BERNARD MALGRANGE

Sur une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques

Bulletin de la S. M. F., tome 85 (1957), p. 283-306

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1957__85__283_0>

Bull. Soc. Math. France,
85, 1957, p. 283 à 306.

SUR UNE CLASSE D'OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS HYPOELLIPTIQUES;

PAR

BERNARD MALGRANGE.

Institut de Mathématiques, Université de Strasbourg.

Dans sa thèse, L. HÖRMANDER a caractérisé et étudié de façon détaillée les opérateurs différentiels à coefficients constants, $P(D)$, qui possèdent une solution élémentaire indéfiniment différentiable en dehors de l'origine [5]. Cette propriété, comme on sait, est équivalente à la suivante qui, pour les opérateurs elliptiques, est connue sous le nom de « lemme de Weyl », et que nous appellerons, suivant un usage tendant à se répandre, « hypoellipticité » :

Pour qu'une distribution φ soit, dans un ouvert, une fonction indéfiniment différentiable, il faut et il suffit que, dans cet ouvert, $P(D)\varphi$ soit une fonction indéfiniment différentiable.

Diverses généralisations du résultat de Hörmander ont été obtenues depuis, l'une, due à L. EHRENPREIS [3], concerne les noyaux de convolution à support compact. Une autre, qui fait l'objet de ce travail, est relative aux opérateurs différentiels à coefficients variables, et peut s'énoncer à peu près ainsi (nous énoncerons plus loin les hypothèses précises qu'il convient de faire) :

Un opérateur différentiel $P(x, D)$ est hypoelliptique si, pour tout point a, l'opérateur à coefficients constants $P(a, D)$ est hypoelliptique et si les divers $P(a, D)$ sont équivalents entre eux.

Ce résultat a été établi indépendamment par L. HÖRMANDER (dont le travail paraîtra aux *Communications on pures and applied Mathematics*), et par l'auteur; une troisième démonstration, qui généralise celle donnée par S. MIZOHATA pour les opérateurs paraboliques [9] a été obtenue depuis par F. TRÈVES. Enfin, un théorème analogue, mais plus restrictif, a été publié par F. BROWDER [1].

Suivant une idée qui a déjà été utilisée par P. D. LAX [7] pour les équations elliptiques, nous démontrerons simultanément l'hypoellipticité des opérateurs considérés, et la généralisation d'un théorème de L. GÅRDING [4] (relatif aux opérateurs elliptiques autoadjoints).

Nous n'aborderons pas le cas des systèmes différentiels : en effet, les résultats que nous avons obtenus (et qui ne sont qu'une généralisation presque immédiate de ceux qui sont exposés ici) n'ont pas un degré de généralité suffisant pour englober tous les cas déjà connus; y échappent notamment, comme me l'a signalé L. HÖRMANDER, les systèmes elliptiques de A. DOUGLIS et L. NIRENBERG (*Comm. pures and appl, Math.*, t. 8, 1955, p. 503). Il y a là une question qu'il serait intéressant d'élucider.

Voici encore une difficulté : contrairement à la notion d'hypoellipticité, la classe d'opérateurs hypoelliptiques que nous considérons n'est pas invariante par un homéomorphisme différentiable. Même sans chercher à caractériser *tous* les opérateurs hypoelliptiques, ce qui est sans doute actuellement hors de portée, il serait intéressant d'obtenir une classe d'opérateurs hypoelliptiques qui soit invariante par les homéomorphismes différentiables, et soit en même temps assez large pour contenir tous les cas déjà connus; il y a là un problème qui semble difficile, et sur lequel l'auteur n'a aucune idée.

En terminant cette introduction, je tiens à remercier M. L. HÖRMANDER, qui a bien voulu me communiquer l'essentiel de son travail sur le présent sujet, et m'a fait part de réflexions et de remarques dont j'ai tiré le plus grand profit.

I. — Espaces fonctionnels de type local.

1. Préliminaires.

Notations. — $\xi = (\xi_1 \ldots, \xi_n)$ désigne un point de l'espace numérique réel à n dimensions Ξ^n, $x = (x_1 \ldots, x_n)$ désigne un point de son dual X^n (les deux espaces précédents étant mis en dualité par le produit scalaire $\langle x, \xi \rangle = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$).

$\mathcal{S}$ (resp. $\hat{\mathcal{S}}$) désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide de la variable x (resp. ξ) [11].

$\mathcal{S}'$ (resp. $\hat{\mathcal{S}}'$) désigne le dual du précédent. c'est-à-dire l'espace des distributions tempérées.

La transformée de Fourier $\int e^{-2\pi i \langle x, \xi \rangle} \varphi(x)\, dx$ de la fonction (ou, plus généralement, de la distribution tempérée) $\varphi(x)$ est notée $\hat{\varphi}(\xi)$.

DÉFINITION I.1.1. — *Une fonction continue f, à valeurs > 0, de $\xi \in \Xi^n$ est dite « fonction-poids » s'il existe un polynome $P(\xi)$ tel que pour tout $\xi \in \Xi^n$ on ait*

$$f(\xi) \leqq |P(\xi)| \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{f(\xi)} \leqq |P(\xi)|.$$

A une fonction-poids $f(\xi)$, nous associerons l'espace $\hat{\mathcal{D}}^f$ des (classes de) fonctions $\varphi(\xi)$ de carré sommable pour la mesure $f(\xi)\,d\xi$; muni de sa norme naturelle

$$\left(\int |\varphi(\xi)|^2 f(\xi)\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}},$$

$\hat{\mathcal{D}}^f$ est un espace de Hilbert. Des propriétés de f résultent immédiatement les inclusions suivantes (et leur continuité) :

$$\hat{\mathcal{S}} \subset \hat{\mathcal{D}}^f, \qquad \hat{\mathcal{D}}^f \subset \mathcal{S}'.$$

