BULLETIN DE LA S. M. F.

R. CROISOT

Automorphismes intérieurs d'un semi-groupe

Bulletin de la S. M. F., tome 82 (1954), p. 161-194
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1954__82__161_0>

AUTOMORPHISMES INTÉRIEURS D'UN SEMI-GROUPE ;

PAR R. CROISOT,

à Besançon.

INTRODUCTION.

Les *automorphismes intérieurs* d'un semi-groupe ont été définis par P. Dubreil ([1]). Bien qu'ils n'existent que si l'*intérieur* du semi-groupe est non vide, leur étude peut avoir une portée générale car j'ai montré ([2]) qu'étant donné un semi-groupe D, on peut le plonger dans un semi-groupe K tel que tout automorphisme de D soit induit sur D par un automorphisme intérieur de K. Ce travail a été divisé en quatre parties.

Dans le paragraphe I, je rappelle un certain nombre de définitions données par P. Dubreil et j'introduis le concept d'élément ou de sous-ensemble *conjugué*, à droite ou à gauche, d'un élément ou d'un sous ensemble d'un semi-groupe (défin. 5), concept auquel se rattachent des relations importantes : *relations de conjugaison* définies dans le semi-groupe ou dans un ensemble de parties du semi-groupe (défin. 6), *relations d'équiconjugaison* attachées à un élément ou à un complexe et définies en particulier dans l'intérieur du semi-groupe (défin. 7). D'autre part, je définis certains sous-ensembles particuliers, notamment le *normalisateur* (défin. 8) et le *normalisateur réduit* (défin. 9) d'un élément ou d'un complexe, en vue de leur utilisation pour l'étude des relations précédentes. Afin d'éviter que ce paragraphe se réduise à une suite fastidieuse de définitions, j'y étudie quelques propriétés des différents sous-ensembles introduits, en particulier de l'*intérieur* (th. 1) et du *normalisateur réduit* d'un élément ou d'un complexe (th. 2); ces propriétés facilitent la détermination effective de ces sous-ensembles et certaines d'entre elles sont utilisées dans les paragraphes suivants; des contre-exemple sont destinés à montrer la fausseté de certains résultats qui apparaissaient comme vraisemblables.

Le paragraphe II contient l'étude des relations de conjugaison. Dans un groupe, la *relation de conjugaison* (au sens de la définition 6) est toujours une équivalence parce que les automorphismes intérieurs d'un groupe forment un groupe; au contraire, dans un semi-groupe, d'une part, elle n'est pas nécessairement une

([1]) P. DUBREIL, *Contribution à la théorie des demi-groupes* (*Mém. Acad. Sc. Inst. France*, t. 63, 1941, p. 1-52). Je cite ici ce mémoire par DGI.

([2]) R. CROISOT, *Holomorphies d'un semi-groupe* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 227, 1948, p. 1134) et *Autre généralisation de l'holomorphie dans un semi-groupe* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 227, 1948, p. 1195).

équivalence, d'autre part, elle peut être une équivalence sans que les automorphismes intérieurs (de première catégorie) forment un groupe. Je donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que cette relation (toujours transitive) soit réflexive ou symétrique et des conditions nécessaires et suffisantes pour que sa fermeture symétrique soit réflexive ou transitive et je compare ces conditions à des propriétés de l'ensemble des automorphismes intérieurs de première catégorie et de l'ensemble des automorphismes intérieurs des deux catégories (th. 3). J'ébauche ensuite une étude plus générale, celle de l'interdépendance des propriétés des différentes relations de conjugaison définies dans chacun des ensembles de complexes ayant même puissance.

Les relations d'équiconjugaison (à droite ou à gauche), qui sont des équivalences définies dans l'intérieur du semi-groupe considéré, font l'objet du paragraphe III. Dans un groupe, la *relation* ρ_H *d'équiconjugaison à droite* d'un complexe H (au sens de la définition 7) est régulière à gauche et simplifiable à gauche et ses classes correspondent biunivoquement aux différents complexes conjugués de H; ces résultats subsistent dans un semi-groupe (th. 4 et 5). Dans un groupe, ρ_H est complètement déterminée par le normalisateur de H; par contre, dans un semi-groupe, des équivalences ρ_H peuvent être distinctes tandis que les normalisateurs réduits M_H sont les mêmes (ex. 11); toutefois, je précise un cas où M_H suffit à déterminer ρ_H (th. 6). Une grande partie de ce paragraphe est consacrée à l'étude comparée de l'équivalence d'équiconjugaison à droite ρ_H et de l'équivalence d'équiconjugaison à gauche ${}_H\rho$. On voit facilement que, dans un groupe, les propriétés suivantes sont équivalentes : ρ_H est régulière et simplifiable, ${}_H\rho$ est régulière et simplifiable, $\rho_H = {}_H\rho$; elles le sont encore dans un semi-groupe (th. 10). Mais, de plus, dans un groupe, la régularité et la simplifiabilité d'une relation d'équivalence étant vérifiées simultanément, pour que les propriétés précédentes aient lieu, il suffit que des propriétés d'apparence plus faible soient vraies, par exemple : ρ_H est régulière, $\rho_H \leqq {}_H\rho$; dans un semi-groupe, ces propriétés peuvent éclater (ex. 12 et 13), mais il reste néanmoins un certain nombre de résultats intéressants, tel que le suivant : ρ_H est régulière si et seulement si ${}_H\rho$ est simplifiable (propr. 19 et th. 8); d'ailleurs, j'indique un cas où le comportement de ρ_H et ${}_H\rho$ est exactement le même que dans un groupe (th. 12). Il est à remarquer que des résultats qui ne seraient, dans les groupes, que des tautologies peuvent fort bien subsiter dans les semi-groupes et cesser d'être triviaux; il en est ainsi du théorème 11 qui affirme en particulier que, si l'intérieur d'un semi-groupe est commutatif (sans qu'il en soit nécessairement de même du semi-groupe), on a $\rho_H = {}_H\rho$.

Le paragraphe IV introduit et étudie d'une façon sommaire la notion d'*automorphisme intérieur généralisé* qui coiffe celle d'automorphisme intérieur de première catégorie et d'automorphisme intérieur de deuxième catégorie. Cette notion présente un intérêt du fait que les automorphismes intérieurs généralisés d'un semi-groupe formeut un groupe (th. 13) qui peut être plus riche que le groupe engendré par les automorphismes intérieurs de première catégorie (et de deuxième catégorie) (ex. 14). Malheureusement, ces automorphismes sont d'un maniement compliqué.

I. — Définitions générales et propriétés préliminaires.

Nous considérons un *semi-groupe* D, c'est-à-dire un ensemble muni d'une opération (binaire, univoque et partout définie) associative et simplifiable des deux côtés.

Définition 1 [3]. — Le *centre* de D, que nous notons Z, est l'ensemble des éléments de D permutables avec chaque élément de D.

On sait que (*cf.* DGI, th. 42) *le centre* Z [4] *de* D *est un sous-semi-groupe unitaire* [5], *fort* [6] *et symétrique* [7].

Définition 2. — Nous appelons *transformateur à droite* d'un complexe $H \subseteq D$, et nous notons T_H, l'ensemble des éléments $x \in D$ pour lesquels il existe un complexe K vérifiant l'égalité $xH = Kx$. Si H se réduit à un seul élément a, nous dirons, par abus de langage, que T_H est le transformateur à droite de a et nous le noterons simplement T_a [8]. Nous conviendrons de plus que D est le transformateur à droite de la partie vide de D.

Lemme 1. — *Le transformateur à droite d'un complexe est l'intersection des transformateurs à droite de ses éléments.*

En effet, si l'on a $xH = Kx$, pour tout $h \in H$, il existe $k \in K \subseteq D$ tel que l'on ait $xh = kx$. Donc le transformateur à droite d'un complexe est contenu dans le transformateur à droite de chacun de ses éléments. Réciproquement, si x est tel que, pour tout $h \in H$, il existe $k \in D$ vérifiant l'égalité $xh = kx$, l'ensemble K des éléments k satisfait à $xH = Kx$, ce qui achève d'établir le lemme.

Il en résulte immédiatement que, pour toute famille $\{H_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ de sous-ensembles de D, on a $T_{\bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} H_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} T_{H_\alpha}$ [9], d'où l'on déduit la propriété suivante :

Propriété 1. — *L'ensemble des transformateurs à droite des différents sous-ensembles d'un semi-groupe* D *constitue un treillis complet vis-à-vis de la*

---

(3) *Cf.* DGI, p. 45.

(4) Ceci n'a de sens que si ce sous-ensemble est non vide; nous le supposons implicitement. Cette remarque est valable pour tous les sous-ensembles particuliers introduits plus loin.

(5) C'est-à-dire tel que, si l'on a $xy \in Z$, on ait $x \in Z \Leftrightarrow y \in Z$. *Cf.* DGI, p. 16.

(6) C'est-à-dire tel que l'on ait $xy \in Z$, $xz \in Z$, $tz \in Z \Rightarrow ty \in Z$. *Cf.* DGI, p. 9.

(7) C'est-à-dire tel que : *a.* en désignant par $Z.\cdot x$ l'ensemble des éléments u vérifiant $xu \in Z$, et par $Z\cdot.x$ l'ensemble des éléments v vérifiant $vx \in Z$, on ait $Z.\cdot x = \emptyset \Leftrightarrow Z\cdot.x = \emptyset$; *b.* en désignant par $\mathcal{R}_Z$ l'équivalence $x \equiv y\,(\mathcal{R}_Z) \Leftrightarrow Z\cdot.x = Z.\cdot y$, et par ${}_Z\mathcal{R}$ l'équivalence $x \equiv y\,({}_Z\mathcal{R}) \Leftrightarrow Z.\cdot x = Z\cdot.y$, on ait $\mathcal{R}_Z = {}_Z\mathcal{R}$. *Cf.* DGI, p. 22.

(8) A chaque définition contenant l'expression « à droite », on peut faire correspondre une définition analogue contenant l'expression « à gauche »; nous ne la formulerons pas en général explicitement. Le transformateur à gauche de H (ou de a) se note ${}_H T$ (ou ${}_a T$).

(9) Les signes $\bigcap$ et $\bigcup$ sont ceux de l'intersection et de de la réunion au sens de la théorie des ensembles.

relation d'inclusion. Un treillis dual de ce treillis s'obtient par un $\cup$*-homomorphisme fort* [10] *à partir du treillis complet de tous les sous-ensembles de* D.

En effet, on vient de voir que l'intersection (au sens de la théorie des ensembles) d'une famille quelconque de transformateurs à droite est un transformateur à droite (éventuellement l'ensemble vide). D'autre part, D est un transformateur à droite qui contient tous les autres. Par suite, l'ensemble des transformateurs à droite est un treillis complet vis-à-vis de la relation d'inclusion [11]. Le reste de la propriété résulte immédiatement de la formule

$$T_{\bigcup\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} H_\alpha} = \bigcap_{\alpha\in\mathfrak{A}} T_{H_\alpha}.$$

Ce qui précède entraîne en particulier que, pour deux complexes H_1 et H_2 vérifiant $H_1 \subseteq H_2$, on a $T_{H_1} \supseteq T_{H_2}$.

Définition 3 [12]. — Nous appelons *intérieur à droite* d'un semi-groupe D, et nous notons I_d, le transformateur à droite T_D. Nous appelons *intérieur* d'un semi-groupe D, et nous notons I, l'intersection de l'intérieur à droite I_d et de l'intérieur à gauche I_g.

Définition 4. — Étant donné un élément $x \in I_d$, nous appelons *endomorphisme intérieur de première catégorie* associé à x, et nous notons α_x, l'application (biunivoque) de D dans D définie par $\alpha_x(a) = b$ si l'on a $xa = bx$. De même, étant donné un élément $x \in I_g$, nous appelons *endomorphisme intérieur de deuxième catégorie* associé à x, et nous notons β_x, l'application (biunivoque) de D dans D définie par $\beta_x(a) = b$ si l'on a $xb = ax$. Si x est élément de I, les endomorphismes intérieurs de première et de deuxième catégories qui lui sont associés sont deux automorphismes de D, inverses l'un de l'autre, que nous appelons *automorphismes intérieurs de première et de deuxième catégories* [13]. Chacun de ces automorphismes détermine d'une manière évidente un automorphisme dans l'ensemble E_π des complexes de D ayant une puissance déterminée π (évidemment inférieure ou égale à la puissance δ de D). De plus, il détermine dans l'ensemble E^* des parties de D un automorphisme qui est un automorphisme de la structure de treillis complet de E^* et un automorphisme de sa structure de demi-groupe et, par suite, un automorphisme de sa structure de gerbier résidué [13].

---

[10] Pour la définition, *cf.* M. L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur et R. Croisot, *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques*, Gauthier-Villars, 1953, 1re partie, chap. IV, § 1, p. 47.

[11] *Cf.* M. L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur et R. Croisot, *loc. cit.*, th. 1, 1re partie, chap. III, § 2, p. 35.

[12] *Cf.* DGI, p. 46.

[13] On sait que l'ensemble E^* des parties d'un demi-groupe D est un treillis complet (vis-à-vis de la relation d'inclusion) muni d'une multiplication associative (définie comme la multiplication classique des complexes, en convenant de plus que l'on a, pour tout $A \in E^*$, $A\emptyset = \emptyset A = \emptyset$); cette

On sait que (*Cf.* DGI, p. 47) *l'intérieur* I [2] *de* D *est un sous-semi-groupe contenant le centre* Z.

Pour préciser les propriétés de I, nous utiliserons quelques lemmes.

Lemme 2. — *On a les implications :*

$$xy \in \mathrm{T}_y \Rightarrow \exists\, u \quad \text{avec} \quad ux = xy,$$
$$xy \in {}_x\mathrm{T} \Rightarrow \exists\, v \quad \text{avec} \quad yv = xy.$$

En particulier, l'existence de u et v est assurée si l'on a $xy \in \mathrm{I}_d$, celle de v si l'on a $xy \in \mathrm{I}_g$, celle de u et v si l'on a $xy \in \mathrm{I}$.

En effet, de $xy \in \mathrm{T}_y$, on déduit l'existence de u vérifiant l'égalité $xyy = uxy$, donc aussi l'égalité $xy = ux$, puisque D est simplifiable à droite. De même, de $xy \in {}_x\mathrm{T}$, on déduit l'existence de v vérifiant l'égalité $xxy = xyv$, donc aussi l'égalité $xy = yv$, puisque D est simplifiable à gauche.

Lemme 3. — *En présence de la relation $xy \in \mathrm{I}_d$, la relation $x \in \mathrm{I}_g$ entraîne la relation $y \in \mathrm{I}_d$, la relation $y \in \mathrm{I}_g$ entraîne la relation $x \in \mathrm{I}_d$ et l'on a, selon le cas*

$$\alpha_y = \beta_x \alpha_{xy}, \qquad \alpha_x = \alpha_{xy} \beta_y.$$

En effet, en présence de l'égalité $xyc = axy$, les égalités $xb = ax$ et $yc = by$ sont équivalentes. Donc, si l'on a à la fois $xy \in \mathrm{I}_d$ et $x \in \mathrm{I}_g$, à tout élément $c \in \mathrm{D}$, on peut faire correspondre successivement a et b vérifiant ces égalités; il en résulte que l'on a aussi $y \in \mathrm{I}_d$ avec $\alpha_y = \beta_x \alpha_{xy}$. De même, si l'on a à la fois $xy \in \mathrm{I}_d$ et $y \in \mathrm{I}_g$, à tout élément $b \in \mathrm{D}$, on peut faire correspondre successivement c et a vérifiant ces égalités; il en résulte que l'on a aussi $x \in \mathrm{I}_d$ avec $\alpha_x = \alpha_{xy} \beta_y$.

