BULLETIN DE LA S. M. F.

F. JONGMANS

Étude des périodes des formes harmoniques

Bulletin de la S. M. F., tome 83 (1955), p. 89-102
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1955__83__89_0>

Bull. Soc. math. France,
83, 1955, p. 89 à 102.

ÉTUDE DES PÉRIODES DES FORMES HARMONIQUES ;

PAR F. JONGMANS,

Associé du F. N. R. S. (Liège).

Les périodes des formes extérieures fermées partout régulières sur une variété kählérienne compacte jouissent de propriétés analogues à celles mises en lumière depuis longtemps dans le cas des formes de première espèce attachées aux variétés algébriques. Dans une étude récente [8], Hodge obtenait le premier plusieurs de ces propriétés. De notre côté, dès nos premiers contacts avec la théorie de de Rham et la thèse de Guggenheimer, nous avons également tenté [9], dans l'ignorance de l'article de Hodge et non sans quelque confusion, d'étendre à la géométrie kählérienne quelques faits connus de la géométrie algébrique; il nous paraît opportun de revenir sur cette tentative et de la mettre en relation avec les raisonnements de Hodge, en même temps que nous simplifions et amplifions ces derniers.

1. Nous reprenons essentiellement la terminologie et les notations d'Eckmann et de Guggenheimer [5], [6], avec quelques nouvelles tirées de [10]. Précisons qu'une forme extérieure douée d'une classe sera dite *simple*, qu'une forme à la fois simple et pure sera dite *primaire*, que l'indice de classe est mis en position inférieure, l'indice de type en position inférieure et entre parenthèses. Par exemple, $\varphi^p_{(h)k}$ désigne une forme primaire de degré p, type h et classe k, partout régulière sur la variété kählérienne considérée V_{2m}; $\Phi^p_{(h)k}$ est l'espace de ces $\varphi^p_{(h)k}$. $H^p_{(h)k}$ le sous-espace de $\Phi^p_{(h)k}$ composé des seules formes harmoniques, $b^p_{(h)k}$ le rang de $H^p_{(h)k}$.

Le premier résultat acquis dans [8] est que *chaque $b^p_{(h)k}$ est indépendant de la métrique kählérienne utilisée pour l'étude de V_{2m}*, ou qu'il est, pour reprendre l'expression de Hodge, un invariant de la structure complexe de V_{2m}. Nous rappelons ce résultat à seule fin d'en donner une preuve plus simple. En raison des relations connues $b^p_{(h)k}=b^{p-2}_{(h-1)k-1}$ et $b^p_{(h)0}=b^p_{(h)}-b^{p-2}_{(h-1)}$, il suffit de prouver l'invariance des $b^p_{(h)}$ quand la métrique kählérienne originaire est remplacée par une autre. Or, soit $\varphi^p_{(h)}$ une forme de type h harmonique par rapport à l'ancienne métrique; par les théorèmes de de Rham, elle est homologue à une et une seule forme ψ^p non nulle harmonique par rapport à la nouvelle métrique : $\varphi^p_{(h)}=\psi^p+d\theta^{p-1}$. En formant le produit scalaire, au sens de la seconde métrique, de $\varphi^p_{(h)}$ ou de ψ^p par une forme harmonique relativement à cette métrique, on obtient le même résultat, vu l'orthogonalité de $d\theta^{p-1}$ avec toute forme harmonique. Si donc $\varphi^p = \sum \psi^p_{(k)}$ est la décomposition de ψ^p en ses composantes pures, on a, pour $h \neq l$,

$$o = (\varphi^p_{(h)}, \psi^p_{(l)}) = (\psi^p, \psi^p_{(l)}) = (\psi^p_{(l)}, \psi^p_{(l)}), \qquad \text{donc} \quad \psi^p_{(l)} = o.$$

En d'autres termes, l'application $\varphi^p_{(h)} \to \psi^p = \psi^p_{(h)}$ est un isomorphisme de $H^p_{(h)}$ sur l'espace de même nom relatif à la seconde métrique : de là l'invariance du rang de $H^p_{(h)}$.

Par la formule $b^p_k = \sum_{h=k}^{p-k} b^p_{(h)k}$, on conclut aussi à l'invariance des b^p_k.

2. On connaît l'opérateur de dualité D [5] qui applique isomorphiquement H^p sur le groupe d'homologie complexe ${}^{(2m-p)}H$ d'indice $2m-p$ de V_{2m} (¹). L'opérateur $D\bigstar$ induit donc un isomorphisme de H^p sur ${}^pH$; on dit qu'un p-cycle est simple et de classe k, ou pur et de type h, si sa classe d'homologie contient l'image par $D\bigstar$ d'une forme de H^p_k ou de $H^p_{(h)}$. Si Ω est la forme quadratique extérieure associée à la métrique kählérienne considérée, nous notons, après Eckmann, $Z_{2m-2q} = D\Omega^{[q]}$; en particulier, $Z_{2m-2} = D\Omega$ est le *cycle principal.* Hodge étudie spécialement les variétés kählériennes dites *restreintes*, pour lesquelles le cycle principal est proportionnel à un cycle entier. Le facteur de proportionnalité est réel (²) et peut être introduit dans les coefficients de la métrique de manière à rendre Z_{2m-2} entier; c'est ce que nous supposerons dans la suite. Chaque $Z_{2m-2q} = Z_{2m-2q+2} \circ Z_{2m-2}$ ($\circ$ symbole d'intersection) est entier à son tour. Hodge établit alors que *sur toute variété kählérienne restreinte, les p-cycles de classe k admettent une base entière.* La preuve de Hodge peut être très légèrement simplifiée, mais nous n'y reviendrons pas, car cette proposition ne nous est pas essentielle.

3. Venons-en à l'examen des périodes des formes attachées à la variété V_{2m}, restreinte ou non. Soient φ^p, ψ^p_k deux formes harmoniques de degré $p \leq m$, dont la seconde est au surplus de classe k. Par la formule de réciprocité entre les opérateurs $\bigstar$ et C [10],

$$(3.1) \qquad (\varphi^p, \psi^p_k) = \int_{V_{2m}} \varphi^p \bigstar \psi^p_k = a_{p-2k,k} \int_{V_{2m}} \varphi^p L^{m-p} C\psi^p_k = a_{p-2k,k} \mathrm{KI}[D\varphi^p \circ DC\psi^p_k \circ Z_{2p}],$$

où

$$a_{p-2k,k} = (-1)^{\binom{m}{2}+\binom{p+1}{2}+k} \frac{k!}{(m-p+k)!}$$

et KI désigne l'indice de Kronecker d'une chaîne de dimension nulle. Introdui-

(¹) Il est entendu une fois pour toutes que nous parlons toujours d'homologie à coefficients complexes.

