n_0 \log|x^n_0|\right|; \tag{10.2}$$

$\varphi_s(x_0^i)$ étant la fonction que nous avons désignée par U_0, nous déduisons de (10.1) et (10.2) une inégalité de la forme suivante :

$$| U_2 - U_0 | \leqq B \left| x_0^n \log | x_0^n | \right|.$$

L'inégalité (10.3) ([18]) montre qu'il existe un nombre ε non nul ne dépendant que des bornes B tel que pour

$$| x_0^n | \leqq \varepsilon,$$

on ait

$$| U_2 - U_0 | \leqq l.$$

11. Pour montrer que le point $(\mathcal{M}_2 \Omega_2, W_2, U_2)$ est un point de $\mathcal{F}$, il nous faut encore montrer que Ω_2, W_2, U_2 satisfont aux mêmes conditions de Lipschitz que Ω_1, W_1, U_1.

1° Nous avons :

$$\Omega_2(x_0'^i, \ldots) - \Omega_2(x_0^i, \ldots) = \int_{x_0^n}^{x^n} \{ F_1(x_0'^i, \ldots) - F_1(x_0^i, \ldots) \} \, dx^n,$$

où $F'_1(x_0'^i, \ldots)$ et $F_1(x_0^i, \ldots)$ sont calculés respectivement à l'aide des fonctions $X(x_0'^i, \ldots)$, $\Omega_1(x_0'^i, \ldots)$ et $X(x_0^i, \ldots)$, $\Omega_1(x_0^i, \ldots)$.

Les F_1 satisfont à des conditions de Lipschitz B par rapport aux X, Ω_1, W_1, les fonctions W_1 satisfaisant elles-mêmes à une condition de Lipschitz par rapport aux $X = x^i$, tandis que les Ω_1 et X vérifient des conditions de Lipschitz par rapport aux x_0^i. Nous voyons donc que F_1 vérifie une condition de Lipschitz B par rapport aux x_0^i. Supposons que le nombre N figurant dans l'inégalité soit précisément le coefficient de cette condition de Lipschitz, nous avons alors :

$$| \Omega_2(x_0'^i, \ldots) - \Omega_2 | x_0^i, \ldots) | \leqq | x_0^n - x^n | \, N \Sigma \, | x_0'^i - x_0^i |$$

et il est clair que Ω_2 et $\tilde{\Omega}_2$ vérifient les mêmes conditions de Lipschitz que Ω_1 et $\tilde{\Omega}_1$.

2°

$$W_2(x'^i, x^n) - W_2(x^i, x^n) = \int_0^{x^n} (G_1(x'^i, t) - G_1(x^i, t)) \, dt + W_0(x'^i) - W_0(x^i).$$

G_1 étant une fonction W_1 ou une fonction u_1, il suffira de prendre

$$\varepsilon \leqq \frac{l - l_0}{l}$$

(où l et $l_0 < l$ désignent respectivement les coefficients des conditions de Lipschitz satisfaites par W_1, U_1 et W_0, U_0) pour que W_2 vérifie les mêmes conditions de Lipschitz que W_1.

([18]) Cette inégalité laisse prévoir que la solution des équations intégrales $\mathcal{J}_1$ est solution du problème de Cauchy : la fonction $u(x_0^\alpha)$ donnée par la formule de Kirchoff tend vers $u_0 = \varphi_s(x_j)$ quand x_0^n tend vers zéro.

3°

$$U_2(x'^i_0, x^n_0) - U_2(x^i_0, x^n_0) = \int_{x^n_0}^{0} \int_{\Sigma_0} \cdots \int [H_1(x'^i_0, \ldots) - H_1(x^i_0, \ldots)]\, dx^n\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-1}$$
$$+ \int_{\Sigma_0} \cdots \int [I_1(x'^i_0, \ldots) - I_1(x^i_0, \ldots)]\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-1},$$

On montre que $\dfrac{H_1(x'^i_0, \ldots) - H_1(x^i_0)}{\Sigma\, | x'^i_0 - x^i_0 |}$ est absolument intégrable en utilisant une méthode analogue à celle utilisée au chapitre I pour montrer que H est absolument intégrable (*cf.* § 25), qui utilise la différentiabilité des $A^{\lambda\mu}$ (ici $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$) : on montre que, sous cette hypothèse, vérifiée par les $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$, les fractions $\dfrac{\mathcal{R} - \mathcal{R}_0}{x^n_0 - x^n}$ vérifient une condition de Lipschitz B par rapport aux variables x^i_0 (démonstration identique à celle faite dans A, chap. III, § 22) et que, en conséquence, $\displaystyle\int_{x^n}^{0} \frac{\mathcal{R} - \mathcal{R}_0}{(x^n - x^n_0)^2}\, dx^n$ vérifie une condition de Lipschitz de coefficient $B \left| \log | x^n - x^n_0 | \right|$ par rapport à ces variables. On trouve finalement :

$$\left| \int_{x^n_0}^{0} \int_{\Sigma_0} \cdots \int (H_1(x'^i_0, \ldots) - H_1(x^i_0, \ldots))\, dx^n\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-1} \right| \leq B \left| x^n_0 \log | x^n_0 | \right| \Sigma\, | x'^i_0 - x^i_0 |. \tag{11.1}$$

