

BULLETIN DE LA S. M. F.

FRANÇOIS NORGUET

**Sur les domaines d'holomorphie des fonctions
uniformes de plusieurs variables complexes.
(Passage du local au global.)**

Bulletin de la S. M. F., tome 82 (1954), p. 137-159

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1954__82__137_0

© Bulletin de la S. M. F., 1954, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LES DOMAINES D'HOLOMORPHIE
DES FONCTIONS UNIFORMES DE PLUSIEURS VARIABLES COMPLEXES.
(PASSAGE DU LOCAL AU GLOBAL) (1).**

PAR FRANÇOIS NORGUET,
(Faculté des Sciences de Lille).

INTRODUCTION.

Dans son Mémoire sur les domaines pseudoconvexes [14], K. Oka a démontré, pour $n = 2$, le

THÉOREME 1. — *Tout domaine univalent et fini de C^n (espace complexe à n dimensions), qui est localement d'holomorphic (2), est d'holomorphic.*

Une analyse et une simplification des méthodes utilisées dans ce Mémoire nous permettent de démontrer ce théorème pour $n \geq 2$ dans le présent travail (3), où nous nous attachons particulièrement à éviter par des raisonnements formels tout appel à l'intuition, même au prix de quelques lourdeurs. Car la profonde intuition de K. Oka, des propriétés de l'espace C^2 , largement exploitée dans le chapitre I de son Mémoire, ne pourrait que très difficilement s'étendre à l'espace C^n général. Nous serons alors amenés à utiliser quelques considérations de topologie générale et calculs de théorie des ensembles, pour lesquels nous emploierons les notations habituelles (en particulier : union, \cup ; intersection, \cap ; inclusion, \subset ; adhérence d'un ensemble D dans un espace topologique, \bar{D} ; intérieur de cet ensemble, $\overset{\circ}{D}$) de nouvelles simplifications.

Outre l'espace C^n , nous considérerons aussi dans ce travail l'espace euclidien R^m à m dimensions; en particulier, nous associerons souvent à C^n son support R^{2n} ; un point de C^n sera désigné par une lettre, soit x , ses coordonnées complexes

N. B. — Les nombres entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin du travail.

(1) Travail présenté au Séminaire d'Analyse (Paris) le 12 mai 1953, sous forme d'exposé photocopié.

(2) Un domaine D de C^n est dit *localement d'holomorphic* si tout point de C^n admet un voisinage V , domaine d'holomorphic, dont l'intersection avec D a pour composantes connexes des domaines d'holomorphic.

(3) Notre travail correspond aux chapitres I et II de ce Mémoire; le problème étudié au chapitre III a fait l'objet d'un Mémoire de P. Lelong [10].

par x_1, x_2, \dots, x_n ; les parties réelle et imaginaire de la coordonnée x_k seront notées respectivement $\mathcal{R}x_k$ et $\mathcal{I}x_k$. Nous désignerons par $\complement A$ le complémentaire (relatif à l'espace C^n ou R^m considéré) de l'ensemble A , et nous poserons

$$A - B = A \cap \complement B.$$

Si P est une propriété d'un point variable dans un espace C^n ou R^m , (P) désigne l'ensemble des points de l'espace qui satisfont à P ; si D est un ensemble dans l'espace considéré,

$$D(P) = D \cap (P).$$

Tous les domaines considérés seront supposés *finis* et *univalents*. Étant donné une classe K de domaines de C^n ou de R^m , la relation $D \in K$ signifie que D est un ensemble ouvert de l'espace considéré, dont chaque composante connexe appartient à K . D'une manière analogue, nous appellerons ouvert d'holomorphic tout ensemble ouvert de C^n dont chaque composante connexe est un domaine d'holomorphic.

La relation $D \subset\subset D'$, où D et D' sont des ensembles d'un espace, équivaut à $\overline{D} \subset D'$; enfin nous dirons qu'une propriété P a lieu au voisinage d'un ensemble D , pour exprimer qu'il existe un voisinage ⁽⁴⁾ de D dans lequel la propriété a lieu; FD désignera la frontière de l'ensemble D .

Ce travail comprend deux parties de caractères distincts :

1° *La démonstration de l'équivalence du théorème 1 et du*

THÉOREME 1'. — *Si $a_1 < a_2$, et si les parties $D(\mathcal{I}x_1 > a_1)$ et $D(\mathcal{I}x_2 < a_2)$ du domaine borné D de C^n sont d'holomorphic, D est d'holomorphic.*

Cette démonstration fait intervenir quelques propriétés de la classe des domaines d'holomorphic, qui sont très loin de la caractériser. Nous lui consacrons le chapitre I, et nous lui donnons une forme abstraite, afin d'obtenir des énoncés généraux susceptibles d'être utilisés pour d'autres problèmes, et d'être généralisés à des espaces autres que R^m .

2° *La démonstration du théorème 1' :*

Nous lui consacrons les chapitres II, III et IV. La structure analytique-complexe et la théorie des fonctions analytiques tiennent ici un rôle de premier plan.

Rappelons, pour terminer cette introduction, que le théorème 1 équivaut à un énoncé affirmant la possibilité de construire les fonctions plurisousharmoniques à partir des fonctions analytiques dans les domaines d'holomorphic ([9] et [10] bis).

(4) Précisons que nous appelons *voisinage* d'un ensemble D , tout ensemble V contenant un ouvert qui contient D .

CHAPITRE I.

SUR CERTAINES CLASSES ABSTRAITES DE DOMAINES DANS R^m .

Nous désignerons par ξ un point variable dans R^m , ses coordonnées par $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$

DÉFINITIONS — Une classe K de domaines de R^m est dite *classe d'intersection* si :

- a. K contient les intervalles de R^m [c'est-à-dire les domaines $\bigcap_{1 \leq i \leq m} (a_i < \xi_i < b_i)$]
- et l'ensemble vide \emptyset ;
- b. si $D_1 \in K$ et $D_2 \in K$, $D_1 \cap D_2 \in K$.

Une classe K de domaines de R^m est dite *fermée à droite* si la limite de toute suite croissante de domaines bornés de K , appartient à K .

Exemples de classes d'intersection fermées à droite :

- a. dans R^m : la classe des domaines convexes;
- b. dans R^{2n} (support d'un espace complexe à n dimensions) : la classe H des domaines d'holomorphie (*) et la classe L des domaines convexes par rapport aux fonctions plurisousharmoniques [10].

Certaines classes d'intersection K (par exemple L dans R^{2n}) vérifient la propriété :

P: Si deux domaines D_1 et D_2 de K se raccordent (c'est-à-dire si $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ et $\overline{D_1} - \overline{D_2} \cap \overline{D_2} - \overline{D_1} = \emptyset$), $D_1 \cup D_2 \in K$.

De plus, toute classe d'intersection K est contenue dans une classe d'intersection K_l possédant la propriété P :

La classe des domaines D tels que : tout point de R^m admet un voisinage $V \in K$ pour lequel $V \cap D \in K$.

(On sait que $L = H_l$ dans R^{2n} [10].)

Donc, si K est une classe d'intersection, il suffit de démontrer la relation $K = K_l$ pour établir que K satisfait à P. De façon plus précise, nous montrerons que, si K est une classe d'intersection fermée à droite, la propriété P équivaut à la condition $K = K_l$ et à la propriété, de forme plus particulière, et souvent plus aisée à établir :

P' : Pour tout indice i vérifiant $1 \leq i \leq m$, tout domaine borné D tel que $D(\xi_i > a) \in K$ et $D(\xi_i < b) \in K$ avec $a < b$, appartient à K .

(*) On sait en effet que H est d'intersection ([2], p. 74 et [8]) et que H est fermée à droite; cette dernière propriété sera désignée sous le nom de *théorème de H. Behnke-K. Stein*; voir, pour sa démonstration, [1] et [14] (p. 27-28).

Nous aurons ainsi le

THÉOREME 2. — *Dans toute classe d'intersection K fermée à droite, les conditions P , P' et $K = K_l$ sont équivalentes.*

qui résulte des propositions suivantes :

PROPOSITION 1. — *Si K est une classe d'intersection satisfaisant à P' , tout domaine borné de K_l appartient à K .*

Démonstration. — Soient une telle classe K , et un domaine borné $D \in K_l$. Il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{F} = (\Sigma_p)_{p \in \bar{D}}$ de \bar{D} , tel que $P \in \Sigma_p$ et $D \cap \Sigma_p \notin K$; il existe alors un recouvrement ouvert $\mathcal{G} = (I_p)_{p \in \bar{D}}$ de \bar{D} par des intervalles, tel que $P \in I_p \subset \Sigma_p$; en vertu du lemme de Borel-Lebesgue, \mathcal{G} contient un recouvrement fini $\mathcal{J} = (I_j)_{1 \leq j \leq p}$ de \bar{D} .

Soient :

\mathcal{H} l'ensemble des hyperplans qui portent les faces (à $m - 1$ dimensions) des intervalles de \mathcal{J} ;

\mathcal{E} l'ensemble des intervalles dont chaque face est portée sur par hyperplan de \mathcal{H} ;

\mathcal{E}' l'ensemble des intervalles S de \mathcal{E} satisfaisant à la condition : il existe un intervalle $\Delta \supset S$ tel que, pour tout intervalle $\Delta' \subset \Delta$, $\Delta' \cap D \in K$.

Nous allons montrer par récurrence que $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$; ceci entraînera la proposition 1; car, si $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$, le plus grand intervalle S_μ de \mathcal{E} appartient à \mathcal{E}' , donc $D = S_\mu \cap D \in K$.