(²) Il est imaginaire pur pour Hodge, qui ne prend pas Ω réelle comme Eckmann et Guggenheimer, mais imaginaire pure.

sons une base d'homologie $\{\mathcal{C}^u\}$ pour la dimension $2m-p$, et posons

(3.2) $$D\varphi^p \sim \sum \pi_u \mathcal{C}^u, \qquad DC\psi_k^p \sim \sum \tilde{\theta}_u \mathcal{C}^u,$$

(3.3) $$A^{uv} = (-1)^k a_{p-2k,k} \mathrm{KI}[\mathcal{C}^u \circ \mathcal{C}^v \circ Z_{2p}].$$

(3.1) devient alors

(3.4) $$(\varphi^p, \psi_k^p) = (-1)^k \sum_{u,v=1}^{b_p} A^{uv} \pi_u \tilde{\theta}_v.$$

Pour obtenir une interprétation des π_u, $\tilde{\theta}_v$, nous devons encore nous donner une base d'homologie $\{\Gamma^u\}$ pour la dimension p. De toute évidence, il est possible de choisir après coup les $\mathcal{C}^u$ de manière que $\mathrm{KI}[\mathcal{C}^u \circ \Gamma^v] = \delta_{uv}$, symbole classique de Kronecker; de plus, si $\{\Gamma^u\}$ est une base entière, le calcul des $\mathcal{C}^u$ à partir d'une base entière quelconque pour la dimension $2m-p$ montre que les $\mathcal{C}^u$ sont rationnels ([3]). Adoptons la base $\{\mathcal{C}^u\}$ ainsi formée, que nous dirons *conjuguée* à $\{\Gamma^u\}$; nous déduisons de (3.2)

$$\pi_u = \mathrm{KI}[D\varphi^p \circ \Gamma^u] = \int_{\Gamma^u} \varphi^p, \qquad \tilde{\theta}_u = \mathrm{KI}[DC\psi_k^p \circ \Gamma^u] = \int_{\Gamma^u} C\psi_k^p,$$

ce qui, d'après (3.4), donne le théorème :

(3.5) *$\{\Gamma^u\}$ étant une base d'homologie de V_{2m} pour la dimension $p \leq m$,*

$$(\varphi^p, \psi_k^p) = (-1^k) \sum_{u,v=1}^{b_p} A^{uv} \pi_u \tilde{\theta}_v,$$

où les π_u sont les périodes de φ^p sur les Γ^u, $\tilde{\theta}_u$ celles de $C\psi^p$, et où A^{uv} s'exprime au moyen de (3.3) en fonction de la base $\{\mathcal{C}^u\}$ conjugué à $\{\Gamma^u\}$. Si $\{\Gamma^u\}$ est entière, $\{\mathcal{C}^u\}$ est rationnelle; si de plus V_{2m} est variété kählérienne restreinte, les A^{uv} sont rationnels.

En particulier,

$$(\varphi_k^p, C\varphi_k^p) = (-1)^{p+k} \sum A^{uv} \pi_u \bar{\pi}_v.$$

Pour substituer les périodes θ_u de ψ_k^p à celles de $C\psi_k^p$, il n'est que de supposer ψ_k^p primaire, de type h : $\tilde{\theta}_u = (-1)^k i^p \bar{\theta}_u$, pourvu que la base $\{\Gamma^u\}$ soit réelle. Dès lors :

(3.6) *Les périodes π_u, θ_u de φ^p et $\psi_{(h)k}^p$ relatives aux cycles Γ^u d'une base réelle d'homologie vérifient la relation*

$$(\varphi^p, \psi_{(h)k}^p) = i^p (-1)^{h+k} \sum_{u,v=1}^{b_p} A^{uv} \pi_u \bar{\theta}_v,$$

dans laquelle les A^{uv} donnés par (3.3) sont réels et liés par $A^{uv} = (-1)^p A^{vu}$.

([3]) Ils sont même entiers si la base $\{\Gamma^u\}$ est fondamentale [4].

En particulier, si $\varphi^p_{(h)k} \neq 0$,

$$i^p(-1)^{h+k}\sum A^{uv}\pi_u\bar{\pi}_v = (\varphi^p_{(h)k}, \varphi^p_{(h)p}) \text{ réel} > 0.$$

4. Des faits précédents découlent aussi bien les propriétés trouvées par Hodge que celles de notre article [9]. Revenons d'abord sur le contenu de celui-ci. Si nous utilisons une forme $\varphi^p_{(h)k}$ non nulle, et si nous observons que $(\varphi^p_{(h)k}, C\varphi^p_{(h)k})$ est nul chaque fois que les types h et $p-h$ des deux facteurs sont différents, donc chaque fois que $2h \neq p$, nous tirons de (3.5) et (3.6)

$$\sum A^{uv}\pi_u\pi_v = 0, \qquad \sum A^{uv}\pi_u\bar{\pi}_v = i^p(-1)^{h+k}a \quad (a \text{ réel positif}).$$

(4.1) *Ainsi, les périodes* π_u *de toute forme harmonique primaire non nulle, relativement aux cycles d'une base réelle d'homologie, ne sont pas toutes réelles ni toutes imaginaires pures, excepté si le degré est double du type; à la réserve de ce dernier cas, une forme harmonique primaire est bien déterminée par les parties réelles (ou par les parties imaginaires pures) de ses périodes.*

Le cas exceptionnel se présente effectivement; d'une manière plus précise, $\sum A^{uv}\pi_u\pi_v$ *peut être non nul lorsque* $p=2h$, *et ce, pour toute variété kählérienne compacte.* Pour avoir $(\varphi^{2h}_{(h)k}, C\varphi^{2h}_{(h)k}) \neq 0$, il suffit en effet que

$$C\varphi^{2h}_{(h)k} = \pm\varphi^{2h}_{(h)k} \neq 0,$$

en d'autres termes que $\varphi^{2h}_{(h)k}$ soit réelle ou imaginaire pure; les périodes π_u sont alors toutes réelles ou toutes imaginaires pures. Or, il existe toujours une forme non nulle répondant à cette exigence, à savoir $\Omega^{[h]}$. Quant à la dernière partie de l'énoncé (4.1), elle est également en défaut pour $p=2h$, puisque les périodes de $\varphi^{2h}_{(h)h}$ et de $\varphi^{2h}_{(h)h}+\Omega^{[h]}$ ont les mêmes parties imaginaires.

