BULLETIN DE LA S. M. F.

PAULETTE LIBERMANN

Sur les structures presque complexes et autres structures infinitésimales régulières

Bulletin de la S. M. F., tome 83 (1955), p. 195-224

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1955__83__195_0>

Bull. Soc. Math. France,
83, 1955, p. 195 à 224.

SUR LES STRUCTURES PRESQUE COMPLEXES ET AUTRES STRUCTURES INFINITÉSIMALES RÉGULIÈRES [1].

PAR M^lle PAULETTE LIBERMANN.

L'objet de cet article est de donner un aperçu général des nombreux travaux qui ont été consacrés ces dernières années à l'étude des structures infinitésimales régulières.

C'est E. Cartan [10] [2] qui, généralisant la géométrie riemannienne, a introduit la notion « d'espace généralisé » ou « espace non holonome de groupe fondamental G » et a défini pour ces espaces des connexions (d'où la notion de courbure, torsion et groupe d'holonomie). H. Weyl, O. Veblen, J. A. Schouten, D. J. Struik, E. Bompiani, Vranceanu, etc. ont également contribué à l'étude de ces questions.

La théorie des espaces fibrés a permis de formuler ces notions de manière globale. Nous ne rappellerons pas la définition d'un espace fibré différentiable à groupe structural de Lie et en particulier la notion d'espace fibré principal (*voir* C. Ehresmann [23], [25] et N. Steenrod [68]). Les notations et la terminologie employées seront celles de C. Ehresmann. Pour les groupes classiques, nous utiliserons les notations suivantes qui sont, dans l'ensemble, celles de [51] :

L_n : groupe linéaire homogène de l'espace numérique réel R^n $\left[GL(n, R)\right.$ dans les notations de C. Chevalley $\left.[16]\right]$;

L'_n : groupe linéaire homogène de l'espace numérique complexe $C^n[GL(n, C)]$;

L''_n : groupe linéaire homogène de l'espace numérique quaternionien Q^n;

O_n : groupe orthogonal dans $R^n[O(n)]$;

U_n : groupe unitaire dans $C^n[U(n)]$;

$U_n(Q)$: groupe unitaire quaternionien dans Q^n [groupe linéaire symplectique $Sp(n)$];

$\tilde{L}_{2n}$: groupe symplectique réel dans R^{2n} (c'est-à-dire le sous-groupe de L_{2n} laissant invariante la forme $x^1y^{n+1} - x^{n+1}y^1 + \ldots + x^ny^{2n} - x^{2n}y^n$);

$\tilde{L}'_{2n}$: groupe symplectique complexe dans C^{2n} $[Sp(n, C)]$.

Afin de limiter notre sujet, nous exclurons de cette étude la géométrie riemannienne et les structures kählériennes.

[1] Rapport fait à la demande du Secrétariat de la Société.
[2] Les nombres entre crochets renvoient à la Bibliographie.

1. Définitions et généralités. — La variété des vecteurs tangents à une variété différentiable V_n, de dimensions n, est un espace fibré noté $T(V_n, R^n, L_n, H)$, de base V_n, de fibre R^n, de groupe structural L_n ; l'espace fibré principal associé $H(V_n)$ est l'ensemble des homéomorphismes h_x (ou repères) de R^n sur l'espace tangent T_x à V_n en $x \in V_n$ quand x parcourt V_n. Le problème de la recherche des *structures subordonnées* de groupe structural un groupe de Lie G, sous-groupe de L_n a été posé pour la première fois dans toute sa généralité par C. Ehresmann [22] qui a montré que *l'existence de telles structures* $T(V_n, R^n, G, H')$ *est équivalente à l'existence d'une section* ([3]) *dans l'espace fibré associé* H/G, de base V_n, de fibre l'espace L_n/G, ce qui conduit à des obstacles; les structures $T(V_n, R^n, G, H')$ se répartissent en classes d'homotopie des sections de H/G et les structures d'une même classe sont isomorphes. Ce problème a été également exposé dans [23], [24] et dans le livre de N. Steenrod [68] (dans la terminologie de ce dernier c'est la *réduction* du groupe L_n à un sous-groupe). Les structures $T(V_n, R^n, G, H')$ ont été appelées ultérieurement par C. Ehresmann [26] *structures infinitésimales régulières du premier ordre* ; nous les désignerons également d'une manière abrégée par G-structures. Par exemple si $G =$ identité, la variété V_n est *parallélisable*. Si $G = O_n$, la structure est *riemannienne* ; comme L_n/O_n est homéomorphe à $R^{\frac{n(n+1)}{2}}$, *une variété différentiable* V_n *admet toujours une structure riemannienne* (C. Ehresmann [22] et N. Steenrod [68]).

Si R^n est muni d'une structure subordonnée à sa structure d'espace vectoriel réel admettant G comme groupe d'automorphismes, cette structure est transportée sur l'espace tangent T_x par un isomorphisme $h_x \in H'(V_n)$ ou repère distingué ; au point x correspond une famille $H'_x = h_x G$ de repères distingués ; si $H'^*_x =$ ensemble des isomorphismes réciproques (ou *corepères* distingués d'origine x), on a $H'^*_x = G h_x^{-1}$.

Soit $U \subset V_n$ un ouvert distingué pour la structure fibrée, c'est-à-dire tel que, p désignant la projection canonique de $H'(V_n)$ sur V_n, $p^{-1}(U)$ soit homéomorphe à $U \times G$. Dans U la G-structure peut être déterminée par une *forme différentielle* ω c'est-à-dire une fonction continue $x \to h_x^{-1}$ [où $h_x^{-1} \in H'^*(V_n)$] ; ω est la suite $(\omega^1, \ldots, \omega^n)$ de n formes de Pfaff linéairement indépendantes dont la restriction à x constitue le corepère h_x^{-1} ; l'application transposée de p fait correspondre à la forme ω la forme $\tilde{\omega}(x, u)$ définie sur $p^{-1}(U)$: ω est la suite $(\tilde{\omega}^1, \ldots, \tilde{\omega}^n)$ où $\tilde{\omega}^j = \Sigma u_i^j \omega^i$, les u_i^j étant des fonctions différentiables de $x \in U$ définissant en chaque point une transformation de G.

Un *isomorphisme local* d'une G-structure s (définie sur une variété V_n) sur une G-structure $\hat{s}$ (définie sur une variété $\hat{V}_n$) ou *carte locale* de V_n sur $\hat{V}_n$ est un homéomorphisme différentiable φ d'un ouvert $U \subset V_n$ sur $\hat{U} \subset \hat{V}_n$ tel que la structure $\hat{s}$ étant déterminée dans $\hat{U}$ par la forme $\hat{\omega}$, la forme $\omega = \varphi^*(\hat{\omega})$ détermine s dans U. Un isomorphisme local de s sur elle-même est un automorphisme local. La structure $\hat{s}$ est dite localement isomorphe (ou *localement équivalente*) à s si

([3]) Une section dans un espace fibré $E(B, F, G, H)$ est une application continue $f : B \to F$ telle que, p désignant la projection canonique de E sur B, pf soit l'identité.

les cartes locales constituent un atlas de V_n sur $\hat{V}_n$ [26]. Une G-structure est dite *intégrable* si elle est localement équivalente à une structure du même type sur R^n déterminée par la forme $\omega \doteq dx = (dx^1, \ldots, dx^n)$. Une G-structure est dite *isotrope* en x (resp. *localement homogène* dans le voisinage U d'un point de V_n) s'il existe un automorphisme local de la structure transformant un corepère arbitraire d'origine x (resp. un point arbitraire $x \in U$) en un corepère arbitraire de même origine (resp. un point arbitraire $x' \in U$). Ces définitions ont été exposées par l'auteur dans [51]. Une structure intégrable est isotrope et localement homogène (la réciproque n'étant pas nécessairement vérifiée) ; les structures intégrables au sens de S. S. Chern [14] sont les structures à la fois isotropes et localement homogènes.

Une *connexion infinitésimale* (que l'on peut appeler *vectorielle*) associée à une G-structure sur une variété V_n de classe $C^r (r \geq 2)$ est définie (C. Ehresmann [25]) par un champ différentiable de n-éléments de contact dans $T(V_n, R^n, G, H')$ transversal aux fibres ; comme G est un groupe de Lie, tout chemin différentiable de V_n, d'origine x, d'extrémité x' est la projection d'une courbe intégrale du champ d'origine z (arbitraire dans T_x), d'extrémité $z' \in T_{x'}$; cette connexion définit ainsi une représentation du groupoïde des chemins fermés en x sur un groupe Ψ_x d'automorphismes de T_x (muni d'une structure d'espace vectoriel) ; Ψ_x est le *groupe d'holonomie* de la connexion. Cette connexion peut encore être définie par une application Π de l'espace $T(H')$ des vecteurs tangents à l'espace fibré principal $H'(V_n)$ dans $T_e(G)$ (espace tangent en e à la variété de G), Π vérifiant les conditions suivantes :

1° la restriction de Π aux vecteurs $h + dh$ d'origine h fixe est linéaire;

2° si $\tilde{h} = hu^{-1}$ [où $h \in H'(V_n)$, $u \in G$], on a

$$\Pi(\tilde{h} + d\tilde{h}) = u\Pi(h + dh)u^{-1} - (u + du)u^{-1}.$$

La définition des connexions donnée par S. S. Chern [13] est équivalente à celle-ci.

Localement [51] l'application Π est définie par des formes différentielles $\omega_j^i(h + dh)$ à valeurs dans l'algèbre de Lie de G [notée L(G)], telles qu'au vecteur $\tilde{h} + d\tilde{h}$ (où $\tilde{h} = hu^{-1}$) correspondent les formes $\tilde{\omega}_k^h = \Sigma(u_i^h dv_k^i + u_i^h v_k^j \omega_j^i)$ (avec $\Sigma u_i^l v_k^i = \delta_k^l$).

A la connexion vectorielle correspond une connexion *affine* définie par une application Π' de $T(H')$ dans $T_e(\mathcal{G})$ (où $\mathcal{G}$ est le groupe affine dont G est le plus grand sous-groupe laissant fixe O); cette connexion peut être définie localement par l'ensemble des formes ω^i et ω_j^i. A cette connexion correspond dans l'espace tangent T_x à V_n (muni de sa structure d'espace affine) le groupe d'holonomie Φ_x ; le groupe d'holonomie de la connexion vectorielle associée à la connexion affine est le *groupe d'holonomie homogène* de la connexion affine (A. Borel et A. Lichnerowicz [7], [57]; en se bornant aux chemins homotopes à O, on obtient le groupe d'holonomie restreint ρ_x et le groupe d'holonomie homogène restreint σ_x de la connexion affine.

A la connexion affine Π' est associé un opérateur D de *différentation cova-*

riante qui à toute *forme différentielle extérieure tensorielle* φ de degré q (c'est-à-dire à toute fonction $x \to \varphi_x$ où φ_x est une application linéaire de l'espace des q-vecteurs en x sur l'espace des tenseurs de type donné en x) fait correspondre une forme différentielle extérieure tensorielle $D\varphi$, de même type, de degré $q+1$. En particulier la forme différentielle extérieure tensorielle de composantes

$$D\omega^i = \Omega^i = d\omega^i - \Sigma\omega^j \wedge \omega_j^i (i = 1, \ldots, n)$$

est appelée la *torsion* de la connexion Π'. On démontre que les formes

$$\Omega_j^i = d\omega_j^i - \Sigma\omega_l^i \wedge \omega_j^l$$

sont également les composantes d'une forme différentielle extérieure tensorielle ou *courbure* de la connexion Π'. Les composantes A_{st}^i et R_{jhm}^i des tenseurs de courbure et de torsion sont définies respectivement par

$$\Omega^i = \Sigma A_{st}^i \omega^s \wedge \omega^t, \qquad \Omega_j^i = \Sigma R_{jhm}^i \omega^h \wedge \omega^m.$$

Par différentiation extérieure, on obtient les relations généralisant les identités de Bianchi :

$$(1) \qquad \left.\begin{cases} d\Omega^i + \Sigma\Omega^j \wedge \omega_j^i - \Sigma\omega^j \wedge \Omega_j^i = 0 \\ d\Omega_j^i + \Sigma\Omega_j^k \wedge \omega_k^i - \Sigma\omega_j^k \wedge \Omega_k^i = 0 \end{cases}\right\} (i, j = 1, \ldots, n),$$

relations pouvant s'écrire (S. S. Chern [13]) :

$$(2) \qquad \left.\begin{cases} D\Omega^i = \Sigma\omega^j \wedge \Omega_j^i, \\ D\Omega_j^i = 0. \end{cases}\right\} (i, j = 1, \ldots, n).$$

Pour toutes les structures envisagées dans cet article, on peut choisir canoniquement un tenseur de torsion, mais la connexion affine associée n'est pas nécessairement déterminée (structures presque complexes par exemple); pour d'autres structures (presque hermitiennes par exemple) le choix de la torsion détermine la connexion affine. L'existence ou la non-existence de connexions affines associées canoniquement à une G-structure a été étudiée par C. Ehresmann (non publié).

On peut définir pour une G-structure, l'anneau des polynomes invariants de G c'est-à-dire des fonctions réelles symétriques multilinéaires $P(Y_1, \ldots, Y_k)$ [avec $Y_i \in L(G)$] telles que, pour tout $u \in G$, on ait

$$P(ad(u)Y_1, \ldots, ad(u)Y_k) = P(Y_1, \ldots, Y_k).$$

Si l'on remplace dans un tel polynome (de degré k) les Y_i par les formes de courbure d'une connexion affine associée à la G-structure, on obtient une forme différentielle extérieure de degré $2k$ qui, en raison de l'invariance est définie globalement sur V_n; il résulte des équations (2), que cette forme est fermée et définit donc une classe de cohomologie; la *classe de cohomologie est indépendante de la connexion affine associée à la structure*. Ce théorème, dû à A. Weil (non publié) a été exposé par S. S. Chern [13] et H. Cartan [11] (qui en a donné une démonstration différente de celle de A. Weil).