Pour montrer que l'intégrale de surface

$$\int_{\Sigma_0} \cdots \int (I_1(x'^i_0, \ldots) - I_1(x^i_0, \ldots))\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_{n-1}$$

vérifie une inégalité analogue, nous remarquerons que tous les termes de I_1 vérifient une condition de Lipschitz par rapport aux x^i_0 dont le coefficient est de la forme $| x^n - x^n_0 | B$, à l'exception du terme $[u_{r1}] J_1$. Nous voyons, par des méthodes analogues à celles précédemment utilisées que $J_1 - K_n \delta^r_s$, donc J_1 vérifie une condition de Lipschitz par rapport aux variables x^i_0 dont le coefficient est de la forme $| x^n - x^n_0 | \log | x^n - x^n_0 | B$. Nous avons, d'autre part, l'identité suivante :

$$\{ [u_{r1}] J_1 \}_{x^n=0} = \varphi_r(x^i) \{ J_1 \}_{x^n=0} = K_n \varphi_s(x^i_0) + (J_1 - K_n \delta^r_s) \varphi_r(x^i_0) + J_1(\varphi_r(x^i) - \varphi_r(x^i_0))$$

D'où, d'après les inégalités (10.4) et (10.5), et le fait que

$$\frac{\varphi_r(x^i) - \varphi_r(x^i_0)}{x^n - x^n_0} = \frac{\varphi_r(x^i) - \{ \varphi_r(x^i) \}_{x^n = x^n_0}}{x^n - x^n_0}$$

vérifie une condition de Lipschitz B par rapport aux x^i_0 :

$$| \{ [u_{r1}] J_1 \}_{x'^i_0} - \{ [u_{r1}] J_1 \}_{x^i_0} |_{x^n=0} \leq K_n\, | \varphi_s(x'^i_0) - \varphi_s(x^i_0) | + B \left| x^n_0 \operatorname{Log} | x^n_0 | \right| \Sigma\, | x'^i_0 - x^i_0 |.$$

On en déduit l'inégalité suivante :

$$(11.2)\quad \int_{\Sigma_0}\cdots\int |\,I_1(x_0'^i,\ldots)-I_1(x_0^i,\ldots)\,|\,d\lambda_2\ldots d\lambda_{n-1}\leqq |\,U_0(x_0'^i)-U_0(x_0^i)\,| + B\left|x_0^n \operatorname{Log}|x_0^n|\right|\Sigma\,|\,x_0'^i-x_0^i\,|,$$

avec, par hypothèse,

$$|\,U_0(x_0'^i)-U_0(x_0^i)\,|\leqq l_0\,\Sigma(x_0'^i-x_0^i).$$

On déduit de (11.1) et (11.2)

$$|\,U_2(x_0'^i,\ldots)\,|-U_2(x_0^i,\ldots)\,|\leqq\left(l_0+B\left|x_0^n\operatorname{Log}|x_0^n|\right|\right)\Sigma\,|\,x_0'^i-x_0^i\,|,$$

d'où, pour un choix convenable de ε définissant D :

$$|\,U_2(x_0'^i)-U_2(x_0^i)\,|\leqq l\Sigma(x_0'^i-x_0^i)\qquad (l>l_0);$$

U_2 satisfait alors aux mêmes conditions de Lipschitz que U_1.

12. Nous allons montrer que la représentation (9.1) de l'espace $\mathcal{F}$ dans lui-même admet un point fixe en l'itérant. Soit $\mathcal{M}_2(\Omega_2,\ W_2,\ U_2)$ le point représentatif de $\mathcal{M}_1(\Omega_1,\ W_1,\ U_1)$ et $\mathcal{M}_3(\Omega_3,\ W_3\ U_3)$ le point représentatif de $\mathcal{M}_2$.