La proposition (4.1) se complète par la suivante [9] :

(4.2) *Les périodes* π_u *d'une forme harmonique* $\varphi^p_{(h)k}$ *de degré* $p \neq 2h$, *relativement à une base réelle d'homologie, sont liées par* $b^p - 2b^p_{(h)k}$ *équations linéaires distinctes à coefficients réels indépendants du choix de* $\varphi^p_{(h)k}$ *dans* $H^p_{(h)k}$. *Les parties réelles (resp. imaginaires pures) des* π_u, *qui sont évidemment liées par ces mêmes équations, peuvent par ailleurs être prises arbitrairement.*

L'introduction d'une base $\{\beta^{(v)}_{(h)k}\}$ de $H^p_{(h)k}$ $(v=1, \ldots, b^p_{(h)k})$ rend la preuve presque immédiate. Soient $\pi_{vu} = \theta_{vu} + i\rho_{vu}$ les périodes de $\beta^{(v)}_{(h)k}$; si

$$\varphi^p_{(h)k} = \sum_v r_v\beta^{(v)}_{(h)k}, \qquad \text{avec} \quad r_v = s_v + it_v,$$

les parties réelles θ_u des périodes π_u valent

$$\theta_u = \sum_v (s_v\theta_{vu} - t_v\rho_{vu}).$$

Comment d'ailleurs les θ_u ne s'annulent tous que par l'annulation de $\varphi^p_{(h)k}$, c'est-à-dire des r_v, la matrice à b^p lignes

$$(\theta_u \quad \theta_{1u} \quad \rho_{1u} \quad \theta_{2u} \quad \rho_{2u} \quad \ldots \quad \rho_{b^p_{(h)k}u}) \qquad (u=1, \ldots, b^p)$$

est de rang $2b^p_{(h)k}$. En annulant tous ses mineurs d'ordre maximum $2b^p_{(h)k}+1$, on obtient $b^p - 2b^p_{(h)k}$ équations linéaires en les θ_u, visiblement indépendantes; aucune autre restriction ne peut être imposée au choix des nombres réels θ_u. Les coefficients sont réels et dépendent exclusivement, pour une variété hählérienne donnée, du choix de la base $\{\beta^{(v)}_{(h)k}\}$ et de la base réelle d'homologie $\{\Gamma^u\}$. Les mêmes équations lient aussi les coefficients de i dans les π_u, car ils sont les parties réelles des périodes de $-i\varphi^p_{(h)k}$. Il s'ensuit que les π_u eux-mêmes vérifient ces équations.

5. Rentrons maintenant dans la ligne de la Note [8] de Hodge. Les considérations de notre n° 3 nous paraissent fournir la voie la plus naturelle pour conduire aux résultats des n^{os} 7 et 8 de cette Note. Il est clair que la $b^p_{(h)k}$-matrice carrée hermitienne $B_{(h)k}$ des $(\beta^{(u)}_{(h)k}, \beta^{(v)}_{(h)k})$ est définie positive, puisque sa forme hermitienne associée est le carré scalaire d'un élément de $H^p_{(h)k}$; mais la matrice des $(\beta^{(u)}_{(h)k}, \beta^{(v)}_{(l)k})$, $h \neq l$, est nulle. Si donc A désigne la b^p-matrice carrée des A^{uv}, $P_{(h)k}$ la matrice des périodes π_{vu} des $\beta^{(v)}_{(h)k}$ relatives aux Γ^u, et si nous posons

$$P_k = \begin{pmatrix} P_{(k)k} \\ P_{(k+1)k} \\ \vdots \\ P_{(p-k)k} \end{pmatrix}, \qquad B_k = \begin{pmatrix} B_{(k)k} & & & 0 \\ & -B_{(k+1)k} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & (-1)^p B_{(p-k)k} \end{pmatrix},$$

nous vérifions aisément que :

(5.1) *L'énoncé* (3.6) *est équivalent à la relation matricielle*

$$i^p P_k A \bar{P}'_k = B_k.$$

Celle-ci revêt une forme un peu plus générale que les résultats des n^{os} 7 et 8 de [8]. La présentation de Hodge revient à composer la base $\{\Gamma^u\}$ en rassemblant les bases entières qui, d'après le n° 2, existent pour les cycles de chaque classe sur une variété restreinte. La matrice A acquiert dans ce cas la structure

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_q \end{pmatrix},$$

où chaque A_k est b^p_k-carrée et où $q = \left[\frac{p}{2}\right]$; de plus, P_k n'a d'éléments non nuls que dans les b^p_k colonnes de mêmes indices que les colonnes de A_k dans A. En remplaçant dans (5.1) P_k par ces seules colonnes et A par A_k, on obtient les relations matricielles du type écrit par Hodge.

Si l'on veut écrire un résultat analogue à (5.1) et qui englobe toutes les classes, il faut éliminer des A^{uv} les facteurs dépendant de k, c'est-à-dire poser.

$$\mathfrak{A} = \frac{(m-p+k)!}{k!}\mathrm{A}, \qquad \mathfrak{B}_k = \frac{k!}{(m-p+k)!}\mathrm{B}_k,$$

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_0 & & & 0 \\ & \mathfrak{B}_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathfrak{B}_q \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}_0 \\ \mathrm{P}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{P}_q \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } q = \left[\frac{p}{2}\right].$$

Avec ces notations (*), et en tenant compte dans (3.6) du fait que $(\varphi^p_{(h)k}, \varphi^p_{(l)j}) = 0$ si $j \neq k$, on parvient à l'énoncé :

(5.2) *La b^p-matrice carrée* P *des périodes d'une base primaire de* H^p *relativement à une base réelle d'homologie vérifie la relation*

$$i^p \mathrm{P}\mathfrak{A}\overline{\mathrm{P}}' = \mathfrak{B},$$

d'où résulte notamment que $\mathfrak{A}$ (*partant* A) *et* P *ne sont pas singulières.*