La fonction $\frac{1}{f(\xi)}$ [que, pour simplifier les notations, nous désignerons dans tout le paragraphe I par $g(\xi)$] est encore une fonction-poids; le produit scalaire

$$(\varphi, \psi) = \int \varphi(\xi)\,\overline{\psi(\xi)}\,d\xi$$

est défini pour $\varphi \in \hat{\mathcal{D}}^f$, $\psi \in \hat{\mathcal{D}}^g$ (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz) et l'on voit immédiatement que ce produit scalaire fait de $\hat{\mathcal{D}}^g$ l'*antidual* de $\hat{\mathcal{D}}^f$ (c'est-à-dire l'espace des formes antilinéaires continues sur $\hat{\mathcal{D}}^f$).

Comme les applications $\hat{\mathcal{S}} \to \hat{\mathcal{D}}^f$ et $\hat{\mathcal{D}}^g \to \mathcal{S}'$ sont adjointes l'une de l'autre, on déduit des résultats précédents que l'image de $\hat{\mathcal{S}}$ dans $\hat{\mathcal{D}}^f$ (resp. de $\hat{\mathcal{D}}^f$ dans $\hat{\mathcal{S}}'$) est dense dans $\hat{\mathcal{D}}^f$ (resp. $\hat{\mathcal{S}}'$) (notons d'ailleurs que ces résultats sont aussi immédiats à obtenir par un raisonnement direct!).

Si maintenant $\psi(\xi)$ est une fonction $\in \hat{\mathcal{D}}^f$, $\psi(\xi)$ est en particulier une distribution tempérée, donc est transformée de Fourier d'une distribution tempérée $\varphi(x)$; cela nous amène à poser la définition suivante :

Définition I.1.2.— *On désigne par $\mathcal{D}^f$ l'espace des distributions tempérées $\varphi(x)$ qui vérifient $\hat{\varphi}(\xi) \in \hat{\mathcal{D}}^f$.*

Pour φ et $\psi \in \mathcal{D}^f$, on pose

$$(\varphi, \psi)_f = \int \hat{\varphi}(\xi)\,\overline{\hat{\psi}(\xi)}\,f(\xi)\,d\xi$$

et

$$\|\varphi\|_f^2 = (\varphi, \varphi)_f.$$

$\mathcal{D}^f$ est évidemment un espace de Hilbert invariant par translation : on a $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}^f \subset \mathcal{S}'$, les inclusions étant continues (et les images denses). Le produit scalaire

$$((\varphi, \psi)) = \int \varphi(x)\,\overline{\psi(x)}\,dx$$

fait de $\mathcal{D}^g$ l'antidual de $\mathcal{D}^f$.

Définition I.1.3. — *A étant un sous-ensemble fermé de l'espace X^n, on désigne par $\mathcal{K}_A^f$ l'espace des distributions $\in \mathcal{D}^f$ qui ont leur support dans A.*

$\mathcal{K}_A^f$, qui est évidemment un sous-espace de $\mathcal{D}^f$, est donc aussi un espace de Hilbert.

2. Quelques lemmes.

Lemme I.2.1. — *Soit $f(\xi)$ une fonction-poids; posons*

$$h(\xi) = f(\xi)\left(1 + \sum \xi_i^2\right).$$

Étant donné $\varphi \in \mathcal{S}$, pour que φ et les $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ appartiennent à $\mathcal{D}^f$, il faut et il suffit qu'on ait $\varphi \in \mathcal{D}^h$. Dans ces conditions, et en désignant par $\tau_{k,j}$ (l'extension aux distributions de) l'opérateur

$$\varphi(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \to \varphi(x_1, \ldots, x_j + k, \ldots, x_n)$$

les $\frac{\tau_{k,j}\varphi - \varphi}{k}$ convergent vers $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ dans $\mathcal{D}^f$, lorsque $k \to 0$.

La première affirmation est évidente. Pour démontrer la seconde, il suffit (par transformation de Fourier) de prouver que l'intégrale

$$\int |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \left| \frac{e^{2\pi i k \xi_j} - 1}{k} - 2\pi i \xi_j \right|^2 f(\xi)\, d\xi$$

tend vers zéro avec k.

Appliquons le théorème de Lebesgue : la fonction sous le signe $\int$ est intégrable, et tend vers zéro pour chaque ξ en même temps que k; il suffit donc de la majorer par une fonction intégrable indépendante de k; or on a

$$\left| \frac{e^{2\pi i k \xi_j} - 1}{k} - 2\pi i \xi_j \right| \leq 2\pi M |\xi_j|,$$

avec

$$M = \max_{-\infty < u < +\infty} \left| \frac{e^{iu} - 1}{u} - i \right|$$

et, par conséquent, la fonction sous le signe $\int$ est majorée par

$$4\pi^2 M^2 |\hat{\varphi}(\xi)|^2 h(\xi),$$

d'où le lemme.

Lemme I.2.2. — *Soient $f(\xi)$ et $h(\xi)$ deux fonctions-poids telles qu'on ait*

$$\lim_{\xi \to \infty} \frac{h(\xi)}{f(\xi)} = 0.$$

Alors, on a $\mathcal{D}^f \subset \mathcal{D}^h$ *et, pour tout compact* $A \subset X^n$, *l'injection* $\mathcal{K}^f_A \to \mathcal{K}^h_A$ *est compacte* [1]. (Comparer avec [5], th. 2.15.)