Il résulte immédiatement de la forme des fonctions F et G que :

$$(12.1)\qquad |\,\Omega_3-\Omega_2\,|\leqq|\,x^n-x_0^n\,|\,B\operatorname{Max}\{\Sigma\,|\,\Omega_2-\Omega_1\,|+\Sigma\,|\,W_2-W_1\,|\},$$

$$(12.2)\qquad |\,W_3-W_2\,|\leqq|\,x^n\,|\operatorname{Max}\{\Sigma\,|\,W_2-W_1\,|+\Sigma\,|\,U_2-U_1\,|\}.$$

Montrons que H vérifie une condition de Lipschitz par rapport aux fonctions Ω, $\tilde{\Omega}$, W et U, sous les hypothèses faites sur les coefficients $\left(A^{\lambda\mu}\right.$ est une fonction donnée $\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$, $2k+4$ fois différentiable, des variables $\left.x^\alpha\right)$, dont le coefficient est de la forme $B\left|\operatorname{Log}|x^n-x_0^n|\right|$.

Rappelons que

$$H=\left([u_r]L_{s\,(l)}^{r\,(l)}+\frac{\partial^l f_s}{\partial x^{nl}}\sigma_{s(l)}^r\right)\frac{\Delta}{A^{nn}+A^{in}p_i},$$

où $L_{s\,(l)}^{r\,(l)}$ est donné par la formule (7.1) du chapitre I.

Les coefficients $A^{\lambda\mu}=\overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$ étant des fonctions données des variables x^α, satisfaisant aux hypothèses du chapitre I, $\Delta(x_0^n-x^n)^{2-n}$ est une fonction donnée, continue et bornée dans (D). H est ainsi une forme linéaire des fonctions $(x^n-x_0^n)^{n-h-3}\sigma_{s(h)}^r$, $(x^n-x_0^n)^{n-h-2}\dfrac{\partial\sigma_{s(h)}^r}{\partial x^i}$, $(x^n-x_0^n)^{n-h-1}\dfrac{\partial^2\sigma_{s(h)}^r}{\partial x^i\,\partial x^j}$ ainsi que de la quantité $\left([A^{ij}]\dfrac{\partial^2\sigma_{s(0)}^r}{\partial x^i\,\partial x^j}\right)(x^n-x_0^n)^{n-2}$ (*cf.* § 25, chap. I), les coefficients de cette forme linéaire sont des fonctions bornées vérifiant des conditions de Lipschitz B par rapport aux fonctions U et W.

13. Montrons que les fonctions $(x^n-x_0^n)^{n-h-3}\sigma_{s(h)}^r$, $(x^n-x_0^n)^{n-h-2}\dfrac{\partial\sigma_{s(h)}^r}{\partial x^i}$, $(x^n-x_0^n)^{n-h-1}\dfrac{\partial^2\sigma_{s(h)}^r}{\partial x^i\,\partial x^j}$ vérifient des conditions de Lipschitz B par rapport aux fonctions Ω et W.

Rappelons que :

$$\sigma^r_{s(h)} = \sigma\omega^r_{t(h)}\chi^{t(h)}_s.$$

$(x^n - x^0_n)^{\frac{n}{2}-1}\sigma$ est une fonction donnée, continue et bornée. $\omega^r_{t(h)}$ est une fonction Ω. Étudions $\chi^t_{s(h)}$ par récurrence :

$$\chi^t_{s(h)} = \int_{x^n}^{-\infty} \frac{\varphi^r_{s(h)}\hat{\omega}^t_{r(h)}}{\mathrm{T}^n}\,dx^n \quad \text{[form. (12.3), chap. I].}$$

1° Nous avons vu au chapitre I que $\chi_{s(k-1)}$ est de la forme suivante :

$$\chi^t_{s(k-1)} = \int_{x^n}^{-\infty} \frac{\mathcal{R}}{(x^n - x^n_0)^2}\,dx^n,$$

où $\mathcal{R}$ est une fonction continue et bornée (que l'on identifie pour $x^n < 0$ avec la valeur $\mathcal{R}_0$ qu'elle prend pour $x^n = x^n_0$). Il est facile de voir, en se reportant à l'expression de $\varphi^r_{s(k-1)}$ [(19.1), chap. I] que $\mathcal{R}$ vérifie une condition de Lipschitz B par rapport aux fonctions Ω et W :

$$|\mathcal{R}_2 - \mathcal{R}_1| \leqq \mathrm{B}\,\mathrm{Max}\,\{\Sigma\,|\Omega_2 - \Omega_1| + \Sigma\,|\mathrm{W}_2 - \mathrm{W}_1|\}.$$

D'où :

$$\{(x^n - x^n_0)\chi^t_{s(k-1)}\}_2 - \{(x^n - x^n_0)\chi^t_{s(k-1)}\}_1 \leqq \mathrm{B}\,\mathrm{Max}\,\{\Sigma\,|\Omega_2 - \Omega_1| + \Sigma\,|\mathrm{W}_2 - \mathrm{W}_1|\}.$$