Soit \mathcal{E}'' l'ensemble des intervalles de \mathcal{E} qui ne rencontrent aucun hyperplan de \mathcal{H} . Si $S \in \mathcal{E}$, soit c_i le nombre d'arêtes (à une dimension) d'intervalles de \mathcal{E}'' portées par une arête de S parallèle au $i^{\text{ème}}$ axe de coordonnées; $(c_i)_{1 \leq i \leq m}$ sera appelée suite caractéristique de S .

a. Si $c_i = 1$ pour tout i , $S \in \mathcal{E}''$; alors deux cas sont possibles :

α. il existe un indice j tel que $S \subset I_j$: on voit aisément que $S \in \mathcal{E}'$;

β. un tel indice n'existe pas : alors $S \cap \bar{D} = \emptyset$, et $S \in \mathcal{E}'$ en vertu de $\emptyset \in K$.

b. La suite $(C_i)_{1 \leq i \leq m}$ étant donnée, supposons que tout intervalle de \mathcal{E} , dont la suite caractéristique $(c_i)_{1 \leq i \leq m}$ vérifie $c_i \leq C_i$ pour tout i , appartienne à \mathcal{E}' .

Soit S un intervalle de \mathcal{E} dont la suite caractéristique est obtenue en augmentant d'une unité l'un quelconque des C_i : par exemple un intervalle de suite caractéristique $(c'_i)_{1 \leq i \leq m}$ où $c'_1 = C_1 + 1$ et $c'_i = C_i$ pour tout $i \neq 1$.

Soit $(\xi_1 = a_k)_{0 \leq k \leq c'_1}$ la suite des hyperplans de \mathcal{H} , parallèles à $(\xi_1 = 0)$ et rencontrant S . Soient $S' = S(\xi_1 < a_{c_1})$ et $S'' = S(\xi_1 > a_{c_1})$; $S' \in \mathcal{E}'$ et $S'' \in \mathcal{E}'$; donc il existe des intervalles $\Delta_{S'} \supset S'$ et $\Delta_{S''} \supset S''$ tels que, pour tout $\Delta' \subset \Delta_{S'}$ ou $\Delta' \subset \Delta_{S''}$, $\Delta' \cap D \in K$.

Soient $(\xi_1 = a'_0)$, $(\xi_1 = a''_{c_1})$, où $a'_0 < a''_{c_1}$, les hyperplans qui portent les faces

de $\Delta_{S'}$, perpendiculaires au premier axe de coordonnées; ($\xi_i = a'_{c_i}$), ($\xi_i = a'_{c_{i+1}}$) où $a'_{c_i} < a'_{c_{i+1}}$, les hyperplans analogues relatifs à $\Delta_{S'}$; alors $a'_{c_i} < a_{c_i} < a'_{c_i}$.

Soit Δ_S un intervalle tel que $S \subset \Delta_S \subset \Delta_{S'} \cup \Delta_{S''}$. Pour tout intervalle $\Delta'_S \subset \Delta_S$, posons

$$\Delta'_S = \Delta'_S \cap \Delta_{S'} \quad \text{et} \quad \Delta'_S = \Delta'_S \cap \Delta_{S''}.$$

Alors

$$\begin{aligned} (\Delta'_S \cap D) \cap (\xi_i < a'_{c_i}) &= \Delta'_{S'} \cap D \in K, & \text{car } \Delta'_S \subset \Delta_{S'}, \\ (\Delta'_S \cap D) \cap (\xi_i > a'_{c_i}) &= \Delta'_{S''} \cap D \in K, & \text{car } \Delta'_S \subset \Delta_{S''}. \end{aligned}$$

En vertu de la condition P', $\Delta'_S \cap D \in K$. Donc $S \in \mathcal{G}'$. c. q. f. d.

COROLLAIRE. — *Pour toute classe K d'intersection, la condition P' équivaut à :*

P_b : *Si deux domaines bornés de K se raccordent, leur réunion appartient à K.*

Justification. — On voit aisément que P_b entraîne P'. Réciproquement, la réunion de deux domaines bornés de K qui se raccordent appartient à K_l , donc à K en vertu de la proposition 1.

PROPOSITION 2. — *Si K est une classe d'intersection fermée à droite satisfaisant à P', $K = K_l$.*

Démonstration. — Comme $K \subset K_l$, il suffit de démontrer $K \supset K_l$. Soit $D \in K_l$; il existe un recouvrement ouvert $(\Sigma_p)_{p \in \mathbb{R}^m}$ de \mathbb{R}^m tel que $P \in \Sigma_p$ et $D \cap \Sigma_p \in K$. Soit $(S_p)_{1 \leq p < +\infty}$ une suite croissante d'intervalles, telle que : à tout $Q \in \mathbb{R}^m$ correspond un $p \geq 1$ pour lequel $Q \in S_p$, et $S_1 \cap D \neq \emptyset$. Soit $M \in S_1 \cap D$, et soit D_p la composante connexe, qui contient M, de $S_p \cap D$. Pour tout $P \in \mathbb{R}^m$, $\Sigma_p \cap D_p$ est une réunion de composantes connexes de $\Sigma_p \cap (S_p \cap D) = (\Sigma_p \cap D) \cap S_p \in K$; donc $D_p \in K_l$; comme D_p est borné, $D_p \in K$ en vertu de la proposition 1. La suite $(D_p)_{1 \leq p < +\infty}$ est croissante, et $D = \bigcup_{1 \leq p < +\infty} D_p$; comme K est fermée à droite, $D \in K$.

Le théorème 2 est ainsi démontré, car, si K est une classe d'intersection fermée à droite, P' entraîne $K = K_l$ qui entraîne P qui lui-même entraîne P'.

Application aux domaines d'holomorphic. — H_l étant la classe des domaines localement d'holomorphic, les énoncés des théorèmes 1 et 1' sont équivalents. L'essentiel de ce travail sera désormais consacré à la démonstration du théorème 1'. Ainsi seront établis l'identité des classes H et $H_l = L$, et le

THÉORÈME 1''. — *La réunion de deux domaines d'holomorphic qui se raccordent est un domaine d'holomorphic.*

CHAPITRE II.

THÉORÈMES DE SOUSTRACTION DES DOMAINES.

Tous les ensembles ouverts considérés dans ce travail seront désormais supposés *bornés*.

Nous appelons *théorème de soustraction* tout théorème permettant d'affirmer qu'une partie ouverte D' d'un ouvert d'holomorphic D , est encore d'holomorphic. Certains théorèmes de soustraction sont bien connus ou de démonstration très facile, tels par exemple :

S_1 : L'intérieur d'une intersection d'ouverts d'holomorphic est d'holomorphic ([2], p. 74 et [8]).

S_2 : Soit un ouvert D' contenu dans un ouvert d'holomorphic D ; si, pour tout $x \in D \cap FD'$, il existe une fonction holomorphic dans D' , méromorphe au voisinage de x et admettant x pour pôle, alors D' est d'holomorphic.

S_3 : Plus généralement, si, pour tout $x \in D \cap FD'$ et tout voisinage V de x , il existe une fonction holomorphic dans D' , méromorphe au voisinage de x et admettant un pôle dans V , alors D' est d'holomorphic.

Ce chapitre sera consacré à établir un théorème de soustraction qui sera utilisé dans la suite de ce travail. Avant de l'énoncer, nous devons rappeler ou introduire quelques définitions et notations.

NOTATION. — Si D est un ensemble ouvert, $A(D)$ désigne la classe des fonctions holomorphes dans D .

DÉFINITIONS. — 1° Si un compact (*) Q est contenu dans un ensemble ouvert D , on appelle *enveloppe de Q dans D par rapport à une classe K de fonctions holomorphes dans D* , l'ensemble $C(Q, D, K)$ des points x de D , qui, pour toute $f \in K$, vérifient

$$|f(x)| \leq \sup_{x' \in Q} |f(x')|.$$

2° Un ouvert D est dit *convexe, sur une partie E de sa frontière, par rapport à une classe K de fonctions holomorphes dans D* , si, pour tout compact $Q \subset D$,

$$E \cap \overline{C(Q, D, K)} = \emptyset;$$

en particulier, D est dit *convexe par rapport à K* , s'il l'est sur sa frontière.

3° Un ouvert D est dit *A-concave, sur une partie E de sa frontière*, s'il existe un voisinage ouvert V de E tel que $V - \bar{D}$ soit convexe, sur E (†), par rapport à $A(V \cup D)$.

(*) La seule topologie considérée dans ce travail est celle de R^n , et les notions d'ouvert, de compact, d'adhérence, etc. sont relatives à cette topologie.

(†) Évidemment on a $E \subset F(V - \bar{D})$.

La définition 2 permet d'énoncer un autre théorème de soustraction facile que nous généraliserons en partie, soit :

S_3 : Tout ouvert D' , contenu dans un ouvert d'holomorphie D , et convexe, sur $D \cap FD'$, par rapport à $A(D)$, est convexe par rapport à $A(D)$ [en particulier D' est d'holomorphie d'après le théorème de H. Cartan-P. Thullen (*)].

La démonstration du théorème de soustraction annoncé sera précédée de celle d'un lemme où interviendra la configuration suivante, que nous rencontrerons plusieurs fois dans ce travail sous le nom de configuration d'Oka.

DEFINITION. — Nous appelons *configuration d'Oka* tout ensemble de trois ouverts D, Δ', Δ satisfaisant aux conditions topologiques $\Delta' \subset D$ et $D \cap F \Delta' \subset \Delta$.

Propriétés. — Cette configuration satisfait aux propriétés suivantes, de démonstration immédiate :

- 1° l'ensemble $D' = D - (\Delta' - \Delta) = (D - \Delta') \cup (\Delta' \cap \Delta)$ est ouvert ;
- 2° $F D' \subset F D \cup (\Delta' \cap F \Delta)$.

LEMME 1. — Soit (D, Δ', Δ) une configuration d'Oka pour laquelle :

- 1° D est d'holomorphie ;
- 2° Δ est convexe, sur $\Delta' \cap F \Delta$, par rapport à $A(\Delta \cup \Delta')$.

Alors $D' = D - (\Delta' - \Delta)$ est un ouvert d'holomorphie (°).