D'importantes contributions à la théorie des connexions ont été faites également par W. Ambrose et I. M. Singer [1], A. Nijenhuis [60], K. Nomizu [61], [62],

[63], S. Kobayaschi [40], [41]. En particulier K. Nomizu [62] a démontré que le groupe des transformations d'une variété différentiable laissant invariante une connexion affine est un groupe de Lie; S. Kobayaschi [41] a démontré que si une variété V_n admet un parallélisme absolu, le groupe des transformations de V_n laissant invariant ce parallélisme est un groupe de Lie.

Alors que le problème d'existence d'une structure infinitésimale régulière est un problème global, l'étude de l'équivalence locale, de l'intégrabilité, de l'isotropie, etc. sont des problèmes de géométrie différentielle locale.

Les structures envisagées dans cet article sont définies sur une variété V_{2n}, de dimension $2n$; ce sont notamment les structures *presque complexes* (de groupe structural L'_n) et des structures subordonnées : structures *presque hermitiennes*, *presque symplectiques*, et si $n = 2p$ *presque quaternioniennes*, *presques hermitiennes quaternioniennes*, de groupe structural U_n, $\tilde{L}_{2n}$, L''_p, $U_p(Q)$; parmi les structures presque hermitiennes, celles qui sont subordonnées à une structure presque complexe dérivant d'une structure complexe sont *hermitiennes*; si la forme différentielle extérieure associée (*cf.* § 2) à la structure presque hermitienne (resp. hermitienne) est fermée, la structure est dite *presque kählérienne* (resp. *kählérienne*); on considérera également des structures *presque paracomplexes* (de groupe structural isomorphe à $L_n \times L_n$) et des structures subordonnées.

2. Conditions d'existence d'une structure presque complexe. — Sur une variété V_{2n}, de classe $C^r (r \geqq 1)$ une structure *presque complexe* (de groupe structural le groupe linéaire homogène complexe L'_n) est une fonction continue associant à chaque point $x \in V_{2n}$ une structure d'espace vectoriel complexe dans l'espace tangent T_x; cette structure est déterminée par la donnée d'un champ différentiable I d'isomorphismes I_x de T_x tels que $(I_x)^2 = -1$, ou encore par la donnée d'un champ différentiable de n-éléments de contact complexes X_n tels qu'en chaque point on ait $X_n \cap \overline{X}_n = x$.

C'est le problème de la recherche des variétés différentiables V_{2n} admettant une structure analytique complexe ([1]) subordonnée à la la structure différentiable qui a conduit C. Ehresmann [23] à introduire les structures presque complexes : toute structure complexe sur V_{2n} détermine une structure presque complexe (qui est alors intégrable) mais une structure presque complexe ne dérive pas nécessairement d'une structure complexe.

Abordant le même problème par des méthodes différentes, H. Hopf [36] a montré que les sphères S_4 et S_8 n'admettaient pas de structure complexe et il a introduit la notion de variété du type J [38], [37] : une variété est du type J s'il existe dans l'espace tangent T_x un champ continu de transformations du type J (c'est-à-dire de transformations linéaires sans valeurs propres réelles) ou ce qui est équivalent s'il existe une fonction continue associant à chaque direction

([1]) V_{2n} admet une structure analytique complexe s'il existe un recouvrement de V_{2n} par des ouverts U_i (homéomorphes à des boules de R^{2n} identifié à C^n) tel que dans $U_i \cap U_j$, les coordonnées complexes associées à U_j soient des fonctions analytiques (de jacobien non nul) des coordonnées associées à U_i.

dans T_x un élément plan dans T_x. L'existence d'une structure du type J entraîne l'existence d'une structure presque complexe (A. Kirchhoff [39].

La recherche d'une structure analytique complexe sur une variété V_{2n} se fait en deux étapes ;

1° existence d'une structure presque complexe (problème global);

2° intégrabilité de la structure presque complexe (problème local qui sera étudié dans le paragraphe 3).

C. Ehresmann [23], [24] a montré que l'existence d'une structure presque complexe sur V_{2n} est équivalente à celle d'une forme différentielle extérieure quadratique Ω, de rang $2n$ en tout $x \in V_{2n}$ (Ω détermine dans V_{2n} une structure *presque symplectique* qui sera étudiée dans le paragraphe 4) : comme L'_n/U_n est homéomorphe à un espace numérique, à toute structure presque complexe sont subordonnées des structures *presque hermitiennes* (qui seront étudiées dans le paragraphe 5) appartenant à une même classe; à chaque structure presque hermitienne sont associées une métrique riemannienne F définie positive (dont la restriction F_x à T_x est invariante par l'automorphisme I_x) et une forme différentielle extérieure quadratique Ω échangeable avec F (c'est-à-dire telle que le produit des dualités par rapport à F_x et Ω_x soit I_x); on a

$$O_{2n} \cap L'_n = O_{2n} \cap \tilde{L}_{2n} = U_n.$$

Comme Ω détermine une orientation de V_{2n} et que toute variété différentiable admet une structure riemannienne, il en résulte que la recherche des structures presque complexes se ramène à la recherche des structures $T(V_{2n}, R^{2n}, U_n, H')$ subordonnées à la structure riemannienne orientée $T(V_{2n}, R^{2n}, SO_{2n}, H)$ c'est-à-dire (§ 1) à la recherche de sections dans l'espace fibré associé à $T(V_{2n}, R^{2n}, SO_{2n}, H)$, de fibres isomorphes à l'espace homogène $\Gamma_n = SO_{2n}/U_n$. Par l'étude des propriétés topologiques de Γ_n (qui admet une structure fibrée de base S_{2n-2}, de fibre Γ_{n-1}), notamment des groupes d'homotopie de Γ_n, C. Ehresmann a obtenu des conditions nécessaires pour qu'il existe sur V_{2n} une structure presque complexe. Comme Γ_1 est un point, toute variété V_2 orientable admet une structure presque complexe (on sait même que toute V_2 orientable admet une structure analytique complexe). De la relation $\Pi_2(\Gamma_n) = \Pi_2(S_2)$ on déduit que le premier obstacle à la construction d'une section est une classe de cohomologie W^3 à coefficients entiers identique à la classe de Stiefel-Whitney, premier obstacle à l'existence d'un champ associant à tout $x \in V_{2n}$ une suite de $2n - 2$ vecteurs linéairement indépendants tangents à V_{2n} en x. La condition $W^3 = 0$ est même suffisante pour les variétés de dimension 6. Le deuxième obstacle est identique à la classe W^7 de Stiefel-Whitney. Une condition nécessaire pour l'existence d'une structure presque complexe est la nullité des classes W^{2k+1} de Stiefel-Whitney. N. Steenrod [68] a en outre indiqué la condition nécessaire suivante : chaque classe $W^{2k}(k < n)$ doit être l'image mod 2 d'une classe de cohomologie à coefficients entiers.

On peut définir pour les structures presque hermitiennes subordonnées à une structure presque complexe les classes caractéristiques de S. S. Chern [12], la $(n - r + 1)$ ième classe étant le premier obstacle à l'existence d'un champ associant à tout $x \in V_{2n}$ une suite de $n - r + 1$ vecteurs complexes linéairement indépendants tangents à V_{2n} en x. W. T. Wu [73] a établi des relations entre les classes de Stiefel-Whitney, de Chern et de Pontrjagin; il a obtenu des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une variété V_4 admette une structure presque complexe. Il a donné des exemples de variétés orientées V_{2n} dont la classe W^3 n'est pas nulle.

Toutes ces questions sont exposées en détail dans le livre de N. Steenrod [68] et dans la Thèse de W. T. Wu [73].

Structures presque complexes sur la sphère S_{2n} (historique) :

$n = 1$. S_2 étant orientable admet une structure analytique complexe.

$n = 2$. H. Hopf [36] et C. Ehresmann [23] ont montré que S_4 n'admet pas de structure presque complexe subordonnée à sa structure différentiable usuelle; W. T. Wu s'est débarrassé de cette hypothèse [75].

$n = 3$. Comme $W^3 = 0$, C. Ehresmann [23] a montré que S_6 admettait des structures presque complexes, celles qui correspondent à une même orientation de S_6 appartenant à une même classe d'homotopie [24]. Puis A. Kirchhoff [38] a donné l'exemple d'une structure presque complexe sur S_6 définie au moyen des octaves de Cayley.

$n \neq 4r + 3$. S_n n'admet pas de structure presque complexe (A. Kirchhoff [38]).

$n = 2p$. W. T. Wu [72] par une méthode directe, puis N. Steenrod [68] (en utilisant le théorème suivant de A. Kirchhoff : *si* S_{2n} *est presque complexe*, S_{2n+1} *est parallélisable*) *ont montré que* S_{4p} *n'admet pas de structure presque complexe*.

$2n \neq 2^k - 2$. La sphère S_{2n} n'admet pas de structure presque complexe (N. Steenrod et J. H. C. Whitehead [69], Clair E. Miller [59]).

Enfin A. Borel et J. P. Serre [8] ont montré par l'utilisation des puissances réduites de Steenrod que S_2 *et* S_6 *sont les seules sphères admettant une structure presque complexe*.

En utilisant les relations de W. T. Wu [73] entre classes de Chern, de Stiefel-Whitney et de Pontrjagin, F. Hirzebruch [34] a démontré que le plan projectif quaternionien $P_n(Q)$ (pour $n = 1$ et $n > 3$) ainsi que le plan des octaves de Cayley n'admet pas de structure presque complexe. De plus, par l'utilisation des résultats de W. T. Wu [74], [75], R. Thom [70] et A. Borel-J. P. Serre [8], F. Hirzebruch [33] a établi, pour les variétés presque complexes des relations entre classes de Chern, de Pontrjagin et les puissances réduites de Steenrod. Il a défini l'index et le genre de Todd d'une variété presque complexe et a établi en particulier pour les variétés presque complexes V_{2n} admettant une structure fibrée, de fibres $P_k(C)$, de groupe structural le groupe des transformations projectives de $P_k(C)$, des relations entre le genre de Todd de V_{2n} et ceux de la fibre et de la base.

On peut considérer différents types de sous-variétés d'une variété presque complexe (C. Ehresmann [24]), par exemple les sous-variétés réelles et presque complexes définies de la manière suivante : un p-élément de contact X_p tangent en x à la variété presque complexe V_{2n} est dit complexe s'il est invariant par l'automorphisme I_x ; X_p est réel si $X_p \cap I_x X_p = x$; une sous-variété V_p de V_{2n} est réelle (resp. presque complexe) si les p-éléments tangents à V_p sont réels (resp. complexes) ; une sous-variété presque complexe est munie d'une structure presque complexe induite (dérivant d'une structure complexe si V_n est complexe). Si V_n est une sous-variété réelle, il existe un isomorphisme de $T(V_n)$ sur l'espace fibré $N(V_n)$ des vecteurs normaux à V_n. La réciproque de cette proposition permet de démontrer le théorème suivant : *pour toute variété différentiable* V_n, *le voisinage de la diagonale* Δ *de* $V_n \times V_n$ *admet une structure presque complexe telle que* Δ *soit une sous-variété réelle* ; *on peut même munir ce voisinage d'une structure analytique complexe telle que* Δ *soit une sous-variété réelle ; toute variété analytique réelle admet une extension complexe isomorphe à un voisinage de* Δ *muni d'une telle structure complexe.*

C. Ehresmann a remarqué (résultats non publiés) qu'il existe toujours, pour toute dimension, des sous-variétés réelles mais qu'il n'existe pas toujours de sous-variété presque complexe V_p si $p \neq 2$; de même, il n'existe pas toujours (même localement) d'applications presque complexes (c'est-à-dire échangeables avec I) sur une autre variété presque complexe, notamment sur la droite complexe C ; exemple : S_6 n'admet pas de sous-variété presque complexe de dimension 4 et sur S_6 il n'existe pas de fonction presque complexe. Le problème de l'existence de fonctions analytiques complexes sur une variété complexe a été également posé par S. S. Chern [14].

3. **Intégrabilité des structures presque complexes.** — Cette question a été abordée de deux manières différentes : d'abord par l'introduction de formes de Pfaff complexes sur la variété V_{2n} (G. de Rham (non publié), C. Ehresmann [24] et l'auteur [47]) ensuite en restant dans le cadre du calcul tensoriel réel (B. Eckmann et A. Frölicher [19]).

Première méthode. — Soit sur une variété V_{2n} une structure presque complexe définie par un champ I d'automorphismes I_x de T_x ou par la donnée d'un champ $\mathcal{C}$ de n-éléments de contact complexes X_n (tels que $X_n \cap \overline{X}_n = x$). Dans le voisinage U d'un point $x \in V_{2n}$, la structure peut être déterminée par la donnée de n formes de Pfaff complexes $\omega^1, \ldots, \omega^n$ linéairement indépendantes dans le domaine complexe, telles que le champ $\mathcal{C}$ et le champ $\overline{\mathcal{C}}$ des éléments $\overline{X}_n$ soient définis respectivement par $\overline{\omega}^s = 0$, $\omega^s = 0$ $(s = 1, \ldots, n)$. Parmi les connexions affines associées à la structure presque complexe (*cf.* § 1), on peut en distinguer une famille telle que les formes de torsion correspondantes soient définies par

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} d\omega^s &= \Sigma \omega^h \wedge \omega^s_h + \Omega^s, \\ d\omega^{s'} &= \Sigma \omega^{h'} \wedge \omega^{s'}_{h'} + \Omega^{s'}, \\ \Omega^s &= \Sigma A^s_{h\,l} \omega^{h'} \wedge \omega^{l'}, \qquad \Omega^{s'} = \Sigma A^{s'}_{h'\,l'} \omega^h \wedge \omega^l \end{aligned} \right\} (s = 1, \ldots, n ;\ s' = s + n),$$

les conventions suivantes ayant été adoptés :

$$\omega^{s'} = \overline{\omega}^s, \qquad A^{s'}_{h'\,l'} = \overline{A}^s_{h\,l}, \qquad \omega^{s'}_{h'} = \overline{\omega}^s_h ;$$

ces conventions utilisées par l'auteur [51] ont été également employées par A. Lichnerowicz [55] (le signe $'$ étant remplacé par *). Les A^s_{hl}, $A^{s'}_{h'l'}$ sont les composantes du tenseur *complexe* de torsion (tenseur « hybride » au sens de J. A. Schouten [66]). Si l'on peut associer canoniquement une torsion à une structure presque complexe, on ne peut par contre lui associer canoniquement une connexion affine, les ω^β_α n'étant pas déterminées par les équations (3).