Par symétrie, on a le lemme suivant :

Lemme 3'. — *En présence de la relation $yx \in \mathrm{I}_g$, la relation $x \in \mathrm{I}_d$ entraîne $y \in \mathrm{I}_g$, la relation $y \in \mathrm{I}_d$ entraîne $x \in \mathrm{I}_g$ et l'on a, selon le cas,*

$$\beta_y = \alpha_x \beta_{yx}, \qquad \beta_x = \beta_{yx} \alpha_y.$$

Lemme 4. — *Les relations $xy \in \mathrm{I}_d$, $xz \in \mathrm{I}_g$, $tz \in \mathrm{I}_d$ entraînent $ty \in \mathrm{I}_d$ et l'on a*

$$\alpha_{ty} = \alpha_{tz} \beta_{xz} \alpha_{xy}.$$

En effet, les hypothèses impliquent qu'à tout élément $a \in \mathrm{D}$, on peut faire correspondre successivement b, c, d tels que l'on ait les égalités $xya = bxy$, $xzc = bxz$, $tzc = dtz$. D'après le lemme 2, la relation $xy \in \mathrm{I}_d$ entraîne l'existence

---

multiplication est distributive par rapport à la réunion et, par suite, E* est un gerbier (à élément zéro) et ce gerbier est résidué (*Cf.* P. Dubreil, *Bull. Soc. Math.*, p. 289-306, en particulier p. 291).

Les automorphismes intérieurs de première et de deuxième catégories d'un semi-groupe sont introduits dans DGI, p. 47.

d'un élément u vérifiant l'égalité $ux = xy$. D'autre part, la relation $xz \in I_g$ entraîne l'existence d'un élément v vérifiant l'égalité $uxz = xzv$, d'où l'on déduit $xzv = xyz$ et $zv = yz$. Il en résulte qu'on peut écrire successivement :

$$xya = bux, \qquad xyaz = buxz = bxzv = xzcv, \qquad yaz = zcv,$$
$$tyaz = tzcv = dtzv = dtyz, \qquad tya = dty,$$

ce qui établit la relation

$$ty \in I_d \qquad \text{avec } \alpha_{ty} = \alpha_{tz}\beta_{xz}\alpha_{xy}.$$

Par symétrie, on a le lemme suivant :

LEMME 4'. — *Les relations* $yx \in I_g$, $zx \in I_d$, $zt \in I_g$ *entraînent* $yt \in I_g$ *et l'on a*

$$\beta_{yt} = \beta_{zt}\alpha_{zx}\beta_{yx}.$$

THÉORÈME 1. — *L'intérieur* I ([4]) *d'un semi-groupe* D *est un sous-semi-groupe unitaire, contenant le centre* Z *de* D *et il est conservé* ([14]) *par tout automorphisme* γ *de* D. *De plus,* I *est fort, réversible* ([15]) *et équirésiduel* ([16]).

On a déjà rappelé que I est un sous-semi-groupe contenant Z. Si l'on transforme D par un automorphisme γ, le transformé $\gamma(x)$ d'un élément x de I appartient aussi à I; en effet, puisque la relation $xa = bx$ permet de déterminer b (ou a) lorsque a (ou b) est un élément quelconque de D, la relation $\gamma(x)a' = b'\gamma(x)$ permet de déterminer b' (ou a') lorsque a' (ou b') est un élément quelconque de D; ceci montre qu'on a $\gamma(I) \subseteq I$, d'où l'on déduit $\gamma(I) = I$ par la considération de l'automorphisme inverse γ^{-1}. Les lemmes 3 et 3' montrent que les relations $xy \in I$ et $x \in I$ (ou $y \in I$) entraînent $y \in I$ (ou $x \in I$), c'est-à-dire que I est unitaire.

De plus, les lemmes 4 et 4' montrent que les relations $xy \in I$, $xz \in I$, $tz \in I$ entraînent $ty \in I$, c'est-à-dire que I est fort. D'autre part, quels que soient les éléments $x \in I, y \in I$, on a $xy \in I$ puisque I est un sous-semi-groupe; du lemme 2, résulte alors l'existence de deux éléments u et v vérifiant les égalités $ux = xy$ et $xy = yv$; I étant unitaire, on a $u \in I$ et $v \in I$; par suite, I est réversible. Enfin, si l'on a $I.\cdot x \neq \emptyset$, il existe y tel que l'on ait $xy \in I$, d'où l'on déduit, d'après le lemme 2, l'existence de u vérifiant l'égalité $ux = xy$; cette égalité entraîne $ux \in I$, et par conséquent, $I\cdot .x \neq \emptyset$; on montre de même que $I\cdot .x \neq \emptyset$ implique $I.\cdot x \neq \emptyset$; donc I est équirésiduel.

Remarque 1. — On aurait pu montrer que I est fort, sans utiliser les lemmes 4 et 4', en appliquant le théorème 39 a de DGI.

([14]) C'est-à-dire tel que l'on ait $\gamma(I) = I$.

([15]) C'est-à-dire tel que, quels que soient $x \in I, y \in I$, il existe $a \in I$, $b \in I$ vérifiant l'égalité $ax = by$ et il existe $c \in I$, $d \in I$ vérifiant l'égalité $xc = yd$. *Cf.* DGI, p. 34.

([16]) C'est-à-dire qu'il vérifie la propriété a de la note ([7]). *Cf.* DGI, p. 8.

Remarque 2. — I n'est pas nécessairement *stable* [17] (donc pas nécessairement *central* [17], d'après le théorème 34 de DGI), ni *symétrique*. Pour le montrer, il suffit de s'assurer que I ne vérifie pas nécessairement la condition pour qu'un complexe d'un demi-groupe soit classe d'au moins une congruence définie dans le demi-groupe [18]. En effet, si I, sous-semi-groupe réversible, unitaire était stable, il serait classe de la congruence $\mathcal{L}_{\mathrm{I}} = {}_{\mathrm{I}}\mathcal{L}$ définie dans D (DGI, th. 31 et 33); si I, sous-semi-groupe fort, unitaire était symétrique, il serait classe de la congruence $\mathcal{R}_{\mathrm{I}} = {}_{\mathrm{I}}\mathcal{R}$ définie dans D (DGI, th. 3 et 16). Considérons alors l'exemple suivant :

Exemple 1. — Soit le semi-groupe à trois générateurs l, m, n, avec les relations définissantes $lm = nl$, $ln = ml$, $mn = nm$. Ses éléments peuvent être mis d'une manière unique sous la forme $l^{\lambda} m^{\mu} n^{\nu}$ si l'on prend pour λ, μ, ν, des entiers positifs ou nuls non tous nuls [et si l'on convient qu'affecter un générateur de l'exposant o équivaut à ne pas l'écrire [19]], le produit de $l^{\lambda} m^{\mu} n^{\nu}$ et $l^{\lambda'} m^{\mu'} n^{\nu'}$ étant égal à $l^{\lambda+\lambda'} m^{\mu+\mu'} n^{\nu+\nu'}$ si λ' est pair et à $l^{\lambda+\lambda'} m^{\nu+\mu'} n^{\mu+\nu'}$ si λ' est impair [20]. On voit que I est le sous-semi-groupe (l, mn) engendré par les éléments l et mn. Il ne vérifie pas la condition (α) car on a

$$m\mathrm{I}n \cap \mathrm{I} \neq \emptyset \quad (m^2 n^2 = m(mn)n \in m\mathrm{I}n \text{ et } m^2 n^2 \in \mathrm{I})$$

et l'on a

$$m\mathrm{I}n \nsubseteq \mathrm{I} \, (mln \in m\mathrm{I}n \text{ et } mln = ln^2 \notin \mathrm{I}).$$

---

(17) Un sous-demi-groupe I d'un demi-groupe est dit *stable* si : *a*. il est réversible; *b*. en désignant par $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}$ l'équivalence $x \equiv y\,(\mathcal{L}_{\mathrm{I}}) \Leftrightarrow \exists\, a \in \mathrm{I}$ et $b \in \mathrm{I}$ vérifiant l'égalité $ax = by$, et par ${}_{\mathrm{I}}\mathcal{L}$ l'équivalence $x \equiv y\,({}_{\mathrm{I}}\mathcal{L}) \Leftrightarrow \exists\, a \in \mathrm{I}$ et $b \in \mathrm{I}$ vérifiant l'égalité $xa = yb$, on a $\mathcal{L}_{\mathrm{I}} \equiv {}_{\mathrm{I}}\mathcal{L}$. Il est dit *central* si l'on a $\mathrm{I}d = d\mathrm{I}$ pour tout $d \in \mathrm{D}$. *Cf.* DGI, p. 40.

(18) Cette condition est la suivante, I étant le complexe envisagé du demi-groupe D : (α). Pour tout complexe C de l'une des formes $\mathrm{I}x$, $y\mathrm{I}$ ou $y\mathrm{I}x$ (x et y étant des éléments quelconque de D), on a

$$\mathrm{C} \cap \mathrm{I} \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{C} \subseteq \mathrm{I}.$$

Cf. M. Teissier, *C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 1987-1989, ou M. L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur et R. Croisot, *loc. cit.*, 2ᵉ partie, chap. III, § 4, p. 185.

(19) Cette convention, utilisée aussi dans d'autres exemples, ne sera pas rappelée plus loin.

(20) La plupart des semi-groupes des exemples donnés sont obtenus à partir d'un semi-groupe auxiliaire L entre les éléments duquel on impose des relations; souvent, L est le semi-groupe libre, ensemble des mots formés à l'aide d'une famille $\{g_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ de générateurs auxquels on impose des relations appelées relations définissantes. D'une façon rigoureuse, un tel semi-groupe S est le semi-groupe quotient de L par une équivalence $\mathcal{S}$ qui est la plus fine de toutes les équivalences régulières et simplifiables pour lesquelles les deux membres de chacune des relations imposées sont équivalents. Dans le cas général, il est impossible de caractériser d'une manière constructive l'équivalence $\mathcal{S}$ et, par suite, de déterminer S.

Dans chacun des cas particuliers considérés dans les exemples, je procède de la façon suivante. Je définis dans L une relation d'équivalence $\mathcal{E}$, certainement plus fine que $\mathcal{S}$, pour laquelle je peux déterminer si l'on a ou non $\mathcal{E} = \mathcal{S}$ (le but à atteindre étant évidemment de choisir $\mathcal{E}$ de manière qu'elle coïncide avec $\mathcal{S}$, j'astreins les deux membres de chaque relation imposée à appartenir à la même classe de L modulo $\mathcal{E}$). Pour savoir si l'on a bien $\mathcal{E} = \mathcal{S}$, je choisis, dans chaque classe de L modulo $\mathcal{E}$, un représentant (je désigne par $\overline{x}$ le représentant de la classe contenant $x \in \mathrm{L}$) et je définis dans l'ensemble $\mathrm{G} = \{\overline{x}\}$ de ces représentants une opération, notée ici, par $\overline{x}.\overline{y} = \overline{\overline{x}\,\overline{y}}$. Si $\mathcal{E}$ coïncide avec $\mathcal{S}$, G est isomorphe au semi-groupe S cherché; les deux propriétés suivantes sont alors vérifiées : *a*. Quels que soient $x \in \mathrm{L}$, $y \in \mathrm{L}$, on a $\overline{\overline{x}\,\overline{y}} = \overline{xy}$; *b*. G est simplifiable (à gauche et à droite). Ces deux propriétés sont caractéristiques; si elles sont vérifiées, d'après *a*, l'équivalence $\mathcal{E}$ est régulière et G est isomorphe au demi-groupe quotient de L par $\mathcal{E}$; G étant de plus simplifiable, $\mathcal{E}$ est simplifiable, et puisque les deux membres de chacune des relations imposées sont équivalents modulo $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ est moins fine que $\mathcal{S}$ et coïncide donc avec $\mathcal{S}$. Pratiquement, je détermine les représentants $\overline{x}$ en utilisant au maximum les relations imposées et le fait que $\mathcal{E}$ doit être régulière et simplifiable pour coïncider avec $\mathcal{S}$; je forme alors la table de multiplication de G et je vérifie *a* et *b*. Pour chacun des exemples utilisés, j'indique l'ensemble des représentants $\overline{x}$ et le plus souvent, la

Remarque 3. — I_d, qui est évidemment un sous-demi-groupe conservé par tout automorphisme de D, n'est pas nécessairement unitaire comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 2. — Soit le semi-groupe à trois générateurs l, m, n avec les relations définissantes $ml = l^2 m$, $nl^2 = ln$, $mn = nm$. Ses éléments peuvent être mis d'une manière unique sous la forme $n^\nu l^\lambda m^\mu$ si l'on prend pour λ, μ, ν des entiers positifs ou nuls non tous nuls, la loi de composition étant donnée par $n^\nu l^\lambda m^\mu n^{\nu'} l^{\lambda'} m^{\mu'} = n^{\nu+\nu'} l^{2^{\nu'}\lambda + 2^\mu \lambda'} m^{\mu+\mu'}$. On voit que I_d est le sous-semi-groupe commutatif $\{n^\nu m^\mu\}_{\nu \leqq \mu}$. On a donc $mn \in I_d$, $m \in I_d$, $n \notin I_d$ et I_d n'est pas unitaire.

Définition 5. — Nous dirons qu'un élément $b \in D$ est un *élément conjugué à droite* d'un élément $a \in D$ s'il existe $x \in I$ tel que l'on ait $xa = bx$ [c'est-à-dire $\alpha_x(a) = b$]; nous dirons qu'un complexe $K \subseteq D$ est un *complexe conjugué à droite* d'un complexe $H \subseteq D$ s'il existe $x \in I$ tel que l'on ait $xH = Kx$ [c'est-à-dire $\alpha_x(H) = K$]; nous étendrons cette définition au cas où H et K sont des sous-ensembles quelconques, éventuellement vides (le seul sous-ensemble conjugué à droite de $\emptyset$ est $\emptyset$ lui-même).

Définition 6. — Nous appelons *relation de conjugaison* (*définie dans* D) la relation suivante, notée $\mathcal{C}$:

$a\mathcal{C}b \Leftrightarrow$ l'élément b est un élément conjugué à droite de l'élément a; nous appelons *relation de conjugaison* (*définie dans l'ensemble* E_π des complexes de D ayant une puissance déterminée π) la relation suivante, notée $\mathcal{C}_\pi$:

$H\mathcal{C}_\pi K \Leftrightarrow$ le complexe K est un complexe conjugué à droite du complexe H; nous appelons *relation de conjugaison* (*définie dans l'ensemble* E^* des parties de D) la relation suivante, notée $\mathcal{C}^*$:

$A\mathcal{C}^*B \Leftrightarrow$ le sous-ensemble B est un sous-ensemble conjugué à droite du sous-ensemble A.

Définition 7. — Nous appelons *relation d'équiconjugaison à droite d'un élément* $a \in D$ (ou *d'un complexe* $H \subseteq D$) la relation suivante, notée ρ_a (ou ρ_H), définie dans le transformateur à droite de a (ou de H) :

$$x \rho_a y \Longleftrightarrow \alpha_x(a) = \alpha_y(a) \qquad [\text{ou } x \rho_H y \Longleftrightarrow \alpha_x(H) = \alpha_y(H)].$$

La relation ρ_a (ou ρ_H) est évidemment une relation d'équivalence [21].

Définition 8. — Le *normalisateur* d'un complexe $H \subseteq D$, que nous notons N_H, est l'ensemble des éléments $x \in D$ qui sont permutables avec H, c'est-à-dire tels que l'on ait l'égalité $xH = Hx$.

Le *centralisateur* d'un complexe $H \subseteq D$, que nous notons C_H, est l'ensemble des éléments $x \in D$ qui sont permutables avec chaque élément de H, c'est-à-dire tels que l'on ait les égalités $xh = hx$ pour tout $h \in H$. C'est un sous-ensemble de T_H et de ${}_H T$.

---

loi de composition dans G (sauf si cette dernière s'exprime d'une façon compliquée et est sans intérêt pour le but à atteindre); je ne donne pas le détail des vérifications.

([21]) La relation d'équiconjugaison à gauche d'un élément a (ou d'un complexe H) se note ${}_a\rho$ (ou ${}_H\rho$).

Si le complexe H contient un seul élément a, son normalisateur coïncide avec son centralisateur et nous le notons simplement N_a.

Remarquons que l'intérieur I de D n'est pas autre chose que N_D et que le centre Z de D n'est pas autre chose que C_D.

Définition 9. — Le *normalisateur* (*réduit* le *centralisateur réduit*) d'un complexe $H \subseteq D$ est l'intersection, au sens de la théorie des ensembles, de l'intérieur I de D et du normaliseur N_H (du centralisateur C_H) de H; nous le notons $M_H(B_H)$.

Si le complexe H contient un seul élément a, son normalisateur réduit coïncide avec son centraliseur réduit et nous le notons simplement M_a ([22]).