La première affirmation est évidente. Pour démontrer la seconde, considérons une suite (φ_m) de distributions $\in \mathcal{K}^f_A$, vérifiant $\| \varphi_m \|_f \leqq 1$, et tendant faiblement vers zéro dans $\mathcal{D}^h$; tout revient à démontrer que les φ_m tendent fortement vers zéro dans $\mathcal{D}^h$.

Or, par hypothèse, on peut trouver, quel que soit $\varepsilon > 0$, un nombre $\rho > 0$ vérifiant

$$\frac{h(\xi)}{f(\xi)} \leqq \varepsilon \qquad \text{pour} \quad |\xi|^2 \left(= \sum \xi_i^2\right) \leqq \rho^2.$$

On a donc

$$\int_{|\xi| \geqq \rho} |\hat{\varphi}_m(\xi)|^2 h(\xi)\, d\xi \leqq \varepsilon.$$

Il nous suffit donc de démontrer ceci : ρ étant fixé les fonctions $\hat{\varphi}_m(\xi)$ tendent vers zéro uniformément dans la boule $|\xi| \leqq \rho$ lorsque $m \to +\infty$. Or, soit $\alpha(x)$ une fonction indéfiniment dérivable, à support compact, égale à 1 sur A; lorsque ξ varie dans la boule $|\xi| \leqq \rho$, les fonctions $x \to \alpha(x)\, e^{2\pi i \langle \xi, x \rangle}$ forment un ensemble compact dans $\mathcal{S}$ (et même dans n'importe quel espace fonctionnel raisonnable), donc, *a fortiori*, dans $\mathcal{D}^{h^{-1}}$.

Alors, comme les φ_m forment une suite faiblement convergente vers zéro dans $\mathcal{D}^h$, les

$$\hat{\varphi}_m(\xi) = (\varphi_m(x),\ \alpha(x)\, e^{2\pi i \langle \xi, x \rangle})$$

convergent uniformément vers zéro pour $|\xi| \leqq \rho$, $m \to +\infty$, ce qui démontre la proposition.

Lemme I.2.3. — *Gardons les hypothèses du lemme précédent, et supposons, en outre, que* $\mathcal{D}^h$ *ne contienne aucune distribution à support ponctuel. Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$, *tout point* $a \in X^n$ *possède un voisinage compact A tel que tout* $\varphi \in \mathcal{K}^f_A$ *vérifie*

$$\| \varphi \|_h \leqq \varepsilon \| \varphi \|_f.$$

Sinon, il existerait une suite (φ_m) de distributions $\in \mathcal{D}^f$, possédant les propriétés suivantes : $\| \varphi_m \|_f = 1$, $\| \varphi_m \|_h \not\to 0$, φ_m a son support dans la boule de centre a et de rayon $\frac{1}{m}$; d'après le lemme précédent, les φ_m auraient, dans $\mathcal{D}^h$, au moins un point d'accumulation $\psi \neq 0$; or le support de ψ serait réduit à $\{a\}$, ce qui est absurde.

Lemme I.2.4. — *Soient* $f(\xi)$ *une fonction-poids, et* Λ *un compact* $\subset \Xi^n$. *Considérons, sur l'espace* $\mathcal{D}^f$, *la semi-norme* $\| . \|'_f$ *suivante :*

$$\| \varphi \|'^2_f = \int_{\xi \notin \Lambda} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 f(\xi)\, d\xi.$$

Pour tout compact $A \subset X^n$, $\| . \|'_f$ *est une norme équivalente à* $\| . \|_f$ *sur* $\mathcal{K}^f_A$.

[1] C'est-à-dire, dans la terminologie classique, complètement continue.

Si $\varphi \in \mathcal{K}_A^f$ vérifie $\|\varphi\|'_f = 0$, on a nécessairement $\hat{\varphi}(\xi) = 0$ pour $\xi \notin \Lambda$; mais, comme $\hat{\varphi}(\xi)$ est une fonction analytique (théorème de Paley-Wiener), cela entraîne $\varphi = 0$; donc, $\|.\|'_f$ est une norme sur $\mathcal{K}_A^f$.

La topologie définie par cette norme est évidemment moins fine que la topologie définie par $\|.\|_f$; démontrons qu'elle est équivalente.

Pour cela, considérons une fonction-poids $h(\xi)$ égale à $f(\xi)$ sur Λ, vérifiant

$$\lim_{\xi \to \infty} \frac{h(\xi)}{f(\xi)} = 0$$

et raisonnons par l'absurde.

Si la propriété cherchée était fausse, on pourrait trouver une suite (φ_m) de distributions $\in \mathcal{K}_A^f$ vérifiant

$$\|\varphi_m\|_f = 1, \qquad \lim \|\varphi_m\|'_f = 0;$$

on aurait donc

$$\lim \int_{\xi \in \Lambda} |\hat{\varphi}_m(\xi)|^2 f(\xi)\, d\xi = 1 \qquad \text{donc} \quad \|\varphi_m\|_h \not\to 0$$

d'après le lemme I.2.2, on pourrait extraire de la suite (φ_m) une suite (φ_{m_k}) convergeant vers $\psi \neq 0$ dans $\mathcal{D}^h$; d'après l'inégalité

$$\|\cdot\|_f^2 \leq \|\cdot\|_f'^2 + \|\cdot\|_h^2,$$

la suite (φ_{m_k}) serait une suite de Caúchy dans $\mathcal{K}_A^f$, donc on aurait $\psi \in \mathcal{K}_A^f$; mais alors, on aurait

$$\|\psi\|'_f = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \psi = 0,$$

ce qui est absurde.