Démonstration. — Soit un compact δ tel que $D \cap F \Delta' \subset \delta \subset \Delta$, et soit $\delta' = C(\delta, \Delta, A(\Delta \cup \Delta'))$; l'hypothèse 2 entraîne $\Delta' \cap F \Delta \cap \delta' = \emptyset$. Comme (D, Δ', δ') est une configuration d'Oka,

$$D'' = D - (\Delta' - \delta') = (D - \Delta') \cup (\delta' \cap \Delta')$$

et

$$D \cap F D'' \subset D \cap \Delta' \cap F \delta' = \Delta' \cap F \delta'.$$

Donc, si $y \in D \cap F D'', y \in \Delta' \cap F \delta'; \Delta' \cap F \Delta \cap \delta' = \emptyset$ entraîne $y \notin F \Delta$, soit $y \in \Delta \cap F \delta'$; il existe alors une $f \in A(\Delta \cup \Delta')$, telle que $|f(y)| > |f(x)|$ pour tout $x \in \delta'$.

La fonction

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - f(y)}$$

(*) Nous appelons *théorème de H. Cartan-P. Thullen* le suivant : Pour qu'un domaine D soit d'holomorphie, il faut et il suffit qu'il soit convexe par rapport à $A(D)$. Pour la théorie de la convexité et les domaines d'holomorphie, voir [8] et [2] (chap. 6).

(°) Ce lemme, et la configuration qu'il étudie, ne sont pas mis en évidence dans le Mémoire de K. Oka. Mais on les retrouve, sous forme de cas particuliers, dans plusieurs démonstrations de ce Mémoire. Appliqué à chacun de ces cas particuliers, le lemme permettra de simplifier les démonstrations où ils apparaissent. Nous l'utilisons immédiatement pour obtenir le théorème 3 qui en est surtout une amélioration. Mais la propriété correspondante sera toujours utilisée sous la forme du lemme 1.

est méromorphe dans Δ' , et n'a pas de pôles dans $\delta' \cap \Delta'$. Comme $D \cap F \Delta' \subset \delta'$, g n'a pas de pôle au voisinage de $D \cap F \Delta'$; le *premier problème de Cousin* étant résoluble dans D ([2] et [12]), il existe une fonction Φ , méromorphe dans D , admettant les mêmes pôles que g dans Δ' ⁽¹⁰⁾, holomorphe en tout point de $D - \Delta'$; Φ est donc holomorphe en tout point de $(D - \Delta') \cup (\delta' \cap \Delta') = D''$, et admet γ pour pôle. En vertu du théorème de soustraction S_2 , D'' est d'holomorphic.

Comme δ est arbitrairement approché de Δ , D'' l'est de D' ; d'après le théorème de H. Behnke-K. Stein, D' est d'holomorphic.

THÉOREME 3. — *Si un ouvert d , contenu dans un ouvert d'holomorphic D , est A-concave sur $D \cap F d$, $D' = D - \bar{d}$ est un ouvert d'holomorphic.*

Démonstration. — Il existe un voisinage ouvert V de $D \cap F d$, tel que $V - \bar{d}$ soit convexe, sur $D \cap F d$, par rapport à $A(V \cup d)$.

Soit un ouvert d'holomorphic $\mathcal{O} \subset D$, tel que $\mathcal{O} \cap d \neq \emptyset$; comme

$$\overline{\mathcal{O} \cap F d} \subset D \cap F d \subset V,$$

il existe un voisinage ouvert $W \subset V$ de l'ensemble fermé $\overline{\mathcal{O} \cap F d}$. Soit $\Delta' = (d \cup W) \cap \mathcal{O}$, $\Delta = V - \bar{d}$. Montrons que l'on peut appliquer le lemme 1 à la configuration $(\mathcal{O}, \Delta', \Delta)$:

1° $(\mathcal{O}, \Delta', \Delta)$ est une *configuration d'Oka*; il suffit, pour le prouver, d'établir que $\mathcal{O} \cap F \Delta' \subset \Delta$.

Comme

$$\mathcal{O} \cap F \Delta' \subset \mathcal{O} \cap F(d \cup W), \quad \overline{\mathcal{O} \cap F \Delta'} \subset \overline{\mathcal{O} \cap F(d \cup W)}.$$

Or

$$F(d \cup W) \subset (F d \cap \mathbb{C} W) \cup (F W \cap \mathbb{C} \bar{d}).$$

Donc

$$\overline{\mathcal{O} \cap F \Delta'} \subset (\overline{\mathcal{O} \cap F d} \cap \mathbb{C} W) \cup (\overline{\mathcal{O} \cap F W} \cap \mathbb{C} \bar{d}).$$

Mais, comme

$$\overline{\mathcal{O} \cap F d} \cap \mathbb{C} W \subset W \cap \mathbb{C} W = \emptyset$$

et

$$\overline{\mathcal{O} \cap F W} \cap \mathbb{C} \bar{d} \subset \overline{\mathcal{O} \cap V} \cap \mathbb{C} \bar{d} \subset V - \bar{d},$$

$$\overline{\mathcal{O} \cap F \Delta'} \subset \Delta.$$

2° a. $\Delta' \cap F \Delta \subset D \cap F d$. — En effet,

$$F \Delta \subset F d \cup (F V \cap \mathbb{C} d) \quad \text{et} \quad \Delta' = (d \cup W) \cap \mathcal{O};$$

⁽¹⁰⁾ Nous disons que deux fonctions, méromorphes dans un domaine, *y admettent les mêmes pôles*, lorsque leur différence est une fonction holomorphic dans ce domaine. Pour le premier problème de Cousin voir la note ⁽¹⁸⁾.

donc

$$\Delta' \cap F \Delta \subset (\mathcal{O} \cap F d) \cup [(d \cup W) \cap FV \cap \mathbf{C}d].$$

Le terme entre crochets étant nul puisque $d \cap \mathbf{C}d = W \cap FV = \emptyset$,

$$\Delta' \cap F \Delta \subset \mathcal{O} \cap F d \subset D \cap F d.$$

b. $\Delta \cup \Delta' \subset V \cup d$. — En effet $\Delta \subset V$ et $\Delta' \subset d \cup W$ entraînent

$$\Delta \cup \Delta' \subset d \cup W \cup V = d \cup V.$$

Les propriétés a et b et la définition de V entraînent la *convexité* de Δ , sur $\Delta' \cap F \Delta$, par rapport à $\Delta (\Delta \cup \Delta')$. Comme \mathcal{O} est d'holomorphie, $\mathcal{O}' = \mathcal{O} - (\Delta' - \Delta)$ est un ouvert d'holomorphie.

Or, $\mathcal{O}' = \mathcal{O} - \bar{d}$; pour le montrer, nous établirons d'abord que $\Delta' - \Delta = \mathcal{O} \cap \bar{d}$:

$$\Delta' - \Delta = \mathcal{O} \cap (d \cup W) \cap \mathbf{C}(V - \bar{d}),$$

soit

$$\Delta' - \Delta = \mathcal{O} \cap ((d \cup W) \cap (\bar{d} \cup \mathbf{C}V)).$$

Or

$$(d \cup W) \cap (\bar{d} \cup \mathbf{C}V) = (d \cap \bar{d}) \cup (W \cap \bar{d}) \cup (d \cap \mathbf{C}V) \cup (W \cap \mathbf{C}V),$$

soit, comme .

$$W \subset V \quad \text{et} \quad d \cap \mathbf{C}V \subset d \subset \bar{d},$$

$$(d \cup W) \cap (\bar{d} \cup \mathbf{C}V) = d \cup (W \cap \bar{d}) = d \cup (W \cap F d).$$

Donc

$$\Delta' - \Delta = (\mathcal{O} \cap d) \cup (\mathcal{O} \cap F d \cap W).$$

Mais, comme

$$\begin{aligned} \mathcal{O} \cap F d \subset W, \\ \mathcal{O} \cap F d \cap W = \mathcal{O} \cap F d \quad \text{et} \quad \Delta' - \Delta = \mathcal{O} \cap \bar{d}. \end{aligned}$$

Alors

$$\mathcal{O}' = \mathcal{O} - (\mathcal{O} \cap \bar{d}) = \mathcal{O} - \bar{d}.$$

Il en résulte que $\mathcal{O} - \bar{d}$ est d'holomorphie.

Comme \mathcal{O} est arbitrairement approché de D , $\mathcal{O} - \bar{d}$ l'est de $D - \bar{d}$, et $D - \bar{d} = D'$ est d'holomorphie d'après le théorème de H. Behnke-K. Stein.

CHAPITRE III.

UN PROBLÈME AUXILIAIRE DE DÉCOMPOSITION.

Un rôle important est tenu, dans le Mémoire de K. Oka, par la résolution, pour certains ensembles ouverts, du problème suivant, qui généralise un problème résolu auxiliairement par P. Cousin :

PROBLÈME 1. — Soit, dans C^n , un ensemble ouvert D coupé par un hyperplan L (à $2n-1$ dimensions réelles) qui partage D en deux ouverts D_1 et D_2 . Étant donné une fonction f holomorphe au voisinage de $\overline{D \cap L}$, déterminer deux fonctions f_1 et f_2 , holomorphes respectivement au voisinage de $\overline{D_1} \cap D$ et de $\overline{D_2} \cap D$, telles que $f = f_1 - f_2$ au voisinage de $D \cap L$,

Ce problème est en fait résolu par K. Oka pour $n = 2$ en utilisant une méthode due à A. Weil et H. Cartan. Nous le résoudrons pour $n \geq 2$ en nous inspirant de cette méthode, mais en simplifiant les détails de la démonstration, grâce à l'emploi de l'intégrale que H. Cartan a récemment substituée à celle de A. Weil. Nous devons d'abord donner quelques indications sur cette intégrale.

I. — L'intégrale de A. Weil-H. Cartan.

THÉORÈME 4 ⁽¹¹⁾. — Soient :

1° une famille $(X_j)_{1 \leq j \leq p \leq n}$ de fonctions holomorphes non constantes dans un ouvert d'holomorphie D ;

2° une famille $(a_j)_{1 \leq j \leq p}$ de fonctions réelles continûment dérivables dans le plan complexe C (la dérivation ayant lieu par rapport aux coordonnées réelles).