2° On montre de manière analogue, en utilisant les expressions (19.3) et (19.4) des dérivées de $\chi^t_{s(k-1)}$ que $(x^n - x^n_0)^2\dfrac{\partial\chi^t_{s(k-1)}}{\partial x^i}$ et $(x^n - x^n_0)^3\dfrac{\partial^2\chi^t_{s(k-1)}}{\partial x^i\,\partial x^j}$ vérifient des conditions de Lipschitz B par rapport aux Ω et W. Il en est donc ainsi de $(x^n - x^n_0)^{\frac{n}{2}}\sigma^r_{s(k-1)}$, $(x^n - x^n_0)^{\frac{n}{2}+1}\dfrac{\partial\sigma^r_{s(k-k)}}{\partial x^i}$ et $(x^n - x^n_0)^{\frac{n}{2}+2}\dfrac{\partial^2\sigma^r_{s(k-1)}}{\partial x^i\,\partial x^j}$.

3° Des raisonnements tout à fait analogues à ceux faits au chapitre I (§ 19) permettent de montrer par récurrence que les fonctions $(x^n - x^n_0)^h\chi^r_{s(k-h)}$, $(x^n - x^n_0)^{h+1}\dfrac{\partial\chi^r_{s(h-k)}}{\partial x^i}$ et $(x^n - x^n_0)^{h+2}\dfrac{\partial^2\chi^r_{s(k-h)}}{\partial x^i\,\partial x^j}$ vérifient des conditions de Lipschitz B par rapport aux fonctions Ω et W. Il en est donc de même de $(x^n - x^n_0)^{n-h-3}\sigma^r_{s(h)}$, $(x^n - x^n_0)^{n-h-2}\dfrac{\partial\sigma^r_{s(h)}}{\partial x^i}$, $(x^n - x^n_0)^{n-h-1}\dfrac{\partial^2\sigma^r_{s(h)}}{\partial x^i\,\partial x^j}$ $\left(\text{rappelons que } k = \dfrac{n}{2} - 2\right)$.

14. Montrons que les fonctions

$$(x^n - x^n_0)^{\frac{n}{2}-2}\chi^r_{s(0)} - \lim_{x^n = x^n_0}(x^n - x^n_0)^{\frac{n}{2}-2}\chi^r_{s(0)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$(x^n - x^n_0)^{\frac{n}{2}}\frac{\partial^2\chi^r_{s(0)}}{\partial x^i\,\partial x^j} - \lim_{x^n = x^n_0}(x^n - x^n_0)^{\frac{n}{2}}\frac{\partial^2\chi^r_{s(0)}}{\partial x^i\,\partial x^j}$$

vérifient, par rapport aux fonctions Ω et W des conditions de Lipschitz dont le coefficient est de la forme $\mathrm{B}\,\mathrm{Log}\,|x^n - x^n_0|$. Cette démonstration suit la méthode du paragraphe 25 (chap. I), les $\mathrm{A}^{\lambda\mu}$ $\left(\text{qui sont ici les } \overset{(1)}{\mathrm{A}}{}^{\lambda\mu}\right)$ étant suffisamment différentiables et les X possédant les propriétés des fonctions correspondantes du chapitre I.

Nous montrerons que les quantités χ_h

$$(14.1) \qquad \chi_h = \frac{1}{x_0^n - x^n}\left\{(x_0^n - x^n)^h \chi^r_{s(k-h)} - \lim_{x^n = x_0^n}(x^n - x_0^n)^h \chi^r_{s(k-h)}\right\}$$

vérifient des conditions de Lipschitz de coefficient B $\left|\operatorname{Log}|x^n - x_0^n|\right|$ par rapport aux fonctions Ω et W [19].

1° Nous avons vu au paragraphe 25 (chap. I) que χ_1 est donné par l'expression suivante :

$$\chi_1 = \int_{x^n}^{\infty} \frac{\mathcal{R} - \mathcal{R}_0}{(x^n - x_0^n)^2}\, dx^n,$$

où

$$\mathcal{R} = \frac{\varphi^r_{s(k-1)}\hat{\omega}^t_{r(k-1)}(x^n - x_0^n)^2}{T^n}$$

prend la valeur $\mathcal{R}_0$ pour $x^n = x_0^n$ et est identique à $\mathcal{R}_0$ pour $x^n < 0$.