Pour que la structure soit intégrable (*c'est-à-dire dérive d'une structure complexe*), *il faut que la torsion soit nulle* (condition indiquée par G. de Rham dans une lettre non publiée); dans le cas où la structure est *analytique réelle* (c'est-à-dire les composantes réelles et imaginaires des ω^α sont analytiques réelles), C. Ehresmann [24] a montré en appliquant le théorème de Frobenius que *ces conditions sont suffisantes;* en accord avec la terminologie de A. Lichnerowicz, nous dirons qu'une structure presque complexe à torsion nulle est *pseudo-complexe*; il est probable qu'en supposant h suffisamment grand, une structure pseudocomplexe de classe C^h dérive d'une structure complexe.

Deuxième méthode. — La structure presque complexe est définie par un champ tensoriel a^i_k vérifiant $\Sigma a^i_k a^k_l = -\delta^i_l$; si les a^i_k sont des fonctions de classe C^h des coordonnées locales, la structure est dite de classe C^h. Si l'on pose $a^i_{kl} = \frac{\partial a^i_k}{\partial x^l} - \frac{\partial a^i_l}{\partial x^k}$ (où les x^j sont des coordonnées locales sur V_{2n}), on peut montrer que les quantités $t^i_{kl} = \Sigma(a^i_{pk}a^p_l - a^i_{pl}a^p_k)$ sont les composantes d'un tenseur que nous désignerons par tenseur *réel* de torsion de la structure presque complexe. B. Eckmann et A. Frölicher ont démontré le théorème suivant : *pour que la structure dérive d'une structure analytique complexe, il faut et, si la structure presque complexe est analytique, il suffit que le tenseur réel de torsion soit nul.*

On peut montrer de différentes manières que cette condition est équivalente à la condition obtenue par la première méthode : par exemple la condition $A^s_{hl} = 0$, $A^{s'}_{h'l'} = 0$ exprime que parmi les connexions affines associées à la structure, il en existe pour lesquelles la torsion est nulle; or, B. Eckmann [18] a démontré la propriété suivante : pour qu'il existe des connexions affines symétriques Λ telles que la dérivée covariante de a^i_k relativement à Λ soit nulle (c'est-à-dire des connexions affines symétriques associées à la structure presque complexe au sens du paragraphe 1), il faut et il suffit que $t^i_{kl} = 0$. Autre démonstration : au tenseur complexe de torsion correspond un tenseur réel $T^\alpha_{\beta\gamma}$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, 2n$) défini (en posant $\omega^s = \theta^s + i\theta^{s'}$, $\omega^{s'} = \theta^s - i\theta^{s'}$, $\omega^s_l = \theta^s_l + i\theta^s_{l'}$, $\omega^{s'}_{l'} = \theta^s_l - i\theta^s_{l'}$) par

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} d\theta^s &= \Sigma\theta^l\wedge\theta^s_l - \Sigma\theta^{l'}\wedge\theta^s_{l'} + \Sigma T^s_{\beta\gamma}\theta^\beta\wedge\theta^\gamma \\ d\theta^{s'} &= \Sigma\theta^l\wedge\theta^s_{l'} + \Sigma\theta^{l'}\wedge\theta^s_l + \Sigma T^{s'}_{\beta\gamma}\theta^\beta\wedge\theta^\gamma \end{aligned} \right\} (s = 1, \ldots, n;\ s' = s+n),$$

les $T^\alpha_{\beta\gamma}$ vérifient les relations suivantes :

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} T^s_{hl} &= -T^s_{h'l'} = -T^{s'}_{hl'} = -T^{s'}_{h'l} \\ T^s_{hl'} &= T^s_{h'l} = T^{s'}_{hl} = -T^{s'}_{h'l'} \end{aligned} \right\} (s, h, l = 1, \ldots, n;\ s' = s+n);$$

or ces relations sont vérifiées par les composantes du tenseur t^i_{kl} en un point x, si l'on prend au voisinage de ce point des coordonnées locales telles qu'en x les seules composantes non nulles du tenseur a_k^l soient $a_{k'}^k = -1$, $a_k^{k'} = 1$ ($k = 1, \ldots, n$; $k' = k + n$). Il y a donc en chaque point identité entre les tenseurs $T_{\beta\gamma}^{\alpha}$ et t_{kl}^i. Une démonstration de l'équivalence des deux conditions d'intégrabilité a été donnée par K. Yano [76].

B. Eckmann [18] a montré que la condition $t_{kl}^i = 0$ est équivalente à la condition

$$(6) \qquad [a, b] + I[Ia, b] + I[a, Ib] - [Ia, Ib] = 0$$

pour tout couple (a, b) de champs vectoriels différentiables tangents à V_{2n}; cette condition a également été indiquée par K. Nomizu (dans un article non publié).

C. Ehresmann et l'auteur [28], puis B. Eckmann et A. Frölicher [19] ont montré que la structure presque complexe sur S_6 définie au moyen des octaves de Cayley ne dérive pas d'une structure complexe. D'autre part, A. Blanchard [4], en utilisant le critère d'Eckmann-Frölicher, a montré que, sans supposer les données analytiques réelles, une structure pseudocomplexe dans un domaine D d'un espace euclidien compatible avec sa métrique euclidienne dérive d'une structure complexe; il en déduit que si une variété riemannienne V_{2n} est « conformally flat » (*cf.* § 6), l'espace fibré associé à $T(V_{2n}, R^{2n}, SO_{2n}, H)$, de fibres isomorphes à Γ_n (*cf.* § 2) admet une structure complexe et que les structures presque complexes correspondant aux sections de cet espace fibré dérivent d'une structure complexe; de ce théorème résulte que la sphère S_6 n'admet pas de structure de variété analytique complexe compatible avec sa structure de sphère euclidienne.

Mais on ignore si la sphère S_6 admet des structures presque complexes dérivant d'une structure complexe.

On peut étendre aux structures presque complexes la notion de *forme pure* introduite par B. Eckmann et H. Guggenheimer [20], [29] pour les structures complexes : la structure presque complexe étant définie dans le voisinage U d'un point de V_{2n} par la donnée de n formes de Pfaff complexes ω^s, une forme différentielle extérieure φ sur V_{2n} est dite pure, de type q, si dans son expression locale, tous les termes différents de zéro sont de même degré q par rapport aux $\omega^{s'} = \overline{\omega^s}$; cette notion (ainsi que le type) a un sens invariant pour la structure presque complexe. Toute forme différentielle extérieure sur V_{2n} est la somme directe de formes pures. Au champ I d'automorphismes I_x de T_x correspond un champ C d'automorphismes C_x : C_x est le contragrédient de I_x dans le dual de T_x; l'opérateur C qui est, au signe près, l'opérateur sur les formes de degré 1 introduit par A. Weil [71] se prolonge aux p-formes; cet opérateur de l'espace vectoriel des p-formes, introduit par H. Guggenheimer [30] ([5]) et l'auteur [50] est à un facteur constant près l'opérateur I de A. Lichnerowicz [54]; aux valeurs propres de C correspondent les formes propres définies par A. Lichnerowicz; en particulier les formes pures sont des formes propres; pour une p-forme φ, de type q, on a

$$C\varphi = (-1)^{p-q} i^p \varphi, \qquad \text{d'où} \qquad C^2 = (-1)^p.$$

Remarquons que l'existence de fonctions analytiques complexes locales sur V_{2n}

([5]) L'opérateur C utilisé par H. Guggenheimer dans sa thèse [29] et dans des travaux ultérieurs [31] est un antiautomorphisme.

est équivalente à celle de formes de Pfaff pures fermées (définies localement).

Lorsque la structure est pseudocomplexe, l'opérateur de différentiation extérieure d peut s'écrire : $d = d_0 + d_1$, où d_0 est un opérateur conservant le type et d_1 un opérateur augmentant le type d'une unité. On a

$$d_0 d_0 = 0, \qquad d_1 d_1 = 0, \qquad d_0 d_1 + d_1 d_0 = 0.$$

On en déduit, en posant $\tilde{d} = (-1)^p C^{-1} dC$ que la relation $d\tilde{d} + \tilde{d}d = 0$ est équivalente à la nullité de la torsion; H. Guggenheimer [31] a démontré ce résultat en utilisant le critère d'Eckmann-Frölicher.

4. **Structures presque symplectiques.** — *a.* Sur une variété V_{2n} une structure presque symplectique (de groupe structural $\tilde{L}_{2n}$) est définie par la donnée d'une forme différentielle extérieure Ω de degré 2, de rang $2n$ (*cf.* § 2). Une telle structure peut être déterminée localement par $2n$ formes de Pfaff ω^s linéairement indépendantes telles que

$$\Omega = \omega^1 \wedge \omega^{n+1} + \ldots + \omega^n \wedge \omega^{2n}.$$

Si $d\Omega = 0$, la structure est dite *symplectique* (C. Ehresmann [24]); une telle structure est *intégrable*; en effet si $d\Omega = 0$, on peut trouver dans le voisinage de tout point de V_{2n} des coordonnées locales telles que Ω s'écrive

$$\Omega = dx^1 \wedge dy^1 + \ldots + dx^n \wedge dy^n.$$

Ce résultat est classique, tout au moins en supposant Ω de classe $C^h (h \geqq 2)$: pour une démonstration dans le cas où $h \geqq 1$, voir [53].

On peut associer canoniquement une torsion à une structure presque symplectique, mais le choix de la torsion ne détermine pas la connexion affine associée; cette torsion est définie par les équations (dans lesquelles, toutes les données étant réelles, on n'adopte pas les conventions du paragraphe 3) :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\omega^j = \Sigma\omega^l \wedge \omega^j_l + \Sigma\omega^{l'} \wedge \omega^j_{l'} + \Omega^j \\ d\omega^{j'} = \Sigma\omega^l \wedge \omega^{j'}_l + \Sigma\omega^{l'} \wedge \omega^{j'}_{l'} + \Omega^{j'} \\ \quad \omega^l_j + \omega^{j'}_{l'} = 0, \qquad \omega^{j'}_l = \omega^{l'}_j, \qquad \omega^j_{l'} = \omega^l_{j'} \end{array} \right\} (j = 1, \ldots, n;\ j' = j + n),$$

avec

$$\Omega^\beta = \frac{1}{3} \alpha^{-1}(\omega^\beta) \rfloor d\Omega \qquad (\beta = 1, \ldots, 2n),$$

où α est la fonction qui associe à tout champ X de vecteurs tangents à V_{2n} la forme φ égale au produit intérieur $X \rfloor d\Omega$ (6); la restriction α_x de α à l'espace tangent T_x est un isomorphisme de T_x sur son dual.

Il résulte des équations précédentes (qui ont été indiquées par l'auteur [51]) que la condition nécessaire et suffisante pour que la structure soit intégrable est la nullité de la torsion.

b. La notion d'adjointe d'une forme différentielle extérieure sur V_{2n} relati-

(6) Le produit intérieur, conformément à la notation de N. Bourbaki (*Algèbre*, chap. III, Paris, 1948) est désigné par le symbole $\rfloor$.

vement à la forme Ω a été introduite par C. Ehresmann et l'auteur [27] de la manière suivante : l'isomorphisme α_x défini précédemment se prolonge à l'espace vectoriel des p-vecteurs tangents en x à V_{2n}; le champ α des isomorphismes α_x associe ainsi à tout champ de p-vecteurs tangents à V_{2n} une p-forme différentielle. *L'adjointe* de la p-forme φ est par définition la $(2n-p)$-forme (7) :

$$\tilde{*}\varphi = \alpha^{-1}(\varphi) \rfloor \frac{\Omega^n}{n!}. \tag{8}$$

L'opérateur $\tilde{*}$ jouit notamment des propriétés suivantes :

$$\tilde{*}\tilde{*} = 1, \qquad \tilde{*}\frac{\Omega^p}{p!} = \frac{\Omega^{n-p}}{(n-p)!} \quad \text{si } p < n, \qquad \tilde{*}\frac{\Omega^n}{n!} = 1. \tag{9}$$

La *codifférentielle* relativement à Ω est par définition l'opérateur $\tilde{\delta} = \tilde{*}\, d\, \tilde{*}$ (vérifiant la relation $\tilde{\delta}\tilde{\delta} = 0$). Une forme φ telle que $d\varphi = 0$ et $\tilde{\delta}\varphi = 0$ est dite harmonique par rapport à Ω ou plus brièvement Ω-harmonique; contrairement aux formes harmoniques par rapport à une métrique riemannienne définie positive, une forme Ω-harmonique sur une variété compacte peut être d-exacte ou $\tilde{\delta}$-exacte sans être nulle.

Considérons en particulier la codifférentielle $\tilde{\delta}\Omega$; elle vérifie les relations

$$\tilde{\delta}\Omega = \alpha^{-1}(\Omega) \rfloor d\Omega, \qquad \left(d\Omega - \frac{\tilde{\delta}\Omega \wedge \Omega}{n-1}\right) \wedge \Omega^{n-2} = 0. \tag{10}$$

Si $d\Omega = 0$, on a $\tilde{\delta}\Omega = 0$, mais pour $n > 2$, $\tilde{\delta}\Omega = 0$ n'entraîne pas $d\Omega = 0$.