Il existe une famille $(P_{jk})_{1 \leq j \leq p, 1 \leq k \leq n}$ de fonctions holomorphes dans $D \times D$, telle que

$$X_j(x) - X_j(y) = \sum_{1 \leq k \leq n} (x_k - y_k) P_{jk}(x, y) \quad \text{pour } x \in D, y \in D, \quad 1 \leq j \leq p.$$

Posons $b_j = a_j \circ X_j$ ⁽¹²⁾, et désignons respectivement par B_j et B'_j les supports ⁽¹³⁾ de b_j et de db_j , pour $1 \leq j \leq p$; supposons $B = \bigcap_{1 \leq j \leq p} B_j$ compact.

Introduisons les formes différentielles (en x) suivantes :

$$\alpha_j = \frac{\sum_{1 \leq k \leq n} P_{jk}(x, y) dx_k}{X_j(x) - X_j(y)} \quad \text{et} \quad \omega_j = a_j \wedge db_j \quad \text{pour } 1 \leq j \leq p,$$

$$\Omega = \sum_{1 < i_1 < \dots < i_n} \frac{b}{b_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_n}} \omega_{i_1} \wedge \omega_{i_2} \wedge \dots \wedge \omega_{i_n}, \quad \text{où } b = \prod_{1 \leq j \leq p} b_j.$$

Alors, pour toute fonction f holomorphe au voisinage de B et tout $y \notin \bigcup_{1 \leq j \leq p} B'_j$:

$$\int_D f(x) \Omega(x, y) = (2i\pi)^n b(y) f(y).$$

⁽¹¹⁾ Le théorème est énoncé sous cette forme par H. Cartan [7]. Il résulte des travaux de A. Weil [17], K. Oka [13] et [15], H. Cartan [5] et [6].

⁽¹²⁾ C'est-à-dire $b_j(x) = a_j(X_j(x))$ où $x \in D$.

⁽¹³⁾ Rappelons qu'on appelle *support* d'une fonction f définie dans un ouvert D l'ensemble (fermé relativement à D) dont le complémentaire (relativement à D) est le plus grand ensemble ouvert sur lequel $f \equiv 0$.

Application aux polyèdres analytiques. — Nous appellerons *polyèdre analytique* dans un ouvert $D \subset \mathbb{C}^n$, tout compact $P \subset D$, image réciproque d'un *polycylindre compact* de \mathbb{C}^p ($p \geq n$) par une *application analytique* de D dans \mathbb{C}^p ,

Soit P un polyèdre analytique dans un ouvert d'holonomie D ; il existe une famille $(X_j)_{1 \leq j \leq p}$ de fonctions holomorphes dans D , et une famille $(\Delta_j)_{1 \leq j \leq p}$ de compacts dans le plan complexe \mathbb{C} , telles que

$$P = \bigcap_{1 \leq j \leq p} D(X_j(x) \in \Delta_j).$$

Si f est une fonction holomorphe au voisinage de P , il existe un polyèdre analytique \tilde{P} dans D , voisinage de P , tel que f soit holomorphe au voisinage de \tilde{P} et que

$$\tilde{P} = \bigcap_{1 \leq j \leq p} D(X_j(x) \in \tilde{\Delta}_j),$$

où $(\tilde{\Delta}_j)_{1 \leq j \leq p}$ est une famille de compacts dans \mathbb{C} ⁽¹⁴⁾.

Déterminons la famille $(\alpha_j)_{1 \leq j \leq p}$ du théorème 4 de telle sorte que, pour $1 \leq j \leq p$, α_j soit égal à 1 au voisinage de Δ_j , à zéro hors de $\tilde{\Delta}_j$. Alors B est compact car $B \subset \tilde{P}$, et $P \subset D - \bigcup_{1 \leq j \leq p} B'_j$. Donc, pour tout $\gamma \in P$:

$$f(\gamma) = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \int_D f(x) \Omega(x, \gamma).$$

Nous allons effectuer le calcul de la forme $\Omega(x, \gamma)$, afin de présenter ce résultat sous une forme plus commode pour les applications dans ce travail, et plus proche de l'énoncé initial de A. Weil.

Soit Γ l'ensemble des combinaisons n à n des p premiers entiers positifs; identifions tout élément $\gamma \in \Gamma$ avec la suite croissante $j_1 < j_2 < \dots < j_n$ formée avec les éléments de γ . Calculons alors la forme

$$\omega_\gamma = \frac{b}{b_{j_1} b_{j_2} \dots b_{j_n}} \omega_{j_1} \wedge \omega_{j_2} \wedge \dots \wedge \omega_{j_n}.$$

$$\omega_{j_1} \wedge \omega_{j_2} \wedge \dots \wedge \omega_{j_n} = \alpha_{j_1} \wedge d b_{j_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{j_n} \wedge d b_{j_n} = v (\alpha_{j_1} \wedge \alpha_{j_2} \wedge \dots \wedge \alpha_{j_n}) \wedge d b_{j_1} \wedge \dots \wedge d b_{j_n}$$

où

$$v = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Or

$$\alpha_{j_1} \wedge \alpha_{j_2} \wedge \dots \wedge \alpha_{j_n} = \begin{vmatrix} P_{j_1 1} & P_{j_1 2} & \dots & P_{j_1 n} \\ P_{j_2 1} & P_{j_2 2} & \dots & P_{j_2 n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{j_n 1} & P_{j_n 2} & \dots & P_{j_n n} \end{vmatrix} \frac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n}{\prod_{j \in \gamma} (X_j(x) - X_j(\gamma))},$$

(14) Ceci résulte de [7], proposition 1.

soit

$$\nu z_{j_1} \wedge \alpha_{j_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{j_n} = \psi_\gamma(x, y) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

où $\psi_\gamma(x, y)$ est une fonction méromorphe dans $D \times D$, ayant pour pôles les zéros de

$$\prod_{j \in \gamma} (X_j(x) - X_j(y)) \quad (15).$$

Donc

$$\omega_{j_1} \wedge \omega_{j_2} \wedge \dots \wedge \omega_{j_n} = \psi_\gamma(x, y) (dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n) \wedge db_{j_1} \wedge db_{j_2} \wedge \dots \wedge db_{j_n}.$$

Utilisons les notations habituelles : si $x_k = \zeta_k + i\eta_k$,

$$\frac{\partial b_j}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_j}{\partial \zeta_k} - i \frac{\partial b_j}{\partial \eta_k} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial b_j}{\partial \bar{x}_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_j}{\partial \zeta_k} + i \frac{\partial b_j}{\partial \eta_k} \right).$$

Alors

$$db_j = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial b_j}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial b_j}{\partial \bar{x}_k} d\bar{x}_k.$$

Donc

$$\omega_{j_1} \wedge \omega_{j_2} \wedge \dots \wedge \omega_{j_n} = \psi_\gamma(dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n) \wedge \left(\sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial b_{j_1}}{\partial x_k} d\bar{x}_k \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial b_{j_n}}{\partial x_k} d\bar{x}_k \right).$$

soit

$$\omega_{j_1} \wedge \dots \wedge \omega_{j_n} = \psi_\gamma(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) \wedge \begin{vmatrix} \frac{\partial b_{j_1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial b_{j_1}}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial b_{j_n}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial b_{j_n}}{\partial x_n} \end{vmatrix} d\bar{x}_1 \wedge d\bar{x}_2 \wedge \dots \wedge d\bar{x}_n$$

et

$$\varpi_\gamma = \psi_\gamma(x, y) \varphi_\gamma(x) dv,$$

où $\varphi_\gamma(x)$ est une fonction complexe continue dans D , dont le support est arbitrairement approché de l'arête $\Lambda_\gamma = P \cap \left(\bigcap_{j \in \gamma} X_j^{-1}(F \Delta_j) \right)$ de P , et ne rencontre pas $\bigcup_{j \in \gamma} X_j^{-1}(\Delta_j)$; dv est l'élément de volume de R^{2n} .

Alors, pour $\gamma \in P$:

$$f(\gamma) = \left(\frac{1}{2i\pi} \right)^n \sum_{\gamma \in P} \int_D f(x) \psi_\gamma(x, y) \varphi_\gamma(x) dv.$$

Nous résumerons les principaux résultats utiles pour la suite dans le

THÉORÈME 4'. — Soit, dans un ouvert d'holomorphic D , un polyèdre $P = \bigcap_{1 \leq j \leq p \leq n} D(X_j(x) \in \Delta_j)$. Soit Γ l'ensemble des combinaisons n à n des p

(15) Dans la suite de ce travail, nous dirons, d'une manière un peu sommaire, qu'une fonction f , méromorphe dans un domaine Δ , a pour pôles les zéros de la fonction g , holomorphe dans Δ , si f est holomorphe dans $\Delta - E$, E étant l'ensemble des zéros de g .

premiers nombres entiers positifs. Il existe une famille $(\psi_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ de fonctions méromorphes dans $D \times D$ et une famille $(\varphi_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ de fonctions complexes continues dans D , telles que :

1° les pôles de $\psi_\gamma(x, y)$ sont zéros de $\prod_{j \in \gamma} (X_j(x) - X_j(y))$;

2° le support A_γ de $\varphi_\gamma(x)$ est arbitrairement approché de l'arête $\Lambda_\gamma = P \cap \left(\bigcap_{j \in \gamma} X_j^{-1}(F\Delta_j) \right)$ de P , et ne rencontre pas $\bigcup_{j \in \gamma} X_j^{-1}(\Delta_j)$.

3° pour tout $y \in P$, et toute fonction f holomorphe au voisinage de P ,

$$f(y) = \left(\frac{1}{2i\pi} \right)^n \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_D f(x) \psi_\gamma(x, y) \varphi_\gamma(x) dv$$

dès que l'approximation du 2° assure la définition de l'élément différentiel dans D .