3. Espaces de type local.

Définition I.3.1. — *Nous dirons qu'un espace $\mathcal{D}^f$ défini par une fonction-poids f est de type local s'il possède la propriété suivante : Pour toute fonction indéfiniment dérivable à support compact $\alpha(x)$ et toute distribution $\varphi \in \mathcal{D}^f$, on a : $\alpha\varphi \in \mathcal{D}^f$.*

Dans la suite, nous désignerons par $\mathcal{K}^\infty$ (resp. $\mathcal{E}^\infty$) l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact (resp. à support quelconque) de la variable $x \in X^n$; nous munirons ces espaces de leurs topologies naturelles ([11], chap. III).

Si $\mathcal{D}^f$ est de type local, pour tout $\alpha \in \mathcal{K}^\infty$, l'application $\varphi \to \alpha\varphi$ de $\mathcal{D}^f$ dans $\mathcal{D}^f$ est continue en vertu du théorème du graphe fermé; par conséquent :

a. L'application adjointe

$$\varphi \to \bar{\alpha}\varphi \qquad \left[\varphi \in \mathcal{D}^g,\ g(\xi) = \frac{1}{f(\xi)}\right]$$

existe, donc $\mathcal{D}^g$ est aussi de type local.

b. Si l'on désigne par $L(\mathcal{D}^f)$ l'espace des applications linéaires continues de $\mathcal{D}^f$ dans lui-même (cet espace étant muni de sa norme naturelle), l'application $\alpha \to (\varphi \to \alpha\varphi)$ de $\mathcal{K}^\infty$ dans $L(\mathcal{D}^f)$ sera aussi continue d'après le théorème du graphe fermé ($\mathcal{K}^\infty$ est un espace $(\mathcal{LF})$, et $L(\mathcal{D}^f)$ un espace de Banach; *cf.* [2]); autrement dit, l'application $\alpha \times \varphi \to \alpha\varphi$ est une application bilinéaire continue

$$\mathcal{K}^\infty \times \mathcal{D}^f \to \mathcal{D}^f.$$

Soit maintenant A un compact $\subset X^n$; pour $\alpha \in \mathcal{L}^\infty$, $\varphi \in \mathcal{K}^f_A$, on aura encore $\alpha\varphi \in \mathcal{K}^f_A$; le même raisonnement que nous venons de faire montre alors que l'application $\alpha \times \varphi \to \alpha\varphi$ est une application bilinéaire continue

$$\mathcal{L}^\infty \times \mathcal{K}^f_A \to \mathcal{K}^f_A.$$

Définition I.3.2. — *Plaçons-nous dans le cas où $\mathcal{D}^f$ est de type local; et soit Ω un ouvert $\subset X^n$; nous désignerons par $\mathcal{K}^f_\Omega$ la limite inductive des $\mathcal{K}^f_A$, A compact $\subset \Omega$, muni de sa topologie naturelle de limite inductive.*

Nous désignerons par $\mathcal{L}^f_\Omega$ l'espace des distributions dans Ω qui possèdent la propriété suivante : $\varphi \in \mathcal{L}^f_\Omega$ si et seulement si, pour tout $\alpha \in \mathcal{K}^\infty_\Omega$, on a : $\alpha\varphi \in \mathcal{K}^f_\Omega$.

$\mathcal{L}^f_\Omega$ sera muni de la topologie localement convexe la moins fine rendant continues les applications $\varphi \to \alpha\varphi$ de $\mathcal{L}^f_\Omega$ dans $\mathcal{K}^f_\Omega$.

Des raisonnements bien connus, et sur lesquels nous nous dispenserons d'insister (*voir*, par exemple [13]) montrent ceci :

a. $\mathcal{K}^f_\Omega$ est un espace $(\mathcal{LF})$ réflexif (et même une limite inductive stricte d'espaces hilbertiens);

b. $\mathcal{L}^f_\Omega$ est un espace $(\mathcal{F})$ réflexif;

c. L'antidual fort de $\mathcal{K}^f_\Omega$ est $\mathcal{L}^g_\Omega$.

Donnons maintenant une condition suffisante simple pour que $\mathcal{D}^f$ soit de type local $\left(\text{inspirée du cas particulier } f(\xi) = \left(1 + \sum \xi_i^2\right)^s \textit{ cf.} \text{ [6], [13]}\right)$:

Proposition I.3.3. — *Soit $f(\xi)$ une fonction-poids, possédant la propriété suivante :*

Il existe une fonction continue $k(\xi)$ à croissance polynomiale (c'est-à-dire majorée, pour $\xi \in \Xi^n$, par un polynome) telle que, pour tout $\xi \times \eta \in \Xi^n \times \Xi^n$, on ait

$$f(\xi + \eta) \leq k(\xi) f(\eta).$$

Alors $\mathcal{D}^f$ (et donc aussi $\mathcal{D}^g$) est de type local; et, plus précisément, on a

$$\| \alpha\varphi \|_f \leq \| \varphi \|_f \int |\hat{\alpha}(\xi)| \sqrt{k(\xi)}\, d\xi$$

pour $\alpha \in \mathcal{K}^\infty$ et $\varphi \in \mathcal{D}^f$.