Il résulte de l'expression de $\varphi^r_{s(k-1)}$ [(19.1), chap. I] que tous les termes de $\dfrac{\mathcal{R}}{x^n - x_0^n}$ sont bornés et vérifient une condition de Lipschitz B par rapport aux fonctions Ω, $\tilde{\Omega}$ et W étant $\left(\text{quand les } A^{\lambda\mu} = \overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu} \text{ sont des fonctions } 2k+4 \text{ fois différentiables des } x^\alpha\right)$ des fonctions algébriques régulières des coefficients B^Ω_s et des fonctions Ω, $\tilde{\Omega}$, à l'exception du terme

$$[A^{ij}]\omega^r_{s(k)} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^i \partial x^j} \frac{(x^n - x_0^n)}{2\sigma T^n}.$$

Il résulte de l'étude faite au chapitre I que

$$Z = [A^{ij}] \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^i \partial x^j} \frac{(x^n - x_0^n)^2}{2\sigma T^n},$$

qui est une fonction connue des variables x^α quand $A^{\lambda\mu} = \overset{(1)}{A}{}^{\lambda\mu}$, satisfait à l'inégalité

$$\left|\frac{Z - Z_0}{x^n - x_0^n}\right| \leq B.$$

(On a désigné par Z_0 la valeur de Z pour $x^n = x_0^n$).

$\dfrac{\omega^r_{s(k)} Z - \delta^r_s Z_0}{x^n - x_0^n}$ satisfait donc à une condition de Lipschitz B par rapport à Ω et $\tilde{\Omega}$. Tous les autres termes de $\mathcal{R}$ tendant vers zéro quand x^n tend vers x_0^n, on a d'autre part $\mathcal{R}_0 = \delta^r_s Z_0$ et l'on voit finalement que $\dfrac{\mathcal{R} - \mathcal{R}_0}{x^n - x_0^n}$ satisfait à une condition de Lipschitz B par rapport aux fonctions W, Ω et $\tilde{\Omega}$, on en déduit que

---

[19] Les fonctions U n'interviennent pas dans les expressions des fonctions $\sigma^r_{s(l)}$ [*cf.* remarque à la fin du paragraphe (chap. II)].

$\chi_1 = \int_{x^n}^{-\infty} \frac{\mathcal{R} - \mathcal{R}_0}{(x^n - x_0^n)^2}$ satisfait par rapport à ces fonctions à une condition de Lipschitz dont le coefficient est de la forme $B \left| \log |x^n - x_0^n| \right|$.

2° Une démonstration similaire montre que les quantités analogues à χ_1 construites avec les dérivées $\frac{\partial \chi^t_{s(k-1)}}{\partial x^i}$ et $\frac{\partial^2 \chi^t_{s(k-1)}}{\partial x^i \partial x^j}$ satisfont à des conditions de Lipschitz de coefficients $B \left| \log |x^n - x_0^n| \right|$ par rapport aux fonctions Ω, $\tilde{\Omega}$ et W.

3° Un raisonnement par récurrence analogue à celui fait au chapitre I (§ 25) montre enfin que les quantités χ_h satisfont toutes ($k \geqq h > 0$) à des conditions de Lipschitz de coefficients $B \left| \log |x^n - x_0^n| \right|$ par rapport aux fonctions Ω, $\tilde{\Omega}$ et W.

15. Les résultats des paragraphes **13** et **14**, et l'expression de H montrent que H vérifie une condition de Lipschitz par rapport aux fonctions Ω, $\tilde{\Omega}$, W et U.

$$(15.1) \quad |H_2 - H_1| \leqq B \log |x^n - x_0^n| \times \operatorname{Max} \{ \Sigma |\Omega_2 - \Omega_1| + \Sigma |\tilde{\Omega}_2 - \tilde{\Omega}_1| + \Sigma |W_2 - W_1| + \Sigma |U_2 - U_1| \}.$$

L'expression (**11**.2) de I et les résultats déjà démontrés sur les fonctions $\sigma^r_{s(l)}$ montrent, d'autre part, que I vérifie une condition de Lipschitz B par rapport aux fonctions Ω et W [dans I la fonction U qui n'intervient que directement et non par l'intermédiaire des $\sigma^r_{s(l)}$ doit être remplacée par une fonction connue, donnée de Cauchy $\varphi_r(x^i)$].

Nous écrirons donc :

$$(15.2) \qquad |I_2 - I_1| \leqq B \{ \operatorname{Max} \Sigma |\Omega_2 - \Omega_1| + \Sigma |W_2 - W_1| \}.$$

On déduit finalement des inégalités (**15**.1) et (**15**.2) :

$$(15.3) \quad |U_3 - U_2| \leqq B |x_0^n \log |x_0^n|| \operatorname{Max} \{ \Sigma |\Omega_2 - \Omega_1| + \Sigma |\tilde{\Omega}_2 - \tilde{\Omega}_1| + \Sigma |W_2 - W_1| + \Sigma |U_2 - U_1| \} + B \operatorname{Max} \{ \Sigma |W_2 - W_1| + \Sigma |\Omega_2 - \Omega_1| \}.$$

Nous voyons qu'il suffira (comme dans A, § **19**, chap. III) d'itérer une deuxième fois la représentation (**9**.1) pour que la distance des points $\mathcal{M}_4\, \mathcal{M}_3$ soit inférieure à la distance $\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2$ pour un choix convenable du nombre ε non nul définissant le domaine D [*cf.* inégalités (**12**.1), (**12**.2) et (**15**.3)].