II. — Résolution du problème I.

Avant de résoudre le problème dans le cas essentiel pour la suite de ce travail, nous traiterons un cas plus simple destiné à mettre en lumière l'idée générale de la méthode employée. Ce premier cas de résolution nous paraît d'ailleurs posséder un intérêt intrinsèque. De plus, dans le cadre du sujet de ce travail, il permet d'obtenir des théorèmes de soustraction que nous n'exposerons pas, car ils apparaissent en définitive comme des cas particuliers du théorème 1, et ne nous permettent pas actuellement de simplifier sa démonstration.

Premier cas de résolution ⁽¹⁶⁾. — **THÉOREME 5.** — Soit un ensemble ouvert D coupé par un hyperplan L (à $2n-1$ dimensions réelles) qui partage D en deux ouverts D_1 et D_2 . Supposons qu'il existe un ouvert d'holomorphic $V \supset D \cup \overline{D \cap L}$, une famille $(X_j)_{1 \leq j \leq p \geq n}$ de fonctions holomorphes dans V et une famille $(\Delta_j)_{1 \leq j \leq p}$ de compacts dans C , telles que

$$\overline{D} \cap V = \bigcap_{1 \leq j \leq p} V(X_j(x) \in \Delta_j).$$

Alors, pour toute fonction f holomorphe au voisinage de $\overline{D \cap L}$, il existe deux fonctions f_1 et f_2 , holomorphes respectivement au voisinage de $\overline{D_1} \cap D$ et de $\overline{D_2} \cap D$, telles que $f = f_1 - f_2$ au voisinage de $D \cap L$.

Remarque. — Un tel ouvert D est d'holomorphic d'après le théorème 3; les conditions de l'énoncé sont réalisées en particulier si \overline{D} est un polyèdre analytique dans un ouvert contenant V .

⁽¹⁶⁾ Ce premier cas correspond au n° 3, p. 19-24, du Mémoire [14]. Il fait apparaître les simplifications essentielles apportées au Mémoire de K. Oka : suppression des conditions 3°, p. 19, des difficultés relatives à l'existence des intégrales employées et de la démonstration délicate des pages 21 à 24. Ces simplifications permettent l'extension du théorème 1, pour $n > 2$.

Démonstration. — Nous pouvons supposer, pour la commodité de la démonstration, que

$$L = (\mathcal{J}x_1 = 0), \quad D_1 = D(\mathcal{J}x_1 > 0), \quad D_2 = D(\mathcal{J}x_1 < 0),$$

Il existe un nombre $r > 0$, tel que f soit holomorphe au voisinage de $\overline{D}(-r \leq \mathcal{J}x_1 \leq +r) = P$. Si $X_0 = e^{tx_1 - r}$, $X_{p+1} = e^{-ix_1 - r}$, et si $\Delta_0 = \Delta_{p+1}$ est le cercle ($|z| \leq 1$) dans G ,

$$P = \bigcap_{0 \leq j \leq p+1} V(X_j(x) \in \Delta_j);$$

r étant supposé suffisamment petit pour que P soit compact, P est un polyèdre analytique dans V . Γ désignant l'ensemble des combinaisons n à n des entiers de zéro à $p+1$, le théorème 4' assure l'existence d'une famille $(\psi_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ de fonctions méromorphes dans $V \times V$ et d'une famille $(\varphi_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ de fonctions complexes continues dans V , telles que :

- 1° les pôles de $\psi_\gamma(x, y)$ sont les zéros de $\prod_{j \in \gamma} (X_j(x) - X_j(y))$;
- 2° le support Λ_γ de $\varphi_\gamma(x)$ est arbitrairement approché de l'arête

$$\Lambda_\gamma = P \cap \left(\bigcap_{j \in \gamma} X_j^{-1}(F \Delta_j) \right)$$

et ne rencontre pas $\bigcup_{j \in \gamma} X_j^{-1}(\Delta_j)$;

- 3° pour tout $y \in P$,

$$f(y) = \left(\frac{1}{2i\pi} \right)^n \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_V f(x) \psi_\gamma(x, y) \varphi_\gamma(x) dv,$$

l'approximation du 2° étant supposée suffisante.

Soient :

- Γ_1 l'ensemble des éléments de Γ qui ne contiennent pas les nombres zéro et $p+1$;
- Γ_2 l'ensemble des éléments de Γ qui contiennent zéro et non $p+1$;
- Γ_3 l'ensemble des éléments de Γ qui contiennent $p+1$ et non zéro;
- Γ_4 l'ensemble des éléments de Γ qui contiennent zéro et $p+1$.

Alors $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ et :

si $\gamma \in \Gamma_1$, $\int_V f(x) \psi_\gamma(x, y) \varphi_\gamma(x) dv$ est une fonction de y holomorphe dans D ;

si $\gamma \in \Gamma_2$ (resp. Γ_3), $\int_V f(x) \psi_\gamma(x, y) \varphi_\gamma(x) dv$ est une fonction de y holomorphe dans $D(\mathcal{J}x_1 > -r)$ [resp. $D(\mathcal{J}x_1 < +r)$];

si $\gamma \in \Gamma_4$, $\psi_\gamma(x, y) \equiv 0$; en effet, avec les notations utilisées au théorème 4,

$$\alpha_0 = \alpha_{p+1} = (x_1 - y_1) dx_1 \quad \text{et} \quad \alpha_0 \wedge \alpha_{p+1} \equiv 0.$$

Donc les fonctions

$$f_1(y) = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \sum_{\gamma \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2} \int_V f \psi_\gamma \varphi_\gamma d\nu \quad \text{et} \quad f_2(y) = -\left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \sum_{\gamma \in \Gamma_1} \int_V f \psi_\gamma \varphi_\gamma d\nu$$

sont holomorphes respectivement dans $D(\mathcal{J}x_1 > -r)$ et $D(\mathcal{J}x_1 < +r)$; $f_1(y) - f_2(y)$ est définie pour $y \in P$, et

$$f_1(y) - f_2(y) = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_V f \psi_\gamma \varphi_\gamma d\nu = f(y).$$

f_1 et f_2 constituent donc une solution du problème.

Second cas de résolution. — Ce cas de résolution, essentiel pour la suite du travail, est relatif à un ouvert construit à l'aide d'une *configuration d'Oka*. Dans la démonstration interviendra le *théorème d'approximation* des fonctions holomorphes, de A. Weil, K. Oka, H. Cartan ⁽¹⁷⁾, combiné avec le théorème de K. Oka résolvant le *premier problème de P. Cousin* ⁽¹⁸⁾, pour donner le

THÉOREME 6. — *Si D' est un ouvert contenu dans un domaine d'holomorphic D et convexe par rapport à $A(D)$ (il suffit pour cela que la convexité ait lieu sur $D \cap FD'$), toute fonction g , méromorphe dans D' et n'admettant pas de pôle au voisinage de $D \cap FD'$, est limite uniforme, sur tout compact contenu dans D' , de fonctions méromorphes dans D , admettant les mêmes pôles que g dans D' , holomorphes en tout point de $D - D'$.*

Démonstration. — D'après le théorème cité de K. Oka, il existe une fonction f , méromorphe dans D , admettant les mêmes pôles que g dans D' , holomorphe en tout point de $D - D'$; $g - f$, holomorphe dans D' , est, d'après le théorème d'approximation cité, limite uniforme, sur tout compact contenu dans D' , de fonctions h_i holomorphes dans D ; g est limite uniforme des fonctions $f + h_i$ qui satisfont aux conditions demandées.

Pour énoncer le théorème 7 relatif au second cas de résolution, nous supposons $L = (\mathcal{J}x_1 = 0)$ afin de simplifier l'énoncé et l'exposé de la démonstration.

THÉOREME 7. — *Soit un domaine G , contenant l'origine, tel que $G_1 = G(\mathcal{J}x_1 > a_1)$ et $G_2 = G(\mathcal{J}x_1 < a_2)$ avec $a_1 < 0 < a_2$, soient d'holomorphic et non vides; soit $G_3 = G_1 \cap G_2$. Soit un polyèdre analytique Q dans un ouvert $V \supset G_3$, satisfaisant aux conditions :*

⁽¹⁷⁾ Ce théorème, pour la démonstration duquel nous renvoyons à [16], [17], [11], [12] et [7] peut s'énoncer : Toute fonction, holomorphe dans un ouvert D' contenu dans un domaine d'holomorphic D et convexe par rapport à $A(D)$, est limite uniforme, sur tout compact contenu dans D' , de fonctions holomorphes dans D .

⁽¹⁸⁾ Ce théorème affirme l'existence d'une fonction méromorphe admettant des pôles donnés dans un domaine d'holomorphic. Il a été primitivement établi par P. Cousin dans le cas des polycylindres. Voir [2], [11] et [12].

1° $Q \cap L \subset G_3,$

2° $G \cap FG_3 \subseteq Q$ [c'est-à-dire que (G, G_3, \hat{Q}) est une configuration d'Oka.]

Soit $D = G - (G_3 - \hat{Q})$. Pour toute fonction f holomorphe au voisinage de $\overline{D}(\mathcal{J}x_1 = 0)$, il existe deux fonctions f_1 et f_2 , holomorphes respectivement au voisinage de $D(\mathcal{J}x_1 \geq 0)$ et de $D(\mathcal{J}x_1 \leq 0)$, telles que $f = f_1 - f_2$ au voisinage de $D(\mathcal{J}x_1 = 0)$.