Dans le cas particulier $p = 1$, toutes les formes sont effectives ($k = 0$); nous pouvons prendre pour formes de base de type 1 les transformées par C des formes de base de type zéro, ce qui donne $\mathrm{P}_{(1)0} = i\overline{\mathrm{P}}_{(0)0}$, $\mathrm{B}_{(1)0} = \overline{\mathrm{B}}_{(0)0}$ et réduit (5.1) ou (5.2) à

$$i\begin{pmatrix} \mathrm{P}_{(0)0} \\ \overline{\mathrm{P}}_{(0)0} \end{pmatrix} \mathrm{A} \left(\overline{\mathrm{P}'_{(0)0}} \quad \mathrm{P}'_{(0)0}\right) = \begin{pmatrix} \mathrm{B}_{(0)0} & 0 \\ 0 & -\overline{\mathrm{B}}_{(0)0} \end{pmatrix}.$$

Donc (Hodge) $\mathrm{P}_{(0)0}$ *est une matrice de Riemann quand la matrice antisymétrique* A *est rationnelle, notamment quand la variété kählérienne* V_{2m} *est restreinte et que la base d'homologie est entière.*

6. **Matrices de Hodge.** — Ces résultats soulèvent un intéressant problème d'algèbre. Les matrices P_k ou P se présentent comme une généralisation, dans un sens différent de la généralisation due à M. H. Weyl et Albert (*cf.* [3], chap. VIII, § 13), des matrices de Riemann classiques. Elles participent vraisemblablement à de nombreuses propriétés de ces dernières; déjà Hodge a pu obtenir [7, § 50], sous des conditions un peu limitatives, un « théorème de Poincaré » sur la décomposition en matrices « pures ». Il serait désirable de replacer ce théorème dans un cadre plus vaste, celui d'une théorie proprement algébrique qui recouvre largement la théorie des matrices de Riemann. Développer en détail cette idée nous mènerait trop loin ; contentons-nous pour l'instant de proposer quelques définitions et d'en déduire les premières conséquences, spécialement le théorème de Poincaré avec le minimum de restrictions. Les notations n'auront ici aucun rapport avec celles des paragraphes précédents.

Nous adoptons, au moins provisoirement, la définition suivante des matrices de

(*) Si les éléments de $\mathfrak{A}$ sont notés $\mathfrak{A}^{uv}$, les périodes de toute forme harmonique de degré $p = 2q$ et dépourvue de composante pure de type q vérifient, d'après le n°, 4 la relation $\Sigma\mathfrak{A}^{uv}\pi_u\pi_v = 0$; pour une forme de degré impair, la relation est triviale en raison de l'antisymétrie de $\mathfrak{A}$.

Hodge, qui admettent comme cas particuliers les matrices P de (5.2), et plus spécialement les « matrices carrées de Riemann » $\begin{pmatrix} \omega \\ \overline{\omega} \end{pmatrix}$, où ω désigne une matrice de Riemann classique.

Définition 6.1. — Une *matrice de Hodge* M est carrée, d'ordre m positif quelconque, à éléments complexes. Ses lignes sont réparties en deux catégories, celle des *lignes d'espèce positive* ou $(+)$ *lignes* et celle des *lignes d'espèce négative* ou $(-)$ *lignes*. Une de ces catégories peut être vide. La matrice formée par un ensemble de lignes d'espèce positive (resp. négative) sera dite une *tranche positive* (resp. négative). Nous supposons de plus l'existence d'un entier a et d'une m-matrice carrée *réelle* A tels que $A' = (-1)^a A$ et que, pour toute tranche positive P et toute tranche négative N non vides de M :

1° $i^a \mathrm{PA}\overline{\mathrm{P}}'$ soit une matrice hermitienne définie positive;

2° $i^a \mathrm{NA}\overline{\mathrm{N}}'$ soit une matrice hermitienne définie négative;

3° $\mathrm{PA}\overline{\mathrm{N}}' = 0$ (et par suite $\mathrm{NA}\overline{\mathrm{P}}' = 0$).

a est appelé un *indice principal*, A une *matrice principale* de M. Un cas particulier remarquable, parce que réalisé dans les matrices de Riemann, est celui où M admet une matrice principale rationnelle; nous dirons alors que M est une matrice de Hodge *restreinte*.

Cette définition appelle quelques commentaires. Tout d'abord, il est clair qu'on peut se borner à énoncer les conditions 1°, 2°, 3° pour la tranche positive totale M^+ et la tranche négative totale M^- de M; si d'ailleurs M^+ (resp. M^-) est vide, les clauses 1° et 3° (resp. 2° et 3°) sont à négliger. En second lieu, la portée de la définition n'est pas modifiée si l'on permute de façon quelconque les lignes de M, pourvu que chaque ligne déplacée emporte avec elle son caractère $(+)$ ou $(-)$; on peut, en particulier, séparer les deux tranches totales en amenant par exemple en tête toutes les $(+)$ lignes; M est alors dite *tranchée*. Enfin, la théorie ne souffre pas si l'on remplace la condition $A' = (-1)^a A$ par $A' = \pm A$ sans souci de a; mais nous nous sommes tenu à la convention dictée par la géométrie kählérienne.

Le nombre m^+ des $(+)$ lignes et celui m^- des $(-)$ lignes forment la *signature* (m^+, m^-) de M. Précisément, (m^+, m^-) est la signature de Sylvester [1] de la matrice hermitienne $i^a \mathrm{MA}\overline{\mathrm{M}}'$. Comme $m^+ + m^- = m$, celle-ci est non singulière, donc *les matrices de Hodge et leurs matrices principales sont non singulières*.