Le centraliseur (le centraliseur réduit) d'un complexe est l'intersection des normalisateurs (des normalisateurs réduits) de ses différents éléments. Il en résulte que la propriété 1 est valable si l'on remplace « transformateur à droite » par « centralisateur » ou « centraliseur réduit » (en convenant de poser $C_\varnothing = D$).

Propriété 2. — *Le normalisateur* N_H ([4]) *d'un complexe* H *d'un semi-groupe* D *est un sous-semi-groupe unitaire de* D, *contenant le centre* Z *de* D.

Le sous-ensemble N_H de D est un sous-semi-groupe de D car $xH = Hx$ et $yH = Hy$ entraînent $xyH = xHy = Hxy$.

Ce sous semi-groupe est unitaire car : *a*. $xH = Hx$ et $xyH = Hxy$ entraînent $xyH = xHy$, d'où $yH = Hy$, d'après la règle de simplification à gauche; *b*. $xH = Hx$ et $yxH = Hyx$ entraînent $yHx = Hyx$, d'où $yH = Hy$, d'après la règle de simplification à droite.

D'autre part, on a évidemment $N_H \supseteq Z$.

Corollaire 1. = *Le normalisateur* N_a *d'un élément a d'un semi-groupe* D *est un sous-semi-groupe unitaire de* D, *contenant le centre* Z *de* D.

Corollaire 2. — *Le centralisateur* C_H ([4]) *d'un complexe* H *d'un semi-groupe* D *est un sous-semi-groupe unitaire de* D, *contenant le centre* Z *de* D.

Ceci résulte immédiatement du fait que l'intersection d'une famille de sous-semi-groupes unitaires est un sous-semi-groupe unitaire (si elle n'est pas vide).

Lemme 5. — *Tout sous-semi-groupe unitaire de* I *est réversible, équirésiduel dans* D *et équirésiduel dans* I.

Soit S un sous-semi-groupe de I, unitaire [dans I ([23])]. Montrons que S est réversible : soient $x \in S$, $y \in S$; de $x \in I$, résulte l'existence de $u \in D$ vérifiant l'égalité $ux = xy$ et, de $y \in I$, résulte l'existence de $v \in D$ vérifiant l'égalité $yv = xy$; I étant unitaire dans D, on a $u \in I$, $v \in I$; S étant un semi-groupe, on a $xy \in S$, et, puisque ce semi-groupe est unitaire dans I, on a $u \in S$, $v \in S$; par suite, S est réversible.

([22]) Naturellement, les notions de normalisateur et de centraliseur sont des notions bilatérales et il n'y a pas lieu d'attribuer un sens aux notations telles que $_HN$ ou $_HC$.

([23]) *A priori*, la propriété « unitaire dans I » est plus faible que la propriété « unitaire dans D ». En fait, ces deux propriétés sont équivalentes parce que I est unitaire dans D.

S est équirésiduel dans D : en effet, supposons que, pour $x \in D$, il existe $y \in D$ tel que l'on ait $xy \in S$; de $xy \in I$, résulte, d'après le lemme 2, l'existence de $u \in D$ vérifiant l'égalité $ux = xy$, d'où l'on déduit $ux \in S$; par conséquent, $S \cdot . x = \emptyset$ entraîne $S . \cdot x = \emptyset$; on montre de même que $S . \cdot x = \emptyset$ entraîne $S \cdot . x = \emptyset$; d'où la propriété. De plus, si l'on a $x \in I$, de $xy \in I$, résulte, puisque I est unitaire dans D, $y \in I$ et $u \in I$, ce qui prouve que S est équirésiduel dans I, compte-tenu de la remarque symétrique.

THÉORÈME 2. — *Dans un semi-groupe, le normalisateur réduit d'un élément ou d'un complexe et le centraliseur réduit d'un complexe* ([4]) *sont des sous-semi-groupes unitaires contenant le centre. Ils sont forts, réversibles et équirésiduels; de plus, ils sont équirésiduels dans l'intérieur du semi-groupe* ([24]).

Soit D un semi-groupe, I son intérieur et Z son centre. Montrons que le normalisateur réduit d'un complexe $H \subseteq D$ est un sous-semi-groupe unitaire contenant Z et qu'il est fort : M_H, intersection de I et du normalisateur N_H qui sont des sous-semi-groupes unitaires contenant Z(th. 1 et propr. 1) est un sous-semi-groupe contenant Z; si xy, xz, tz sont des éléments de $M_H = N_H \cap I$, d'après les lemmes 4 et 4′, on a $ty \in I$; d'autre part, d'après le lemme 4, on a alors $\alpha_{ty}(H) = \alpha_{tz}\beta_{xz}\alpha_{xy}(H) = H$, d'où $ty \in N_H$; par suite, on a $ty \in M_H$ et M_H est fort.

En particulier, le normalisateur réduit d'un élément $a \in D$ est un sous-semi-groupe unitaire contenant Z et il est fort. Il en est de même du centraliseur réduit d'un complexe $H \subseteq D$ puisque toutes ces propriétés se conservent par intersection des sous-ensembles.

Le reste du théorème 2 est conséquence immédiate du lemme 5.

Remarque 1. — Le normalisateur d'un élément a d'un semi-groupe D n'est jamais vide car il contient a; pour la même raison, le normalisateur réduit de a n'est pas vide si a appartient à l'intérieur.

Un cas où le normalisateur et le centralisateur réduits de chaque complexe de D sont non vides est celui où le centre de D est non vide; il en est ainsi, en particulier, si D possède un élément unité.

Remarque 2. — On aurait pu montrer que le normalisateur et le centralisateur réduits d'un complexe sont forts en appliquant le théorème 39*a* de DGI.

Remarque 3. — Le normalisateur réduit d'un élément (à plus forte raison le normalisateur réduit ou le centralisateur réduit d'un complexe) n'est pas nécessairement *stable* ni *symétrique*, même seulement *dans* I. L'exemple suivant montre en effet qu'il ne vérifie pas toujours la condition (α) (*cf.* la remarque 2 qui suit le théorème 1) :

Exemple 3. — Soit le semi-groupe S à trois générateurs l, m, n, avec les relations définissantes $ml = l^2m$, $ml^2 = lm$, $nl^2 = ln$, $nl = l^2n$, $mn = nm$; il possède un élément unité l^3

([24]) Le fait qu'ils sont forts dans le semi-groupe entraîne évidemment qu'ils sont forts dans n'importe quel sous-semi-groupe les contenant, en particulier dans l'intérieur.

et ses éléments s'écrivent d'une manière unique sous la forme $l^\lambda m^\mu n^\nu$ (avec $\lambda = 0, 1, 2$, μ et ν entiers positifs ou nuls), la loi de composition étant donnée par

$$l^\lambda m^\mu n^\nu l^{\lambda'} m^{\mu'} n^{\nu'} = l^\alpha m^{\mu+\mu'} n^{\nu+\nu'}, \qquad \text{avec} \quad \alpha \equiv \lambda + 2^{\mu+\nu}\lambda' \pmod{3}.$$

On vérifie que l'on a $I = S$ et $M_m = N_m = (m, n)$. Le complexe $C = (m, n)$ ne vérifie pas la condition (α) car on a $lCl \cap C \neq \emptyset$ ($lml \in lCl$ et $lml = m \in C$) et l'on a $lCl \nsubseteq C$ ($lmnl \in lCl$ et $lmnl = l^2mn \notin C$).

Remarque 4. — Le normalisateur d'un élément (à plus forte raison le normalisateur ou le centraliseur d'un complexe) n'est pas nécessairement *fort dans* D. Considérons, en effet, l'exemple suivant :

Exemple 4. — Soit le semi-groupe S à cinq générateurs l, m, n, p, a avec les relations définissantes $lma = alm$, $aln = lna$, $pna = apn$. Ses éléments peuvent être représentés d'une manière unique par les mots non vides formés à l'aide des générateurs et ne contenant aucun des groupements lma, lna, pna; écrivons chacun de ces mots sous la forme ABC où A, B, C sont des mots partiels éventuellement vides définis d'une manière uuique de la façon suivante : A est une puissance de a; B ne commence pas par a et ne finit pas par un des groupements lm, ln, pn; C est formé à l'aide de ces trois groupements; la loi de composition est alors donnée par $ABCA'B'C' = ABA'CB'C'$. Dans S, l'égalité $pma = apm$ n'est pas vérifiée et, par suite, on a $lm \in N_a$, $ln \in N_a$, $pn \in N_a$ et $pm \notin N_a$. Donc le normalisateur N_a de l'élément a n'est pas fort.

Néanmoins, le normalisateur d'un complexe (ou d'un élément), et par suite aussi le centralisateur d'un complexe, sont forts dans D *si* D *est immersible dans un groupe*. En effet, soit G un groupe; dont D est sous-semi-groupe pour tout $u \in D$, désignons par $\bar{u}$ l'élément inverse de u dans G; H étant un complexe de D, les relations

$$xyH = Hxy, \qquad Hxz = xzH, \qquad tzH = Htz$$

entraînent

$$tyH = t\bar{x}xyH = t\bar{x}Hxy = t\bar{x}Hxz\bar{z}y = t\bar{x}xzH\bar{z}y = tzH\bar{z}y = Htz\bar{z}y = Hty,$$

ce qui montre que $xy \in N_H$, $xz \in N_H$, $tz \in N_H$ entraînent $ty \in N_H$ et, par conséquent, que N_H (si ce sous-ensemble est non vide) est un complexe fort dans D [25].

Remarque 5. — L'exemple suivant montre que le normalisateur d'un élément n'est pas nécessairement *équirésiduel dans D* même si D est immersible dans un groupe et, par suite, même si ce normalisateur est fort dans D :

Exemple 5. — Considérons le semi-groupe S à trois générateurs m, n, a avec la relation définissante $mna = amn$. Ses éléments peuvent être représentés d'une manière unique par les mots non vides formés à l'aide des générateurs et ne contenant pas le groupement mna; écrivons chacun de ces mots sous la forme ABC où A, B, C, sont des mots partiels éventuellement vides tels que A soit puissance de a, B ne commence pas par a et ne finisse pas par mn, C soit puissance de mn; la loi de composition est alors la suivante : $ABCA'B'C' = ABA'CB'C'$. On a $N_a = (mn, a)$ d'où résulte $N_a \cdot\!\cdot\, m \neq \emptyset$ et $N_a \cdot\!.\, m = \emptyset$.

---

[25] On pourrait aussi obtenir ce résultat comme conséquence de la propriété générale suivante, facile à démontrer : D étant un sous-semi-groupe d'un groupe G, l'intersection d'un sous-groupe S de G avec D, si elle est non vide, est un complexe fort dans D. Le normalisateur dans D d'un complexe H de D est en effet l'intersection avec D du normalisateur de H dans G, qui est un sous-groupe de G.

Remarque 6. — Le normalisateur d'un élément n'est pas nécessairement *réversible*. Pour le voir, il suffit de prendre l'exemple suivant :

Exemple 6. — Soit S le semi-groupe à trois générateurs m, n, p, avec les relations définissantes $mn = nm$, $mp = pm$. Ses éléments s'écrivent d'une manière unique sous la forme $m^{\mu}[n, p]$, où $[n, p]$ désigne un mot formé à l'aide des symboles n et p (qui doit être différent du mot vide si μ, entier positif ou nul, est égal à zéro), le produit de deux éléments étant donné par

$$m^{\mu}[n, p]m^{\mu'}[n, p]' = m^{\mu+\mu'}[n, p][n, p]'.$$

Le normalisateur N_m de l'élément m est S; S n'est pas réversible car n et p n'ont pas de multiple commun à gauche (ni à droite).

II. — Étude des relations de conjugaison.

Considérons d'abord la *relation de conjugaison* $\mathcal{C}$ *définie dans un semi-groupe* D. Nous désignerons par I_1 le semi-groupe des automorphismes intérieurs de première catégorie de D et par I_2 le semi-groupe des automorphismes intérieurs de deuxième catégorie de D; ces deux semi-groupes sont anti-isomorphes et I_1 est image homomorphe de l'intérieur I de D (I est évidemment supposé non vide) ([26]).

Afin de faciliter l'étude de la relation $\mathcal{C}$, nous poserons une définition et démontrerons un lemme :

Définition 10. — Étant donné un ensemble E et un ensemble Γ d'automorphismes de E, nous envisagerons les propriétés éventuelles suivantes de Γ :

(E_l) Pour tout $x \in E$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que l'on ait $\gamma(x) = x$;

(I_l) Pour $x \in E$, $y \in E$, s'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que l'on ait $\gamma(x) = y$, il existe $\gamma' \in \Gamma$ tel que l'on ait $\gamma'(y) = x$;

(F_l) Pour $x \in E$, $y \in E$, $z \in E$, s'il existe $\gamma_1 \in \Gamma$, $\gamma_2 \in \Gamma$ tels que l'on ait $\gamma_1(x) = y$, $\gamma_2(y) = z$, il existe $\gamma_3 \in \Gamma$ tel que l'on ait $\gamma_3(x) = z$.

LEMME 6. — *Les propriétés* (E_l), (I_l), (F_l) *de l'ensemble* Γ *sont respectivement équivalentes aux faits que la relation de* Γ*-conjugaison* $\mathcal{C}_\Gamma$ *définie dans l'ensemble* E *par*

$$x\mathcal{C}_\Gamma y \Leftrightarrow \text{il existe } \gamma \in \Gamma \text{ tel que l'on ait } \gamma(x) = y$$

soit réflexive, *symétrique*, *transitive*.

La démonstration est conséquence immédiate des définitions.

Si l'ensemble Γ vérifie les trois propriétés (E_l), (I_l), (F_l), la relation de Γ-conjugaison peut être appelée *équivalence de transitivité* de l'ensemble Γ et l'on peut alors étendre à un tel ensemble Γ les considérations classiques rattachées

---

([26]) *Cf.* DGI, th. 43.

à cette notion ([27]). Remarquons que les propriétés (I_l) et (F_l) entraînent la propriété (E_l) (si l'ensemble Γ est non vide).

Revenons maintenant à la relation $\mathcal{C}$. Cette relation est partout définie ([28]). En prenant comme ensemble E le semi-groupe D et comme ensemble Γ l'ensemble I_1, $\mathcal{C}$ est la relation de Γ-conjugaison définie dans E.

PROPRIÉTÉ 3. — *La relation* $\mathcal{C}$ *est transitive et l'ensemble* I_1 *vérifie la propriété* (F_l).

Ces deux affirmations, équivalentes d'après le lemme 6, résultent de ce que l'ensemble I_1 est multiplicativement fermé.

LEMME 7. — *Pour* $a \in D$, *on* $a\mathcal{C}a$ *si et seulement si le normalisateur réduit* M_a *de a est non vide.*

En effet, dire que la relation $a\mathcal{C}a$ est vérifiée, c'est dire qu'il existe $x \in I$ tel que l'on ait $xa = ax$. Mais, ceci est équivalent au fait que le sous-ensemble M_a contienne au moins un élément x.

PROPRIÉTÉ 4. — *La condition nécessaire et suffisante pour que la relation* $\mathcal{C}$ *soit réflexive ou pour que l'ensemble* I_1 *vérifie la propriété* (E_l) *est que le normalisateur réduit* M_a *de a soit non vide pour tout* $a \in D$.

Ceci résulte immédiatement des lemmes 6 et 7.

COROLLAIRE 1. — *Pour que* $\mathcal{C}$ *soit une relation de préordre, il faut et il suffit que le normalisateur réduit* M_a *de a soit non vide pour tout* $a \in D$.

En effet, pour qu'une relation transitive soit une relation de préordre, il faut et il suffit qu'elle soit réflexive.

COROLLAIRE 2. — *Si le centre* Z *de* D *n'est pas vide, la relation* $\mathcal{C}$ *est une relation de préordre.*

Pour le voir, il suffit d'appliquer le corollaire 1 et le théorème 2.

COROLLAIRE 3. — *Si l'intérieur* I *de* D *coïncide avec* D, *la relation* $\mathcal{C}$ *est une relation de préordre.*

Ceci résulte du corollaire 1 et de la remarque 1 suivant le théorème 2.