Étude préliminaire de la démonstration. — L'ouvert $D_3 = D(a_1 < \mathcal{J}x_1 < a_2)$ satisfait aux hypothèses du théorème 5 (en remplaçant dans ces hypothèses V par G_3); donc, pour toute fonction g holomorphe au voisinage de $\overline{D \cap L}$, il existe deux fonctions g_1 et g_2 , holomorphes respectivement au voisinage de $D_3(\mathcal{J}x_1 \geq 0)$ et de $D_3(\mathcal{J}x_1 \leq 0)$, telles que $g_1 - g_2 = g$ au voisinage de $D \cap L$. Ces fonctions g_1 et g_2 s'expriment par des sommes d'intégrales de volume dans V , portant chacune sur un produit $g\psi_\gamma\varphi_\gamma$. Le désir d'obtenir, à l'aide de ces sommes d'intégrales, des fonctions holomorphes respectivement au voisinage de $D(\mathcal{J}x_1 \geq 0)$ et de $D(\mathcal{J}x_1 \leq 0)$, d'autre part l'impossibilité de prolonger les fonctions ψ_γ pour parvenir à ce but, conduisent à remplacer, grâce au théorème 6, ψ_γ par une fonction ψ'_γ définie lorsque $y \in D(\mathcal{J}x_1 \geq 0)$ ou $y \in D(\mathcal{J}x_1 \leq 0)$, et arbitrairement voisine de ψ_γ lorsque cette dernière est définie. Les fonctions g'_1 et g'_2 obtenues en substituant les ψ'_γ aux ψ_γ sont telles que $g'_1 - g'_2 = g + h_g$ au voisinage de $D \cap L$; h_g est holomorphe au voisinage de $D \cap L$, et, une fois les ψ'_γ choisis, ne dépend plus que de g . f étant la fonction primitivement donnée au voisinage de $\overline{D \cap L}$ dans l'énoncé du problème, il suffira donc de déterminer une fonction g satisfaisant à $g + h_g = f$ pour que le problème soit résolu avec $f_1 = g'_1, f_2 = g'_2$. Or, $g + h_g = f$ est, relativement à g , une *équation intégrale* d'un type classique, que l'on peut résoudre par le procédé des *approximations successives*, si ψ'_γ a été choisi suffisamment approché de ψ_γ . Le problème est ainsi résolu.

Ces éclaircissements donnés, nous pouvons mettre en place les détails de la démonstration.

Démonstration ⁽¹⁹⁾:

a. *Existence des fonctions ψ_γ et φ_γ .* — $\overline{D \cap L} = Q \cap L$; donc il existe un nombre r tel que $a_1 < -r < 0 < +r < a_2$ et que f soit holomorphe au voisinage de $P = Q(-r \leq \mathcal{J}x_1 \leq +r) = \overline{D}(-r \leq \mathcal{J}x_1 \leq +r)$. Il existe une famille $(Y_j)_{1 \leq j \leq p, n \geq n}$ de fonctions holomorphes dans V et une famille $(\Delta_j)_{1 \leq j \leq p}$ de compacts dans C , tels que

$$Q = \bigcap_{1 \leq j \leq p} V(Y_j(x) \in \Delta_j).$$

⁽¹⁹⁾ Cette démonstration correspond au n° 4, p. 24-27 du Mémoire [14] et ne lui apporte pas de modifications essentielles.

Soit X_j la restriction de Y_j à G_3 , pour $1 \leq j \leq p$; soient

$$X_0 = e^{ix_1 - r}, \quad X_{p+1} = e^{-ix_1 - r};$$

soit enfin $\Delta_0 = \Delta_{p+1}$ le cercle ($|z| \leq 1$) dans G . Alors

$$\bar{D} \cap G_3 = \bigcap_{1 \leq j \leq p} G_3(X_j(x) \in \Delta_j), \quad \text{et} \quad P = \bigcap_{0 \leq j \leq p+1} G_3(X_j(x) \in \Delta_j)$$

est un polyèdre analytique dans G_3 . Donnons à $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ la même signification que dans la démonstration du théorème 5.

Le théorème 4' assure l'existence d'une famille $(\psi_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ de fonctions méromorphes dans $G_3 \times G_3$ et d'une famille $(\varphi_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ de fonctions complexes continues dans G_3 , telles que :

1° les pôles de $\psi_\gamma(x, y)$ sont les zéros de $\prod_{j \in \gamma} (X_j(x) - X_j(y))$;

2° le support A_γ de $\varphi_\gamma(x)$ est arbitrairement approché de l'arête

$$A_\gamma = P \cap \left(\bigcap_{j \in \Gamma} X_j^{-1}(F \Delta_j) \right)$$

et ne rencontre pas $\bigcup_{j \in \gamma} X_j^{-1}(\Delta_j)$;

3° pour tout $y \in P$,

$$f(y) = \left(\frac{1}{2i\pi} \right)^n \sum_{\gamma \in \Gamma - \Gamma_4} \int_{G_3} f(x) \psi_\gamma(x, y) \varphi_\gamma(x) dv,$$

l'approximation du 2° étant supposée suffisante.

b. Construction des fonctions ψ_γ . — 1° Soit un ouvert G'_3 tel que $P \subset G'_3 \subset G_3$ et que f soit holomorphe dans G'_3 . Chaque arête non vide A_γ de P est un compact limite d'une suite décroissante d'ouverts d'holomorphic; l'hypothèse $G \cap FG_3 \subset Q$ permet donc de lui associer un ouvert d'holomorphic qui le contient, soit $W_\gamma \subset G'_3$, tel que $\psi_\gamma(x, y)$ n'ait pas de pôle quand $x \in W_\gamma$ tandis que y est voisin de $G \cap FG_3$; pour tout $\gamma \in \Gamma - \Gamma_4$, soit W'_γ un ouvert tel que $A_\gamma \subset W'_\gamma \subset W_\gamma$. Supposons dorénavant $A_\gamma \subset W'_\gamma$ pour tout $\gamma \in \Gamma - \Gamma_4$, ce qui est possible en vertu de $a(2^\circ)$. La relation de $a(3^\circ)$ peut être remplacée par

$$f(y) = \left(\frac{1}{2i\pi} \right)^n \sum_{\gamma \in \Gamma - \Gamma_4} \int_{G'_3} f(x) \psi_\gamma(x, y) \varphi_\gamma(x) dv.$$

2° $\psi_\gamma(x, y)$, fonction définie dans $W_\gamma \times G_3$, n'a pas de pôle au voisinage de $(W_\gamma \times G_1) \cap F(W_\gamma \times G_3)$ et de $(W_\gamma \times G_2) \cap F(W_\gamma \times G_3)$; G_3 est convexe par rapport aux fonctions holomorphes dans G_1 (resp. G_2) en vertu du théorème S_4 ; donc $W_\gamma \times G_3$ est convexe par rapport à $A(W_\gamma \times G_1)$ [resp. $A(W_\gamma \times G_2)$]. Alors, en vertu du théorème 6, il existe une fonction ψ'_γ , méromorphe dans $W_\gamma \times G_1$ si $\gamma \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, dans $W_\gamma \times G_2$ si $\gamma \in \Gamma_3$, admettant les mêmes pôles que ψ_γ

dans $W_\gamma \times G_3$, holomorphe en tout point de $W_\gamma \times G_1 - W_\gamma \times G_3$ ou de $W_\gamma \times G_2 - W_\gamma \times G_3$, et vérifiant en outre dans $W_\gamma \times G'_3$:

$$|\psi'_\gamma - \psi_\gamma| \leq \frac{\alpha}{M}, \quad \text{avec } M = \sum_{\gamma \in \Gamma - \Gamma_1} \int_{G'_3} |\varphi_\gamma(x)| d\nu \quad \text{et } 0 < \alpha < 1.$$

c. *Construction de la fonction g.* — $\theta_\gamma = \psi'_\gamma - \psi_\gamma$ est holomorphe dans $W_\gamma \times G_3$ pour $\gamma \in \Gamma - \Gamma_1$. Déterminons une fonction g , holomorphe dans G'_3 , telle que

$$g(y) + \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \sum_{\gamma \in \Gamma - \Gamma_1} \int_{G'_3} g(x) \theta_\gamma(x, y) \varphi_\gamma(x) d\nu = f(y) \quad \text{pour tout } y \in G'_3.$$

Si g_p est une fonction holomorphe dans G'_3 ,

$$g_{p+1}(y) = -\left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \sum_{\gamma \in \Gamma - \Gamma_1} \int_{G'_3} g_p(x) \theta_\gamma(x, y) \varphi_\gamma(x) d\nu$$

est une fonction holomorphe dans G'_3 . Si M_p est une borne supérieure de $|g_p(x)|$ dans G'_3 , $|g_{p+1}(x)| \leq \alpha M_p$, donc $M_p \leq \alpha^p M_0$. Posons $g_0 = f$. Alors la série de fonctions holomorphes de terme général g_p , $0 \leq p < +\infty$, converge vers une fonction g holomorphe dans G'_3 .

$$\begin{aligned} g(y) + \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \sum_{\gamma \in \Gamma - \Gamma_1} \int_{G'_3} g \theta_\gamma \varphi_\gamma d\nu \\ &= \sum_{0 \leq p < +\infty} g_p(y) + \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \sum_{0 \leq p < +\infty} \left(\sum_{\gamma \in \Gamma - \Gamma_1} \int_{G'_3} g_p \theta_\gamma \varphi_\gamma d\nu \right) \\ &= f(y) + \sum_{0 \leq p < +\infty} \left(g_{p+1}(y) + \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \sum_{\gamma \in \Gamma - \Gamma_1} \int_{G'_3} g_p \theta_\gamma \varphi_\gamma d\nu \right) \\ &= f(y) \quad \text{pour } y \in G'_3. \end{aligned}$$

d. *Construction de f_1 et de f_2 .* — Les fonctions

$$f_1(y) = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \sum_{\gamma \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2} \int_{G'_3} g \psi'_\gamma \varphi_\gamma d\nu \quad \text{et} \quad f_2(y) = -\left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \sum_{\gamma \in \Gamma_3} \int_{G'_3} g \psi'_\gamma \varphi_\gamma d\nu$$

sont holomorphes respectivement dans $D(\mathcal{J}x_1 > -r)$ et $D(\mathcal{J}x_1 < +r)$; $f_1(y) - f_2(y)$ est définie pour $y \in P$, et

$$\begin{aligned} f_1(y) - f_2(y) &= \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \sum_{\gamma \in \Gamma - \Gamma_1} \int_{G'_3} g \psi'_\gamma \varphi_\gamma d\nu \\ &= \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \left(\sum_{\gamma \in \Gamma - \Gamma_1} \int_{G'_3} g \psi_\gamma \varphi_\gamma d\nu + \sum_{\gamma \in \Gamma - \Gamma_1} \int_{G'_3} g \theta_\gamma \varphi_\gamma d\nu \right) \\ &= g(y) + \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \sum_{\gamma \in \Gamma - \Gamma_1} \int_{G'_3} g \theta_\gamma \varphi_\gamma d\nu = f(y). \end{aligned}$$

f_1 et f_2 constituent une solution du problème.