On en déduit l'existence d'un point fixe pour la représentation (**9**.1), le point fixe appartement à l'espace $\mathcal{F}$, les fonctions correspondantes Ω, W et U satisfont aux hypothèses faites au paragraphe **9** sur l'espace $\mathcal{F}$. Nous aboutissons ainsi au théorème suivant :

Théorème. — *Le système d'équations intégrales* (2), (3), (4) *admet dans* (D) *une solution* Ω, W, U *continue et bornée. Les fonctions* U *satisfont à une condition de Lipschitz par rapport aux variables* x^i.

Les inégalités (**9**.1), (**9**.2), (**9**.3) montrant l'existence de la solution montrent aussi qu'elle est unique.

C. — Les solutions des équations intégrales $\mathcal{J}_1$ sont solutions du système intégro-différentiel F'_1, f'_1.

Nous montrons maintenant que les fonctions $W_{S\alpha_1\ldots\alpha_i}$ $(0 \leqq i \leqq k+1)$ obtenues comme solutions des équations intégrales $\mathcal{J}_1$ sont solutions du système intégro-différentiel F'_1, f'_1 et que les fonctions $W^i_{S\alpha_1\ldots\alpha_j}$ $(i \leqq k+1, j \leqq h)$ solutions des équations $\mathcal{J}_1$ sont les dérivées partielles d'ordre $i-j$ de ces fonctions $W_{S\alpha_1\ldots\alpha_i}$, dans un domaine D ne dépendant que des bornes B. Nous utiliserons pour cette démonstration l'approximation des fonctions continues par des fonctions analytiques [méthode utilisée par Hadamard et de nombreux auteurs dans la synthèse du problème de Cauchy (*cf.* A, p. 72)].

Cas analytique. — Considérons des équations F'_1 où coefficients et données de Cauchy sont analytiques $\left(A^{\lambda\mu}, f_S, \overset{(1)}{W}_{S\alpha_1\ldots\alpha_{k+1}}, \varphi_S \text{ et } \psi_S\text{, fonctions analytiques de leurs divers arguments}\right)$. Il est facile de montrer que le problème de Cauchy (construit à l'aide de φ_S et ψ_S) relatif au système intégro-différentiel F'_1, f'_1 admet une solution analytique dans un voisinage V du domaine (d) de la surface initiale $x^n = 0$ portant les données de Cauchy (système de Cauchy par rapport aux fonctions W_S, $W_{S\alpha,\ldots}$, $W_{S\alpha_1\ldots\alpha_{k+1}}$ et la variable x^n auquel on applique le théorème de Cauchy-Kowalewki).

Considérons, d'autre part, indépendamment des équations F'_1, f'_1 le système d'équations intégrales $\mathcal{J}_1$. Ces équations admettent, sous les hypothèses B, une solution unique dans un domaine D ne dépendant que des bornes B. On montre (*cf.* une démonstration analogue dans A, § 24, chap. III) que cette solution est analytique dans D. Elle coïncide donc dans $V \cap D$ avec la solution des équations F'_1, f'_1, qui vérifie le système $\mathcal{J}_1$. Le prolongement analytique montre alors que la solution des équations $\mathcal{J}_1$ est solution du système F'_1, f'_1 dans D tout entier.

Remarquons que si l'on a désigné par $W^i_{S\alpha_1\ldots\alpha_j}$ les fonctions W et U, solutions des équations $\mathcal{J}_1$, les fonctions, solutions de F'_1, f'_1 sont les dérivées partielles d'ordre $j-i$ par rapport aux x^α des fonctions $W_{S\alpha_1\ldots\alpha_i}$ $(0 \leqq i \leqq k+1)$.