Si M est une matrice de Hodge, G une m-matrice carrée réelle non singulière, F une m-matrice carrée complexe non singulière dont les colonnes de mêmes indices que les $(+)$ lignes de M ont des éléments nuls aux intersections avec m^- lignes arbitraires, et les autres colonnes des éléments nuls aux intersections avec les m^+ autres lignes, FMG est une matrice de Hodge de même signature et même indice principal que M, avec une matrice principale égale à $G^{-1}A(G^{-1})'$. Si de

---

(1) Nous empruntons ce terme à Hodge. D'autres auteurs, dont Albert [2], appellent m^+ l'index, m^- la signature de la matrice hermitienne.

plus M est restreinte et G rationnelle, FMG est restreinte. D'après cela, deux matrices de Hodge M, $\mathfrak{M}$ de même signature (m^+, m^-) et même indice principal sont dites *isomorphes* s'il existe une relation $\mathfrak{M} = \mathrm{FMG}$, où G est une matrice carrée réelle (rationnelle si M et $\mathfrak{M}$ sont restreintes) et F une matrice carrée complexe qui compose la tranche positive (resp. négative) totale de $\mathfrak{M}$ au moyen de la tranche positive (resp. négative) totale de M; cette dernière condition signifie que tout élément de F dont les ligne et colonne correspondent respectivement à des lignes de $\mathfrak{M}$ et M d'espèces différentes est nul. Par exemple, si M et $\mathfrak{M}$ sont tranchées, $\mathrm{F} = \begin{pmatrix} \mathrm{F}^+ & 0 \\ 0 & \mathrm{F}^- \end{pmatrix}$, avec F^+ m^+-carrée et F^- m^--carrée; la définition de l'isomorphisme se traduit alors, à l'aide des tranches totales de M, $\mathfrak{M}$, par

$$\mathfrak{M}^+ = \mathrm{F}^+\mathrm{M}^+\mathrm{G}, \qquad \mathfrak{M}^- = \mathrm{F}^-\mathrm{M}^-\mathrm{G}.$$

F et G sont nécessairement non singulières, d'où il résulte que l'isomorphie est une relation d'équivalence entre matrices de Hodge. Comme une permutation sur les lignes revient à un isomorphisme d'un type particulier, pour lequel G est la matrice-unité, chaque classe d'isomorphie contient des matrices tranchées.

Démontrons ce qui pourra s'appeler le *théorème de Poincaré :*

(6.2) *Si une matrice de Hodge* M *d'indice principal a est de la forme* $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{M}_1 & 0 \\ \mathrm{M}_3 & \mathrm{M}_2 \end{pmatrix}$, *où* M_1 *est carrée d'ordre* $m_1 < m$, M_1 *et* M_2 *sont des matrices de Hodge d'indice principal a, restreintes si* M *est restreinte;* M *est isomorphe à* $\begin{pmatrix} \mathrm{M}_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{M}_2 \end{pmatrix}$, *qui est également restreinte lorsque* M *l'est* ([5]).

Décomposons une matrice principale A de M en $\begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_4 \\ \mathrm{A}_3 & \mathrm{A}_2 \end{pmatrix}$, où A_1 est m_1-carrée. La tranche positive de M comprise dans les m_1 premières lignes et amputée de ses $m - m_1$ colonnes nulles postérieures donne, si elle n'est pas vide, une matrice M_1^+ telle que $i^a \mathrm{M}_1^+ \mathrm{A}_1 \overline{\mathrm{M}_1^+}'$ soit hermitienne définie positive; en définissant pareillement M_1^-, nous avons aussi $\mathrm{M}_1^+ \mathrm{A}_1 \overline{\mathrm{M}_1^-}' = 0$, $\mathrm{M}_1^- \mathrm{A}_1 \overline{\mathrm{M}_1^-}'$ hermitienne définie négative. Donc M_1 est matrice de Hodge d'indice principal a et de matrice principale A_1, rationnelle si A est rationnelle.

Puisque A_1 n'est pas singulière, multiplions à droite M par la matrice

$$\mathrm{G} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{m_1} & 0 \\ \mathrm{A}_3 \mathrm{A}_1^{-1} & \mathrm{I}_{m-m_1} \end{pmatrix},$$

où la notation I_x désigne la matrice-unité d'ordre x. M se transforme ainsi par isomorphie en $\begin{pmatrix} \mathrm{M}_1 & 0 \\ \mathrm{M}_4 & \mathrm{M}_2 \end{pmatrix}$, de matrice principale

$$\mathrm{G}^{-1}\mathrm{A}(\mathrm{G}^{-1})' = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{B}_2 \end{pmatrix},$$

([5]) Observons que si $\mathrm{M}_1 \mathrm{M}_2$ sont deux matrices de Hodge de même indice principal et de matrices principales respectives A_1, A_2, $\begin{pmatrix} \mathrm{M}_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{M}_2 \end{pmatrix}$ est matrice de Hodge, de matrice principale $\begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_2 \end{pmatrix}$.

puisque

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} I_{m_1} & 0 \\ -A_3 A_1^{-1} & I_{m-m_1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A'_1 = (-1)^a A_1, \quad A'_3 = (-1)^a A_4.$$

Nous pouvons encore, par un isomorphisme sans influence sur la matrice principale, ramener dans $(M_1 \quad 0)$ et $(M_4 \quad M_2)$ les $(+)$ lignes au-dessus des $(-)$ lignes. $(M_4 \quad M_2)$ se présente alors sous la forme $\begin{pmatrix} M_4^+ & M_2^+ \\ M_4^- & M_2^- \end{pmatrix}$. Par la condition 3° de (6.1)

$$0 = (M_4^+ \quad M_2^+) \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{M_1^-}' \\ 0 \end{pmatrix} = M_4^+ A_1 \overline{M_1^-}'.$$

Or, on a déjà $M_1^+ A_1 \overline{M_1^-}' = 0$. Comme l'a observé Hodge, une telle situation force à conclure, si M_1^+, M_4^+ ne sont pas vides, à l'existence d'un matrice α telle que $M_4^+ = \alpha M_1^+$. La chose est triviale lorsque M_1^- est vide, vu que M_1^+ est alors carrée et non singulière. Si M_1^- n'est pas vide, les rangs m_1^+, m_1^- de M_1^+, M_1^- ont pour somme m_1. La matrice $U = A_1 \overline{M_1^-}'$, à m_1 lignes et m_1^- colonnes, est donc de rang maximum m_1^-. Or, toute matrice V telle que $VU = 0$ est au plus de rang $m_1 - m_1^- = m_1^+$, résultat connu de la théorie des systèmes linéaires. Ceci est vrai de $V = \begin{pmatrix} M_1^+ \\ M_4^+ \end{pmatrix}$; comme le rang de M_1^+ vaut déjà m_1^+, les lignes de M_4^+ sont des combinaisons linéaires des lignes de M_1^+ et $M_4^+ = \alpha M_1^+$. Cette argumentation tient ici lieu du lemme I d'Albert [1] dans sa preuve du théorème de Poincaré relatif aux matrices de Riemann. Quand M_1^+ est vide, la conclusion est modifiée en ce sens que M_4^+ est nulle (ou vide), d'après $M_4^+ A_1 \overline{M_1^-}' = 0$, où A_1 et M_1^- sont non singulières.