Par application répétée des opérateurs d, $\tilde{\delta}$, $\tilde{\Delta} = d\tilde{\delta} + \tilde{\delta}\, d$, on obtient des formes de Pfaff associées canoniquement à la structure, ce qui permet en général de mettre Ω sous forme canonique. Si $\tilde{\delta}\Omega = 0$, tous les invariants obtenue précédemment sont nuls et l'on ne peut résoudre le problème d'équivalence de cette manière. Le problème d'équivalence dans le cas $n = 2$ (avec $d\Omega \neq 0$) a été traité par Yen-Chich-Ta [78].

c. Soient les opérateurs L et $\tilde{\Lambda}$ définis par

$$L\varphi = \varphi \wedge \Omega, \qquad \tilde{\Lambda} = \tilde{*} L \tilde{*}.$$

On a, en raison des propriétés du produit intérieur :

$$\tilde{\Lambda}\varphi = \alpha^{-1}(\Omega) \rfloor \varphi;$$

il en résulte que l'opérateur $\tilde{\Lambda}$ (introduit par l'auteur [50] est à un facteur constant près l'opérateur Λ' introduit par A. Lichnerowicz [54].

Soit maintenant F une métrique riemannienne échangeable avec Ω; en chaque point le produit des dualités par rapport à Ω_x et F_x est un automorphisme I_x de T_x, de carré 1, d'où une structure presque complexe; au champ I d'automorphismes I_x correspond l'opérateur C défini dans le paragraphe 3. Dans

---

(7) L'opérateur $\tilde{*}$ (51) est désigné par $*$ dans [27] et [50]; de même l'opérateur $\tilde{\delta}$ est désigné par δ dans [27] et $\hat{\delta}$ dans [50].

le voisinage d'un point de V_{2n}, on peut écrire

$$F = (\omega^1)^2 + (\omega^{n+1})^2 + \ldots + (\omega^n)^2 + (\omega^{2n})^2, \qquad \Omega = \omega^1 \wedge \omega^{n+1} + \ldots + \omega^n \wedge \omega^{2n}.$$

Soit φ_p une p-forme dont l'expression locale est $\Sigma A_{\beta_1 \ldots \beta_p} \omega^{\beta_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{\beta_p}$. L'adjointe de φ_p par rapport à F est selon une définition de G. de Rham [3] la forme $* \varphi_p$ dont l'expression locale est

$$(11) \qquad * \varphi_p = \Sigma \delta^{1 \ldots 2n}_{\beta_1 \ldots \beta_{2n}} A_{\beta_1 \ldots \beta_p} \omega^{\beta_{p+1}} \wedge \ldots \wedge \omega^{\beta_{2n}}.$$

La codifférentielle δ est l'opérateur $- * d *$. Les opérateurs $*$ et $\tilde{*}$ sont liés par la relation

$$(12) \qquad \tilde{*} \varphi_p = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2} + p} * C \varphi_p,$$

d'où

$$(13) \qquad \tilde{\delta} \varphi_p = (-1)^p C^{-1} \delta C \varphi_p.$$

Donc pour une forme propre relativement à l'opérateur C (*cf.* § 3) les opérateurs $\tilde{*}$ et $*$ sont identiques à un facteur constant près; il en est alors de même de $\tilde{\delta}$ et δ; donc une forme propre Ω-harmonique est harmonique au sens usuel.

La formule (12) permet de démontrer que *l'opérateur* $\tilde{\Lambda}$ *est identique à l'opérateur* $\Lambda = (-1)^p * L *$ introduit par A. Weil [71] et Eckmann-Guggenheimer [20]. Ce résultat a été démontré indépendamment par A. Lichnerowicz [54] et l'auteur [50]. Donc l'opérateur Λ ne dépend que de Ω et non de la métrique échangeable avec Ω; il en est de même de la notion de *classe* définie de la manière suivante par B. Eckmann et H. Guggenheimer : une p-forme φ_p est *simple*, de classe k si elle est égale à $\psi_{p-2k} \wedge \frac{\Omega^k}{k!}$ où ψ_{p-2k} est une forme *effective* (ou de classe o) c'est-à-dire telle que $\Lambda \psi_{p-2k} = 0$. On a [50]

$$(14) \qquad \tilde{*}\left(\psi_{p-2k} \wedge \frac{\Omega^k}{k!}\right) = (-1)^{\frac{(p-2k)(p-2k-1)}{2}} \psi_{p-2k} \wedge \frac{\Omega^{n-p+k}}{(n-p+k)!}.$$

B. Eckmann et H. Guggenheimer, en utilisant l'expression de l'adjointe d'une forme simple et en démontrant que ΛL est un automorphisme de l'espace vectoriel Φ_q des q-formes différentielles sur V_{2n} $(q \leq n-2)$ ont démontré que *toute p-forme* φ_p $(p \leq n)$ *est la somme directe de formes simples* : la décomposition définit un homomorphisme de Φ_p *sur* l'espace vectoriel Ψ_{p-2k} des formes effectives de degré $p-2k\left(k=0, \ldots, \left[\frac{p}{2}\right]\right)$; nous désignerons cet homomorphisme par K^p_{p-2k}. Le théorème de décomposition, qui généralise un théorème de Hodge [35] a été également démontré par A. Lichnerowicz [54] en utilisant la formule suivante :

$$(15) \qquad \Lambda L^k \varphi = c_1 L^k \varphi + c_2 L^{k-1} \varphi$$

valable pour toute p-forme $(p \leq n-2k)$, où c_1 et c_2 sont des constantes. Le théorème a été également démontré par l'auteur [51] en utilisant la notion de *genre* d'une forme différentielle : le genre d'une forme φ_p est le plus petit entier tel que $\Lambda^{l+1}\varphi_p = 0$.

Remarquons que la décomposition de $d\Omega$ est [en raison des formules (10)] :

$$d\Omega = \psi + \frac{\tilde{\delta}\Omega \wedge \Omega}{n-1}.$$

Du théorème de décomposition résulte que l'opérateur f : $\varphi_p \to \tilde{*}\, L^{n-p}\varphi_p$ est un automorphisme de Φ_p, ce qui permet de déduire un théorème démontré antérieurement par Th. Lepage [44] et G. Papy [64] : l'opérateur L^p est isomorphisme de Φ_{n-p} sur Φ_{n+p}. Par suite pour qu'une forme ψ_p soit effective, il faut et il suffit que $\psi_p \wedge \Omega^{n-p+1} = 0$, *ce qui identifie les formes effectives aux formes « de type* ρ^p *» de Th. Lepage* [45] et la décomposition d'Eckmann-Guggenheimer est identique à la décomposition de Th. Lepage; en particulier l'opérateur K_p^p est l'opérateur r de Th. Lepage dont le noyau est l'ensemble des p-formes divisibles par Ω.

Il a été également démontré dans [51] que $\Lambda^k L^k (1 \leq k \leq n-1)$ est un automorphisme de $\Phi_p (p = 1, \ldots, n-k)$.

Nous supposerons dans la suite de ce paragraphe la structure *symplectique*; on a

$$d\Omega = 0, \qquad \tilde{\delta}\Omega = 0, \qquad \delta\Omega = 0;$$

par suite $\Omega^p (p = 1, \ldots, n)$ est harmonique; donc *les nombres de Betti de dimension paire d'une variété symplectique compacte sont différents de zéro* (résultat dû à G. de Rham).

On a

$$(16) \qquad dL = Ld, \qquad \Lambda\tilde{\delta} = \tilde{\delta}\Lambda, \qquad \Lambda\delta = \delta\Lambda;$$

par suite si une forme simple est fermée, elle est Ω-harmonique; *on peut même montrer que si une forme simple* φ_p *est homologue à zéro* ($\varphi_p = d\varphi_{p-1}$), *elle est* $\tilde{\delta}$*-exacte* ($\varphi_p = \tilde{\delta}\varphi_{p+1}$, avec $\varphi_{p+1} = k\,\tilde{*}\, L^{n-p}\varphi_{p-1}$). On obtient le théorème suivant [50] : *si une forme* φ_p *est* Ω*-harmonique, ses composantes simples le sont aussi.*

Pour une forme simple de classe k, on a $d\varphi_p = \varphi_{p+1} + \varphi'_{p+1}$ où φ_{p+1} est de classe k et φ'_{p+1} de classe $k+1$, résultat démontré par H. Guggenheimer [30] et l'auteur [50] qui a utilisé la formule suivante (relative à une forme effective ψ_p) :

$$(17) \qquad d\psi_p = \psi_{p+1} + (-1)^{p-1}\frac{\tilde{\delta}\psi_p \wedge \Omega}{n-p+1},$$

où ψ_{p+1} est effective (ainsi d'ailleurs que $\tilde{\delta}\psi_p$). Les formules suivantes ont été démontrées par H. Guggenheimer [30], A. Lichnerowicz [54] et l'auteur [50] pour une forme φ_p quelconque :

$$(18) \qquad \begin{cases} (\tilde{\delta}L - L\tilde{\delta})\varphi_p = (-1)^p d\varphi_p, \\ (d\Lambda - \Lambda d)\varphi_p = (-1)^p \tilde{\delta}\varphi_p, \end{cases}$$

on peut en déduire $d\tilde{\delta} = \tilde{\delta} d$.

Th. Lepage [46] a introduit l'opérateur $D = dqd$ où q est l'application de Φ_p sur Φ_{p-2} définie par $\varphi_p = r\varphi_p + q\varphi_p \wedge \Omega$; cet opérateur D (tel que $D^2 = 0$) jouit des propriétés suivantes : $Dr = r$ (D opère donc sur les classes mod Ω), $\Lambda D = 0$; Th. Lepage a en outre démontré que toute forme effective fermée ψ_p est localement D-exacte : pour toute forme effective fermée ψ_p, il existe une forme φ_p telle que localement $D\varphi_p = \psi_p$. On peut d'ailleurs démontrer en utilisant la formule (17) que l'opérateur D est (à un facteur constant près) l'opérateur $d\tilde{\delta}r$ (ou $\tilde{\delta}dr$).

Considérons une structure presque kählérienne subordonnée à la structure symplectique; il résulte des résultats précédents que toute forme propre (pour l'automorphisme C) effective, fermée est harmonique (au sens usuel), résultat également démontré par A. Lichnerowicz [54]; le théorème de décomposition d'une forme Ω-harmonique est équivalent à un théorème de A. Lichnerowicz relatif à la décomposition d'une forme φ telle que φ et $C\varphi$ soient harmoniques. A. Lichnerowicz a également démontré que si V_{2n} est compacte et admet une forme à dérivée covariante nulle (relativement à la connexion riemannienne), l'ensemble des formes propres fermées et effectives n'est pas vide.

Toute forme pure de type o (*cf.* § 3) est effective; donc *les formes pures de type* o, *fermées sont harmoniques*; on peut désigner ces formes par *pseudo-analytiques* (cette notion a été introduite par H. Guggenheimer [31] sous une forme un peu différente); lorsque la structure est kählérienne, une telle forme peut s'écrire localement : $\Sigma a_{i_1\ldots i_p}(z^1, \ldots, z^n)\, dz^{i_1} \wedge \ldots \wedge dz^{i_p}$; c'est une forme analytique et B. Eckmann [20] a démontré qu'une telle forme est harmonique.

Supposons maintenant la forme Ω cofermée mais non fermée; $\tilde{\delta}\Omega = 0$ entraîne $\Lambda d\omega = \tilde{\delta}\omega$ pour toute forme de Pfaff ω; cette formule, démontrée par l'auteur [51], n'est autre que l'une des formules (15) (cette formule ne serait plus valable pour les formes de degré > 1). On en déduit que si $\tilde{\delta}\Omega = 0$, toute forme de Pfaff pure est harmonique. Mme M. Apte [2] a étudié les structures hermitiennes douées d'une $\delta\Omega$-métrique (c'est-à-dire telles que $\delta\Omega = 0$, ce qui est équivalent à $\tilde{\delta}\Omega = 0$). Elle a démontré que pour une telle métrique les coordonnées analytiques complexes sont isothermes $[\Delta(z^\alpha) = 0]$ (ce qui pourrait se déduire des résultats précédents); elle a, de plus, démontré qu'inversement si les coordonnées z^α sont isothermes, on a alors $\delta\Omega = 0$.

d. Une forme différentielle extérieure Ω (de rang maximum) sur une variété V_{2n} admet un facteur intégrant s'il existe une fonction différentiable λ des coordonnées locales telle que $d(\lambda\Omega) = 0$. Ce problème a d'abord été traité par H. C. Lee [43] puis indépendamment par C. Ehresmann et l'auteur [27], [51].

H. C. Lee considère sur une variété V_{2n} la structure définie par la donnée d'un tenseur antisymétrique $a_{\alpha\beta}$ non singulier. Au tenseur $a_{\alpha\beta}$ sont associés les tenseurs :

$$K_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial a_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} \quad \text{(tenseur de courbure)};$$

$$K_\alpha = \Sigma K_{\alpha\beta\gamma} a^{\beta\gamma} \quad \text{(vecteur covariant de courbure)};$$

$$b_{\alpha\beta} = \frac{\partial K_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial K_\beta}{\partial x^\alpha} \quad \text{(premier tenseur conforme de courbure)};$$

$$C_{\alpha\beta\gamma} = K_{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{2(n-1)}(K_\alpha a_{\beta\gamma} + K_\beta a_{\gamma\beta} + K_\gamma a_{\alpha\beta}) \quad \text{(deuxième tenseur conforme de courbure)}.$$

Au tenseur $a'_{\alpha\beta} = \lambda a_{\alpha\beta}$ sont associés les tenseurs $K'_{\alpha\beta\gamma}$, $K'_\alpha = K_\alpha - 2(n-1)\frac{\partial \log \lambda}{\partial x^\alpha}$, $b'_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}$, $C'_{\alpha\beta\gamma} = \lambda C_{\alpha\beta\gamma}$. H. C. Lee en déduit les conditions pour que la structure soit « conformally flat » c'est-à-dire pour qu'il existe une fonction λ telle le tenseur $\lambda a_{\alpha\beta}$ définisse une structure « flat » (structure à tenseur de courbure nul ou encore telle que la forme différentielle extérieure associée au tenseur $a_{\alpha\beta}$ soit fermée).