Remarque 1. — $\mathcal{C}$ peut être une relation de préordre en dehors des cas signalés aux corollaires 2 et 3. En voici un exemple :

Exemple 7. — Soit, d'une part le groupe libre U à une infinité dénombrable

---

([27]) *Cf.* P. DUBREIL, *Algèbre*, 2e édition, Gauthier-Villars, 1953, chap. 3, § 6.

([28]) D'après la terminologie de J. RIGUET, *Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois* (*Bull. Soc. Math.*, t. 76, 1948, p. 127).

de générateurs u_i (i, entier relatif quelconque), d'autre part le semi-groupe à trois générateurs m, n, p, avec les relations définissantes $mn = nm$, $mp = pm$; formons leur produit libre et imposons les relations $mu_i = u_{i+1}m$ pour tout i et $nu_i = u_i n$, $pu_i = u_i p$ pour tout i. Les éléments du semi-groupe S ainsi défini sont représentables d'une manière unique sous la forme $m^\mu u[n, p]$, où μ est un entier positif ou nul, u est un élément quelconque de U et $[n, p]$ un mot (éventuellement vide) formé à l'aide des symboles n et p; le produit de deux éléments de S est donné par

$$m^\mu u[n, p]\, m^{\mu'} u'[n, p]' = m^{\mu+\mu'} u_{(-\mu')} u'[n, p][n, p]',$$

où $u_{(k)}$ désigne l'élément de U obtenu en ajoutant k, entier relatif, à l'indice de chacun des générateurs u_i. Désignons par D le sous-semi-groupe des éléments pour lesquels on a $\mu \neq 0$. On voit que le centre Z de D est vide et que son intérieur I est l'ensemble des éléments de la forme $m^\mu u$ (μ entier positif); on n'a donc pas $I = D$, Pourtant, la relation $\mathcal{C}$ est réflexive; en effet, le normalisateur réduit de l'élément $m^\mu u[n, p]$ de D n'est jamais vide car il contient l'élément $m^\mu u$.

Remarque 2. — La relation $\mathcal{C}$ n'est jamais *anti-réflexive*. En effet, pour tout $x \in I$, on a $x\mathcal{C}x$ puisque le normalisateur réduit de x contient x.

LEMME 8. — *Si les relations $a\mathcal{C}b$ et $b\mathcal{C}a$ sont vérifiées et si x et y sont deux éléments de* I *tels que l'on ait $xa = bx$ et $yb = ay$, on a*

$$yx \in M_a \qquad et \qquad xy \in M_b,$$

d'où résulte :

a. M_a *et* M_b *ne sont pas vides;*
b. $x \notin {}_{M_a}W, \qquad x \notin W_{M_b}, \qquad y \notin W_{M_a}, \qquad y \notin {}_{M_b}W$ (29).

Ceci résulte sans peine des égalités :

$$yxa = ybx = ayx \qquad \text{et} \qquad xyb = xay = bxy.$$

LEMME 9. — *S'il existe un élément x de* I *vérifiant l'égalité $xa = bx$ et si l'on a : soit M_a non vide avec $x \notin {}_{M_a}W$, soit M_b non vide avec $x \notin W_{M_b}$, les relations $a\mathcal{C}b$ et $b\mathcal{C}a$ sont vérifiées.*

En effet, on a d'abord $a\mathcal{C}b$ d'après l'hypothèse. Mais, on a aussi $b\mathcal{C}a$ car il existe $y \in I$ vérifiant :

Soit $yx \in M_a$, d'où $yxa = ayx$ qui entraîne $ybx = ayx$ et $yb = ay$;
Soit $xy \in M_b$, d'où $xyb = bxy$ qui entraîne $xyb = xay$ et $yb = ay$.

---

(29) ${}_M W$ *résidu à gauche* du complexe M, est l'ensemble des éléments u tels que l'on ait $M \cdot u = \emptyset$. De même, W_M, *résidu à droite* du complexe M, est l'ensemble des éléments v tels que l'on ait $M \cdot v = \emptyset$. *Cf.* DGI, p. 8. Ces résidus s'entendent relativement à I ou à D; nous ne précisons pas, car les deux conceptions sont équivalentes puisque I est unitaire.

Propriété 5. — *La condition nécessaire et suffisante pour que la relation* $\mathcal{C}$ *soit symétrique ou pour que l'ensemble* I_1 *vérifie la propriété* (I_l) *est que le normalisateur réduit* M_a *de* a *soit non vide et net dans* I *pour tout* $a \in D$ [30].

Supposons $\mathcal{C}$ symétrique et soit $a \in D$. Choisissons $x \in I$ et soit $b = \alpha_x(a)$. On a $a\mathcal{C}b$, donc aussi $b\mathcal{C}a$. D'après le lemme 8, M_a est non vide et l'on a $x \notin {}_{M_a}W$. L'élément x étant quelconque dans I, M_a est net à gauche dans I, donc aussi net à droite d'après le théorème 2.

Réciproquement, supposons M_a non vide et net dans I quel que soit $a \in D$. Si l'on a $a\mathcal{C}b$, il existe $x \in I$ avec $xa = bx$ et $x \notin {}_{M_a}W = \emptyset$. Par suite, d'après le lemme 9, on a aussi $b\mathcal{C}a$ et $\mathcal{C}$ est une relation symétrique.

La seconde partie de la propriété résulte du lemme 6.

Corollaire 1. — *Pour que* $\mathcal{C}$ *soit une relation d'équivalence, il faut et il suffit que le normalisateur réduit* M_a *de* a *soit non vide et net dans* I *pour tout* $a \in D$.

En effet, pour qu'une relation transitive et partout définie soit une relation d'équivalence, il faut et il suffit qu'elle soit symétrique [31].

Corollaire 2. — *Si le centre* Z *de* D *est non vide et net dans* I, *la relation* $\mathcal{C}$ *est une relation d'équivalence.*

En effet, cette condition implique que le normalisateur réduit de chaque élément a de D, qui contient Z, est non vide et net dans I.

Considérons maintenant la relation $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{-1}$ [32]. Naturellement, cette relation est aussi partout définie. En prenant comme ensemble E encore le semi-groupe D et comme ensemble Γ l'ensemble $I_1 \Cup I_2$, $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{-1}$ est la relation de Γ-conjugaison définie dans E.

Propriété 6. — *La relation* $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{-1}$ *est symétrique et l'ensemble* $I_1 \Cup I_2$ *vérifie la propriété* (I_2).

Ces deux affirmations, équivalentes d'après le lemme 6, résultent du fait que l'ensemble I_2 est l'ensemble des automorphismes inverses des automorphismes qui constituent l'ensemble I_1.

Propriété 7. — *La relation* $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{-1}$ *et la relation* $\mathcal{C}$ *sont simultanément réflexives, l'ensemble* $I_1 \Cup I_2$ *et l'ensemble* I_1 *vérifient simultanément la propriété* (E_l).

C'est une conséquence immédiate des définitions.

---

[30] Le complexe M est dit net à gauche si son résidu à gauche est vide, net à droite si son résidu à droite est vide, net s'il est net à droite et net à gauche. *Cf.* DGI, p. 8.

[31] Le corollaire 1 est aussi conséquence directe des propriétés 3, 4 et 5.

[32] C'est-à-dire la relation définie par $a\mathcal{C}\cup\mathcal{C}^{-1} \Leftrightarrow a\mathcal{C}b$ ou $b\mathcal{C}a$.

LEMME 10. — *Si les relations* $a\mathcal{C}b$, $a'\mathcal{C}b$ *et* $a\mathcal{C}a'$ *sont vérifiées et si* x, y, z *sont trois éléments de* I *tels que l'on ait* $xa = bx$, $ya' = by$ *et* $za = a'z$, *on a*

$$yz \equiv x({}_b\rho).$$

De $za = a'z$ et $ya' = by$, on déduit, en effet, $yza = ya'z$ et $ya'z = byz$. d'où $yza = byz$, ce qui, compte tenu de $xa = bx$, implique $yz \equiv x({}_b\rho)$.

LEMME 11. — *Si les éléments* x *et* y *de* I *vérifient les égalités* $xa = bx$ *et* $ya' = by$ *et s'il existe un élément* $z \in \mathrm{I}$ *tel que l'on ait* $yz \equiv x({}_b\rho)$, *les relations* $a\mathcal{C}b$, $a'\mathcal{C}b$ *et* $a\mathcal{C}a'$ sont *vérifiées.*

Il suffit d'établir la relation $a\mathcal{C}a'$. Or, de $xa = bx$ et de $yz \equiv x({}_b\rho)$, on déduit $yza = byz$, ce qui, en vertu de $ya' = by$, entraîne $yza = ya'z$, d'où $za = a'z$, par simplification à gauche par y.

PROPRIÉTÉ 8. — *La condition suivante est nécessaire et suffisante pour que la relation* $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{-1}$ *soit transitive ou pour que l'ensemble* $\mathrm{I}_1 \bigcup \mathrm{I}_2$ *vérifie la propriété* (F_l) : *quels que soient* $x \in \mathrm{I}$, $y \in \mathrm{I}$ *et* $b \in \mathrm{D}$, *il existe* $z \in \mathrm{I}$ *satisfaisant à*

$$yz \equiv x({}_b\rho) \quad ou \quad xz \equiv y({}_b\rho),$$

et $t \in \mathrm{I}$ *satisfaisant à*

$$tx \equiv y(\rho_b) \quad ou \quad ty \equiv x(\rho_b).$$

La condition est nécessaire : si la relation $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{-1}$ est transitive, $a\mathcal{C}b$ et $a'\mathcal{C}b$ (c'est-à-dire $b\mathcal{C}^{-1}a'$) doivent entraîner $a\mathcal{C}a'$ ou $a'\mathcal{C}a$ (c'est-à-dire $a\mathcal{C}^{-1}a'$); par suite, d'après le lemme 10, quels que soient $b \in \mathrm{D}$, $x \in \mathrm{I}$, $y \in \mathrm{I}$ [en prenant $a = \beta_x(b)$ et $a' = \beta_y(b)$], il doit exister $z \in \mathrm{I}$ satisfaisant à $yz \equiv x({}_b\rho)$ ou $xz \equiv y({}_b\rho)$; de plus, par symétrie, avec les mêmes hypothèses, il doit exister $t \in \mathrm{I}$ satisfaisant à $tx \equiv y(\rho_b)$ ou $ty \equiv x(\rho_b)$; enfin, la condition ainsi obtenue est également nécessaire pour que l'ensemble $\mathrm{I}_1 \bigcup \mathrm{I}_2$ vérifie la propriété (F_l) d'après le lemme 6.

La condition est suffisante : il suffit de montrer, d'après le lemme 6, qu'elle entraîne la transitivité de la relation $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{-1}$; or, si l'on a $a\mathcal{C}b$ et $b\mathcal{C}a'$, on en déduit $a\mathcal{C}a'$ puisque la relation $\mathcal{C}$ est transitive (propr. 3); si l'on a $a\mathcal{C}b$ et $a'\mathcal{C}b$ c'est-à-dire $b\mathcal{C}^{-1}a'$), on a aussi $a\mathcal{C}a'$ ou $a'\mathcal{C}a$ d'après le lemme 11 ; les deux autres cas se traitent d'une manière symétrique.

COROLLAIRE. — *La condition de la propriété* 8 *est une condition nécessaire et suffisante pour que la relation* $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{-1}$ *soit une relation d'équivalence.*

En effet, pour qu'une relation symétrique et partout définie soit une relation d'équivalence, il faut et il suffit qu'elle soit transitive.

Remarque. — Si la relation $\mathcal{C}$ est une relation d'équivalence, on a $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{-1}$, et par suite, $\mathcal{C} = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{-1}$; la relation $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{-1}$ est alors aussi une relation d'équivalence. On doit donc vérifier que la condition de la propriété 5 entraîne la condition de la propriété 8; en effet, on voit facilement qu'il suffit de remplacer dans celle-ci *ou* par *et* pour obtenir une condition équivalente à celle-là.

Théorème 3. — *Envisageons les propriétés suivantes :*

(1) *La relation $\mathcal{C}$ est symétrique;*
(2) *La relation $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{-1}$ est transitive;*
(3) *La relation $\mathcal{C}$ est réflexive;*
(1′) *L'ensemble I_1 est un groupe;*
(2′) *L'ensemble $I_1 \Cup I_2$ est un groupe;*
(3′) *L'ensemble I_1 contient l'automorphisme unité du semi-groupe* D.

Il existe, entre ces propriétés, les implications binaires suivantes et leurs conséquences logiques à l'exclusion de toute autre :

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3); \quad (1') \Rightarrow (2') \Rightarrow (3'); \quad (1') \Rightarrow (1); \quad (2') \Rightarrow (2); \quad (3') \Rightarrow (3).$$

On a déjà remarqué que la propriété (1) équivaut au fait que la relation $\mathcal{C}$ soit une équivalence (démonstration du corollaire 1 de la propriété 5) et la propriété (2) au fait que la relation $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{-1}$ soit une équivalence (démonstration du corollaire de la propriété 8); il en résulte que (1) entraîne (2) (*voir* la remarque suivant la propriété 8) et que (2) entraîne (3) (d'après la propriété 7).

L'implication $(1') \Rightarrow (2')$ résulte du fait que I_1 est un groupe si et seulement si l'on a $I_1 = I_2$ et l'implication $(2') \Rightarrow (3')$ du fait que, si $I_1 \Cup I_2$ contient l'automorphisme unité de D, il en est de même de I_1.

Les trois autres implications sont conséquences du lemme 6 [33].

Pour prouver que les implications binaires indiquées sont les seules, il suffit d'établir que l'on a :

$$(2') \not\Rightarrow (1); \quad (3') \not\Rightarrow (2); \quad (1) \not\Rightarrow (3').$$

C'est l'objet des contre-exemples suivants [34] :

Exemple 8. — Considérons le groupe libre abélien U à une infinité dénombrable de générateurs u_i (i entier relatif quelconque), puis son produit libre par le semi-groupe libre à un générateur m. Imposons les relations $mu_i = u_{i+1}m$ pour tout i. Nous obtenons un semi-groupe S dont les éléments s'écrivent d'une façon unique sous la forme $m^\mu u$ où μ est un entier positif ou nul et u un élément quelconque de U, la loi de composition étant la suivante :

$$m^\mu u m^{\mu'} u' = m^{\mu+\mu'} u_{(-\mu')} u'$$

où $u_{(h)}$ désigne l'élément de U déduit de u en ajoutant h, entier relatif quelconque,

---

[33] L'implication $(3') \Rightarrow (3)$ résulte aussi du fait que I_1 contient l'automorphisme unité de D si et seulement si Z est non vide et l'implication $(1') \Rightarrow (1)$ du fait que I_1 est un groupe si et seulement si Z est non vide et net dans I. Dans le même ordre d'idées, l'implication $(2') \Rightarrow (2)$ résulte (*voir* propr. 23) du fait que $I_1 \Cup I_2$ est un groupe si et seulement si l'on a la propriété suivante : Pour $x \in I$, $y \in I$, il existe $z \in I$ satisfaisant à $yz \equiv x(\Sigma)$ ou $xz \equiv y(\Sigma)$ et $t \in I$ satisfaisant à $tx \equiv y(\Sigma)$ ou $ty \equiv x(\Sigma)$, Σ étant l'équivalence d'application de l'homomorphisme de I sur I_1 défini par $x \to \alpha_x^{\cdot}$ (*cf.* DGI, p. 48).

[34] Chacun de ces contre-exemples a été choisi de façon que l'intérieur du semi-groupe considéré coïncide avec le semi-groupe. Si l'on n'avait pas tenu à cette condition, l'exemple 7 aurait pu remplacer l'exemple 10.