Pareillement, on trouve que $M_4^- = \beta M_1^-$, ou $M_4^- = 0$ si M_1^- est vide. Dès lors, en multipliant à gauche $\begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ M_4 & M_2 \end{pmatrix}$ par $\begin{pmatrix} I_{m_1} & 0 \\ R & I_{m-m_1} \end{pmatrix}$, où $R = -\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, nous parvenons à la matrice $\begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$, de matrice principale $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ et isomorphe à M, même dans le cas où M est restreinte. La conclusion reste valide si par exemple M_1^- ou M_1^+ est vide : il suffit de prendre R égal à $(0 \quad \beta)$ ou $\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}$. On voit encore que M_2 est une matrice de Hodge de matrice principale B_2.

Il est bon d'ajouter que, *dans le passage de* M *à* $\begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$, *aucune substitution n'a été opérée sur les* m_1 *premières lignes ni sur les* $m - m_1$ *dernières colonnes.*

7. On déduit du théorème de Poincaré les mêmes conséquences que dans la théorie des matrices de Riemann. Une matrice de Hodge M isomorphe à une matrice $\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ X & X_2 \end{pmatrix}$, (supposée restreinte en même temps que M), est dite *impure*, sinon elle est *pure*. Dans la première éventualité, elle est isomorphe à $\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$; si X_1 ou X_2 sont elles-mêmes impures, on peut répéter l'application du théorème et

constituer finalement une matrice isomorphe à M et du *type réduit*

$$(7.1)\qquad \begin{pmatrix} M_1 & & & 0 \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_r \end{pmatrix},$$

dans lequel toutes les M_i sont pures. Plusieurs de ces M_i peuvent être isomorphes entre elles, et alors nous pouvons, par un nouvel isomorphisme de M, les rendre identiques; nous supposerons toujours cette identification réalisée. L'ordre dans lequel les M_i sont rangés est d'ailleurs indifférent : il peut être modifié par un isomorphisme.

(7.2) Théorème. — *La forme réduite* (7.1) *de* M *est unique, sauf permutation sur les* M_i *et remplacement des* M_i *par des matrices isomorphes.*

Il s'agit de prouver que si M est simultanément isomorphe aux formes réduites

$$\begin{pmatrix} M_1 & & & 0 \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{M}_1 & & & 0 \\ & \mathfrak{M}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathfrak{M}_s \end{pmatrix},$$

nécessairement $r = s$ et M_i est isomorphe à $\mathfrak{M}_i$, pour peu que les $\mathfrak{M}_i$ soient prises dans un ordre convenable. Il n'est pas restrictif de supposer les M_i et les $\mathfrak{M}_i$ tranchées. Par hypothèse, il existe une m-matrice carrée complexe F et une m-matrice carrée réelle G (rationnelle si M est restreinte), toutes deux non singulières, telles que

$$(7.3)\qquad F\begin{pmatrix} M_1 & & & 0 \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{M}_1 & & & 0 \\ & \mathfrak{M}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathfrak{M}_s \end{pmatrix} G.$$

Appelons m_i, μ_i les ordres respectifs de M_i, $\mathfrak{M}_i$, (m_i^+, m_i^-) et (μ_i^+, μ_i^-) leurs signatures. Découpons F et G en cases F_{ij}, G_{ij} à μ_i lignes et m_j colonnes. Pour que (7.3) représente un isomorphisme, il faut que $F_{ij} = \begin{pmatrix} F_{ij}^+ & 0 \\ 0 & F_{ij}^- \end{pmatrix}$, où F_{ij}^+ est $\mu_i^+ \times m_j^+$ et F_{ij}^-, $\mu_i^- \times m_j^-$. On tire d'ailleurs de (7.3)

$$(7.4)\qquad F_{ij} M_j = \mathfrak{M}_i G_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, s;\ j = 1, \ldots, r).$$

Comme M_j et $\mathfrak{M}_i$ sont non singulières, F_{ij} et G_{ij} ont le même rang $\rho\,(\leqq \mu_i, m_j)$. Pour montrer que $\rho = 0$ ou $\rho = \mu_i = m_j$, il suffit d'affiner un peu un raisonnement d'Albert [1]. Supposons $\rho \neq 0$, et soient ρ^+, ρ^- les rangs de F_{ij}^+, F_{ij}^- $(\rho = \rho^+ + \rho^-)$. On sait [2, chap. III, § 7] qu'on peut trouver des matrices non singulières X_1, X_2, Y_1, Y_2 telles que

$$X_2 F_{ij}^+ X_1 = \begin{pmatrix} I_{\rho^+} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y_2 F_{ij}^- Y_1 = \begin{pmatrix} I_{\rho^-} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \text{si } Z_i = \begin{pmatrix} X_i & 0 \\ 0 & Y_i \end{pmatrix},$$

on aura donc

$$U_2 Z_2 F_{ij} Z_1 U_1 = \begin{pmatrix} I_\rho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

en désignant par U_1, U_2 des matrices élémentaires qui opèrent des permutations de colonnes et de lignes. Il existe aussi des matrices réelles (rationnelles si G est rationnelle) non singulières C_1, C_2 telles que

$$C_2 G_{ij} C_1 = \begin{pmatrix} I_\rho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans ces conditions, moyennant

$$\tilde{M}_j = U_1^{-1} Z_1^{-1} M_j C_1, \qquad \tilde{\mathfrak{M}}_i = U_2 Z_2 \mathfrak{M}_i C_2^{-1},$$

(7.4) s'écrit

$$\begin{pmatrix} I_\rho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{M}_j = \tilde{\mathfrak{M}}_i \begin{pmatrix} I_\rho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de s'assurer que $\tilde{M}_j$, $\tilde{\mathfrak{M}}_i$ sont isomorphes respectivement à M_j, $\mathfrak{M}_i$; or, si

$$\tilde{M}_j = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathfrak{M}}_i = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1 & \mathcal{R}_2 \\ \mathcal{R}_3 & \mathcal{R}_4 \end{pmatrix},$$

où R_1 et $\mathcal{R}_1$ sont ρ-carrées, la dernière relation écrite se traduit par $R_1 = \mathcal{R}_1$, $R_2 = 0$, $\mathcal{R}_3 = 0$. En d'autres termes, $\tilde{M}_j$ et $\tilde{\mathfrak{M}}_i$, et par suite M_j et $\mathfrak{M}_i$, sont impures, ou bien $\rho = m_j = \mu_i$. Cette dernière éventualité est seule compatible avec les hypothèses; elle entraîne l'isomorphie de M_j et $\mathfrak{M}_i$.