Coefficients et données de Cauchy ne satisfaisant qu'aux hypothèses B. — Nous approchons uniformément les coefficients $A^{\lambda\mu}$, f_S, les données de Cauchy φ_S et ψ_S satisfaisant aux hypothèses B et les fonctions $\overset{(1)}{W}_{S\alpha_1\ldots\alpha_{k+1}}$ satisfaisant aux hypothèses (§ 5) par des fonctions analytiques satisfaisant aux mêmes hypothèses. Nous obtenons ainsi des systèmes d'équations $F'_{1(n)}$, $f'_{1(n)}$ approchés du système F'_1, f'_1. Ces systèmes $F'_{1(n)}$, $f'_{1(n)}$ ont dans D une solution, solution du système d'équations intégrales $\mathcal{J}_{1(n)}$; les fonctions $W^i_{S\alpha_1\ldots\alpha_{j(n)}}$ correspondant à ces solutions sont les dérivées des fonctions $W_{S\alpha_1\ldots\alpha_i}$ $(i \leqq k+1)$. Des inégalités analogues aux inégalités montrant l'existence de la solution des équations $\mathcal{J}_1$ dans D (*cf.* raisonnement analogue dans A, chap. III, § 26) montrent que ces solutions $W_{(n)}$, $U_{(n)}$, $X_{(n)}$, $\Omega_{(n)}$ convergent uniformément dans D vers des fonctions W, U, X, Ω

solutions du système $\mathcal{J}_1$, quand les fonctions d'approximation convergent vers les fonctions données.

Les fonctions W et U, limites uniformes des solutions $W_{(n)}$, $U_{(n)}$ des équations $F'_{1(n)}$, $f'_{1(n)}$ possèdent les mêmes propriétés, c'est-à-dire que :

1° Les fonctions $W^i_{S\alpha_1 \ldots \alpha_j}$ $(i \leqq k+1)$ sont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre $h-k-1$ des fonctions $W_{S\alpha_1 \ldots \alpha_i}$. Les fonctions $W_{S\alpha_1 \ldots \alpha_{k+1}}$ satisfont aux mêmes hypothèses que les fonctions données $\overset{(1)}{W}_{S\alpha_1 \ldots \alpha_{k+1}}$;

2° Les fonctions $W_{S\alpha_1 \ldots \alpha_i}$ $(i \leqq k+1)$ sont solutions du système intégro-différentiel F'_1, f'_1 dans le domaine D.

D. — Résolution des équations données F.

Résolution du système intégro-différentiel F'_1, f'_1. — Nous considérons l'espace fonctionnel ω des fonctions $W_{S\alpha_1 \ldots \alpha_i}$ $(i \leqq k+1)$ satisfaisant dans D aux hypothèses (§ 5); ω est un espace normé complet et compact pour la topologie de la convergence uniforme.

La résolution du problème de Cauchy φ_S, ψ_S relatif au système F'_1, f'_1 définit (résultat du paragraphe précédent) une représentation de cet espace dans lui-même. On montre que cette représentation admet un point fixe en utilisant un système d'inégalités vérifié par les solutions du problème de Cauchy, déduit du système d'équations intégrales $\mathcal{J}_1$ [*cf.* inégalités (26.1) dans A]. Les fonctions $W_{S\alpha_1 \ldots \alpha_i}$ correspondant à ce point fixe sont solutions du problème de Cauchy relatif au système F', f' dans le domaine D et possèdent des dérivées partielles jusqu'à l'ordre $h-k-1$, continues, bornées et satisfaisant à des conditions de Lipschitz par rapport aux variables x^i. On montre que cette solution est unique en utilisant le système d'équations intégrales $\mathcal{J}$ vérifié par les solutions du système F', f' : ce système $\mathcal{J}$ s'obtient pour les équations F', f' comme le système $\mathcal{J}_1$ a été obtenu pour les équations F'_1, f'_1; pour une solution des équations F', f' possédant des dérivées partielles jusqu'à l'ordre $h-k-1$, la quantité H est absolument intégrable et il n'y a aucune difficulté à écrire les inégalités classiques relatives à des équations intégrales non linéaires prouvant l'unicité de la solution.

Résolution du système d'équations aux dérivées partielles donné F. — Nous montrerons que les solutions W_S du problème de Cauchy φ_S, ψ_S relativement au système F', f' sont solutions de ce problème de Cauchy relativement aux équations aux dérivées partielles données F, les fonctions $W_{S\alpha_1 \ldots \alpha_i}$ solutions de F', f' étant les dérivées partielles d'ordre i de ces fonctions W_S. Nous utiliserons pour cette démonstration la méthode d'approximation par des fonctions analytiques, comme précédemment.

Cas analytique. — Considérons des équations F à coefficients analytiques et des données de Cauchy analytiques. Les équations F ont alors, pour ce problème de Cauchy, une solution analytique dans un voisinage V du domaine d de la surface initiale (théorème de Cauchy-Kowalewki). Cette solution est solution du problème de Cauchy relatif à F', d'après la construction même de ce problème, si les coefficients et données de Cauchy sont supposés satisfaire, de plus, aux hypothèses B. On en déduit que la solution précédemment construite dans D des équations F' (solution unique) est solution des équations F dans la partie commune $V \cap D$ aux domaines D et V. On en conclut (prolongement analytique) que la solution du système F' coïncide avec la solution du système F dans D tout entier.