Pour que la structure soit « conformally flat », il faut et il suffit pour $n > 2$ que le deuxième tenseur conforme de courbure soit nul (ce qui entraîne la nullité du premier tenseur conforme); pour $n = 2$, il suffit que la forme $\Sigma K_\alpha\, dx^\alpha$ soit une différentielle exacte.

Les mêmes résultats ont été obtenus de manière différente par C. Ehresmann et l'auteur; en raison de la décomposition :

$$d\Omega = \psi + \frac{\tilde{\delta}\Omega \wedge \Omega}{n-1},$$

on a pour la forme $\Omega' = \lambda\Omega$,

$$d\Omega = \psi' + \frac{\tilde{\delta}'\Omega' \wedge \Omega'}{n \wedge 1}$$

(ou $\tilde{\delta}'\Omega'$ est la codifférentielle de Ω' par rapport à elle-même), avec

$$\psi' = \lambda\psi, \qquad \tilde{\delta}'\Omega' = \tilde{\delta}\Omega + (n-1)\frac{d\lambda}{\lambda}.$$

On en déduit le théorème suivant : *pour que* Ω *admette un facteur intégrant, il faut et il suffit, pour* $n > 2$, *que* $\psi = 0$ (*ce qui entraîne* $d\tilde{\delta}\Omega = 0$). *Pour* $n = 2$, *on a* $\psi = 0$ *identiquement; pour que* Ω *admette un facteur intégrant, il faut et il suffit que* $d\tilde{\delta}\Omega = 0$. Remarquons que l'on a localement

$$\tilde{\delta}\Omega = \Sigma K_\alpha\, dx^\alpha, \qquad d\tilde{\delta}\Omega = \Sigma b_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta, \qquad \psi = \Sigma C_{\alpha\beta\gamma}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma.$$

Pour que Ω admette un facteur intégrant global, il faut, outre les conditions précédentes, que $\tilde{\delta}\Omega$ soit homologue à zéro.

Si la forme Ω admet un facteur intégrant, on peut écrire localement [27] :

$$\Omega = y^1(dx^1 \wedge dy^1 + \ldots + dx^n \wedge dy^n).$$

La forme est alors complètement intégrable : il existe une variété intégrale de Ω de dimension n tangente à tout n-élément de contact intégral de Ω. Inversement pour que Ω soit complètement intégrable il faut et il suffit que la forme ψ soit nulle.

H. C. Lee a donné les conditions pour qu'un vecteur covariant soit le vecteur d'une transformation infinitésimale conservant la structure « conformally flat ».

e. Des applications des propriétés de la géométrie symplectique à la résolution de certaines équations aux dérivées partielles et au calcul des variations ont été faites par Th. Lepage [46] et J. M. Souriau [67].

Th. Lepage a considéré un type d'équations aux dérivées partielles du deuxième ordre généralisant les équations de Monge-Ampère dont les solutions sont des polynomes (à coefficients fonctions de $2n$ variables) et il a démontré que l'espace vectoriel de ces polynomes est isomorphe à l'espace des formes effectives de degré n relativement à une forme quadratique extérieure de rang $2n$.

J. M. Souriau a utilisé la notion de produit scalaire relativement à une forme différentielle extérieure quadratique fermée Ω; tout vecteur est isotrope (c'est-à-dire orthogonal à lui-même); les « variétés isotropes saturées » sont les variétés de dimension n intégrales de Ω. J. M. Souriau a obtenu le théorème de Jacobi généralisé : deux hypersurfaces quelconques (de dimension $2n-1$) sont applicables l'une sur l'autre.

G. Reeb [65] a étudié certains problèmes relatifs aux structures presque symplectiques et aux systèmes dynamiques.

5. **Structures presque hermitiennes. Connexions affines associées.** — *a.* Une structure presque hermitienne peut être définie par la donnée d'une métrique riemannienne définie positive F et d'un champ I d'automorphismes I_x de T_x laissant invariante la restriction F_x de F ou par la donnée de F et d'une forme différentielle extérieure quadratique Ω échangeable avec F.

Nous ne citerons pas les innombrables travaux (Lefschetz, Hodge, Bochner, etc.) concernant les structures kählériennes; toute variété algébrique plongée sans singularités dans l'espace projectif complexe est une variété kählérienne. Les premiers exemples de variétés complexes non kählériennes ont été donnés par H. Hopf [37]. B. Eckmann et E. Calabi [9], [18] ont construit des exemples de variétés compactes et simplement connexes n'admettant pas de métrique kählérienne : ce sont des variétés complexes homogènes $M_{p,q}$ homéomorphes (au sens analytique réel) au produit cartésien $S_{2p+1} \times S_{2q+1}$ de deux sphères de dimension impaire (on suppose $p > 0$; $q > 0$; pour $q = 0$, on obtient les exemples de H. Hopf non simplement connexes).

A. Lichnerowicz [56] a désigné par *pseudokählérienne* (primitivement localement kählérienne [55]) une structure presque kählérienne subordonnée à une structure presque complexe sans torsion et il a montré qu'une variété pseudokählérienne est une variété riemannienne admettant une forme quadratique extérieure Ω (de rang $2n$) à *dérivée covariante nulle* ou encore une variété riemannienne telle que le groupe d'holonomie homogène Ψ_x soit sous-groupe de la représentation réelle de U_n; A. Lichnerowicz [55] a démontré directement pour les variétés pseudokählériennes les propriétés cohomologiques classiques des variétés kählériennes compactes (B. Eckmann et H. Guggenheimer [20], [29]) : parité des nombres de Betti b^{2p+1} de dimension impaire, croissance des nombres de Betti ($b^{p-2} \leq b^p$ pour $p \leq n$), décomposition de toute classe de cohomologie de dimension $p \leq n$ en somme directe de classes de cohomologie admettant une forme simple comme représentant. En raison de l'isomorphisme de l'espace vectoriel H_p des p-formes harmoniques sur le $p^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie d'une variété compacte V_{2n} (de Rham [3]), il suffit de démontrer que les opérateurs C, L, Λ commutent avec $\Delta = d\delta + \delta d$. A. Lichnerowicz associe, sur une variété riemannienne, à toute forme différentielle extérieure de degré k une série d'opérateurs K_h ($h = 0, \ldots, k$) et il a démontré que si la forme est à dérivée covariante nulle, ces opérateurs commutent avec Δ; si l'on considère la forme Ω (de degré 2) associée à la structure pseudokählérienne, on a (à un facteur constant près) : $K_0 = L$, $K_1 = C$, $K_2 = \Lambda$. Remarquons qu'on pourrait démontrer que Δ permute avec C, L, Λ en utilisant le fait que $d\Omega = 0$ (d'où $dL = Ld$, $d\tilde{\delta} = \tilde{\delta} d$) et que l'opérateur d se décompose en la somme $d_0 + d_1$ (*cf.* § 3)

b. Dans le voisinage U d'un point de V_{2n} une structure presque hermitienne peut être déterminée par la donnée de n formes de Pfaff complexes ω^s telles que la forme d'Hermite et la forme différentielle extérieure associées à la structure puissent s'écrire, en employant les mêmes conventions que dans le paragraphe 3 ($\omega^{s'} = \bar{\omega}^s$) :

$$\Phi = \Sigma \omega^s \omega^{s'}, \qquad \Omega = i \Sigma \omega^s \wedge \omega^{s'}.$$

On peut associer canoniquement des connexions affines à une structure presque hermitienne; la première de ces connexions a été introduite dans le cas hermitien par J. A. Schouten et D. van Dantzig qui l'ont désignée par connexion *unitaire* (*voir* J. A. Schouten [66]) puis par S. S. Chern [12]; dans le cas presque hermitien, cette connexion a été introduite par C. Ehresmann et l'auteur [28]; elle peut être définie par les formes ω^s, ω^l_s vérifiant les équations (avec $\omega^{s'} = \bar{\omega}^s$, $\omega^{s'}_{l'} = \bar{\omega}^s_l$, $A^{s'}_{l'h'} = \bar{A}^s_{lh}$) :

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\omega^s = \Sigma \omega^l \wedge \omega^s_l + \Sigma A^s_{lh} \omega^l \wedge \omega^h + \Sigma B^s_{lh} \omega^{l'} \wedge \omega^{h'} \\ d\omega^{s'} = \Sigma \omega^{l'} \wedge \omega^{s'}_{l'} + \Sigma A^{s'}_{l'h'} \omega^{l'} \wedge \omega^{h'} + \Sigma B^{s'}_{l'h'} \omega^l \wedge \omega^h \\ \omega^s_l + \omega^{l'}_{s'} = 0, \qquad A^s_{hl} + A^s_{lh} = 0, \qquad B^s_{lh} + B^s_{hl} = 0 \end{array} \right\} \quad (s, l, h = 1, \ldots, n).$$

Les formes

$$\Omega^s = \Sigma A^s_{lh} \omega^l \wedge \omega^h, \qquad \Omega^{s'} = \Sigma A^{s'}_{l'h'} \omega^{l'} \wedge \omega^{h'}$$

définissent la première torsion de la connexion, les formes

$$\Gamma^s = \Sigma B^s_{lh} \omega^{l'} \wedge \omega^{h'}, \qquad \Gamma^{s'} = \Sigma B^{s'}_{l'h'} \omega^l \wedge \omega^h$$

la deuxième torsion (qui est la torsion de la structure presque complexe à laquelle est subordonnée la structure presque hermitienne). Pour que la structure soit presque kählérienne, il faut et il suffit que

$$\Omega^s = 0, \qquad \Omega^{s'} = 0, \qquad B^s_{lh} + B^l_{hs} + B^h_{sl} = 0, \qquad B^{s'}_{l'h'} + B^{l'}_{h's'} + B^{h'}_{s'l'} = 0;$$

pour que la structure soit pseudokählérienne, il faut et il suffit que les deux torsions soient nulles. On définit les formes de courbure par

$$\Omega^s_l = d\omega^s_l - \Sigma \omega^h_l \wedge \omega^s_h, \qquad \Omega^{s'}_{l'} = d\omega^{s'}_{l'} - \Sigma \omega^{h'}_{l'} \wedge \omega^{s'}_{h'}.$$

On déduit des identités de Bianchi (*cf.* § 1) que dans le cas pseudokählérien, les composantes du tenseur de courbure vérifient certaines relations de symétrie (indiquées par S. S. Chern [12] dans le cas kählérien).

Comme on peut associer canoniquement des connexions affines à une structure presque hermitienne, on peut démontrer la propriété suivante [51] : pour que la structure soit intégrable, il faut et il suffit que la courbure et la torsion soient nulles; on peut donc démontrer dans ce cas que la structure est kählérienne sans supposer les données analytiques.

Une autre connexion canonique a été introduite par A. Lichnerowicz [38] de la manière suivante : la connexion riemannienne associée à la métrique F peut être définie par les formes : ω^s, $\omega^{s'}$, $\hat{\omega}_l^s$, $\hat{\omega}_{l'}^s$, $\hat{\omega}_l^{s'}$, $\hat{\omega}_{l'}^{s'}$ vérifiant les équations

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{c} d\omega^s = \Sigma\omega^l \wedge \hat{\omega}_l^s + \Sigma\omega^{l'} \wedge \hat{\omega}_{l'}^s \\ d\omega^{s'} = \Sigma\omega^l \wedge \hat{\omega}_l^{s'} + \Sigma\omega^{l'} \wedge \hat{\omega}_{l'}^{s'} \\ \hat{\omega}_l^s + \hat{\omega}_{s'}^{l'} = 0, \qquad \hat{\omega}_{l'}^s + \hat{\omega}_{s'}^l = 0, \qquad \hat{\omega}_l^{s'} + \hat{\omega}_s^{l'} = 0 \end{array}\right\} \quad (s = 1, \ldots, n;\ s' = s + n).$$

Si l'on pose

$$\hat{\omega}_{l'}^s = \Sigma(a_{lk}^s \omega^k + b_{lk}^s \omega^{k'}), \qquad \hat{\omega}_l^{s'} = \Sigma(a_{l'k'}^{s'} \omega^{k'} + b_{l'k'}^{s'} \omega^k),$$

les $a_{\beta\gamma}^\alpha$ et $b_{\beta\gamma}^\alpha$ constituent les composantes d'un tenseur par rapport au groupe unitaire U_n; donc l'ensemble des ω^s et des $\hat{\omega}_l^s$ (ainsi que leurs imaginaires conjuguées) définit une connexion associée à la structure presque hermitienne appelée *connexion hermitienne induite par la connexion riemannienne*. L'ensemble des formes $\hat{\Omega}^s = \Sigma a_{lk}^s \omega^l \wedge \omega^{k'}$ et $\Gamma^s = \Sigma b_{lk}^s \omega^{l'} \wedge \omega^{k'}$ et leurs imaginaires conjuguées (avec $a_{lk}^s + a_{sk}^l = 0$, $b_{lk}^s + b_{sk}^l = 0$) définissent respectivement la première et la deuxième torsion de la connexion. On a

$$\hat{\omega}_l^s = \omega_l^s + \Sigma(A_{lh}^s \omega^h - A_{s'h}^{l'} \omega^{h'}), \qquad a_{hl}^s = -A_{s'h'}^{l'}, \qquad b_{lh}^s = B_{lk}^s + B_{sk}^l + B_{ls}^k;$$

on en déduit que les deuxièmes torsions des deux connexions coïncident. Pour que les deux connexions coïncident, il faut et il suffit que la première torsion de l'une d'entre elles soit nulle (ce qui a lieu notamment pour les structures presque kählériennes). Dans le cas pseudokählérien, on a $\hat{\omega}_{l'}^s = 0$, $\hat{\omega}_l^{s'} = 0$ et les deux connexions coïncident avec la connexion riemannienne. Une étude de ces deux connexions hermitiennes a été faite par G. Legrand [42] qui a calculé les composantes des connexions par rapport à des repères non unitaires. En imposant d'autres conditions à la première torsion, on pourrait définir d'autres connexions affines associées à la structure presque hermitienne mais seules ces deux connexions admettent une première torsion qui soit définie par des formes pures de type 0 pour la première, de type 1 pour la deuxième. Parmi les autres connexions, celle définie par les formes ω^s et $\theta_l^s = \dfrac{\omega_l^s + \hat{\omega}_l^s}{2}$ (et leurs imaginaires conjuguées) est particulièrement intéressante : les formes définissant la première torsion peuvent s'écrire

$$\Theta^s = \Sigma\omega^l \wedge \varphi_l^s, \qquad \Theta^{s'} = \Sigma\omega^{l'} \wedge \varphi_{l'}^{s'} \qquad \text{avec} \quad \varphi_l^s = \varphi_{s'}^{l'}.$$

Si la deuxième torsion est nulle, on a

$$\Theta^s = \frac{1}{3}\alpha^{-1}(\omega^s) \rfloor d\Omega$$

et la torsion peut être dite induite par la torsion de la structure presque symplectique (*cf.* § 4) à laquelle la structure pseudohermitienne est subordonnée. Nous verrons dans le paragraphe 6 que pour la connexion hermitienne ainsi définie, la courbure conforme coïncide avec la courbure; c'est pourquoi nous la désignerons par *connexion hermitienne conforme*. Les résultats concernant cette connexion n'ont pas été publiés.