Pour une valeur fixée de j, il existe peut-être des valeurs de i pour lesquelles, ρ étant nul, (7.4) est trivialement vérifiée. Mais ce n'est pas possible pour tous les indices i, sinon F et G seraient singulières. Il existe donc au moins une relation (7.4) non triviale, partant une matrice $\mathfrak{M}_i$ isomorphe à chaque M_j. Si x est le nombre des matrices M_j isomorphes à M_1 (celle-ci comprise), y celui des $\mathfrak{M}_i$ isomorphes à M_1, et que, dans (7.3), par une permutation des indices, qui est licite, nous appelions $M_1, M_2, \ldots, M_x$ et $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_y$ ces matrices, le coin supérieur gauche de F est occupé par une $ym_1 \times xm_1$ matrice à droite et en dessous de laquelle ne figurent que des zéros. Pour éviter de rendre F singulière, il faut donc supposer $x = y$. En répétant ce raisonnement à propos de chaque M_j, on voit que r et s sont égaux et que les $\mathfrak{M}_i$ peuvent être pris dans un ordre tel que M_i soit isomorphe à $\mathfrak{M}_i$ pour tout i.

8. Nous voyons ainsi qu'une fraction appréciable de la théorie des matrices de Riemann s'étend tout naturellement aux matrices de Hodge. Il est vraisemblable que d'autres aspects de cette théorie se laisseraient également adapter; nous nous réservons d'y revenir dans une étude ultérieure. Pour l'instant, nous allons appliquer aux variétés kählériennes les notions que nous venons d'introduire.

(8.1) En vertu de (5.2), *la matrice* P *des périodes d'une base primaire pour les formes harmoniques de degré p attachées à une variété kählérienne compacte* V_{2m}, *relativement à une base réelle d'homologie, est une matrice de Hodge d'indice principal p, les* $(+)$ *lignes correspondant aux formes de base dont le type et la classe sont de même parité. Si* V_{2m} *est restreinte et la base d'homologie entière,* P *est une matrice de Hodge restreinte.*

La signature de P est $\left(\sum' b^p_{(h)k}, \sum'' b^h_{(h)k}\right)$, où $\sum'$ désigne la sommation étendue aux couples $k, h\,(k = 0, 1, \ldots, q;\ h = k, k+1, \ldots, p-k)$ tels que $h \equiv k \bmod 2$, $\sum''$ la sommation étendue aux autres couples; si p est impair, en vertu de $b^p_{(h)k} = b^p_{(p-h)k}$, cette signature est $\left(\frac{b^p}{2}, \frac{b^p}{2}\right)$.

Le théorème de Poincaré admet une interprétation analogue à celle qu'on a coutume de donner dans la théorie des courbes algébriques. Un espace vectoriel S de formes harmoniques de degré p dont les périodes relatives à x cycles *réels* (resp. *entiers*) indépendants $\delta^u\,(u = b^p - x + 1, \ldots, b^p)$ sont nulles est appelé un *système* (resp. *système restreint*) *de formes réductibles*. Il est nécessaire que $b^p - x$ soit au moins égal au rang s de S, sinon celui-ci contiendrait des formes harmoniques non nulles à périodes toutes nulles : il suffirait en effet de composer une base d'homologie au moyen des δ^u précédents et de $b^p - x$ autres cycles réels $\delta^1, \ldots, \delta^{b^p - x}$, puis d'imposer à une forme de S l'annulation des périodes relatives à ces $b^p - x$ cycles. Quand a lieu le cas-limite $s = b^p - x > 0$, S est dit un système *régulier;* il faut pour cela que les périodes d'une base de S relatives à $\delta^1, \ldots, \delta^{b^p - x}$ forment une matrice non singulière, qui est une matrice de Hodge lorsque la base de S est primaire.

Le théorème de Poincaré donne alors :

(8.2) *Soient* S *un système régulier de rang* s, T *un sous-système régulier de* S, *de rang* $t < s$, *les deux systèmes admettant des bases de formes primaires. Nous pouvons faire en sorte que la base de* T *figure en tête dans une base primaire de* S *et former une base réelle d'homologie* $\delta^1, \ldots, \delta^{b^p}$ (*à* p *dimensions*) *telle que les formes de* S *aient des périodes nulles le long de* $\delta^{s+1}, \ldots, \delta^{b^p}$ *et celles de* T *des périodes nulles aussi le long de* $\delta^{t+1}, \ldots, \delta^s$. *Alors, la matrice de Hodge formée par les périodes de la base considérée de* S *le long de* $\delta^1, \ldots, \delta^s$ *est du type* $\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & P_2 \end{pmatrix}$, *où* P_1 *est* t*-carrée, et il existe dans* S *un système régulier* U *de rang* $s - t$, *dit complémentaire à* T *dans* S, *qui sous-tend avec* T *l'espace* S *et admet des périodes nulles sur* t *cycles réels indépendants relativement auxquels la base de* T *admet la matrice des périodes* P_1. *Une base convenable de* U *admet, relativement à* $\delta^{t+1}, \ldots, \delta^s$, *la matrice des périodes* P_2.

Dans cet énoncé, l'espace H^p total peut jouer le rôle de S; on peut aussi prendre $S = H^p_k$ quand on est assuré que les p-cycles de chaque classe admettent une base réelle, voire même entière, ce qui est notamment le cas lorsque V_{2m} est restreinte, d'après le n° 2. D'ailleurs, *quand il s'agit d'une variété restreinte, on peut renforcer l'énoncé* (8.2) *en y remplaçant les cycles réels par des cycles entiers et les systèmes réguliers par des systèmes réguliers restreints, tel* H^p_k; mais la base de T dont il est question à la fin de cet énoncé admet la matrice des périodes nX_1, n entier, au lieu de X_1, comme ce serait le cas si l'on admettait des cycles rationnels non entiers.