Il en résulte, en particulier, que les fonctions $W_{S\alpha_1\ldots\alpha_i}$, solutions de F', sont les dérivées partielles d'ordre i des fonctions W_S correspondantes.

Cas non analytique. — Les coefficients $A^{\lambda\mu}$, f_S et les données de Cauchy φ_S et ψ_S ne satisfaisant qu'aux hypothèses B, nous les approcherons uniformément par des fonctions analytiques $A^{\lambda\mu}_{(n)}$ et $f_{S(n)}$, $\varphi_{S(n)}$ et $\psi_{S(n)}$ satisfaisant aux mêmes hypothèses. Les équations $F'_{(n)}$ correspondantes ont, relativement au problème de Cauchy $\varphi_{S(n)}$, $\psi_{S(n)}$, une solution analytique dans le domaine fixe D, qui satisfait aux équations intégrales $\mathcal{J}_{(n)}$. Les inégalités déduites de ces équations montrent la convergence uniforme, dans D, de cette solution des équations $F'_{(n)}$ vers la solution des équations F' (relativement au problème de Cauchy φ_S, ψ_S) quand les fonctions $A^{\lambda\mu}_{(n)}$, $f_{S(n)}$, $\varphi_{S(n)}$, $\psi_{S(n)}$ convergent vers les fonctions $A^{\lambda\mu}$, f_S, φ_S, ψ_S.

Nous avons vu que la solution des équations analytiques $F'_{(n)}$ est solution des équations $F_{(n)}$ dans D; les fonctions $W_{S\alpha_1\ldots\alpha_{i(n)}}$ correspondantes étant les dérivées des fonctions $W_{S(n)}$. Les fonctions $W_{S\alpha_1\ldots\alpha_i}$ solutions de F', limites uniformes dans D des fonctions $W_{S\alpha_1\ldots\alpha_{i(n)}}$ sont donc solutions des équations F (pour le problème de Cauchy φ_S, ψ_S) dans D. Les fonctions $W_{S\alpha_1\ldots\alpha_i}$ sont les dérivées d'ordre i des fonctions W_S.

L'unicité de la solution du problème de Cauchy relativement à F résulte directement du système d'équations intégrales $\mathcal{J}$ vérifié par cette solution.

Conclusion. — Sous les hypothèses B (§ 2), le système d'équations aux dérivées partielles

$$A^{\lambda\mu}\frac{\partial^2 W_S}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + f_S = 0$$

admet, relativement au problème de Cauchy φ_S, ψ_S une solution unique possédant les dérivées partielles continues et bornées jusqu'à l'ordre

$$h = 3k + 5 = \frac{3n}{2} - 1.$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] F. Bureau, *L'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles et du type hyperbolique normal* (*Mém. Soc. Royale Sc. de Liège*, vol. 3, 1938).

[2] S. Christianovich, *Le problème de Cauchy pour les équations non linéaires hyperboliques* (*Rec. Math. Moscou*, N. s. 2, 1937).

[3] G. Darmois, *Les équations de la gravitation einsteinienne* (*Mém. Sc. Math.*, fasc. 25, 1937).

[4] Y. Fourès-Bruhat, *Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires* (*Acta. Math*, t. 88, 1952; *C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 500 et 585).

[5] K. Friedrichs et H. Lewy, *Das Anfangswert problem einer beilibigen nicht linearen Differentialgleichungen beliebiger ordunug in zwei Variablen* (*Math. Ann.*, t. 99, 1928).
[6] J. Hadamard, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, Paris, 1932.
[7] J. Leray, *Séminaire de l'Institute for Advaneed Study* (Princeton), 1re partie, 1951 et 2e partie, 1952.
[8] A. Lichnerowicz, *Problèmes globaux en Mécanique relativiste*, Paris, 1939.
[9] I. Petrovsky, *Ueber das Cauchysche Problem über systeme von partiellen Differentialgleichungen* (*Rec. Math. Moscou*, N. s. 2, 1937).
[10] M. Riesz, *L'intégrale de Riemann-Lionville et le problème de Cauchy* (*Acta. Math.* t. 81, 1949).
[11] J. Schauder, *Das Anfangswert problem einer quasi linearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter achnung in biliebiger Anzahl von unabhängigen Veränderlichen* (*Fundam. Math.*, t. 24, 1935).
[12] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Paris, 1950.
[13] S. Sobolef, *Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales* (*Rec. Math. Moscou*, N. s. 1, 1936).