à l'indice de chacun des générateurs u_i. On a $\mathrm{I} = \mathrm{S}$; l'automorphisme α_m est défini par $\alpha_m(m) = m$, $\alpha_m(u_j) = u_{j+1}$ et l'automorphisme α_{u_i} est défini par $\alpha_{u_i}(m) = mu_{i-1}u_i^{-1}$, $\alpha_{u_i}(u_j) = u_j$; on en déduit que, d'une façon générale, l'automorphisme $\alpha_{m^\mu u}$ est défini par $\alpha_{m^\mu u}(m) = mu_{(\mu-1)}u_{(\mu)}^{-1}$, $\alpha_{m^\mu u}(u_j) = u_{j+\mu}$; de la même manière, l'automorphisme β_m est défini par $\beta_m(m) = m$, $\beta_m(u_j) = u_{j-1}$, l'automorphisme β_{u_i} est défini par $\beta_{u_i}(m) = mu_{i-1}^{-1}u_i$ et l'automorphisme $\beta_{m^\mu u}$ est défini par $\beta_{m^\mu u}(m) = mu_{(-1)}^{-1}u$, $\beta_{m^\mu u}(u_j) = u_{j-\mu}$. On voit que l'automorphisme produit $\gamma = \alpha_{m^\mu u}\beta_{m^{\mu'}u'}$ est défini par $\gamma(m) = mu_{(\mu-1)}u_{(\mu)}^{-1}u'^{-1}_{(\mu-1)}u'_{(\mu)}$, $\gamma(u_j) = u_{j+\mu-\mu'}$ et n'est autre que l'automorphisme α_x avec $x = m^{\mu-\mu'}u_{(\mu')}u'^{-1}_{(\mu')}$ si l'on a $\mu \geqq \mu'$ ou l'automorphisme β_y avec $y = m^{\mu'-\mu}u_{(\mu)}^{-1}u'_{(\mu)}$ si l'on a $\mu \leqq \mu'$; de la même manière, l'automorphisme produit $\gamma = \beta_{m^\mu u}\alpha_{m^{\mu'}u'}$ est défini par $y(m) = mu_{(-1)}^{-1}uu'_{(\mu'-\mu-1)}u'^{-1}_{(\mu'-\mu)}$, $\gamma(u_j) = u_{j+\mu'-\mu}$ et n'est autre que l'automorphisme β_x avec $x = m^{\mu-\mu'}uu_{(\mu'-\mu)}^{-1}$ si l'on a $\mu \geqq \mu'$ ou l'automorphisme α_y avec $y = m^{\mu'-\mu}u_{(\mu-\mu')}^{-1}u'$ si l'on a $\mu \leqq \mu'$. Par conséquent, l'ensemble d'automorphismes $\mathrm{I}_1 \bigcup \mathrm{I}_2$ est multiplicativement ferme et est un groupe. Cependant, la relation $\mathcal{C}$ n'est pas symétrique; on a, en effet, par exemple, $u_1 \mathcal{C} u_2$ d'après l'égalité $\alpha_m(u_1) = u_2$ et l'on n'a pas $u_2 \mathcal{C} u_1$ d'après l'égalité $\alpha_{m^\mu u}(u_2) = u_{2+\mu}$.

Exemple 9. — Soit U le groupe libre abélien à une infinité dénombrable de générateurs u_{ij} (i et j entiers relatifs quelconques) et soit L le semi-groupe libre abélien à deux générateurs m et n. Formons le produit libre de U et L et imposons les relations $mu_{ij} = u_{i+1\,j}m$, $nu_{ij} = u_{i\,j+1}n$ pour tout couple (i, j). Les éléments du semi-groupe S ainsi obtenu peuvent se mettre d'une façon unique sous la forme $m^\mu n^\nu u$, où μ et ν sont des entiers positifs ou nuls et u un élément de U, la multiplication étant définie par $m^\mu n^\nu u m^{\mu'} n^{\nu'} u' = m^{\mu+\mu'} n^{\nu+\nu'} u_{(-\mu',-\nu')} u'$ où $u_{(h,k)}$ (h et k entiers relatifs quelconques) est l'élément de U déduit de u en ajoutant h au premier indice et k au second indice de chaque générateur u_{ij}. On voit qu'on a $\mathrm{I} = \mathrm{S}$ et $\mathrm{Z} = \{e\}$, e étant l'élément unité de U. Le centre n'est donc pas vide, ce qui entraîne que I_1 contient l'automorphisme unité de S. D'autre part, la relation $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{-1}$ n'est pas transitive; en effet, on établit facilement les égalités $\alpha_{m^\mu n^\nu u}(u_{ij}) = u_{i+\mu\,j+\nu}$, $\beta_{m^\mu n^\nu u}(u_{ij}) = u_{i-\mu\,j-\nu}$; en particulier, on a $\alpha_m(u_{11}) = u_{21}$ et $\beta_n(u_{21}) = u_{20}$, d'où l'on déduit $u_{11} \mathcal{C} u_{21}$ et $u_{21} \mathcal{C}^{-1} u_{20}$; les relations $u_{11} \mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{-1} u_{21}$ et $u_{21} \mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{-1} u_{20}$ sont donc vérifiées sans qu'il en soit ainsi de la relation $u_{11} \mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{-1} u_{20}$.

Exemple 10. — Soit A le groupe additif des nombres dyadiques écrit sous forme multiplicative : A est l'ensemble des éléments a^α, où α est de la forme $\frac{k}{2^n}$ (k entier relatif quelconque et n entier positif ou nul) et l'on a $a^\alpha a^{\alpha'} = a^{\alpha+\alpha'}$. Considérons le produit libre de A par le semi-groupe libre à un générateur b et imposons les relations $ba^\alpha = a^{2\alpha}b$ pour tout α. On obtient un semi-groupe S dont les éléments s'écrivent d'une manière unique sous la forme $a^\alpha b^\beta$ avec β entier positif ou nul, le produit $a^\alpha b^\beta a^{\alpha'} b^{\beta'}$ étant égal à $a^{\alpha+2^\beta\alpha'} b^{\beta+\beta'}$. Prenons le sous-semi-groupe D des éléments vérifiant $\beta \neq 0$. On voit que l'on a $\mathrm{I} = \mathrm{D}$ et $\mathrm{Z} = \emptyset$ pour l'intérieur et le centre de D. En posant $x = a^\alpha b^\beta$ et $x' = a^{\alpha'} a^{\beta'}$, l'élément x'

appartient à $M_x = N_x$, normalisateur de x dans D, si et seulement si l'on a $\alpha + 2^\beta \alpha' = \alpha' + 2^{\beta'}\alpha$, c'est-à-dire $\alpha' = \alpha \frac{2^{\beta'} - 1}{2^\beta - 1}$; pour qu'il en soit ainsi, il faut choisir β' tel que $\alpha \frac{2^{\beta'} - 1}{2^\beta - 1}$ soit un nombre dyadique et prendre pour α' ce nombre dyadique; c'est possible, en particulier, en choisissant β' multiple de β. Donc, M_x est non vide quel que soit $x \in D$; de plus, M_x est net dans $l = D$ car, pour tout élément $a^{\alpha''} b^{\beta''} \in D$, on peut choisir $a^{\alpha'} b^{\beta'} \in M_x$ avec $\beta' > \beta''$ et il est alors possible de trouver $a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \in D$ tel que l'on ait $a^{\alpha_1} b^{\beta_1} a^{\alpha''} b^{\beta''} = a^{\alpha'} b^{\beta'}$. Par conséquent, $\mathcal{C}$ est symétrique et I_1 ne contient pas l'automorphisme unité de D.

Nous avons donc complètement démontré le théorème 3.

Dans le cas où la relation $\mathcal{C}$ est une équivalence, c'est l'équivalence de transitivité de l'ensemble I_1 (et aussi du groupe d'automorphismes engendré par I_1); dans le cas plus général où la relation $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{-1}$ est une relation d'équivalence, c'est l'équivalence de transitivité de l'ensemble $I_1 \bigcup I_2$ (et aussi, à nouveau, du groupe d'automorphismes engendré par I_1). Caractérisons d'une façon générale l'équivalence de transitivité du groupe d'automorphismes engendré par I_1.

Propriété 9. — *L'équivalence de transitivité du groupe* G *d'automorphismes de* D *engendré par le semi-groupe* I_1 *des automorphismes intérieurs de première catégorie est la fermeture symétrique et transitive* $\overline{\mathcal{C}}$ *de la relation de conjugaison* $\mathcal{C}$ *définie dans* D.

En effet, $\overline{\mathcal{C}}$, qui est la fermeture transitive de $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{-1}$, est l'équivalence définie dans D par $a \equiv b(\overline{\mathcal{C}}) \Leftrightarrow$ il existe une suite finie d'éléments de D, $d_1, d_2, \ldots, d_n$, tels que l'on ait $a = d_1$, $d_n = b$ et $d_i \mathcal{C} d_{i+1}$ ou $d_{i+1} \mathcal{C} d_i$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Or, on a

$$d_i \mathcal{C} d_{i+1} \Leftrightarrow \exists\, \alpha_x \in I_1 \text{ avec } d_{i+1} = \alpha_x(d_i);$$
$$d_{i+1} \mathcal{C} d_i \Leftrightarrow \exists\, \beta_x \in I_2 \text{ avec } d_{i+1} = \beta_x(d_i).$$

Les éléments de G étant les produits finis d'éléments de I_1 et I_2, on a bien

$$a \equiv b(\overline{\mathcal{C}}) \Leftrightarrow \exists\, \gamma \in G, \qquad \text{avec} \quad b = \gamma(a).$$

Remarque. — On sait que, dans un groupe ayant plus d'un élément, le groupe des automorphismes intérieurs est toujours intransitif (de même que n'importe quel groupe d'automorphismes). Dans un semi-groupe, il semble possible que l'équivalence de transitivité de G (et même celle de I_1 lorsque $\mathcal{C}$ est symétrique) soit l'équivalence absolue; il faut évidemment pour cela que le centre Z de D soit vide; il serait intéressant de donner un exemple (le groupe de tous les automorphismes du semi-groupe additif des nombres rationnels positifs est transitif).

Considérons maintenant la relation de conjugaison $\mathcal{C}_\pi$ définie dans l'ensemble E_π des complexes de D de puissance π. L'ensemble Γ étant toujours l'ensemble d'automorphismes I_1 (envisagé comme opérant dans E_π), $\mathcal{C}_\pi$ est la relation de Γ-conjugaison définie dans E_π; c'est une relation partout définie.

Lorsque $\mathcal{C}_\pi$ remplace $\mathcal{C}$, la propriété 3 reste valable; il en est de même de la propriété 4 et de ses corollaires 1 et 2; le corollaire 3 n'est plus valable (exemple 10 avec π quelconque inférieure ou égale à δ et supérieure à 1 : prendre pour complexe H l'ensemble $\{ab, ab^2, \ldots, ab^n\}$ pour $\pi = n$ ou l'ensemble $\{ab^k\}_{k\geq 1}$ pour $\pi = \delta$). La remarque 2 qui suit subsiste si π est inférieure ou égale à la puissance du dénombrable ou si l'on a $\pi = \delta$ (en effet, pour $x \in \mathrm{I}$, on a $\mathrm{H}\,\mathcal{C}^*\mathrm{H}$ si H ne contient que des puissances de x et, si x est d'ordre fini, Z est non vide; d'autre part, on a évidemment $\mathrm{D}\,\mathcal{C}^*\mathrm{D}$). La propriété 5 et ses corollaires s'étendent.

La relation $\mathcal{C}_\pi \cup \mathcal{C}_\pi^{-1}$ est la relation de Γ-conjugaison définie dans E_π, Γ étant l'ensemble $\mathrm{I}_1 \bigcup \mathrm{I}_2$; elle est partout définie. La propriété 6, la propriété 7, la propriété 8 et son corollaire restent valables, ainsi que le théorème 3, $\mathcal{C}_\pi \cup \mathcal{C}_\pi^{-1}$ remplaçant $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^{-1}$.

On voit aisément que les propriétés (1′), (2′), (3′) du théorème 3 sont respectivement équivalentes à celles que l'on obtient en supposant que les ensembles d'automorphismes I_1 et I_2 opèrent dans un ensemble E_π quelconque ($1 < \pi \leq \delta$). Il n'en est pas ainsi des propriétés (1), (2), (3); nous désignerons par (1_π), (2_π), (3_π) respectivement les propriétés analogues aux propriétés (1), (2), (3) concernant la relation $\mathcal{C}_\pi$ [35] [la non-équivalence est prouvée par l'exemple 10 qui vérifie (1), (2), (3) et qui ne vérifie ni (1_π), ni (2_π), ni (3_π), quel que soit $\pi > 1$]. Il existe certaines relations entre ces différentes propriétés :

a. On a $(1_\delta) \Rightarrow (1_\pi)$, $(2_\delta) \Rightarrow (2_\pi)$, $(3_\delta) \Rightarrow (3_\pi)$ pour tout $\pi < \delta$. Ceci résulte aisément du fait que le complémentaire dans D d'un complexe de puissance $\pi < \delta$ est un complexe de puissance δ et du fait qu'un automorphisme de D applique deux complexes complémentaires sur deux complexes complémentaires.

b. m et n étant deux puissances finies avec $m < n$, on a

$$(1_n) \Rightarrow (1_m),\ (3_n) \Rightarrow (3_m).$$

On établit ces deux implications en remarquant que, H étant un complexe *fini*, et x un élément de $\mathrm{N_H}$, il existe une puissance de x qui appartient à $\mathrm{C_H}$, d'où l'on déduit que, si $\mathrm{M_H}$ est non vide, il en est de même de $\mathrm{B_H}$ et, si, de plus, $\mathrm{M_H}$ est net dans I, il en est de même de $\mathrm{B_H}$; par conséquent, le fait que le normalisateur réduit de tout complexe de puissance n soit non vide (ou non vide et net dans I) entraîne la même propriété pour tout complexe de puissance $m < n$.

Un certain nombre d'autres questions, auxquelles la réponse est probablement négative, mériteraient d'être éclaircies :

a. **A-t-on** $(1_\delta) \Rightarrow (1')$, $(2_\delta) \Rightarrow (2')$, $(3_\delta) \Rightarrow (3')$ **?**

b. **A-t-on** $(1_m) \Rightarrow (1_{m+1})$, $(3_m) \Rightarrow (3_{m+1})$ **pour** $m > 1$ **[d'après l'exemple 10, on n'a pas** $(1_1) \Rightarrow (1_2)$, $(3_1) \Rightarrow (3_2)$**] ?**

c. **A-t-on** $(2_n) \Rightarrow (2_m)$ **pour** $m < n$, **et réciproquement ?**

d. **A-t-on** $(1_\pi) \Rightarrow (1_{\pi'})$, $(2_\pi) \Rightarrow (2_{\pi'})$, $(3_\pi) \Rightarrow (3_{\pi'})$, **quels que soient** π **et** π' **avec** $\pi' < \pi$ **?**

e. **A-t-on** (1_n) **pour tout** n **fini** $\Rightarrow (1_\delta)$, (2_n) **pour tout** n **fini** $\Rightarrow (2_\delta)$, (3_n) **pour tout** n **fini** $\Rightarrow (3_\delta)$ **?**

---

[35] Les propriétés (1), (2), (3) peuvent donc aussi s'écrire respectivement (1_1), (2_1), (3_1).

On pourrait envisager finalement la relation de conjugaison $\mathcal{C}^*$ définie dans l'ensemble E^* des parties de D et la relation $\mathcal{C}^* \cup \mathcal{C}^{*-1}$. Leurs propriétés résultent facilement de ce qui précède.

III. — Étude des complexes conjugués à droite (à gauche) d'un complexe H et de la relation d'équiconjugaison à droite (à gauche) de H.

Nous considérons un complexe H de D et les complexes conjugués à droite de H. Nous nous proposons d'étudier la relation d'équiconjugaison à droite ρ_H de H. D'après la définition 7, ρ_H est définie dans T_H; nous envisageons aussi sa trace, que nous notons également ρ_H par abus de notation, sur un sous-ensemble E de T_H qui pourra être I_d ou I.

Lemme 12. — *En présence de la relation* $x \in T_H$, *si l'on pose* $K = \alpha_x(H)$, *on a* $r \in T_K \Leftrightarrow rx \in T_H$.

On a, en effet, $xH = Kx$. Si r est élément de T_K, il existe un complexe L de D vérifiant l'égalité $rK = Lr$; on en déduit $rxH = rKx = Lrx$ et $rx \in T_H$. Réciproquement, si rx appartient à T_H, il existe $L \subseteq D$ tel que l'on ait $rxH = Lrx$, d'où résulte $rKx = Lrx$ et $rK = Lr$ puisque D est simplifiable à droite; par suite, on a aussi $r \in T_K$.

Propriété 10. — *Si les relations* $x \in T_H$, $y \in T_H$, $rx \in T_H$, $ry \in T_H$ *sont vérifiées, on a* $x \equiv y(\rho_H) \Leftrightarrow rx \equiv ry(\rho_H)$.