Remarque. — Si p est impair, un système régulier S de degré p doué d'une base primaire est toujours de rang pair $2e$, et la matrice de Hodge de ses périodes non nulles a la signature (e, e), puisque $\varphi^{p}_{(h;k}$ et $C\varphi^{p}_{(h;k} = \psi^{p}_{(p-h;k}$ sont toutes deux intérieures ou toutes deux extérieures à S.

9. Nous voulons terminer par quelques observations critiques. Au premier stade, nous avons composé une matrice de Hodge au moyen des périodes de b^{p} formes *primaires* indépendantes. Dans un quelconque changement des formes de base, on ne retrouve plus une matrice de Hodge, puisqu'un isomorphisme ne s'obtient qu'en combinant séparément les $(+)$ lignes d'une part, les $(-)$ lignes d'autre part; il faut donc, pour conserver une matrice de Hodge, former la nouvelle base en combinant entre elles les formes primaires dont classe et type ont même parité, entre elles aussi les autres formes primaires. Cette circonstance un peu gênante constitue en somme une invitation à chercher une définition plus large des matrices de Hodge, définition qui rende valide la proposition (8.1) pour *toute* base de H^{p}. La technique adéquate à cet élargissement de notre point de vue ne nous apparaît pas encore. D'un autre côté, il peut être utile dans certains cas d'adopter un point de vue plus particulier. Observons à ce propos que la matrice P de l'énoncé (5.2) est d'un type qui tolère une définition plus stricte de l'isomorphie. D'une manière abstraite, supposons que les $(+)$ lignes d'une matrice de Hodge M soient elles-mêmes réparties en un certain nombre de familles, dites *positives*, et que, pour tout couple P_1, P_2 de tranches positives insérées respectivement dans deux familles distinctes, $P_1 \Lambda \overline{P'_2} = 0$; formulons une hypothèse similaire pour les $(-)$ lignes. Si nous adjoignons ces conditions à celles de la définition (6.1), nous obtenons une définition plus fine, celle d'une matrice de Hodge *stratifiée;* une matrice de Hodge ordinaire peut d'ailleurs être considérée comme stratifiée avec une seule famille positive et une seule négative. La définition de l'isomorphisme peut être ainsi renforcée : pour que deux matrices stratifiées M, $\mathcal{M}$ soient isomorphes au sens fort, on exigera de pouvoir établir entre leurs familles positives respectives une correspondance biunivoque telle que les familles associées comprennent le même nombre de lignes; une exigence analogue sera formulée au sujet des familles négatives; enfin, on postulera l'existence d'une matrice carrée réelle G (rationnelle si l'on s'occupe de matrices restreintes) et d'une matrice carrée complexe F telles que $\mathcal{M} = FMG$, les éléments de F étant nuls, sauf aux intersections des lignes et des colonnes de mêmes indices respectifs que les lignes de $\mathcal{M}$ et M comprises dans des familles associées. Avec ces définitions, on peut s'assurer que les théorèmes (6.2) et (7.2) restent valides.

Dans le cas qui se présente à propos des variétés kählériennes, remarqu[illegible] la matrice P de (5.2) peut être stratifiée de plusieurs manières. On peut [illegible] de la même famille des lignes de période de deux formes primaires de [illegible] classe et de types congrus modulo 2; ou au contraire, celles de deux form[illegible] pri-maires de même type et de classes congrues modulo 2; ou encore, celles [illegible] formes primaires de même type et de même classe. La troisième stratif[illegible] « intersection » des deux premières, est intéressante pour l'application du th[illegible] de Poincaré. Elle a pour effet de n'introduire par isomorph[illegible] que des [illegible] de H^p composées de formes primaires; Grâce à elle, on peut, à la fin de l'énoncé (8.2), préciser que *la base de* U *admettant la matrice de périodes* X_2 *relativement à* $\delta^{t+1}, \ldots, \delta^s$ *est composée de formes primaires.* De là on déduit, en vertu de (7.2), que *tout système régulier à base primaire est décomposable, et d'une seule manière, en une somme directe de systèmes réguliers purs*, ce dernier vocable désignant un système régulier à base primaire dépourvu de vrais sous-systèmes réguliers à base primaire, autres que zéro.

Ces dernières considérations nous rapprochent du point de vue de Hodge; celui-ci, toutefois, n'utilise qu'une base d'homologie composée de cycles simples et entiers, en accord avec le n° 2, et n'envisage que des systèmes réguliers restreints de formes d'une seule classe; il émet même l'opinion que « the theorem (of Poincaré) cannot, as far as we know, be extended to sets of integrals which have non-zero periods on ineffective cycles of more than one class ». Nous avons tâché de montrer comment il est possible, sans introduire des complications de méthode, d'élargir cette perspective sous plus d'un aspect, bien que, nous l'avons dit, nous n'ayons peut-être pas encore atteint le maximum de généralité.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Albert, *A note on the Poincaré theorem on impure Riemann matrices* (*Ann. Math.*, t. 36 1935, p. 151-156).

[2] Albert, *Modern higher algebra*, Chicago University Press, 1937.

[3] Albert, *Structure of algebras* (*Amer. Math. Soc. Coll. Publications*, vol. 24, 1939).

[4] de Rham, *Sur l'analysis situs des variétés à n dimensions* (*J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 10, 1931, p. 115-200).

[5] Eckmann, *Quelques propriétés globales des variétés kählériennes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 229, 1949, p. 577).

[6] Guggenheimer, *Ueber komplex-analytische Mannigfaltigkeiten mit Kählerscher Metrik* (*Comm. Math. Helv.*, t. 29, 1951, p. 257-297).

[7] Hodge, *The theory and applications of harmonic integrals*, Cambridge University Press, 1941.

[8] Hodge, *A special type of Kähler manifolds* (*Proc. London Math. Soc.*, 3e série, t. 1, 1951, p. 104-117).

[9] Jongmans, *Relations entre les périodes ...* (*Bull. Soc. Sc. Liége*, 1952, p. 18-23).

[10] Jongmans, *Les variétés kählériennes* (*Bull. Soc. Sc. Liége*, 1952, p. 345-363).