CHAPITRE IV.

THÉORÈME FONDAMENTAL D'ADDITION DES DOMAINES.

Dans ce chapitre, nous utiliserons les résultats précédemment obtenus, pour démontrer le théorème fondamental 1'. Nous reprendrons d'abord les hypothèses du théorème 7 en les précisant un peu, et nous démontrerons que, dans ces hypothèses, D est d'holomorphie. Nous obtiendrons ainsi le théorème 8. Puis nous montrerons que tout domaine satisfaisant aux hypothèses du théorème 1' peut être approché arbitrairement par une composante connexe d'un tel ouvert D ⁽²⁰⁾.

Nous utiliserons les notations suivantes :

NOTATIONS. — $x = (x_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $y = (y_k)_{1 \leq k \leq n}$ étant deux points de C^n , nous utiliserons la *métrique* dans laquelle la distance de ces deux points est

$$\delta(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|.$$

Si D est un ensemble ouvert, pour tout point $x \in D$ et tout ensemble $D' \subset D$, nous poserons

$$\delta(x, D) = \inf_{y \in D'} \delta(x, y) \quad \text{et} \quad \delta(D', D) = \inf_{x \in D'} \delta(x, D) \quad (21).$$

THÉORÈME 8. — *Soit un domaine G contenant l'origine, tel que les ouverts (supposés non vides) $G_1 = G(\mathcal{J}x_1 > a_1)$ et $G_2 = G(\mathcal{J}x_1 < a_2)$ avec $a_1 < 0 < a_2$ puissent être arbitrairement approchés de l'extérieur par des ouverts d'holomorphie; soit $G_3 = G_1 \cap G_2$. Soit un polyèdre analytique Q dans un ouvert $V \supset G_3$, satisfaisant aux conditions :*

- 1° $Q \cap L \subset G_3$, où $L = (\mathcal{J}x_1 = 0)$;
- 2° $G \cap FG_3 \subset Q$ [c'est-à-dire que (G, G_3, \dot{Q}) est une configuration d'Oka].

Soit enfin $D = G - (G_3 - \dot{Q})$. Alors :

1° $D_1 = D(\mathcal{J}x_1 > 0)$ et $D_2 = D(\mathcal{J}x_1 < 0)$ peuvent être arbitrairement approchés de l'extérieur par des ouverts d'holomorphie;

⁽²⁰⁾ Dans ce dernier chapitre, nous suivons strictement la méthode de K. Oka. Le théorème 8 correspond au n° 8, p. 34-36 du Mémoire [14], un peu simplifié grâce à l'emploi du lemme 1; la démonstration finale du théorème 1' correspond au n° 6, p. 23-32, allégé par l'emploi du lemme 1; le raisonnement du n° 7, p. 32-34, est pour nous sans objet : la théorie des idéaux de H. Cartan-K. Oka et la suppression des conditions 3° (p. 19) en évitent respectivement la première et la deuxième partie.

⁽²¹⁾ Cette métrique est introduite dans le Mémoire [8] qui se trouve résumé dans l'ouvrage [2]. Avec le langage de ce mémoire, $\delta(x, D)$ et $\delta(D', D)$ sont respectivement la *Randdistanz* et la *Minimaldistanz* de x et de D' relativement à l'ensemble ouvert D.

2° pour toute donnée de pôles \mathfrak{A} au voisinage de \bar{D} , il existe une fonction méromorphe admettant les pôles \mathfrak{A} dans D ⁽²²⁾;

3° D est un ouvert d'holomorphie.

Démonstration. — 1° Comme D_1 est la partie de $G_1 - (G_3 - \dot{Q})$ définie par $\mathcal{J}x_1 > 0$, il suffit de démontrer la propriété pour $G_1 - (G_3 - \dot{Q})$. Soit un ouvert d'holomorphie G'_1 tel que $G_1 \subseteq G'_1$,

$$G_1 \subseteq G'_1, \quad G'_3 = G'_1(\mathcal{J}x_1 < a_2) \subset V \quad \text{et} \quad G'_1(\mathcal{J}x_1 = a_2) \subseteq Q,$$

et un polyèdre analytique $Q' \supseteq Q$ dans V ; en vertu du lemme 1, $G'_1 - (G'_3 - \dot{Q})$ est un ouvert d'holomorphie; or cet ensemble est arbitrairement approché de $G_1 - (G_3 - \dot{Q})$ par l'extérieur, puisque G'_1 et Q' le sont respectivement de G_1 et de Q ; la proposition est donc établie.

2° Soit une donnée de pôles \mathfrak{A} dans un voisinage W de \bar{D} ; il existe des ouverts d'holomorphie D'_1 et D'_2 satisfaisant respectivement à $D_1 \subseteq D'_1 \subset W$ et $D_2 \subseteq D'_2 \subset W$; donc il existe deux fonctions holomorphes Φ_1 et Φ_2 admettant les pôles \mathfrak{A} respectivement dans D'_1 et D'_2 ; $f = \Phi_1 - \Phi_2$ est holomorphe dans le voisinage $D'_1 \cap D'_2$ de $\bar{D} \cap \bar{L}$. En vertu du théorème 7, il existe deux fonctions f_1 et f_2 , holomorphes respectivement au voisinage de $\bar{D}_1 \cap D$ et de $\bar{D}_2 \cap D$, telles que $f_1 - f_2 = f$ au voisinage de $D \cap L$; $\Phi_1 - f_1$ et $\Phi_2 - f_2$ sont méromorphes respectivement au voisinage de $\bar{D}_1 \cap D$ et de $\bar{D}_2 \cap D$, y admettent les pôles \mathfrak{A} , et vérifient $\Phi_1 - f_1 = \Phi_2 - f_2$ au voisinage de $D \cap L$. Donc la fonction Φ , égale à $\Phi_1 - f_1$ dans D_1 et sur $D \cap L$, à $\Phi_2 - f_2$ dans D_2 et sur $D \cap L$, est méromorphe dans D où elle admet les pôles \mathfrak{A} .

3° Soit un ouvert $D_0 \subseteq D$, tel que chaque composante connexe de D contienne une et une seule composante connexe de D_0 . Comme (G, G_3, \dot{Q}) est une configuration d'Oka, $FD \subset FG \cup (G_3 \cap FQ)$. Donc, si $\gamma \in FD$, trois cas sont possibles :

a. $\gamma \in G_3 \cap FQ$; il existe une fonction f , holomorphe dans V , telle que $f(x) \neq f(\gamma)$ pour $x \in \dot{Q}$; soit $W \subseteq Q$ un voisinage ouvert de $\overline{G \cap FG_3}$, et $W' = W \cup (D_0 \cap G_3)$; comme $W' \subseteq Q$, il existe un voisinage U de γ tel que, pour tous $\gamma' \in U$, $x \in W'$, on ait $f(x) \neq f(\gamma')$. Soit un tel $\gamma' \in U \cap D$, et soit $D' \supseteq D$ un ouvert tel que $D'_3 = D'(a_1 < \mathcal{J}x_1 < a_2) \subset V$ et que $D' \cap FD'_3 \subset W'$; soit φ la restriction de f à D'_3 : $\varphi(x) \neq \varphi(\gamma')$ quand x est voisin de $D' \cap FD'_3$. Donc la fonction

$$g(x) = \frac{1}{\varphi(x) - \varphi(\gamma')}$$

est méromorphe dans D'_3 et n'a pas de pôle au voisinage de $D' \cap FD'_3$. En vertu de la partie 2° du théorème, il existe une fonction Φ méromorphe dans D , admettant les mêmes pôles que g dans $D_3 = D(a_1 < \mathcal{J}x_1 < a_2)$, et holomorphe en tout

(22) C'est-à-dire admettant pour pôles dans D la restriction à D de la donnée de pôles \mathfrak{A} .

point de $D - D_3$; comme g est holomorphe dans $D_0 \cap D_3$, Φ est holomorphe dans D_0 ; enfin elle admet le pôle y' .

En résumé, pour tout $y \in G_3 \cap FQ$ il existe un voisinage U de y tel que, pour tout $y' \in U \cap D$, il existe une fonction Φ méromorphe dans D , holomorphe dans D_0 , admettant y' comme pôle.

b. $y \in FD_1 \cap FG$; soit ici $W \subseteq G_3$ un voisinage ouvert de $\overline{D \cap L}$, et soit $W' = W \cup (D_0 \cap D_1)$; $W' \subseteq G_1$. Soit $G'_1 \supseteq G_1$ un ouvert d'holomorphie tel que $\delta(y, G'_1) < \delta(W', G_1)$; il existe un voisinage U de y tel que, pour tout $y' \in U$, $\delta(y', G'_1) < \delta(W', G'_1)$. Soit un tel $y' \in U \cap D$. En vertu du théorème de H. Cartan-P. Thullen, il existe une fonction f , holomorphe dans G'_1 , telle que $|f(y')| > \sup_{x \in W'} |f(x)|$. Soit un ouvert $D' \supseteq D$, tel que $D' \cap L \subset W$ et $D'_1 = D'(\mathcal{J}x_1 > 0) \subset G'_1$; soit $\varphi(x)$ la restriction de f à D'_1 : $\varphi(x) \neq \varphi(y')$ quand x est voisin de $D' \cap FD'_1$. Donc la fonction

$$g(x) = \frac{1}{\varphi(x) - \varphi(y')}$$

est méromorphe dans D'_1 et n'a pas de pôle au voisinage de $D' \cap FD'_1$. En vertu de la *partie 2° du théorème*, il existe une fonction Φ méromorphe dans D , admettant les mêmes pôles que g dans D_1 et holomorphe en tout point de $D - D_1$; comme g est holomorphe dans $D_0 \cap D_1$, Φ est holomorphe dans D_0 ; enfin elle admet le pôle y' .