En effet, de $x \in T_H$, $y \in T_H$, $x \equiv y(\rho_H)$, résulte l'existence de $K \subseteq D$ vérifiant l'égalité $xH = Kx$ et l'égalité $yH = Ky$; de $rx \in T_H$, on déduit alors, d'après le lemme 12, $r \in T_K$, d'où l'existence de $L \subseteq D$ vérifiant l'égalité $rK = Lr$; ces égalités entraînent $rxH = rKx = Lrx$ et $ryH = rKy = Lry$, donc $rx \equiv ry(\rho_H)$. Réciproquement, les relations $x \in T_H$, $y \in T_H$, $rx \in T_H$, $ry \in T_H$ et $rx \equiv ry(\rho_H)$ entraînent l'existence de $K_1 \subseteq D$, $K_2 \subseteq D$, $L \subseteq D$ vérifiant les égalités $xH = K_1x$, $yH = K_2y$, $rxH = Lrx$, $ryH = Lry$; on en tire

$$rK_1x = rxH = Lrx, \qquad rK_2y = ryH = Lry, \qquad \text{d'où} \qquad rK_1 = Lr,\ rK_2 = Lr,$$

après simplification à droite par x et y respectivement, et $rK_1 = rK_2$, d'où $K_1 = K_2$, après simplification à gauche par r, ce qui implique $x \equiv y(\rho_H)$.

Théorème 4. — *L'équivalence* ρ_H *est régulière à gauche et simplifiable à gauche dans tout sous-semi-groupe de* D *contenu dans* T_H, *en particulier dans* I_d *et dans* I.

C'est une conséquence immédiate de la propriété 10.

Théorème 5. — *Les images de* H *par les applications* α_x, *quand* x *décrit un sous-ensemble* E *de* T, *correspondent biunivoquement aux classes de* E *modulo* ρ_H. *En particulier, les complexes conjugués à droite de* H *correspondent biunivoquement aux classes de* I *modulo* ρ_H.

En effet, à tout complexe K tel qu'il existe $x \in E$ pour lequel on ait $K = \alpha_x(H)$, faisons correspondre la classe de E modulo ρ_H constituée par les éléments $x \in E$ vérifiant l'égalité $xH = Kx$. Cette correspondance est évidemment une application biunivoque de l'ensemble des images de H par les applications α_x, x décrivant E, sur l'ensemble des classes de E modulo ρ_H.

Propriété 11. — *Si le sous-ensemble* $N_H \cap E$ *est non vide, il constitue une classe de* E *modulo* ρ_H. *En particulier, le normalisateur réduit de* H, *s'il n'est pas vide, constitue une classe de* I *modulo* ρ_H.

En effet, l'égalité $xH = Hx$ caractérise les éléments $x \in E$ qui satisfont à $x \in N_H \cap E$. Par suite, s'il existe un tel élément x, la relation $y \equiv x(\rho_H)$ est équivalente à la relation $y \in N_H \cap E$.

Remarque. — D'après la propriété 11 et le théorème 4, le normalisateur réduit de H, s'il est non vide, constitue une classe de I modulo une équivalence régulière à gauche et simplifiable à gauche. En appliquant le théorème 21 de DGI, on retrouve que ce complexe est fort dans I; le même théorème et le théorème symétrique montrent également à nouveau qu'il est unitaire dans I, donc dans D [*cf.* note (23)].

Propriété 12. — *Si* M_H *est non vide, on a toujours, entre les équivalences* ${}_{M_H}\mathcal{T}$, ρ_H, ${}_{M_H}\mathcal{R}$, *définies dans* I, *les relations*

$$ {}_{M_H}\mathcal{T} \leqq \rho_H \leqq {}_{M_H}\mathcal{R}. $$

En effet, soient $x \in I$, $y \in I$ et $x \equiv y({}_{M_H}\mathcal{T})$. Puisque M_H est réversible, il existe $u \in M_H$ et $v \in M_H$ vérifiant l'égalité $xu = yv$. Soit K le complexe de D tel que l'on ait $xH = Kx$. On peut écrire

$$ yHv = yvH = xuH = xHu = Kxu = Kyv, $$

d'où résulte $yH = Ky$ et, par suite, $x \equiv y(\rho_H)$.

Si l'on a maintenant $x \in I$, $y \in I$ et $x \equiv y(\rho_H)$, et s'il existe $q \in I$ tel que l'on ait $qx \in M_H$, on en déduit $qx \equiv qy(\rho_H)$, d'où $qy \in M_H$. On a donc $x \equiv y({}_{M_H}\mathcal{R})$ puisque M_H est fort dans I.

Remarque 1. — La propriété 12 est conséquence du théorème 37 de DGI si l'on remarque que ρ_H est une équivalence appartenant à la famille ${}_{M_H}\mathcal{E}'$.

Remarque 2. — Le complexe M_H ne suffit pas en général à déterminer l'équivalence ρ_H. En effet, on peut former un exemple dans lequel deux éléments distincts possèdent même normalisateur réduit (et, de plus, même normalisateur) tout en définissant dans I deux relations d'équiconjugaison différentes :

Exemple 11. — Soit U le groupe libre abélien à une infinité dénombrable de générateurs que l'on désigne par v_i et w_i, i étant un entier relatif quelconque; soit, d'autre part, S le semi-groupe libre abélien à deux générateurs m et n;

formons le produit libre de U et S et imposons les relations $mv_i = v_{i+2}m$, $nv_i = v_{i+1}n$, $mw_i = w_{i+1}m$, $nw_i = w_{i+2}n$. Les éléments du semi-groupe D ainsi obtenu peuvent se mettre d'une façon unique sous la forme $m^\mu n^\nu u$, où μ et ν sont des entiers positifs ou nuls et u un élément de U, la loi de composition étant donnée par $m^\mu n^\nu u m^{\mu'} n^{\nu'} u' = m^{\mu+\mu'} n^{\nu+\nu'} u_{(-\mu',-\nu')} u'$, où $u_{(h,k)}$ désigne l'élément de U obtenu à partir de u en ajoutant $2h+k$ à l'indice de chacun des générateurs v_i et $h+2k$ à l'indice de chacun des générateurs w_i. On a évidemment $\mathrm{I} = \mathrm{D}$ et $\mathrm{M}_{v_0} = \mathrm{M}_{w_0} = \mathrm{U}$; les équivalences ρ_{v_0} et ρ_{w_0} sont les suivantes :

$$m^\mu n^\nu u \equiv m^{\mu'} n^{\nu'} u' (\rho_{v_0}) \iff 2\mu + \nu = 2\mu' + \nu',$$
$$m^\mu n^\nu u \equiv m^{\mu'} n^{\nu'} u' (\rho_{w_0}) \iff \mu + 2\nu = \mu' + 2\nu'$$

et sont, par conséquent, distinctes, et même non comparables.

Remarque 3. — Les trois équivalences ${}_{\mathrm{M_H}}\mathcal{L}$, ρ_{H}, ${}_{\mathrm{M_H}}\mathcal{R}$ peuvent fort bien être deux à deux différentes. Il en est ainsi dans l'exemple 11, si l'on prend $\mathrm{H} = \{v_0\}$, puisque ${}_{\mathrm{M_H}}\mathcal{L}$ est plus fine et ${}_{\mathrm{M_H}}\mathcal{R}$ moins fine que les deux équivalences ρ_{v_0} et ρ_{w_0} qui sont non comparables; d'ailleurs, les équivalences ${}_{\mathrm{M_H}}\mathcal{L}$ et ${}_{\mathrm{M_H}}\mathcal{R}$ sont les suivantes :

$$m^\mu n^\nu u \equiv m^{\mu'} n^{\nu'} u' ({}_{\mathrm{M_H}}\mathcal{L}) \iff \mu = \mu' \quad \text{et} \quad \nu = \nu',$$
$$m^\mu n^\nu u \equiv m^{\mu'} n^{\nu'} u' ({}_{\mathrm{M_H}}\mathcal{R}) \iff \mu + \nu = \mu' + \nu' = 0 \quad \text{ou} \quad \mu + \nu \neq 0, \quad \mu' + \nu' \neq 0.$$

Remarque 4. — $\mathrm{M_H}$, s'il est non vide, étant un sous-semi-groupe réversible du semi-groupe I, l'équivalence ${}_{\mathrm{M_H}}\mathcal{L}$ est toujours régulière à gauche et simplifiable à gauche, d'après les théorèmes 31 et 38 de DGI. Par contre, l'équivalence ${}_{\mathrm{M_H}}\mathcal{R}$ n'est pas toujours simplifiable à gauche : dans l'exemple 11, avec $\mathrm{H} = \{v_0\}$, ${}_{\mathrm{M_H}}\mathcal{R}$ n'est pas simplifiable à gauche [on a $mm \equiv mv_0 ({}_{\mathrm{M_H}}\mathcal{R})$ et $m \not\equiv v_0 ({}_{\mathrm{M_H}}\mathcal{R})$].

Théorème 6. — *Si le normalisateur réduit* $\mathrm{M_H}$ *de* H *est un complexe net à gauche dans* I (*donc aussi net à droite*), *on a*

$${}_{\mathrm{M_H}}\mathcal{L} = \rho_{\mathrm{H}} = {}_{\mathrm{M_H}}\mathcal{R}.$$

C'est une conséquence immédiate du théorème 39*a* de DGI, compte tenu de la propriété 12.

Remarque. — D'après le théorème 39*a* de DGI, les traces des équivalences ${}_{\mathrm{M_H}}\mathcal{L}$, ρ_{H}, ${}_{\mathrm{M_H}}\mathcal{R}$ sur le complexe $\mathrm{I} - {}_{\mathrm{M_H}}\mathrm{W}$ (où ${}_{\mathrm{M_H}}\mathrm{W}$ désigne le résidu à gauche de $\mathrm{M_H}$ dans I) coïncident toujours.

Nous étudions maintenant à quelles conditions l'équivalence ρ_{H} est régulière à droite ou simplifiable à droite et l'équivalence ${}_{\mathrm{H}}\rho$ régulière à gauche ou simplifiable à gauche. Dans cette étude, les équivalences ρ_{H} et ${}_{\mathrm{H}}\rho$ sont considérées comme définies dans I.

Lemme 13. — *L'élément x étant donné dans* I *et* K *étant le complexe* $\alpha_x(\mathrm{H})$, *un élément y de* I *satisfait à* $y \equiv x(\rho_{\mathrm{H}})$ *si et seulement si il satisfait à* $y \equiv x({}_{\mathrm{K}}\rho)$. *Autrement dit*, K *étant un complexe conjugué à droite de* H, *les équivalences* ρ_{H} *et* ${}_{\mathrm{K}}\rho$ *ont une classe commune.*

En effet, on a $x\mathrm{H} = \mathrm{K}x$ et $y \equiv x(\rho_{\mathrm{H}})$ équivaut à $y\mathrm{H} = \mathrm{K}y$; mais cette égalité équivaut aussi à $y \equiv x({}_{\mathrm{K}}\rho)$.

Propriété 13. — *Les éléments r et x appartenant à* I, *on a :*

$$r \equiv rx(\rho_{\mathrm{H}}) \Longleftrightarrow x \in \mathrm{M_H},$$
$$r \equiv xr(\rho_{\mathrm{H}}) \Longleftrightarrow x \in \mathrm{M_K}, \qquad \textit{en posant} \quad \mathrm{K} = \alpha_r(\mathrm{H}).$$

Avec $\mathrm{K} = \alpha_r(\mathrm{H})$, on a $r \equiv rx(\rho_{\mathrm{H}})$ si et seulement si l'on a $rx\mathrm{H} = \mathrm{K}rx$, c'est-à-dire $rx\mathrm{H} = r\mathrm{H}x$, ou encore $x\mathrm{H} = \mathrm{H}x$, c'est-à-dire $x \in \mathrm{M_H}$. D'autre part, d'après le lemme 13, on a $r \equiv xr(\rho_{\mathrm{H}})$ si et seulement si l'on a $r \equiv xr({}_{\mathrm{K}}\rho)$ qui équivaut à $x \in \mathrm{M_K}$, en vertu de la première partie de la propriété 13 transformée par symétrie.

Propriété 14. — *Les éléments r, x et y appartenant à* I, *on a :*

$$rx \equiv ry(\rho_{\mathrm{H}}) \Longleftrightarrow x \equiv y(\rho_{\mathrm{H}}),$$
$$xr \equiv yr(\rho_{\mathrm{H}}) \Longleftrightarrow x \equiv y(\rho_{\mathrm{K}}), \qquad \textit{en posant} \quad \mathrm{K} = \alpha_r(\mathrm{H}).$$

La première partie de la propriété résulte directement de la propriété 10. D'autre part, d'après le lemme 13, en posant $\mathrm{L} = \alpha_x(\mathrm{K}) = \alpha_{xr}(\mathrm{H})$, on a $xr \equiv yr(\rho_{\mathrm{H}})$ si et seulement si l'on a $xr \equiv yr({}_{\mathrm{L}}\rho)$, ce qui est équivalent à $x \equiv y({}_{\mathrm{L}}\rho)$ d'après la propriété symétrique de la propriété 10 et à $x \equiv y(\rho_{\mathrm{K}})$ d'après le lemme 13.

Lemme 14. — *Pour tout automorphisme intérieur de première catégorie α_x et pour tout automorphisme intérieur de deuxième catégorie β_x, on a :*

$$\alpha_x(\mathrm{M_H}) = \mathrm{M}_{\alpha_x(\mathrm{H})}, \qquad \beta_x(\mathrm{M_H}) = \mathrm{M}_{\beta_x(\mathrm{H})}.$$

Ceci résulte du fait que α_x et β_x sont des automorphismes de D et du fait que ces automorphismes conservent I.

Propriété 15. — *Pour que l'on ait $x \in \mathrm{M_H} \Rightarrow r \equiv xr(\rho_{\mathrm{H}})$ pour tout $r \in \mathrm{I}$, il faut et il suffit que le sous-ensemble $\mathrm{M_H}$ soit contenu dans chacun de ses sous-ensembles conjugués à droite.*

C'est une conséquence de la propriété 13 et du lemme 14.

Propriété 16. — *Pour que l'on ait, quel que soit $r \in \mathrm{I}$, $r \equiv xr(\rho_{\mathrm{H}}) \Rightarrow x \in \mathrm{M_H}$, il faut et il suffit que le sous-ensemble $\mathrm{M_H}$ contienne chacun de ses sous-ensembles conjugués à droite.*

C'est encore une conséquence de la propriété 13 et du lemme 14.

Remarque. — En utilisant les automorphismes intérieurs de première et de deuxième catégories, on voit qu'il revient au même de dire que $\mathrm{M_H}$ est contenu dans (contient) chacun de ses complexes conjugués à droite ou qu'il contient (est contenu dans) chacun de ses complexes conjugués à gauche.

Compte tenu de cette remarque, en utilisant les résultats des propriétés 15 et 16 et des propriétés symétriques, on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME 7. — H *étant un complexe de* D, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a_1) $r \in I,\ x \in M_H \Rightarrow r \equiv xr(\rho_H)$;
(a_2) $r \in I,\ x \in I,\ r \equiv rx({}_H\rho) \Rightarrow x \in M_H$;
(a_3) M_H *est contenu dans chacun de ses sous-ensembles conjugués à droite;*
(a_4) M_H *contient chacun de ses sous-ensembles conjugués à gauche.*

Nous désignerons l'une quelconque de ces propriétés équivalentes par (a) et l'une quelconque des propriétés symétriques par (b). Nous verrons plus loin (exemple 12) que (a) et (b) sont des propriétés indépendantes.

PROPRIÉTÉ 17. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'équivalence* ρ_H *soit régulière à droite est qu'elle soit plus fine que l'équivalence* ρ_K *quel que soit* K, *complexe conjugué à droite de* H.

Ceci résulte de la propriété 14.

PROPRIÉTÉ 18. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'équivalence* ρ_H *soit simplifiable à droite est qu'elle soit moins fine que l'équivalence* ρ_K *quel que soit* K, *complexe conjugué à droite de* H.

Ceci résulte également de la propriété 14.