S. S. Chern a montré [12] (dans le cas hermitien mais ce résultat s'étend au cas presque hermitien) que pour $r = 1, \ldots, n$, la $r^{\text{ième}}$ classe caractéristique (ou classe de Chern) (*cf.* § 2) est la classe de cohomologie de la forme

$$\Psi_r = \frac{1}{(2\pi i)^{n-r+1}(n-r+1)!} \Sigma^{i_1\ldots i_{n-r+1}}_{j_1\ldots j_{n-r+1}} \Omega^{i_1}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \Omega^{i_{n-r+1}}_{j_{n-r+1}};$$

on peut vérifier que, suivant le théorème de A. Weil (*cf.* § 1), on obtient la même classe en remplaçant les Ω^s_l par les formes de courbure de toute autre connexion affine associée à la structure. En particulier si l'on désigne par $\hat{\Omega}^s_l$ les formes de courbure de la connexion induite par la connexion riemannienne, on a

$$\psi_n = \hat{\psi}_n = \frac{1}{2\pi i}(\Sigma\Omega^s_s - \Sigma\hat{\Omega}^s_s) = \rho\, d\delta\Omega, \tag{21}$$

où ρ est une constante et $\delta\Omega$ est la codifférentielle de Ω relativement à la métrique riemannienne associée à la structure. Si l'on pose

$$\Sigma\Omega^s_s = \Sigma R_{l'm}\,\omega^{l'} \wedge \omega^m + \Sigma R_{lm}(\omega^l \wedge \omega^m - \omega^{l'} \wedge \omega^{m'}),$$

le tenseur $R_{l'm}$ (tel que $R_{l'm} = R_{ml'}$) peut être appelé le tenseur de Ricci de la connexion unitaire; on définirait de même le tenseur $\hat{R}_{l'm}$. A. Lichnerowicz [57] et l'auteur [52] ont démontré que dans le cas pseudokählérien, le tenseur de Ricci $R_{l'm}(= \hat{R}_{l'm})$ est identique au tenseur de Ricci de la connexion riemannienne. A Lichnerowicz [58] a étudié des structures hermitiennes pour lesquelles la forme $\hat{\psi}_n$ est nulle, et il a étendu au cas d'espaces homogènes complexes non kählériens certains résultats qu'il avait obtenus précédemment [56] pour des espaces homogènes kählériens à courbure de Ricci nulle. A. Lichnerowicz a démontré notamment les théorèmes suivants : *pour qu'une variété hermitienne admette, pour la connexion hermitienne induite, un groupe d'holonomie* $\hat{\sigma}_x$ *sous-groupe de* SU_n, *il faut et il suffit que* $\psi_n = 0$; *tout espace homogène complexe compact à groupe linéaire d'isotropie connexe irréductible et à forme* ψ_n *nulle est localement euclidien.*

c. C. Ehresmann et l'auteur [28] ont déterminé les structures presque hermitiennes *isotropes* en chaque point $x \in V_{2n}$ (*cf.* § 1); pour de telles structures les composantes des tenseurs de torsion et de courbure sont en chaque point indépendantes du corepère considéré. Le théorème suivant a été obtenu : *une structure presque hermitienne isotrope en chaque point est localement homogène; une telle structure est intégrable ou bien localement équivalente à la structure d'espace hermitien elliptique ou hyperbolique.* Une structure presque hermitienne isotrope est donc kählérienne. Si l'on se borne à une isotropie restreinte (changements de corepères appartenant à SU_n), on obtient, outre les structures précédentes, les structures localement équivalentes à la structure presque hermitienne sur S_6 définie à l'aide des octaves de Cayley, structure admettant le groupe simple exceptionnel G_2 comme groupe d'automorphismes et telle que toute structure localement homogène sur S_6 lui soit localement équivalente.

d. S. S. Chern [15] a défini la notion de variété riemannienne analytique *localement hermitienne* et *localement kählérienne* (ces définitions s'appliquent au cas non analytique). Une variété analytique riemannienne V_{2n} est localement hermitienne si tout point $x \in V_{2n}$ admet un voisinage U_x (homéomorphe à une boule ouverte de R^{2n}) tel que parmi les structures presque complexes dans U_x compatibles avec la métrique riemannienne induite dans U_x, il en existe au moins une qui dérive d'une structure complexe; si, de plus, dans chaque U_x, la structure hermitienne ainsi définie est kählérienne, la métrique sur V_{2n} est dite localement kählérienne. S. S. Chern a démontré qu'une métrique riemannienne analytique est localement hermitienne s'il existe des repères orthogonaux pour lesquels les composantes du tenseur de courbure de la connexion riemannienne vérifient certaines relations linéaires homogènes; il a montré que ces conditions sont suffisantes en utilisant la théorie des systèmes de Pfaff en involution de E. Cartan. Pour que, de plus, la structure soit localement kählérienne, il faut et il suffit que les formes de courbure vérifient les relations

$$\Omega_{j,n+k} = \Omega_{k,n+j}; \qquad \Omega_{jk} = \Omega_{n+j,n+k};$$

ces relations pourraient s'obtenir à partir des formules (20); si la courbure est supposée constante elles entraînent que la variété est localement euclidienne. S. S. Chern qui a construit un exemple de variété compacte V_4 localement kählérienne et non kählérienne, établit une relation entre la caractéristique d'Euler-Poincaré et un autre invariant topologique des variétés localement kählériennes de dimension 4; il en déduit que S_4 n'admet pas de métrique localement kählérienne (mais S_4 admet des métriques localement hermitiennes).

6. Courbure scalaire, courbure et torsion conformes des variétés presque hermitiennes. — *a.* La notion de courbure scalaire associée à une structure kählérienne a été introduite par S. Bochner [5]. L'extension de cette notion à une structure presque hermitienne quelconque a été faite par l'auteur de la manière suivante [48] : si V et W (de composantes $\xi^1, \ldots, \xi^n, \eta^1, \ldots, \eta^n$) sont deux vecteurs tangents à V_{2n} en $x \in V_{2n}$, l'ensemble des vecteurs $mV + pW$ $\left(\text{où } \frac{p}{m} \text{ est réel}\right)$ engendre un élément plan P à deux dimensions réelles dans lequel la courbure scalaire est définie par

$$K = \frac{\Sigma[R^{s}_{l'l'h}(\xi^{l'}\eta^{h} - \xi^{h}\eta^{l'}) + R^{s}_{llh}(\xi^{l}\eta^{h} - \xi^{h}\eta^{l}) - R^{l}_{s'l'h'}(\xi^{l'}\eta^{h'} - \xi^{h'}\eta^{l'})](\xi^{l}\eta^{s'} - \xi^{s'}\eta^{l})}{\Sigma(\xi^{l'}\eta^{s} - \xi^{s}\eta^{l'})(\xi^{l}\eta^{s'} - \xi^{s'}\eta^{l}) + \Sigma(\xi^{l}\eta^{s} - \xi^{s}\eta^{l})(\xi^{l'}\eta^{s'} - \xi^{s'}\eta^{l'})}, \tag{22}$$

où les $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ sont les composantes du tenseur de courbure de la connexion unitaire (on utilise toujours les conventions du paragraphe 3 : $\xi^{s'} = \bar{\xi}^{s}$, etc.). Lorsque la structure est pseudokählérienne, on obtient pour K la courbure scalaire définie par S. Bochner en utilisant le tenseur de courbure de la connexion riemannienne. Le théorème suivant a été obtenu : *si en chaque point* $x \in V_{2n}$, K *est indépendant de l'élément plan* P, *on a* $K = 0$, *ce qui n'entraîne d'ail-*

leurs pas que le tenseur de courbure soit nul. Si l'on suppose la structure presque kählérienne, on obtient le théorème suivant (généralisant un théorème de S. Bochner relatif aux structures kählériennes) : *les structures presque kählériennes à courbure scalaire nulle sont intégrables.* Remarquons qu'on aurait le même résultat en définissant la courbure scalaire à partir de la connexion induite par la connexion riemannienne ou de la connexion conforme car pour les structures presque kählériennes, ces connexions coïncident. Ultérieurement il a été démontré par l'auteur [51] le théorème suivant (généralisant également un théorème de S. Bochner relatif aux structures kählériennes) : *si l'on se limite aux éléments plans invariants par l'automorphisme* I_x (*c'est-à-dire aux droites complexes dans la terminologie de C. Ehresmann*), *les structures hermitiennes pour lesquelles* K *est indépendant de l'élément plan sans être nul sont les structures isotropes non intégrables déterminées dans le paragraphe* 5. Dans l'énoncé de ce théorème, on peut supposer les structures seulement pseudohermitiennes car le raisonnement utilise la nullité de la deuxième torsion, ce qui entraîne, en raison des identités de Bianchi, que les formes de courbure sont des formes pures, de type 1.

Ultérieurement K. Yano et I. Mogi [77] ont défini, indépendamment des résultats précédents, en se limitant aux structures pseudokählériennes la notion de courbure « holomorphique » ou courbure scalaire définie au moyen du tenseur de courbure de la connexion riemannienne dans un élément plan holomorphique (ou droite complexe) ; ils ont établi une condition nécessaire et suffisante pour qu'en chaque point cette courbure soit indépendante de l'élément plan holomorphique ; ils n'ont pas déterminé toutes les structures pseudokählériennes à courbure holomorphique constante mais ils ont démontré l'équivalence des propriétés suivantes : courbure holomorphique constante, libre mobilité holomorphique (notion équivalente à celle d'isotropie), axiome des plans holomorphiques (il existe toujours une surface totalement géodésique tangente à un plan holomorphique arbitraire). K. Yano et I. Mogi ont également démontré le théorème suivant : *sur une variété pseudokählérienne à courbure holomorphique constante positive* k, *la distance entre deux points conjugués sur une géodésique est constante et égale à* $\frac{2\pi}{\sqrt{k}}\cdot$ Ces résultats peuvent s'interpréter en utilisant les résultats obtenus par l'auteur : les structures pseudokählériennes à courbure holomorphique constante positive sont localement équivalentes à la structure d'espace hermitien elliptique, d'où la propriété des géodésiques (E. Cartan, *Géométrie projective complexe*, Paris, 1931).

b. Soit sur V_{2n} une structure presque hermitienne s définie par la donnée d'une structure presque complexe et d'une métrique riemannienne F. Nous dirons que la structure est *localement conforme à une structure intégrable* (« conformally flat ») s'il existe dans le voisinage U de tout point de V_{2n} une fonction différentiable des coordonnées locales λ telle que la structure presque hermitienne dans U correspondant à la forme λF soit intégrable ; on définit de même une structure presque hermitienne *localement conforme à une structure kählérienne ;* il résulte de ces définitions qu'une structure s « conformally kählerian » (et en particulier « conformally flat ») dérive d'une structure complexe; la métrique hermitienne associée à une structure « conformally flat » peut s'écrire localement : $\frac{1}{\lambda(z^1, \ldots, z^n)}(dz\, d\bar{z}^1 + \ldots + dz^n\, d\bar{z}^n)$. Ces notions ont été introduites par N. Coburn [17] (*voir* également J. A. Schouten [66]) qui a montré qu'une structure hermitienne « conformally kählerian » est semi-symétrique; N. Coburn a introduit une courbure conforme qui doit être nulle pour les structures « conformally flat ». Si la fonction λ est définie globalement sur V_{2n}, la structure peut alors être appelée conforme à une structure intégrable (resp. kählérienne).

S. Bochner [6] a montré qu'une structure kählérienne « conformally flat » est intégrable (il a utilisé la courbure conforme associée à une connexion riemannienne introduite par H. Weyl).