Soient, en effet, $\alpha \in \mathcal{K}^{x}$, $\varphi \in \mathcal{S}$, $\psi \in \mathcal{S}$. On a

$$(\alpha\varphi, \psi) = \iint \hat{\alpha}(\eta)\, \hat{\varphi}(\xi - \eta)\, \overline{\hat{\psi}(\xi)}\, d\xi\, d\eta$$

$$= \iint \hat{\alpha}(\eta)\left[\hat{\varphi}(\xi - \eta)\sqrt{f(\xi - \eta)}\right] \frac{\overline{\hat{\psi}(\xi)}}{\sqrt{f(\xi)}}\, \frac{\sqrt{f(\xi)}}{\sqrt{f(\xi - \eta)}}\, d\xi\, d\eta$$

par hypothèse

$$\frac{f(\xi)}{f(\xi - \eta)} \leqq k(\eta);$$

par suite,

$$|(\alpha\varphi, \psi)| \leqq \iint |\hat{\alpha}(\eta)| \sqrt{k(\eta)}\left[|\hat{\varphi}(\xi - \eta)| \sqrt{f(\xi - \eta)}\right] \frac{|\hat{\psi}(\xi)|}{\sqrt{f(\xi)}}\, d\xi\, d\eta$$

et, d'après Cauchy-Schwarz,

$$|(\alpha\varphi, \psi)| \leqq \|\varphi\|_f \|\psi\|_g \int |\hat{\alpha}(\eta)| \sqrt{k(\eta)}\, d\eta,$$

ce qui entraîne la proposition (puisque $\mathcal{S}$ est dense dans $\mathcal{D}^f$ et dans $\mathcal{D}^g$).

Exemples. — Si $f(\xi)$ et $h(\xi)$ vérifient les conditions précédentes; $f+h$, fh, f^s $(s \geqq 0)$ vérifient les conditions précédentes; pour $f+h$, cela résulte de l'inégalité évidente

$$\frac{f(\xi+\eta)+h(\xi+\eta)}{f(\xi)+h(\xi)} \leqq \frac{f(\xi+\eta)}{f(\xi)} + \frac{h(\xi+\eta)}{h(\xi)},$$

dans les deux autres cas, c'est immédiat.

Par exemple, $f(\xi) = \left(1 + \sum \xi_i^2\right)^s$, vérifiera, pour $s \geqq 0$, les conditions voulues; donc, pour s réel quelconque, et $f = \left(1 + \sum \xi_i^2\right)^s$. $\mathcal{D}^f$ sera de type local. *Nous utiliserons constamment dans la suite les espaces fonctionnels $\mathcal{D}^f$ $\mathcal{K}^f$, ... correspondant à cette fonction-poids particulière, et nous les noterons respectivement $\mathcal{D}^s$, $\mathcal{K}^s$, ...*

II. — Opérateurs hypoelliptiques à coefficients constants.

1. Rappels. — Nous utiliserons, pour les opérateurs différentiels, les notations de L. Hörmander ([5], chap. II, § 1), à ceci près que nous désignerons par D_j l'opérateur différentiel $\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ (à cause de la normalisation utilisée ici pour la transformation de Fourier).

Pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in N^n$ (N désignant l'ensemble des entiers $\geqq 0$), nous poserons donc

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \qquad \text{et} \qquad D_\alpha = (D_1)^{\alpha_1} \ldots (D_n)^{\alpha_n}.$$

Au polynome $P(\xi)$ correspond par transformation de Fourier inverse un opérateur différentiel à coefficients constants, qui sera noté $P(D)$; avec les notations précédentes, nous aurons en particulier,

$$P(D) = D_j \qquad \text{si} \quad P(\xi) = \xi_j.$$

La « formule de Leibnitz » s'écrira alors

$$P(D)(uv) = \sum \frac{D_\alpha(v)}{\alpha!} P^\alpha(D) u,$$

où $P^\alpha(\xi)$ désigne le polynome $\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial\xi_n}\right)^{\alpha_n} P(\xi)$ et $\alpha!$ l'entier $\alpha_1!\ldots, \alpha_n!$

Cette formule se généralise immédiatement aux opérateurs différentiels à coefficients variables à condition d'adopter les notations suivantes (les propriétés de différentiabilité, etc., des coefficients seront précisées plus loin) :

$$P(x, D) = \sum a_i(x) P_i(D)$$

étant un opérateur différentiel à coefficients variables, nous poserons

$$P^\alpha(x, D) = \sum a_i(x) P_i^\alpha(D)$$

[l'opérateur différentiel ainsi défini ne dépend évidemment pas de la décomposition particulière de $P(x, D)$ choisie]. Si a est un point appartenant au domaine de définition des fonctions $a_i(x)$, nous désignerons par $P(a, D)$ l'opérateur différentiel à coefficients constants $\sum a_i(a) P_i(D)$.

DÉFINITION II.1.1. — *Ω étant un ouvert $\subset X^n$, un opérateur différentiel $P(x, D)$ à coefficients indéfiniment différentiables dans Ω sera dit hypoelliptique (dans Ω) s'il possède la propriété suivante :*

Toute distribution φ dans Ω est une fonction indéfiniment différentiable dans tout ouvert $\subset \Omega$, où $P(x, D)\varphi$ est une fonction indéfiniment différentiable.

Les opérateurs hypoelliptiques à coefficients constants (qui ne dépendent pas de Ω), ont été caractérisés et étudiés en détail par L. HÖRMANDER dans sa thèse ([5], chap. III), sous le nom d'opérateurs « complets de type local » ; nous nous contenterons, dans ce numéro, de rappeler sans démonstration une partie des résultats de cet auteur, et d'en tirer quelques conséquences faciles.

THÉORÈME II.1.2. — *Pour que $P(D)$ soit hypoelliptique, il faut et il suffit que $P(\xi)$ ne s'annule pas en dehors d'un compact, et que, pour tout $\alpha \in N^n$, $\alpha \neq 0$, on ait*

$$\lim_{\xi\to\infty} \frac{P^\alpha(\xi)}{P(\xi)} = 0.$$

PROPOSITION II.1.3. — *Si $P(D)$ est un opérateur hypoelliptique d'ordre m on peut trouver $K > 0$ tel que, pour tout $\xi \times \eta \in \Xi^n \times \Xi^n$, on ait*

$$1 + |P(\xi+\eta)|^2 \leqq K\left(1 + \sum \xi_i^2\right)^m (1 + |P(\eta)|^2).$$

Pour démontrer cette proposition, il suffit d'appliquer le théorème précédent à $P(\xi)$ et la formule de Taylor à $Q(\xi) = 1 + |P(\xi)|^2$.