PROPRIÉTÉ 19. — *L'équivalence* ρ_H *est régulière à droite si et seulement si l'équivalence* ${}_H\rho$ *est simplifiable à gauche*

Supposons d'abord ρ_H régulière à droite et montrons que ${}_H\rho$ est alors simplifiable à gauche. Si l'on a $sz \equiv st({}_H\rho)$, désignons par K le complexe de D satisfaisant à $Hz = zK$ et par u l'élément de D satisfaisant à $sz = zu$. On a $u \in I$; soit $L \subseteq D$ vérifiant l'égalité $Ku = uL$. On peut écrire $Hzu = zKu = zuL$. Le complexe K étant un complexe conjugué à droite du complexe L, d'après l'hypothèse et la propriété 17, en utilisant l'automorphisme β_{zu}, on a $\rho_L \leqq \rho_K$. D'autre part, on peut écrire $Hsz = szL$; donc, d'après le lemme 13, l'hypothèse se traduit par $sz \equiv st(\rho_L)$, d'où l'on déduit $sz \equiv st(\rho_K)$. L'équivalence ρ_K étant simplifiable à gauche, il en résulte $z \equiv t(\rho_K)$ et, par suite, toujours d'après le lemme 13, $z \equiv t({}_H\rho)$.

Réciproquement, supposons ${}_H\rho$ simplifiable à gauche et montrons que ρ_H est régulière à droite. Soit r un élément quelconque de I et soient x et y deux éléments de I tels que l'on ait $x \equiv y(\rho_H)$. Désignons par K le complexe de D satisfaisant à $xH = Kx$ et par v l'élément de D satisfaisant à $xr = vx$. On a $v \in I$; soit $L \subseteq D$ vérifiant l'égalité $vK = Lv$. On peut écrire $vxH = vKx = Lvx$. Le complexe K étant un complexe conjugué à gauche du complexe L, d'après l'hypothèse et la propriété symétrique de la propriété 18, en utilisant l'automorphisme α_{vx}, on a ${}_{K}\rho \leqq {}_{L}\rho$. D'autre part, d'après le lemme 13, l'hypothèse se traduit par $x \equiv y({}_{K}\rho)$, d'où l'on déduit $x \equiv y({}_{L}\rho)$. L'équivalence ${}_{L}\rho$ étant régulière à droite, il en résulte $xr \equiv yr({}_{L}\rho)$. Finalement, on peut écrire $xr\mathrm{H} = \mathrm{L}xr$ et, par suite, toujours d'après le lemme 13, on $xr \equiv yr(\rho_{\mathrm{H}})$.

Remarque. — En utilisant les automorphismes intérieurs de première et de deuxième catégories, on voit que ρ_{H} est plus fine (moins fine) que chacune des équivalences ρ_{K} où K est un complexe conjugué à droite de H quelconque si et seulement si elle est moins fine (plus fine) que chacune des équivalences ρ_{L} où L est un complexe conjugué à gauche de H quelconque.

Des propriétés 17, 18, 19, de cette remarque et des résultats symétriques, on déduit le théorème suivant :

THÉORÈME 8. — H *étant un complexe de* D, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a'_1) ρ_{H} *est une équivalence régulière à droite;*
(a'_2) ${}_{\mathrm{H}}\rho$ *est une équivalence simplifiable à gauche;*
(a'_3) ρ_{H} *est plus fine que* ρ_{K} *quel que soit* K, *complexe conjugué à droite de* H;
(a'_4) ρ_{H} *est moins fine que* ρ_{K} *quel que soit* K, *complexe conjugué à gauche de* H;
(a'_5) ${}_{\mathrm{H}}\rho$ *est plus fine que* ${}_{\mathrm{K}}\rho$ *quel que soit* K, *complexe conjugué à droite de* H;
(a'_6) ${}_{\mathrm{H}}\rho$ *est moins fine que* ${}_{\mathrm{K}}\rho$ *quel que soit* K, *complexe conjugué à gauche de* H.

Nous désignerons l'une quelconque de ces propriétés équivalentes par (a') et l'une quelconque des propriétés symétriques par (b'). Nous verrons plus loin que (a') et (b') sont des propriétés indépendantes (exemple 12).

LEMME 15. — *Si une équivalence* $\mathcal{R}$ *définie dans* I *est régulière à droite et est plus fine que* ρ_{H}, *cette équivalence* $\mathcal{R}$ *est plus fine que* ρ_{K} *pour tout complexe* K *conjugué à droite de* H.

En effet, supposons qu'on ait $\mathrm{K} = \alpha_r(\mathrm{H})$ et $x \equiv y(\mathcal{R})$; $\mathcal{R}$ étant régulière à droite, on a aussi $xr \equiv yr(\mathcal{R})$; $\mathcal{R}$ étant plus fine que ρ_{H}, il en résulte $xr \equiv yr(\rho_{\mathrm{H}})$ qui équivaut à $x \equiv y(\rho_{\mathrm{K}})$ d'après la propriété 14.

LEMME 16. — *Si une équivalence* $\mathcal{R}$ *définie dans* I *est simplifiable à droite et est moins fine que* ρ_{H}, *cette équivalence* $\mathcal{R}$ *est moins fine que* ρ_{K} *pour tout complexe* K *conjugué à droite de* H.

En effet, supposons qu'on ait $\mathrm{K} = \alpha_r(\mathrm{H})$ et $x \equiv y(\rho_{\mathrm{K}})$; cette congruence est équivalente à $xr \equiv yr(\rho_{\mathrm{H}})$ d'après la propriété 14; on a donc $xr \equiv yr(\mathcal{R})$ puisque $\mathcal{R}$ est moins fine que ρ_{H} et il en résulte $x \equiv y(\mathcal{R})$ puisque $\mathcal{R}$ est simplifiable à droite.

Propriété 20. — *Si l'équivalence ρ_H est régulière à droite, la condition suivante est vérifiée :*

(a'') ${}_H\rho$ *est plus fine que* ρ_H.

Supposons ρ_H régulière à droite. Si l'on a $x \equiv y({}_H\rho)$, désignons par K le complexe $\beta_x(H)$. D'après le lemme 13, on a $x \equiv y(\rho_K)$. Mais, d'après l'hypothèse et la propriété 17, la relation $\rho_K \leqq \rho_H$ est vérifiée; on en déduit $x \equiv y(\rho_H)$ et, par suite, ${}_H\rho \leqq \rho_H$.

Propriété 21. — *Si la condition (a'') est vérifiée, il en est de même de la condition suivante (a''') qui peut se mettre sous deux formes équivalentes :*

(a'''_1) ${}_H\rho$ *est plus fine que* ρ_K *pour tout complexe* K *conjugué à droite de* H.

(a'''_2) ρ_H *est moins fine que* ${}_K\rho$ *pour tout complexe* K *conjugué à gauche de* H.

L'équivalence ${}_H\rho$ étant régulière à droite, d'après le théorème symétrique du théorème 4, et plus fine que ρ_H en vertu de la condition (a''), la condition (a''') résulte immédiatement du lemme 15.

Propriété 22. — *La condition (a''') entraîne la condition (a).*

En effet, si M_H est vide, la condition (a) est trivialement vérifiée. Sinon, M_H est un sous-semi-groupe de I qui constitue une classe modulo ${}_H\rho$; d'après la condition (a'''), il est contenu dans une classe modulo ρ_K quel que soit K, complexe conjugué à droite de H; la condition (a) est alors vérifiée [sous la forme (a_3)] d'après le lemme suivant :

Lemme 17. — K *étant un complexe de* D, *si un sous-semi-groupe* S *de* I *est contenu dans une classe modulo* ρ_K, *cette classe ne peut être que* M_K.

Soit x un élément de S; on a $x^2 \in S$ et, par suite, d'après l'hypothèse, $x \equiv x^2(\rho_K)$; il en résulte $x \in M_K$, en vertu de la propriété 13.

Les propriétés 20, 21, 22 montrent qu'on a, entre les conditions (a), (a'), (a''), (a''') les implications $(a') \Rightarrow (a'') \Rightarrow (a''') \Rightarrow (a)$. Nous verrons (ex. 13) que la condition (a) n'entraîne pas la condition (a''') [36].

Étudions les conditions auto-symétriques déduites des précédentes. Nous avons les théorèmes suivants :

Théorème 9. — H *étant un complexe de* D, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

$(a_1 + b_2)$ $r \in I,\ x \in M_H \Leftrightarrow r \in I,\ x \in I,\ r \equiv xr(\rho_H)$;

$(a_2 + b_1)$ $r \in I,\ x \in M_H \Leftrightarrow r \in I,\ x \in I,\ r \equiv rx({}_H\rho)$;

$(a_3 + b_3)$ M_H *coïncide avec chacun de ses sous-ensembles conjugués à droite;*

---

[36] Il semble aussi que (a'') soit strictement plus faible que (a') et que (a''') soit strictement plus faible que (a''). Mais je n'ai pu construire des contre-exemples qui puissent le montrer.

$(a_4 + b_4)$ M_H *coïncide avec chacun de ses sous-ensembles conjugués à gauche.*

Théorème 10. — H *étant un complexe de* D, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

$(a'_1 + b'_2)$ ρ_H *est une équivalence régulière et simplifiable ;*
$(a'_2 + b'_1)$ ${}_H\rho$ *est une équivalence régulière et simplifiable;*
$(a'_3 + b'_6)$ ρ_H *coïncide avec* ρ_K *pour tout complexe* K *conjugué à droite de* H;
$(a'_4 + b'_5)$ ρ_H *coïncide avec* ρ_K *pour tout complexe* K *conjugué à gauche de* H;
$(a'_5 + b'_4)$ ${}_H\rho$ *coïncide avec* ${}_K\rho$ *pour tout complexe* K *conjugué à droite de* H;
$(a'_6 + b'_3)$ ${}_H\rho$ *coïncide avec* ${}_K\rho$ *pour tout complexe* K *conjugué à gauche de* H;
$(a'' + b'')$ ${}_H\rho$ et ρ_H *coïncident;*
$(a''' + b''')$ ${}_H\rho$ *est plus fine que* ρ_K *pour tout complexe* K *conjugué à droite de* H *et* ρ_H *est plus fine que* ${}_K\rho$ *pour tout complexe* K *conjugué à gauche de* H;
(a_1^{iv}) ${}_H\rho$ *est moins fine que* ρ_K *pour tout complexe* K *conjugué à gauche de* H;
(b_1^{iv}) ρ_H *est moins fine que* ${}_K\rho$ *pour tout complexe* K *conjugué à droite de* H;
(a_2^{iv}) ρ_H *est plus fine qne* ${}_K\rho$ *pour tout complexe* K *conjugué à droite de* H;
(b_2^{iv}) ${}_H\rho$ *est plus fine que* ρ_K *pour tout complexe* K *conjugué à gauche de* H.

Le théorème 9 résulte immédiatement du théorème 7.

D'après le théorème 8, les six premières conditions du théorème 10 sont équivalentes; elles impliquent ${}_H\rho = \rho_H$ en vertu de la propriété 20 et de la propriété symétrique et $\rho_H = \rho_K (= {}_H\rho = {}_K\rho)$ pour tout complexe K conjugué à gauche ou à droite de H; elles entraînent donc les six dernières conditions.

La seconde partie de la condition $(a''' + b''')$ entraîne par automorphisme que ${}_H\rho$ est moins fine que ρ_K pour tout complexe K conjugué à droite de H; compte tenu de la première partie, $(a''' + b''')$ entraîne donc ${}_H\rho = \rho_K$, si bien que ρ_K ne dépend pas de K; on en déduit par automorphisme que $(a'_3 + b'_6)$, par exemple, est alors vérifiée. D'après la propriété 21, $(a'' + b'')$ est aussi équivalente aux conditions précédentes.

Les conditions (a_1^{iv}) et (a_2^{iv}) sont équivalentes par automorphisme et symétriques respectivement des conditions (b_1^{iv}) et (b_2^{iv}). La condition (a_2^{iv}), par exemple, entraîne (a'_3) donc (a''); en effet, si l'on a $x \equiv y(\rho_H)$, on en déduit $x \equiv y(\rho_K)$ pour tout complexe K conjugué à droite de H car cette dernière congruence équivaut, d'après le lemme 13, à $x \equiv y({}_L\rho)$, en posant $L = \alpha_x(K)$ et ceci est réalisé puisque L est un complexe conjugué à droite de H. D'autre part, la condition (a_1^{iv}) entraîne, d'après le lemme 16, la condition (b''), puisque ${}_H\rho$ est simplifiable à droite, moins fine que ρ_K et que H est un complexe conjugué à droite de K. Les quatre dernières conditions du thèorème 10, entraînant $(a''+b'')$, sont équivalentes aux précédentes.

Nous désignerons par $(a+b)$ l'une quelconque des conditions du théorème 9 et par $(a'+b')$ l'une quelconque des conditions du théorème 10. Naturellement, $(a'+b')$ entraîne $(a+b)$; nous verrons que la réciproque est inexacte (ex. 12).

Théorème 11. — *Si l'intérieur* I *de* D *est un semi-groupe abélien, on a* ${}_{\mathrm{H}}\rho = \rho_{\mathrm{H}}$ *pour tout complexe* H *de* D *et* $\rho_{\mathrm{H}} = \rho_{\mathrm{K}} (= {}_{\mathrm{H}}\rho = {}_{\mathrm{K}}\rho)$, $\mathrm{M}_{\mathrm{H}} = \mathrm{M}_{\mathrm{K}}$ *pour tout complexe* K *conjugué à droite ou à gauche de* H.

Ceci résulte du fait que ρ_{H}, qui est toujours régulière à gauche et simplifiable à gauche d'après le théorème 4, est régulière et simplifiable si I est abélien; les conditions $(a'+b')$ et $(a+b)$ sont alors vérifiées.

Théorème 12. — *Si le normalisateur réduit* M_{H} *d'un complexe* H *de* D *est non vide et net dans* I, *les conditions* (a), (a'), (a''), (a'''), (b), (b'), (b''), (b''') *sont toutes vérifiées ou toutes en défaut.*

En effet, dans cette hypothèse, on a $\rho_{\mathrm{H}} = {}_{\mathrm{M_H}}\mathcal{R}$, d'après le théorème 6. Par suite, si la condition (a) est vérifiée, pour tout complexe K conjugué à droite de H, de $\mathrm{M}_{\mathrm{H}} \subseteq \mathrm{M}_{\mathrm{K}}$, on déduit $\rho_{\mathrm{H}} = {}_{\mathrm{M_H}}\mathcal{R} \leqq {}_{\mathrm{M_K}}\mathcal{R} = \rho_{\mathrm{K}}$. Mais, en vertu du lemme 9 adapté à la famille des complexes de D ayant même puissance que H, le complexe K est également conjugué à gauche de H et l'on a $\mathrm{M}_{\mathrm{K}} \subseteq \mathrm{M}_{\mathrm{H}}$ et $\rho_{\mathrm{K}} \leqq \rho_{\mathrm{H}}$. On en déduit $\rho_{\mathrm{H}} = \rho_{\mathrm{K}}$; donc, la condition $(a'+b')$ est vérifiée. Il en est de même, par symétrie, si la condition (b) est vérifiée. Chacune des huit conditions considérées entraînant (a) ou (b), le théorème 12 est démontré.

Contre-exemples. — Les deux exemples suivants montrent, d'une part, que la condition (b') n'entraîne pas la condition (a), d'autre part, que la condition $(a+b)$ peut être vérifiée sans que l'une ou l'autre des conditions (a''') et (b''') soit vérifiée.