En résumé, si $y \in FD_1 \cap FG$, y possède la propriété énoncée à la fin du a.

c. $y \in FD_2 \cap FG$; on démontre, comme au b, que y possède cette même propriété.

Associons à chaque $y \in FD$ un voisinage U_y de y tel que, pour tout $y' \in U_y \cap D$ il existe une fonction Φ méromorphe dans D , holomorphe dans D_0 et admettant y' pour pôle; soit $U = \bigcup_{y \in FD} U_y$; à chaque $y' \in U \cap D$ associons une fonction $\Phi_{y'}$ méromorphe dans D , holomorphe dans D_0 et admettant y' pour pôle. Soit D'_0 le plus grand ouvert contenant D_0 et ne contenant aucun pôle des fonctions de la famille $(\Phi_{y'})_{y' \in U \cap D}$; $D'_0 \subseteq D$ est un ouvert d'holomorphie en vertu du théorème de soustraction S_3 . Comme D_0 est arbitrairement approché de D , chaque composante connexe de D est arbitrairement approchée (de l'intérieur) par une composante de D'_0 . Donc D est d'holomorphie en vertu du théorème de H. Behnke-K. Stein.

C. Q. F. D.

Pour démontrer maintenant le théorème 1', nous utiliserons la proposition suivante, de K. Oka ([14], p. 28-29).

PROPOSITION 3. — χ étant une fonction holomorphe dans un ouvert d'holomorphie (borné) D , soit, pour tout $r > 0$, $D^{(\chi, r)}$ l'ensemble des points x de D pour lesquels $\delta(x, D) > r|\chi(x)|$. Alors :

1° $D(\chi, r)$ est un ouvert d'holomorphie;

2° si $\frac{1}{\chi}$ est holomorphe et bornée dans D , il existe un ouvert $D' \supseteq D^{(\chi, \rho)}$, arbitrairement approché de $D^{(\chi, \rho)}$ et convexe par rapport à $A(D)$.

Cette proposition nous permettra de construire un domaine G satisfaisant aux conditions du théorème 8 et arbitrairement approché du domaine \mathcal{O} donné satisfaisant à celles du théorème 1', puis un domaine D arbitrairement approché de G et lié à ce dernier par les conditions du théorème 8. Il en résultera que \mathcal{O} est d'holomorphic.

THÉOREME 1'. — Si $a_1 < a_2$, et si les parties $\mathcal{O}(\mathcal{J}x_1 > a_1) = \mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}(\mathcal{J}x_1 < a_2) = \mathcal{O}_2$ du domaine (borné) \mathcal{O} sont d'holomorphic, \mathcal{O} est d'holomorphic.

Démonstration. — Supposons, pour la simplicité de l'exposé, que \mathcal{O} contient l'origine et que $a_1 < 0 < a_2$. Supposons $\mathcal{O}_1 \neq \emptyset$ et $\mathcal{O}_2 \neq \emptyset$ car sinon le résultat serait évident. Posons $\mathcal{O}_3 = \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$, et soit un domaine $\mathcal{O}_0 \subseteq \mathcal{O}$.

1° *Approximation de \mathcal{O} par un domaine G .* — a. Pour tout nombre $\rho > 0$, soient

$$A = \mathcal{O}(\chi, \rho), \quad B = \mathcal{O}(\chi, \rho), \quad C = \mathcal{O}(1, \rho)$$

où

$$\chi_1(x) = e^{-ix_1}, \quad \chi_2(x) = e^{ix_1};$$

si $h_1 < 0 < h_2$ et si

$$l_1 = (\mathcal{J}x_1 = h_1), \quad l_2 = (\mathcal{J}x_1 = h_2), \quad L = (\mathcal{J}x_1 = 0),$$

nous avons

$$A \cap l_1 \supseteq C \cap l_1 \supseteq B \cap l_1, \quad A \cap L = C \cap L = B \cap L, \quad A \cap l_2 \subseteq C \cap l_2 \subseteq B \cap l_2.$$

Si ρ est suffisamment petit, $A \cap B$, admet une composante connexe G vérifiant $\mathcal{O}_0 \subseteq G \subseteq \mathcal{O}$; supposons cette condition réalisée.

b. Soient a'_1 et a'_2 deux nombres tels que $a_1 < a'_1 < 0 < a'_2 < a_2$; soient

$$G_1 = G(\mathcal{J}x_1 > a'_1), \quad G_2 = G(\mathcal{J}x_1 < a'_2), \quad G_3 = G_1 \cap G_2;$$

supposons encore ρ suffisamment petit pour que

$$A_1 = A(\mathcal{J}x_1 > a'_1) = \mathcal{O}_1^{(\chi_1, \rho)} \cap (\mathcal{J}x_1 > a'_1) \quad \text{et} \quad B_2 = B(\mathcal{J}x_1 < a'_2) = \mathcal{O}_2^{(\chi_2, \rho)} \cap (\mathcal{J}x_1 < a'_2).$$

c. Soit $\mathcal{O}' = \mathcal{O}_3^{(1, \rho)}$; supposons encore ρ suffisamment petit pour que

$$C(a'_1 < \mathcal{J}x_1 < a'_2) = \mathcal{O}'(a'_1 < \mathcal{J}x_1 < a'_2).$$

2° *Propriétés du domaine G ainsi déterminé.* — a. G_1 et G_2 sont d'holomorphic; montrons-le pour G_1 . Soit un nombre a''_2 tel que $0 < a''_2 < a'_2$, et soit $A'_1 = A_1(\mathcal{J}x_1 < a''_2)$; (A_1, A'_1, B_2) est une configuration d'Oka et $G_1 = A_1 - (A'_1 - B_2)$; comme $\mathcal{O}_1^{(\chi_1, \rho)}$ est d'holomorphic en vertu de la proposition 3,

il en est de même pour A_1 ; de plus, d'après la même proposition, B_2 peut être arbitrairement approché de l'extérieur par un ouvert B'_2 convexe par rapport à $A(\mathcal{O}_2)$; (A_1, A'_1, B'_2) est une configuration d'Oka satisfaisant aux hypothèses du lemme 1, donc $A_1 - (A'_1 - B'_2)$ est d'holomorphic; comme cet ouvert est arbitrairement approché de G_1 , celui-ci est d'holomorphic.

b. G_1 et G_2 peuvent être arbitrairement approchés de l'extérieur par des ouverts d'holomorphic; en effet, cette approximation peut être réalisée par des ensembles ouverts construits de la même façon avec un nombre $\rho' < \rho$.

3° *Construction de D.* — Comme $\mathcal{O}_0 \cap G_3 \subseteq \mathcal{O}'$ et $G \cap FG_3 \subseteq \mathcal{O}'$, il existe un polyèdre analytique $Q \subset \mathcal{O}'$ dans \mathcal{O}_3 , suffisamment approché de \mathcal{O}' pour que $\mathcal{O}_0 \cap G_3 \subset Q$ et $G \cap FG_3 \subseteq Q$; alors $\mathcal{O}' \cap L = C \cap L$ entraîne $Q \cap L \subset G_3$. En vertu du théorème 8, $D = G - (G_3 - \dot{Q})$ est d'holomorphic. Or

$$D = G - (G_3 - \dot{Q}) = (G - G_3) \cup (G_3 \cap \dot{Q}) \supset (\mathcal{O}_0 - G_3) \cup (\mathcal{O}_0 \cap G_3) = \mathcal{O}_0.$$

Comme \mathcal{O}_0 est arbitrairement approché de \mathcal{O} , celui-ci est d'holomorphic en vertu du théorème de H. Behnke-K. Stein.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] H. BEHNKE et K. STEIN, *Konvergente Folgen von Regularitätsbereichen und die Meromorphiekonvexität* (*Math. Ann.*, t. 116, 1938).
- [2] H. BEHNKE et P. THULLEN, *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen* (*Ergebnisse der Math.*, t. 3, fasc. 3, 1934).
- [3] S. BOCHNER et W. T. MARTIN, *Several complex variables*, Princeton University Press, 1948.
- [4] H. CARTAN, *Les problèmes de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 199, 1934, p. 1284).
- [5] H. CARTAN, *Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes* (*Ann. Ec. Norm.* t. 61, fasc. 3, 1944).
- [6] H. CARTAN, *Idéaux et modules de fonctions analytiques de n variables complexes* (*Bull. Soc. Math.*, t. 78, fasc. 1, 1950).
- [7] SÉMINAIRE H. CARTAN, *Intégrale d'André Weil*, exposé 6, Paris, 1951-1952.
- [8] H. CARTAN et P. THULLEN, *Regularitäts und Konvergenzbereiche* (*Math. Ann.*, t. 106, 1932).
- [9] P. LELONG, *La convexité et les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes* (*J. Math. pures et appl.*, t. 31, fasc. 3, 1952).
- [10] P. LELONG, *Domaines convexes par rapport aux fonctions plurisousharmoniques* (*Journal d'Analyse de Jérusalem*, vol. 2, 1952, p. 178-208).
- [10 bis] P. LELONG, *Fonctions plurisousharmoniques; mesures de Radon associées. Application aux fonctions analytiques* (*Colloque de Bruxelles*, 11-14 mars 1964).
- K. OKA, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables*:
- [11] (1) *Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles* (*J. Sc. Hiroshinohima Univ.*, 1936).
- [12] (2) *Domaines d'holomorphic* (*J. Sc. Hiroshima Univ.*, 1937).
- [13] (5) *L'intégrale de Cauchy* (*Japanese J. Math.*, 1941).
- [14] (6) *Domaines pseudoconvexes* (*Tohoku Math. J.*, 1942).
- [15] (7) *Sur quelques notions arithmétiques* (*Bull. Soc. Math.*, t. 78, fasc. 1, 1950).
- [16] A. WEIL, *Sur les séries de polynômes de deux variables complexes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 194, 1932, p. 1304).
- [17] A. WEIL, *L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables* (*Math. Ann.*, t. 111, fasc. 2, 1935, p. 178-182).