REMARQUE. — La formule précédente peut être ainsi améliorée : il existe $K' > 0$ tel que, pour tout $\xi \times \eta \in \Xi^n \times \Xi^n$, on ait

$$\text{(II.1.4)} \qquad 1 + |P(\xi+\eta)|^2 \leqq K'(1 + |P(\xi)|^2)(1 + |P(\eta)|^2).$$

Ce dernier résultat découle aussitôt du fait suivant : il existe des constantes $\lambda_{\alpha\beta}$ (dépendant de Q!) telles qu'on ait [2]

$$Q(\xi+\eta) = \sum \lambda_{\alpha\beta}\, Q^\alpha(\xi)\, Q^\beta(\eta).$$

PROPOSITION II.1.5. — *Soit $P(D)$ un opérateur hypoelliptique; on peut trouver deux nombres > 0 k et K tels que pour tout $\xi \in \Xi^n$, et tout $\alpha \in N^n$, $\alpha \neq 0$, on ait*

$$|P^\alpha(\xi)|^2 \leqq K\left(1 + \sum \xi_i^2\right)^{-k} (1 + |P(\xi)|^2).$$

a. Occupons-nous pour commencer du cas $|\alpha| = 1$; soit V l'ensemble des zéros de P dans l'espace numérique complexe à n dimensions Z^n (dont nous désignerons le point courant par $\zeta = \xi + i\eta$); et soit $d(\zeta)$ la distance du point ζ à V.

En vertu de la formule (évidente),

$$\left|\frac{\partial P}{\partial \zeta_j}\right| \leqq m \frac{|P(\zeta)|}{d(\zeta)} \quad (\leqq +\infty),$$

où m désigne l'ordre de $P(D)$, on aura, pour $|\eta| \leqq A$ ($A < +\infty$, fixé),

$$\left|\frac{\partial P}{\partial \zeta_j}\right| \leqq m \frac{|P(\zeta)|}{\operatorname{Max}(0,\, d(\xi) - A)}.$$

---

[2] Soient, en effet, E l'espace vectoriel des polynomes de degré $\leqq 2m$ et V le sous-espace engendré par les Q^α. D'après la formule de Taylor, on a

$$Q(\xi+\eta) \in E_\xi \otimes V_\eta \quad \text{et} \quad \in V_\xi \otimes E_\eta,$$

d'où

$$Q(\xi+\eta) \in V_\xi \otimes V_\eta.$$

Mais on sait que, dans la bande $|\eta| \leqq A$, les zéros de P forment un ensemble compact ; et que, d'autre part, pour ξ assez grand, on a

$$d(\xi)^2 \geqq \left(\sum \xi_i^2\right)^k,$$

k étant un nombre > 0 (HÖRMANDER, *loc. cit.*).

Par conséquent, il existe une constante $K > 0$ telle qu'on ait, pour $|\eta| \leqq A$ et $j = 1, \ldots, n$,

$$\left|\frac{\partial P}{\partial \zeta_j}\right|^2 \leqq K'\left(1 + \sum \xi_i^2\right)^{-k}(1 + |P(\zeta)|^2).$$

En particulier, cela démontre la proposition lorsque $|\alpha| = 1$.

b. Passons maintenant au cas général. En utilisant le résultat précédent, et les inégalités de Cauchy, nous obtiendrons des majorations du type suivant :

$$|P^\alpha(\xi)|^2 \leqq K'' \operatorname*{Max}_{|\zeta' - \xi| \leqq B}\left(1 + \sum \xi_i'^2\right)^{-k}(1 + |P(\zeta')|^2),$$

où K est une constante > 0 (dépendant de α et B).

Tout revient donc à montrer,

$$\operatorname*{Max}_{|\zeta' - \xi| \leqq B} (1 + |P(\zeta')|^2) \leqq K'''(1 + |P(\xi)|^2),$$

mais ce dernier point résulte aussitôt de la formule de Leibnitz et du théorème II.1.2. C. Q. F. D.

2. Opérateurs hypoelliptiques et espaces de type local.

DÉFINITION II.2.1. — *$P(D)$ étant un opérateur hypoelliptique à coefficients constants, et s un nombre réel, nous désignerons par $\mathcal{D}^{P,s}$, $\mathcal{K}_A^{P,s}$, ... les espaces, $\mathcal{D}^f$, $\mathcal{K}_A^f$, ... définis par la fonction-poids $f(\xi) = (1 + |P(\xi)|^2)^s$ et par $\|\cdot\|_{P,s}$ la norme $\|\cdot\|_f$.*

En particulier, si nous désignons par $\Delta(\xi)$ le polynome $\sum \xi_i^2$, nous aurons donc (à un léger changement de norme près!)

$$\mathcal{D}^{2s} = \mathcal{D}^{\Delta,s}.$$

Les propositions I.1.3 et II.1.3 entraînent aussitôt :

THÉORÈME II.2.2. — *$\mathcal{D}^{P,s}$ est un espace de type local.*

Compte tenu de la formule (II.1.4), nous obtiendrons les majorations suivantes :

$$\|\alpha\varphi\|_{P,s} \leqq K'\|\varphi\|_{P,s}\int |\hat{\alpha}(\xi)|(1 + |P(\xi)|^2)^{\frac{s}{2}} d\xi \qquad (s \geqq 0),$$

$$\|\alpha\varphi\|_{P,s} \leqq K'\|\varphi\|_{P,s}\int |\hat{\alpha}(\xi)|(1 + |P(\xi)|^2)^{-\frac{s}{2}} d\xi \qquad (s \leqq 0).$$