Exemple 12. — Considérons, d'une part, le semi-groupe S de l'exemple 10, d'autre part, le semi-groupe libre abélien U à une infinité dénombrable de générateurs u_i, i étant un entier relatif quelconque. Formons leur produit libre et imposons les relations $bu_i = u_{i+1}b$ et $u_i a^{2^i} = a^{2^i} u_i$ pour tout i. Nous obtenons un semi-groupe D dont les éléments peuvent se mettre d'une manière unique sous la forme $a^{\alpha_0} u_{i_1} a^{\alpha_1} u_{i_2} a^{\alpha_2} \ldots u_{i_n} a^{\alpha_n} b^{\beta}$ (n entier positif ou nul; β entier positif ou nul; pour tout $r = 0, 1, 2, \ldots, n$, α_r nombre dyadique avec $|\alpha_r| < 2^{i_r}$). L'intérieur I de D est l'ensemble des éléments de la forme $a^{\alpha} b^{\beta}$. Envisageons l'élément u_0 de D; les éléments conjugués à droite de u_0 sont les éléments de la forme $a^{\alpha} u_i a^{-\alpha}$ (avec $|\alpha| < 2^i$) pour lesquels on a $i \geqq 0$; les éléments conjugués à gauche de u_0 sont les éléments de la forme $a^{\alpha} u_i a^{-\alpha}$ pour lesquels on a $i \leqq 0$. L'équivalence ρ_x pour $x = a^{\alpha} u_i a^{-\alpha}$ est $a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \equiv a^{\alpha_2} b^{\beta_2} (\rho_x) \Leftrightarrow \beta_1 = \beta_2$ et $\alpha_1 \equiv \alpha_2 (2^{\beta_1 + i})$; l'équivalence ${}_x\rho$ est $a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \equiv a^{\alpha_2} b^{\beta_2} ({}_x\rho) \Leftrightarrow \beta_1 = \beta_2$ et $\alpha_1 \equiv \alpha_2 (2^i)$. Le normalisateur réduit de l'élément x est l'ensemble des a^{α} pour lesquels on a $\alpha \equiv 0 (2^i)$. On voit que la condition (b') est vérifiée et que la condition (a) est en défaut.

Exemple 13. — Soit U le groupe libre abélien à une infinité dénombrable de générateurs u_{ij}, où i et j sont des entiers relatifs quelconques. Considérons l'holomorphie H de U et identifions chaque élément u de U à l'élément de H qui est l'application biunivoque de U sur U définie par $x \rightarrow ux$; U peut alors être considéré comme un sous-groupe de H. Envisageons, parmi les automorphismes de U, les automorphismes $a_{k,l}$ (k et l entiers relatifs satisfaisant à $k+l>0$) définis par $u_{ij} \rightarrow u_{i+k\, j+l}$ et les automorphismes $b_{k,l}$ (k et l entiers relatifs satisfaisant à $k+l>0$) définis par $u_{ij} \rightarrow u_{j+k\, i+l}$. Ces automorphismes constituent un semi-groupe dans lequel on a les relations (1) suivantes :

$$a_{k,l}a_{k',l'} = a_{k+k',l+l'} = a_{k',l'}a_{k,l},$$
$$a_{k,l}b_{k',l'} = b_{k+k',l+l'} = b_{k',l'}a_{l,k} = b_{k+k'-l,l+l'-k}a_{k,l} = a_{l,k}b_{k+k'-l,l+l'-k},$$
$$b_{k,l}b_{k',l'} = a_{k+l',l+k'} = b_{k+l'-l,l+k'-k}b_{k,l} = b_{k',l'}b_{l+k'-l',k+l'-k'};$$

nous adjoignons à ce semi-groupe l'automorphisme unité e et nous désignons par c l'un quelconque des automorphismes $a_{k,l}$, $b_{k,l}$, e. Soit D le sous-semi-groupe de H engendré par U et les automorphismes c. D'après les propriétés de H, les éléments de D s'écrivent d'une manière unique sous la forme uc et l'on a la relation (2) :

$$cu = c(u)c,$$

$c(u)$ désignant le transformé de u par c. L'intérieur I de D est D lui-même; en effet, les éléments de U, qui sont inversibles, appartiennent à I et il en est de même des automorphismes $a_{k,l}$ et $b_{k,l}$ d'après les relations (1) et (2). Considérons l'élément u_{00} de D; les éléments conjugués à droite de u_{00} sont u_{00} et les éléments u_{ij} avec $i+j>0$; les éléments conjngués à gauche de u_{00} sont u_{00} et les éléments u_{ij} avec $i+j<0$. L'équivalence ρ_x pour $x = u_{ij}$ est

$$uc \equiv u'c'(\rho_x) \Longleftrightarrow c = c' \quad \text{ou} \quad \{c, c'\} = \{a_{k,l}, b_{k',l'}\} \quad \text{avec} \quad k' = i-j+k, \quad l' = j-i+l;$$

l'équivalence ${}_x\rho$ est

$$uc \equiv u'c'({}_x\rho) \Longleftrightarrow c = c' \quad \text{ou} \quad \{c, c'\} = \{a_{k,l}, b_{k',l'}\} \quad \text{avec} \quad l' = j-i+k, \quad k' = i-j+l.$$

Le normalisateur (réduit) de l'élément u_{ij} est U. Par suite, les propriétés (a) et (b) sont vérifiées alors qu'il n'en est pas ainsi des propriétés (a''') et (b''').

La propriété suivante, de démonstration évidente, rattache l'équivalence Σ [37] aux équivalences ρ_H :

Propriété. 23. — *L'équivalence* Σ *définie dans* I *est l'intersection des équivalences* ρ_H *quand* H *décrit l'ensemble des complexes de* D, *et aussi l'intersection des équivalences* ρ_a *quand* a *décrit* D. *Dans* $I_1 = \frac{I}{\Sigma}$, *l'équivalence quotient* $\frac{\rho_H}{\Sigma}$ *est régulière à gauche et simplifiable à gauche.*

---

[37] *Cf.* DGI, p. 48. La définition de Σ est rappelée à la note [33].

IV. — Automorphismes intérieurs généralisés.

Nous considérons toujours un semi-groupe D. Nous associons à D un semi-groupe D^* défini de la façon suivante : si D possède un élément unité, D^* coïncide avec D; sinon, D^* s'obtient à partir de D en lui adjoignant un élément unité. Nous désignons par e l'élément unité de D^*.

Définition 11. — Nous dirons que quatre éléments x, y, z, t de D^*, donnés dans un certain ordre, forment un *quadruple automorphisant* de D si la relation $xay = zbt$ admet une solution $b \in D\,(a \in D)$ pour tout $a \in D\,(b \in D)$ et si l'application biunivoque de D sur D définie par $a \to b$ est un automorphisme de D.

Un tel automorphisme sera appelé un *automorphisme intérieur généralisé* de D. Deux quadruples automorphisants seront dits équivalents s'ils définissent le même automorphisme intérieur généralisé.

Les automorphismes intérieurs de première et de deuxième catégories sont des automorphismes intérieurs généralisés. Pour un automorphisme intérieur de première catégorie, on a

$$x = t = r \in I, \qquad y = z = e;$$

pour un automorphisme intérieur de deuxième catégorie, on a

$$x = t = e, \qquad y = z = r \in I.$$

Mais, nous verrons plus loin (ex. 14) qu'il existe des automorphismes intérieurs généralisés qui ne sont pas des automorphismes intérieurs de première ou de deuxième catégorie.

Théorème 13. — *Les automorphismes intérieurs généralisés d'un semi-groupe* D *forment un groupe* G'.

En effet, soient x, y, z, t et x', y', z', t' deux quadruples automorphisants de D; les relations $xay = zbt$ et $x'by' = z'ct'$ définissent des automorphismes $a \to b$ et $b \to c$ de D. L'application $a \to c$ est un automorphisme de D; montrons que cet automorphisme peut être défini par un certain quadruple automorphisant. Si x' appartient à D, on peut trouver un élément $m \in D$ vérifiant l'égalité $xmy = zx't$; si l'on a $x' = e \notin D$, on posera $m = e$. De même, si y' appartient à D, on peut trouver un élément $n \in D$ vérifiant l'égalité $xny = zy't$; si l'on a $y' = e \notin D$, on posera $n = e$. Les éléments m et n satisfont toujours à l'égalité $xmany = zx'by't$, quels que soient a et b liés par $xay = zbt$. La relation $x'by' = z'ct'$ entraîne alors $xmany = zz'ct't$; cette dernière égalité admet une solution $c \in D\,(a \in D)$ quel que soit $a \in D$ $(c \in D)$; il en résulte, puisque l'application $a \to c$ est un automorphisme de D, que les quatre éléments xm, ny, zz', $t't$ forment un quadruple automorphisant qui définit cet automorphisme. D'autre part, si les éléments x, y, z, t forment un quadruple automorphisant qui définit un certain automorphisme, les éléments z, t, x, y, forment aussi un quadruple automorphisant qui définit l'automorphisme inverse. Donc, l'ensemble des automorphismes intérieurs généralisés est un groupe G'.

Remarque. — Le groupe G' contient évidemment le groupe G engendré par le semi-groupe I_1 des automorphismes intérieurs de première catégorie. Mais, on n'a pas nécessairement $G' = G$ comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 14. — Considérons le semi-groupe à quatre générateurs m, n, p, q, avec les relations définissantes $mn = nm$, $mp = p^2m$, $mq = q^2m$, $np = q^2n$, $nq = p^2n$, $pq = qp$. Ses éléments se mettent d'une manière unique sous la forme $p^\alpha q^\beta m^\mu n^\nu$ où α, β, μ, ν sont des entiers positifs ou nuls non tous nuls, la loi de composition étant donnée par

$$p^\alpha q^\beta m^\mu n^\nu p^{\alpha'} q^{\beta'} m^{\mu'} n^{\nu'} = p^{\alpha+\alpha'.2^{\mu+\nu}} q^{\beta+\beta'.2^{\mu+\nu}} m^{\mu+\mu'} n^{\nu+\nu'} \quad \text{si } \nu \text{ est pair,}$$
$$p^\alpha q^\beta m^\mu n^\nu p^{\alpha'} q^{\beta'} m^{\mu'} n^{\nu'} = p^{\alpha+\beta'.2^{\mu+\nu}} q^{\beta+\alpha'.2^{\mu+\nu}} m^{\mu+\mu'} n^{\nu+\nu'} \quad \text{si } \nu \text{ est impair.}$$

Adjoignons un élément unité; nous obtenons un semi-groupe D dont l'intérieur se réduit à l'élément unité et dont, par suite, le seul automorphisme intérieur de première (ou de deuxième) catégorie est l'automorphisme unité. Le grouqe G ne contient donc que l'automorphisme unité, alors que le quadruple automorphisant constitué par les éléments m, n, n, m définit un autre automorphisme par $m \to m$, $n \to n$, $p \to q$, $q \to p$.

Propriété 24. — *Pour que les quatre éléments* x, y, z, t *de* D^* *constituent un quadruple automorphisant de* D, *il est nécessaire qu'on ait les relations* $xDy = zDt$ *et* $xy = zt$.

La condition $xDy = zDt$ traduit le fait que l'égalité $xay = zbt$ doit être résoluble en b quel que soit a, en a quel que soit b.

La condition $xy = zt$, évidente si D possède un élément unité, peut se démontrer dans le cas général de la manière suivante : Soit a un élément quelconque de D, b l'élément de D qui lui correspond dans l'automorphisme défini par le quadruple automorphisant considéré; si l'on a $x \in D$, soit u l'élément de D satisfaisant à $xxy = zut$, et si l'on a $x = e \notin D$, posons $u = e$; de même, si l'on a $y \in D$, soit v l'élément de D satisfaisant à $xyy = zvt$, et si l'on a $y = e \notin D$, posons $v = e$. On peut écrire, d'une part, $xayaxay = zbtazbt$, d'autre part, $xayaxay = zbvbubt$; on en déduit $zbtazbt = zbvbubt$, d'où, par simplification, $taz = vbu$. Par conséquent, les quatre éléments t, z, v, u forment un quadruple automorphisant équivalent à celui que forment les quatre éléments x, y, z, t. Si l'on a $z \notin D$, soit r l'élément de D satisfaisant à $xzy = zrt$; sinon, posons $r = e$; de même si l'on a $t \in D$, soit s l'élément de D satisfaisant à $xty = zst$; sinon, posons $s = e$. On peut écrire

$$taztaz = vbuvbu \qquad \text{et} \qquad taztaz = vbrsbu,$$

d'où résulte $vbuvbu = vbrsbu$ et $uv = rs$. Transformons cette égalité par l'automorphisme inverse de l'automorphisme de D^* obtenu en prolongeant l'automorphisme $a \to b$ de D par $e \to e$; nous avons alors l'égalité $xy = zt$.

PROPRIÉTÉ 25. — *Les conditions* $x\mathrm{D}y = z\mathrm{D}t$ *et* $xy = zt$ *sont suffisantes pour que les quatre éléments* x, y, z, t *forment un quadruple automorphisant si l'un au moins de ces éléments est* e. *L'automorphisme ainsi défini est alors l'automorphisme unité ou un automorphisme intérieur de première ou de deuxième catégorie.*

On peut supposer qu'on a $x = e$ ou $y = e$; en effet, si l'on a $z = e$ ou $t = e$, on prendra les éléments z, t, x, y qui définissent l'automorphisme inverse de l'automorphisme considéré.

Si l'on a $x = e$, d'après les hypothèses, la relation $azt = zbt$, qui équivaut à $az = zb$, est résoluble en b quel que soit a, en a quel que soit b, dans D; elle définit donc un automorphisme intérieur de deuxième catégorie si l'on a $z \in \mathrm{D}$, l'automorphisme unité si l'on a $z = e$.

Si l'on a $y = e$, on voit de même que la relation $zta = zbt$, équivalente à $ta = bt$, définit un automorphisme intérieur de première catégorie ou l'automorphisme unité.

PROPRIÉTÉ 26. — *Si le semi-groupe* D *est immersible dans un groupe, quatre éléments* x, y, z, t *de* D *vérifiant les conditions* $x\mathrm{D}y = z\mathrm{D}t$ *et* $xy = zt$ *forment un quadruple automorphisant.*

En effet, plongeons D dans un groupe et désignons par $\bar{d}$ l'inverse d'un élément d quelconque de D. Nous devons établir que les égalités $xay = zbt$ et $xa'y = zb't$ entraînent l'égalité $xaa'y = zbb't$. On a $\bar{y}\bar{x} = \bar{t}\bar{z}$; par suite, on peut écrire $xay\bar{y}\bar{x}xa'y = zbt\bar{t}\bar{z}zb't$, ce qui se réduit à l'égalité cherchée.

Remarque. — Si D n'est pas immersible dans un groupe, la propriété précédente peut être en défaut comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 15. — Prenons pour D le semi-groupe à quatre générateurs, m, n, p, q, avec les relations définissantes

$$mn = nm, \quad pq = qp, \quad mp^{\alpha}n = np^{\alpha}m, \quad mq^{\beta}n = nq^{\beta}m, \quad mp^{\alpha}q^{\beta}n = np^{\beta}q^{\alpha}m \quad \text{si l'on a } \alpha\beta \neq 0.$$

Les éléments de D peuvent se mettre d'une façon unique sous la forme

$$p^{\alpha_1}q^{\beta_1}np^{\alpha_2}p^{\beta_2}n \ldots p^{\alpha_i}q^{\beta_i}np^{\gamma_0}q^{\delta_0}mp^{\gamma_1}q^{\delta_1}m \ldots p^{\gamma_j}q^{\delta_j}$$

où $i, j, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_i. \beta_i, \gamma_0, \delta_0, \gamma_1, \delta_1, \ldots, \gamma_j, \delta_j$ sont des entiers positifs ou nuls avec $i + j + \gamma_0 + \delta_0$ positif.

L'application $a \to b$ définie par $man = nbm$ est une application biunivoque de D sur D et l'on a $mn = nm$; pourtant, cette application n'est pas un automorphisme de D.

Comme application de ce qui précède, nous envisagerons le problème suivant : x, y, z, t étant des éléments de $\mathrm{D}^{\star}$, ou plus spécialement de D, à quelles conditions l'application $ydx \to tdz$ où d décrit D peut-elle être prolongée à un automorphisme de D? Soit $a \to b$ un automorphisme supposé répondant à la question;

nous pouvons déterminer de deux façons différentes le transformé de l'élément $ydxaydx$ de D par cet automorphisme : d'une part, ce transformé doit être égal à $tdxaydz$ en utilisant l'application donnée et, d'autre part, il doit être égal à $tdzbtdz$ puisque le transformé de ydx est tdz et celui de a est b ; on a donc nécessairement l'égalité $xay = zbt$, d'après la règle de simplification. Par suite, l'automorphisme cherché doit être un automorphisme intérieur généralisé et les éléments x, y, z, t doivent former un quadruple automorphisant. Le problème n'est possible que si l'on a $x\mathrm{D}y = z\mathrm{D}t$ et $xy = zt$; ces conditions sont suffisantes si D est immersible dans un groupe ou si un des éléments x, y, z, t au moins est égal à e ; il n'en est pas ainsi dans le cas général (ex. 15 dans lequel on prend l'application $ndm \rightarrow mdn$).