Les notions de courbure et torsion conformes associées à une structure presque hermitienne ont été introduites par l'auteur [48] : lorsqu'on multiplie par λ la métrique F associée à une structure presque hermitienne, la courbure et la torsion conformes sont respectivement invariante et multipliée par un scalaire; il a été démontré que la courbure et la torsion conformes associées à la connexion unitaire sont définies respectivement par les formes

$$\Pi_h^s = \Omega_h^s - \delta_h^s \frac{\Sigma\Omega_l^l}{n} \qquad \text{et} \qquad \Pi^s = \Omega^s - \frac{\varphi \wedge \omega^s}{n-1}$$

(ainsi que leurs imaginaires conjuguées) où $\varphi = \Sigma A_{sk}^k \omega^s$, les A_{sk}^k définissant la première torsion (*cf.* § 5); la deuxième torsion conforme est par définition identique à la première torsion. Remarquons que la forme $\varphi + \bar{\varphi}$ est la codifférentielle $\delta\Omega$ et que la forme $i[\Sigma(\Pi^s + \Gamma^s) \wedge \bar{\omega}^s - \Sigma(\bar{\Pi}^s + \bar{\Gamma}^s) \wedge \omega^s]$ est égale à $d\Omega - \frac{\delta\Omega \wedge \Omega}{n-1}$ (*cf.* § 4). On démontre le théorème suivant : *pour que la structure presque hermitienne s soit localement conforme à une structure intégrable, il faut et, pour $n > 2$, il suffit que la courbure et la torsion conformes soient nulles; en particulier si la structure s est supposée presque kählérienne, elle est alors intégrable* (ce qui généralise un résultat de S. Bochner); on pourrait en déduire : *pour qu'une structure presque hermitienne localement conforme à une structure intégrable soit conforme à une structure intégrable, il faut et il suffit que la forme extérieure Ω associée à la structure admette un facteur intégrant global, ou (ce qui est équivalent) que $\delta\Omega$ soit homologue à zéro* (*cf.* § 4). Il a été également démontré dans [51] : *pour qu'une structure hermitienne, soit localement conforme à une structure kählérienne, il faut et pour $n > 2$ il suffit que la torsion conforme soit nulle, ce qui est équivalent aux conditions obtenues* (*cf.* § 4) *pour que Ω admette un facteur intégrant.* Ce dernier théorème a été démontré également par Westlake [72] par des méthodes analogues à celles de H. C. Lee pour les structures symplectiques (§ 4). Dans le cas où la variété V_{2n} est simplement connexe ou à groupe de Poincaré fini, Westlake a démontré, en utilisant des théorèmes dus à N. Kuiper, que si la structure est « conformally kählerian », V_{2n} peut être munie d'une métrique kählérienne; ce résultat pourrait se démontrer par les méthodes exposées précédemment car alors $\delta\Omega$ est homologue à zéro.

On aurait pu définir la courbure et la torsion conformes à partir de la connexion induite par la connexion riemannienne ou de la connexion que nous avons appelée conforme; pour cette dernière, on peut montrer que la courbure conforme est égale à la courbure; on peut démontrer en effet la propriété suivante : la structure s étant déterminée dans le voisinage U d'un point de V_{2n} par n formes de Pfaff complexes ω^k et la connexion conforme étant définie par l'ensemble des ω^k et des θ_l^k, la connexion associée à la structure s_λ dans U (correspondant à la métrique λ F) peut être déterminée par l'ensemble des formes $\tilde{\omega}^k = \mu\omega^k$ (avec $\mu^2 = \lambda$) et θ_l^k. La première torsion conforme est définie par les formes $\Theta^k - \dfrac{\tilde{\delta}\Omega \wedge \omega^k}{2(n-1)}$ (où les Θ^k définissent la première torsion).

7. **Structures presque hermitiennes d'espèce** k. — Les structures *presque hermitiennes d'espèce k* [structures infinitésimales régulières de groupe structural le groupe « *unitaire d'espèce k* » $U_n^{(k)}$ ou sous-groupe de L'_n laissant invariante la forme quadratique

$$(x^1)^2 + (y^1)^2 + \ldots + (x^k)^2 + (y^k)^2 - (x^{k+1})^2 - (y^{k+1})^2 - \ldots - (x^n)^2 - (y^n)^2]$$

ont été introduites et étudiées du point de vue local par l'auteur [51] mais le problème d'existence n'a pas été abordé. Alors que toute structure presque complexe admet des structures presque hermitiennes subordonnées, il n'en est pas de même pour les structures presque hermitiennes d'espèce $k(k \neq n)$. D'après C. Ehresmann [22], l'existence d'une métrique riemannienne de signature $2n - 2k$ est équivalente à celle d'un champ continu de $2k$-éléments de contact (cette question a été également exposée par N. Steenrod [68]). Il faut, de plus, que ces éléments de contact soient invariants par l'automorphisme I_x définissant la structure presque complexe c'est-à-dire soient complexes (*cf.* § 2) de dimension complexe k. Donc l'existence sur une variété V_{2n} d'une structure presque hermitienne d'espèce $k(k \neq n)$ subordonnée à une structure presque complexe est équivalente à l'existence d'un champ continu d'éléments de contact complexes (de dimension complexe k). Remarquons que si l'on se donne sur V_{2n} une forme différentielle extérieure quadratique Ω de rang $2n$ et une structure presque complexe telle qu'en chaque point l'automorphisme I_x laisse invariante la restriction Ω_x de Ω, la structure obtenue est une structure presque hermitienne d'espèce $k(k \leq n)$.

Dans le voisinage U d'un point de V_{2n} une structure presque hermitienne d'espèce k est déterminée par la donnée de $2n$ formes de formes de Pfaff complexes ω^s, $\omega^{s'}$ telles que $\omega^{s'} = \bar{\omega}^s$ si $s \leq k$, $\omega^{s'} = -\bar{\omega}^s$ si $s > k$, la forme d'Hermite et la forme extérieure associées à la structure pouvant s'écrire

$$\Phi = \Sigma\, \omega^s \omega^{s'} \qquad \text{et} \qquad \Omega = i\,\Sigma\, \omega^s \wedge \omega^{s'}.$$

On peut associer à ces structures des connexions affines définies par les mêmes formules que les connexions associées aux structures presque hermitiennes mais avec des conventions de signes différentes. Une structure presque hermitienne d'espèce k isotrope en chaque point est localement homogène; cette structure est intégrable ou localement équivalente à la structure « d'espace hermitien d'espèce k » dans l'espace projectif $P_n(C)$.

8. **Structures presque quaternioniennes.** — Ces structures de groupe structural le groupe linéaire quaternionien L''_p (*cf.* § 1) ont été introduites par C. Ehresmann [23] qui a étudié le problème de la recherche de leurs conditions d'existence sur une variété complexe ou presque complexe V_{4p}. Toute structure presque quaternionienne admet des structures hermitiennes quaternioniennes subordonnées [de groupe structural $U_p(Q)$]. La recherche de telles structures conduit d'abord à la recherche de SU_{2p}-structures; pour qu'une structure presque complexe admette une SU_{2p}-structure subordonnée, il faut et il suffit qu'une classe caractéristique de dimension 2 soit nulle; cette condition réalisée, on est amené à étudier l'existence d'une section d'un espace fibré dont la fibre est l'espace homogène $K_p = SU_{2p}/U_p(Q)$, ce qui conduit à une classe caractéristique de dimension 6. Toute variété presque complexe V_4 dont le groupe de Betti pour la dimension 2 est nul admet une structure presque quaternionienne; l'espace projectif $P_{2n}(C)$ n'en admet pas.

W. T. Wu [73] a montré que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété orientée V_4 (de dimension 4) admette une structure presque quaternionienne est

$$W_2^2(V_4) = 0, \qquad P_4^0(V_4) + 2X_0^4(V_4) = 0,$$

où W_2^2 est la classe de Stiefel-Whitney réduite mod 2, $P_0^4(V)$ la classe de Pontrjagin et $X_0^4(V_4)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré. Wu a donné des exemples de variétés V_4 presque quaternioniennes : toute variété parallélisable, toute surface algébrique plongée sans singularités dans $P_3(C)$.

C. Ehresmann a remarqué que toute variété quaternionienne (c'est-à-dire presque quaternionienne intégrable) est localement affine, résultat qui pourrait être démontré également en utilisant le fait qu'on peut associer canoniquement des connexions affines aux structures presque quaternioniennes [51].

9. **Autres structures infinitésimales régulières.** — La plupart des structures dont il sera question dans ce paragraphe ont été introduites et étudiées du point de vue local par l'auteur [49], [51].

Sur une variété V_{2n} une structure *presque paracomplexe* est une $\mathring{L}'_n$-structure, le groupe *linéaire homogène paracomplexe* $\mathring{L}'_n$, isomorphe à L_n, étant le sous-groupe de L_{2n} laissant invariante l'involution : $x^s \to y^s$, $y^s \to x^s$ $(s = 1, \ldots, n)$. Les groupes L'_n et $\mathring{L}'_n$ sont deux formes réelles de L'_{2n}. Une structure presque paracomplexe est déterminée par la donnée de deux champs différentiables C_1 et C_2 de n-éléments de contact supplémentaires X_n et X'_n.

Le problème d'existence de telles structures se ramène à la recherche sur V_{2n} d'un champ de n-éléments de contact : en effet s'il existe un tel champ, il lui correspond un champ de n-éléments orthogonaux relativement à une métrique riemannienne sur V_{2n}. En particulier pour qu'une variété V_2 admette une structure presque paracomplexe, il faut et il suffit que sa caractéristique d'Euler-Poincaré soit nulle.

Dans le voisinage U d'un point de V_{2n} une structure presque paracomplexe est déterminée par la donnée de $2n$ formes de Pfaff réelles linéairement indépendantes ω^l, $\omega^{l'}$ $(l' = l + n)$ le champ C_1 (resp. C_2) étant défini par $\omega^{l'} = 0$ (resp. $\omega^l = 0$)$(l = 1, \ldots, n)$. On peut associer canoniquement une torsion à une structure presque paracomplexe, cette torsion étant définie par les équations (3) relatives aux structures presque complexes mais où les formes et les coefficients sont supposés réels. Une structure presque paracomplexe intégrable ou structure *paracomplexe* est définie par deux champs complètement intégrables; en raison du théorème de Frobenius, la structure est intégrable si et seulement si la torsion est nulle (il n'y a pas lieu contrairement aux structures presque complexes de distinguer les structures sans torsion et les structures intégrables).

Une structure *presque parahermitienne* (dont le groupe structural est le groupe para-unitaire $\overset{\circ}{U}_n = \overset{\circ}{L}{}'_n \cap \tilde{L}_{2n}$, isomorphe à L_n) est déterminée par la donnée d'une forme différentielle extérieure quadratique Ω, de rang $2n$ et de deux champs C_1 et C_2 de n-éléments de contact supplémentaires intégraux de Ω. On définit les structures presque parakählériennes et parakählériennes.

Localement une structure presque parahermitienne est déterminée par la donnée de $2n$ formes de Pfaff ω^s, $\omega^{s'}$ telles que $\Omega = \Sigma\,\omega^s \wedge \omega^{s'}$ les champs C_1 et C_2 étant définis respectivement par $\omega^s = 0$, $\omega^{s'} = 0$. On peut associer canoniquement des connexions affines à ces structures; ces connexions sont définies par les mêmes équations que celles définissant les connexions associées à une structure presque hermitienne mais où toutes les données sont réelles. On peut de même introduire la notion de courbure et de torsion conformes ainsi que celle de courbure scalaire. Aux théorèmes de géométrie différentielle locale (énoncés précédemment) relatifs aux structures presque hermitiennes correspondent des théorèmes relatifs aux structures presque parahermitiennes; toutefois une structure presque parakählérienne à courbure scalaire nulle n'est pas nécessairement intégrable. Les structures presque parahermitiennes isotropes sont intégrables ou localement équivalentes à une structure parahermitienne sur $P_n(R) \times P_n(R)$, appelée structure d'espace parahermitien. Les structures isotropes d'une manière restreinte sont, outre les précédentes, les structures localement équivalentes à une structure presque parahermitienne sur la quadrique Q_6 d'équation

$$(z)^2 + x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3 = 1\,;$$

cette structure qui admet comme groupe d'automorphismes le groupe G'_2 (qui est l'autre forme réelle du groupe complexe dont G_2 est la forme réelle compacte) peut être définie au moyen d'octaves de Cayley de deuxième espèce (algèbre sur le corps des réels de base $1, e_1, \ldots, e_7$ vérifiant des relations analogues à celles des octaves de Cayley mais avec des signes différents).

Si l'on se donne sur une variété V_{2n} une structure presque complexe (définie par un champ d'automorphismes I_x) et un champ de n-éléments de contact X_n

tels qu'en chaque point $X_n \cap I_x X_n = x$, on définit une structure dont le groupe structural $\hat{L}_n$ est isomorphe à L_n; la structure peut encore être déterminée par l'un des couples (I, J), (I, K), (J, K) de champs d'automorphismes I_x, J_x, K_x de l'espace tangent T_x tels que

$$(I_x)^2 = -1, \quad (J_x)^2 = +1, \quad (K_x)^2 = +1, \quad I_x J_x = -J_x I_x = K_x.$$

A cette structure (appelée *structure presque quaternionienne de deuxième espèce* si $n = 2p$ et dont le groupe structural $\hat{L}_{2p}$ est alors désigné par groupe linéaire homogène quaternionien de deuxième espèce $\mathring{L}''_p$), ont été associées canoniquement trois connexions affines, suivant le choix de la première et de la deuxième torsions; ces connexions coïncident si les quatre champs de n-éléments de contact associés à la structure sont complètement intégrables.

Remarquons que les groupes unimodulaires SU_n, SU^{*k}_n, $S\mathring{U}_n$, $S\hat{L}_n$, et si $n = 2p$, SL''_p, $S\mathring{L}''_p$ constituent à un isomorphisme près, l'ensemble des formes réelles du groupe simple complexe à n variables du type A.

D'autres structures ont été introduites dans [51]; ce sont des structures de groupe structural isomorphe à O_n et si $n = 2p$ de groupe structural isomorphe à $L_p \times L_p \times L_p \times L_p$, à $L'_p \times L'_p$ et à L'_p.

Parmi les structures infinitésimales régulières signalons les Δ'_n-structures où Δ'_n est le groupe des matrices complexes triangulaires. F. Hirzebruch [33] a désigné par « split manifold » une variété complexe V_{2n} (de dimension complexe n) munie d'une telle structure et il a démontré le résultat suivant : si V_{2n} est une variété algébrique sans singularités, l'espace fibré associé à l'espace $T(V_{2n})$ des vecteurs tangents, de fibres isomorphes à L'_n/Δ'_n, est une variété algébrique munie d'une Δ'_n-structure. De telles variétés ont déjà été introduites par C. Ehresmann [21] dans l'espace projectif $P_n(C)$: ce sont les variétés de « drapeaux » qui généralisent les variétés de Grassmann.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] W. AMBROSE et I. M. SINGER, *A theorem on holonomy* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 75, 1953, p. 428-443).