REMARQUE. — Ce résultat suggère d'introduire l'espace $\mathcal{D}_{L^1}^{P,s}$ des distributions tempérées φ dont la transformée de Fourier est localement sommable et vérifie

$$|||\varphi|||_{P,s} = \int |\hat{\varphi}(\xi)|(1+|P(\xi)|^2)^{\frac{s}{2}} d\xi < +\infty.$$

Par un raisonnement analogue à I.3.3, on trouvera le résultat suivant : pour $s \geqq 0$, $\varphi \in \mathcal{S}$, $\psi \in \mathcal{S}$, on a

$$|||\varphi\psi|||_{P,s} \leqq C|||\varphi|||_{P,s}|||\psi|||_{P,s}$$

(C, une constante > 0) ; alors, comme $\mathcal{S}$ est dense dans $\mathcal{D}_{L^1}^{P,s}$ (même raisonnement qu'en I.1), l'application $\varphi \times \psi \to \varphi\psi$ se prolonge en *une multiplication dans $\mathcal{D}_{L^1}^{P,s}$, qui fait de cet espace une algèbre de Banach* (propriété qui semble digne d'être notée, et qui pourrait peut-être être utile dans l'étude de certaines équations non linéaires).

PROPOSITION II.2.3. — *Soient $P(D)$ un opérateur hypoelliptique à coefficients constants, s un nombre $\geqq 0$, et $h(\xi)$ une fonction-poids vérifiant*

$$\lim_{\xi \to \infty} \frac{h(\xi)}{(1+|P(\xi)|^2)^s} = 0.$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, tout point $a \in X$ possède un voisinage compact A tel que tout $\varphi \in \mathcal{K}_A^{P,s}$ vérifie

$$\|\varphi\|_h \leqq \varepsilon \|\varphi\|_{P,s}.$$

Supposons d'abord $s > 0$. Soit t un nombre vérifiant $0 < t < s$ et soit $h'(\xi)$ la fonction-poids $\sup(h, (1+|P(\xi)|^2)^t)$. D'après la proposition II.1.5, h' vérifie aussi les hypothèses.

Comme $\mathcal{D}^0$ ne contient aucune distribution à support ponctuel et qu'on a $\mathcal{D}^{h'} \subset \mathcal{D}^0$ (évident), $\mathcal{D}^{h'}$ ne contiendra aucune distribution à support ponctuel, et il suffit d'appliquer à h' le lemme I.2.3.

Pour $s = 0$, démonstration analogue.

Terminons le paragraphe II par une proposition qui jouera un rôle essentiel dans l'étude des équations à coefficients variables que nous nous proposons d'entreprendre :

PROPOSITION II.2.4. — *Soient $P(D)$ un opérateur hypoelliptique à coefficients constants, s un nombre > 0, et $a(x)$ une fonction $\in \mathcal{E}^\infty$ vérifiant $a(0) = 0$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage compact A de 0 tel que tout $\varphi \in \mathcal{K}_A^{P,s}$ vérifie*

$$\|a\varphi\|_{P,s} \leqq \varepsilon \|\varphi\|_{P,s}.$$

DÉMONSTRATION. — En écrivant a sous la forme

$$\sum x_i b_i(x), \qquad b_i(x) \in \mathcal{E}^\infty,$$

on se ramène à démontrer la proposition pour $a(x) = x_i$; appelons alors B_k la boule fermée de centre O et de rayon k^{-1}, et posons

$$l_p = \overline{\lim_{k \to +\infty}} \left[\sup_{\varphi \in \mathcal{H}^{P,s}_{B_k}} \frac{\| x_i^p \varphi \|_{P,s}}{\| \varphi \|_{P,s}}. \right]$$

Tout revient à montrer qu'on a $l_1 = 0$. Examinons donc les propriétés de la suite (l_p).

a. Soit C une constante > 0; dans l'ouvert $|x_i| < C$, la suite de fonctions $(C^{-1} x_i)^p$ tend vers zéro uniformément sur tout compact ainsi que ses dérivées; des propriétés de la multiplication établies en I.3 et du théorème II.2.2, on déduit donc

$$\lim_{p \to +\infty} C^{-p} l_p = 0.$$

Comme C est un nombre > 0 quelconque, on en tire

$$\lim (l_p)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

b. Démontrons maintenant l'égalité

$$l_p = l_1^p \tag{II.2.5}$$

qui, jointe à l'égalité précédente, entraîne la relation $l_1 = 0$ et la proposition.

Compte tenu de l'inégalité évidente $l_p \leq l_1^p$, et de $l_0 = 1$, un raisonnement par récurrence montre qu'il suffit, pour prouver (II.2.5), d'établir le

LEMME II.2.6. — *Pour $p \geq 1$, on a*

$$l_p^2 \leq l_{p+1} l_{p-1}.$$

Soit B un compact, et φ une fonction $\in \mathcal{H}^\infty_B$; on a

$$\| x_i^p \varphi \|^2_{P,s} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2p} \int \frac{\partial^p \hat{\varphi}}{\partial \xi_i^p} \frac{\partial^p \overline{\hat{\varphi}}}{\partial \xi_i^p} (1 + |P(\xi)|^2)^s \, d\xi$$

en intégrant par parties

$$\begin{aligned} \| x_i^p \varphi \|^2_{P,s} = &- \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2p} \int \frac{\partial^{p-1} \hat{\varphi}}{\partial \xi_i^{p-1}} \frac{\partial^{p+1} \overline{\hat{\varphi}}}{\partial \xi_i^{p+1}} (1 + |P(\xi)|^2)^s \, d\xi \\ &- 2s \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2p} \int \frac{\partial^{p-1} \hat{\varphi}}{\partial \xi_i^{p-1}} \frac{\partial^p \overline{\hat{\varphi}}}{\partial \xi_i^p} (1 + |P(\xi)|^2)^{s-1} \mathcal{R}\left(P \frac{\partial \overline{P}}{\partial \xi_i}\right) d\xi \end{aligned}$$