[2] M. APTE, *C. R. Acad. Sc.*, t. 238, 1954, p. 1091.

[3] P. BIDAL et G. DE RHAM, *Les formes différentielles harmoniques* (*Com. Math. Helv.*, t. 19, 1949, p. 1).

[4] A. BLANCHARD, *C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1954, p. 657-659,

[5] S. BOCHNER, *Curvature in Hermitian metric* (*Bull. Amer. Soc.*, t. 53, 1947, p. 179-195).

[6] S. BOCHNER, *Curvature and Betti numbers* (*Ann. Math.*, t. 49, 1948, p. 379-390).

[7] A. BOREL et A. LICHNEROWICZ, *C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 1835-1837.

[8] A. BOREL et J. P. SERRE, *C. R. Acad. Sc.*, t, 233, 1951, p. 680-682; *Groupes de Lie et puissances réduites de Steenrod* (*Amer. J. Math.*, t. 75, 1953, p. 409-448); *Utilisation des nouvelles opérations de Steenrod dans la théorie des espaces fibrés* [*Sém. Bourbaki*, décembre 1951 (polycopié)].

[9] E. CALABI et B. ECKMANN, *A class of compact complex manifolds which are not algebraic* (*Ann. Math.*, t. 583, 1953, p. 494-500).

[10] E. CARTAN, *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée* (*Ann. Sc. Éc. Norm.*, t. 40, 1923; t. 41, 1924; t. 42, 1925); *La théorie des groupes et les recherches récentes de géométrie différentielle* (*Proc. Inter. Math. Con. Toronto*, 1924, p. 85-94); *Les groupes d'holonomie des espaces généralisés* (*Acta Math.*, t. 48, 1926, p. 1-42).

[11] H. CARTAN, *Notions d'algèbre différentielle; application aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie* (*Colloq. Top.*, Bruxelles, 1950, p. 15-27).

[12] S. S. CHERN, *Characteristic classes of hermitian manifolds* (*Ann. Math.*, t. 47, 1946- p. 85-121).

[13] S. S. CHERN, *Differential geometry of fibre bundles* (*Proc. Inter. Math. Cong.*, 1950, p. 397-411); *Topics in differential geometry* [(*Inst. Adv. Study*, Princeton, 1951 (polycopié)].

[14] S. S. CHERN, *Pseudogroupes infinis continus* (*Colloq. Int. C. N. R. S. Géom. Diff.*, Strasbourg, 1953, p. 119-136).

[15] S. S. CHERN, *Relations between riemannian and hermitian geometries* (*Duke Math. J.*, t. 20. 1953, p. 575-581).

[16] C. CHEVALLEY, *Theory of Lie Groups* (Princeton University Press, 1946).

[17] N. COBURN, *Conformal unitary spaces* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 50, 1941, p. 26-39).

[18] B. ECKMANN, *Sur les structures complexes et presque complexes* (*Colloq. Int. C. N. R. S. Géom. Diff.*, Strasbourg, 1953, p. 151-160); *Structures complexes et transformations infinitésimales* (*Convegno Int. Geom. Diff.* Venise-Bologne-Pise, 1953, p. 33-43).

[19] B. ECKMANN et A, FRÖLICHER, *C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p 2284-2286.

[20] B. ECKMANN et H. GUGGENHEIMER, *C. R. Acad. Sc.*, t. 229, 1949, p. 464-466, 489-491 et 503-505.

[21] C. EHRESMANN, *Sur la topologie de certains espaces homogènes* (*Ann. Math.*, t. 35, 1934, p. 396-443).

[22] C. EHRESMANN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 214, 1942, p. 144-147; t. 216, 1943, p. 628-630.

[23] C. EHRESMANN, *Sur la théorie des espaces fibrés* (*Colloq. Int. C. N. R. S. Top. Alg.*, Paris, 1947, p. 3-35).

[24] C. EHRESMANN, *Sur les variétés presque complexes* (*Proc. Int. Math. Cong.*, 1950, p. 412-419).

[25] C. EHRESMANN, *Les connexions dans un espace fibré différentiable* (*Coll. Top.*, Bruxelles. 1950, p. 29-55).

[26] C. EHRESMANN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 587; *Structures locales*, Rome, mars 1952 (polycopié).

[27] C. EHRESMANN et P. LIBERMANN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 227, 1948, p. 420-421; t. 229, 1949, p. 697-699.

[28] C. EHRESMANN et P. LIBERMANN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 1281-1282.

[29] H. GUGGENHEIMER, *Ueber komplex-analytische Mannigfaltigkeiten* (*Comm. Math. Helv.*, t. 25, 1951, p. 257-297).

[30] H. GUGGENHEIMER, *Variétés symplectiques* [*Coll. Top.*, Strasbourg, 1951 (polycopié)].

[31] H. GUGGENHEIMER, *Ueber kählersche und symplektische Differentialgebren* (*Tohoku Math. J.*, t. 9, 1952, p. 157-171); *Formes et vecteurs speudoanalytiques* (*Ann. Matematica*, IV, t. 36, 1954).

[32] F. HIRZEBRUCH, *On Steenrod reduced powers, the index of inertia and the Todd genus* (*Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 39, 1953, p. 951-956).

[33] F. HIRZEBRUCH, *Arithmetic genera and the theorem of Riemann-Roch for algebraic manifolds* (*Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 40, 1954, p. 110-114).

[34] F. HIRZEBRUCH, *On the characteristic cohomology classes of differentiable manifolds* [*Colloq. Henri Poincaré*, Paris, 1954 (polycopié)].

[35] W. V. D. HODGE, *The theory and applications of Harmonic integrals*, Cambridge, 1941.

[36] H. HOPF, *Sur les champs d'éléments de surface dans les variétés à quatre dimensions* (*Coll. Int. C. N. R. S. Top. Alg.*, Paris, 1947, p. 55-59).

[37] H. HOPF, *Zur Topologie der komplexen Manigfaltigkeiten* (*Studies and essays presented to R. Courant*, New-York, 1948, p. 167-185).

[38] A. KIRCHHOFF, *C. R. Acad. Sc.*, t. 223, 1948, p. 1258-1260.

[39] A. KIRCHHOFF, *Compositio Math.*, t. 11, 1953, p. 1-36.

[40] S. KOBAYASCHI, *C. R. Acad. Sc.*, t. 238, 1954, p. 318-320; 443-444 et 644-645.

[41] S. KOBAYASCHI, *Le groupe des transformations qui laissent invariant le parallélisme* [*Colloq. Top.*, Strasbourg, 1954 (polycopié)].

[42] G. LEGRAND, *C. R. Acad. Sc.*, t. 237, 1953, p. 1626-1627.

[43] H. C. LEE, *A kind of even-dimensional geometry and its application to exterior calculus* (*Amer. J. Math.*, t. 55, 1943, p. 433-438).

[44] TH. LEPAGE, *Sur certaines congruences de formes alternées* (*Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, 1949, p. 21-31).

[45] TH. LEPAGE, *Sur les matrices symétriques et les modules de formes alternées* (*Bull. Acad. Roy. Belgique*, 1949, p. 323); *Sur certains idéaux de l'algèbre extérieure de degré* $2n(n-1)$ (*Colloq. Int. C. N. R. S. Alg. et th. nombres*, 1949, p. 181-187).

[46] TH. LEPAGE, *Équations du deuxième ordre et transformations symplectiques* (*Colloq. Équat. Dériv. partielles*, Louvain, 1953).

[47] P. LIBERMANN, *Problèmes d'équivalence relatifs à une structure presque complexe sur une variété à quatre dimensions* (*Bull. Acad Roy. Belgique*, t. 36, 1950, p. 742-755); *Problèmes d'équivalence relatifs à une structure presque complexe* (*IVe Cong. Unione Mat. Ital. Taormina*, 1951).

[48] P. LIBERMANN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 233, 1951, p. 17-19.

[49] P. LIBERMANN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 233, 1951, p. 1571-1573; t. 234, 1952, p. 1030-1032 et 2517-2519; *Sur les structures presque paracomplexes* [*Colloq. Top.*, Strasbourg, 1952 (polycopié)].

[50] P. LIBERMANN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 395-397; *Formes différentielles sur une variété symplectique* [*Colloq. Top.*, Strasbourg, 1951 (polycopié)].

[51] P. LIBERMANN, *Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales régulières* (*Thèse*, Strasbourg, mai 1953 et *Ann. Matematica*, t. 36, 1954); *Sur certaines structures infinitésimales régulières* (*Colloq. Int. C. N. R. S. Géom. Diff.*, Strasbourg, 1953, p. 161-170).

[52] P. LIBERMANN, *Sur la courbure et la torsion de certaines structures infinitésimales* (*Convegno Int. Geom. Diff.*, Venise-Bologne-Pise, 1953, p. 234-246).

[53] P. LIBERMANN, *Forme canonique d'une forme différentielle extérieure quadratique fermée* (*Bull. Acad. Roy. Belgique*, t. 39, 1953, p. 846-850).

[54] A. LICHNEROWICZ, *C. R. Acad. Sc.*, t. 231, 1950, p. 1413-1415; t. 233, 1951, p. 1723-1725.

[55] A. LICHNEROWICZ, *C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 146-147, 677-679 et 1634-1636; *Généralisations de la Géométrie différentielle globale* (*Colloq. Géom. Diff.*, Louvain, 1951; *Variétés localement kählériennes* [*Sém. Bourbaki*, février 1952 (polycopié)].

[56] A. LICHNEROWICZ, *Espaces homogènes kählériens* (*Colloq. Int. C. N. R. S. Géom. Diff.*, Strasbourg, 1953, p. 171-184).

[57] A. LICHNEROWICZ, *Sur les groupes d'holonomie des variétés riemanniennes et kählériennes* (*Convegno Int. Geom. Diff.*, Venise-Bologne-Pise, 1953, p. 33-43).

[58] A. LICHNEROWICZ, *Espaces homogènes complexes* (*Arch. Math.*, t. 5, 1954, p. 207-215).

[59] C. E. MILLER, *The topology of rotation groups* (*Ann. Math.*, t. 57, 1953).

[60] A. NIJENHUIS, *On the Holonomy groups* (*Proc. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam*, A, t. 56, 1953; t. 57, 1954).

[61] K. NOMIZU, *Invariant affine connections on homogeneous spaces* (*Amer. J. Math.*, t. 76, 1954, p. 36-65).

[62] K. NOMIZU, *On the group of affine transformations of an affinely connected manifold* (*Proc. Amer. Math. Soc.*, t. 4, 1953, p. 816-823).

[63] K. NOMIZU, *Remarques sur les groupes d'holonomie et d'isotropie* [*Colloq. Top.*, Strasbourg, 1954 (polycopié)].

[64] G. PAPY, *Sur la divibilité des formes alternées* (*Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, 1947, p. 24-30).

[65] G. REEB, *Sur certains problèmes relatifs aux variétés presque symplectiques et systèmes dynamiques* (*Convegno Int. Geom. Diff.*, Venise-Bologne-Pise, 1953, p. 104-113).

[66] J. A. SCHOUTEN, *Ricci Calculus*, 2e édit., Springer-Verlag, Berlin, 1954.

[67] J. M. SOURIAU, *Géométrie symplectique différentielle* (*Colloq. Int. C. N. R. S. Géom. Diff.*, Strasbourg, 1953, p. 53-60).

[68] N. STEENROD, *The topology of fibre bundles* (Princeton University Press, 1951).

[69] N. STEENROD et J. H. C. WHITEHEAD, *Vector fields on the n-sphere* (*Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 37, 1951, p. 58-63).

[70] R. THOM, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables* (*Com. Math. Helv.*, t. 28, 1954, p. 17-86).

[71] A. WEIL, *Sur la théorie des formes différentielles attachées à une variété analytique complexe* (*Com. Math. Helv.*, t. 20, 1947, p. 110).

[72] WESTLAKE, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, t. 50, 1954, p. 16-19.

[73] W. T. WU, *Sur les classes caractéristiques des structures fibrées sphériques* (*Thèse*, Strasbourg, 1949); *Act. Sc. et Indus.*, n° 1183, Paris, Hermann, 1952.

[74] W. T. Wu *C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 508-509 et 918-919.
[75] W. T. Wu, *Sur les puissances de Steenrod* [*Colloq. Top.*, Strasbourg, 1951 (polycopié)].
[76] K. Yano, *Some remarks on almost complex structures* (*Proc. Int. Math Cong.*, Amsterdam, 1954, vol. II, p. 268).
[77] K. Yano et I. Mogi, *C. R. Acad. Sc.*, t. 237, 1953, p. 962-964.
[78] Yen-Chih-Ta, *C. R. Acad. Sc.*, t. 227, 1948, p. 817-819 et 1203-1205.

Depuis la rédaction de cet article ont été publiés les travaux suivants :

D. Bernard, *C. R. Acad. Sc.*, t. 239, 1954, p. 1263-1265.
A. Frölicher, *Zur Differentialgeometrie der komplexen strukturen* (*Math. Annalen*, t. 129, 1955, p. 50-95)
R. Hermann, *C. R. Acad. Sc.*, t. 239, 1954, p. 1178-1180, p. 1760-1762; t. 240, 1955, p. 1303-1305.
G. Legrand, *C. R. Acad. Sc.*, t. 240, 1955, p. 586-588.
P. Libermann, *C. R. Acad. Sc.*, t. 239, 1954, p. 1579-1581.
K. Yano, *C. R. Acad. Sc.* t. 239, 1954, p. 1346-1348.
K. Yano, *Quelques remarques sur les variétés à structure presque complexe* (*Bull. Soc. Math. France*, t. 83, 1955, p. 57-80).