($\mathcal{R}$ = partie réelle). Examinons les deux termes du second membre :

a. D'après Cauchy-Schwarz, le premier est majoré en valeur absolue, par

$$\| x_i^{p-1} \varphi \|_{P,s} \| x_i^{p+1} \varphi \|_{P,s}.$$

b. D'après la proposition II.1.5 (il suffirait, d'ailleurs en modifiant légèrement la démonstration qui suit, d'utiliser le théorème II.1.2), il existe $\sigma > 0$ tel qu'on ait

$$\left| P \frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi_i} \right| \leq K(1 + |P(\xi)|^2)^{1-\sigma}.$$

D'après Cauchy-Schwarz, le second terme est donc majoré, en valeur absolue, par

$$K \| x_i^{p-1} \varphi \|_{P,s-\sigma} K' \| \varphi \|_{P,s-\sigma}^2.$$

Finalement, nous obtenons

$$\| x_i^p \varphi \|_{P,s}^2 \leq \| x_i^{p-1} \varphi \|_{P,s} \| x_i^{p+1} \varphi \|_{P,s} + K' \| \varphi \|_{P,s-\sigma}$$

(K, une constante > 0 dépendant de B et de p).

Si maintenant B' est un compact intérieur à B, la même formule sera valable pour tout $\varphi \in \mathcal{K}_{B'}^{P,s}$ (régularisation) ; en appliquant alors la proposition II.2.3, nous obtenons

$$l_p^2 \leq l_{p-1} l_{p+1},$$

ce qui démontre le lemme et la proposition.

III. — Opérateurs hypoelliptiques à coefficients variables.

1. Définition, régularité des solutions.

Définition III.1.1. — *Soient $P_1(D)$ et $P_2(D)$ deux opérateurs hypoelliptiques à coefficients constants. Nous dirons que ces opérateurs sont équivalents s'il existe deux constantes $K > 0$ et $K' > 0$ telles que tout $\xi \in \Xi^n$ vérifie*

$$K \leq \frac{1 + |P_1(\xi)|^2}{1 + |P_2(\xi)|^2} \leq K'.$$

Dans la terminologie de Hörmander [5], cela signifie que P_1 est plus fort (« stronger ») que P_2 et inversement.

Définition III.1.2. — *Soit Ω un ouvert $\subset X^n$, et $P(D)$ un opérateur hypoelliptique à coefficients constants. Un opérateur différentiel $P(x, D)$ défini dans Ω, et à coefficients indéfiniment différentiables, est dit « équivalent à P » si, pour tout $a \in \Omega$, $P(a, D)$ est hypoelliptique et équivalent à $P(D)$.*

L'ensemble des opérateurs hypoelliptiques équivalents à $P(D)$ engendre un espace vectoriel de dimension finie (puisque tous ces opérateurs sont nécessairement du même ordre !) soit $P_i(D)$ $(i = 1, \ldots, l)$ une base de cet espace, que nous supposerons pour simplifier formée d'opérateurs hypoelliptiques équivalents à $P(D)$; $P(x, D)$ pourra alors s'écrire (d'une manière unique) $\sum a_i(x) P_i(D)$, les $a_i(x)$ étant des fonctions indéfiniment différenrentiables dans Ω.

Gardons les notations précédentes ; soit s un nombre réel et posons

$$f_s(\xi) = (1 + |P(\xi)|^2)\left(1 + \sum \xi_i^2\right)^s.$$

Pour simplifier les notations nous écrirons $\mathcal{D}^{f,s}$, $\mathcal{K}_A^{f,s}$, ... au lieu de $\mathcal{D}^{f_s}$, $\mathcal{K}_A^{f_s}$, ...

Lemme III.1.3. — *Pour $t \geqq 0$, tout point $a \in \Omega$ possède un voisinage compact A (dépendant éventuellement de s) tel que l'application $\varphi \to P(x, D)\varphi$ soit un monomorphisme : $\mathcal{K}_A^{f,t} \to \mathcal{K}_A^t$.*

Soit d'abord B un voisinage compact quelconque de a dans Ω ; pour $\varphi \in \mathcal{K}_A^{f,t}$, on a évidemment

$$P_i(D)\varphi \in \mathcal{K}_B^t ;$$

comme $\mathcal{D}^t$ est de type local, on aura $P(x, D)\varphi \in \mathcal{K}_B^t$ et l'application $P(x, D) : \mathcal{K}_B^{f,t} \to \mathcal{K}_B^t$ sera continue.

D'autre part, comme $P(a, D)$ est équivalent à $P(D)$, le lemme I.2.4 nous montre qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{K}_B^{f,t}$, on ait

$$\| P(a, D)\varphi \|_t \geqq C \| \varphi \|_{f,t}.$$

Écrivons alors $P(x, D)$ sous la forme

$$P(a, D) + \sum b_i(x) P_i(D) ;$$

on aura $b_i(a) = 0$, et appliquons la proposition II.2.4 à $\mathcal{D}^t$ $\Big($ou, plus exactement, à $\mathcal{D}^{\Delta, \frac{t}{2}}$, qui est formé des mêmes distributions que $\mathcal{D}^t$, et est muni d'une norme équivalente$\Big)$: nous pouvons trouver un voisinage compact $A \subset B$ de a tel que, tout $\varphi \in \mathcal{K}_A^{f,t}$ vérifie

$$\left\| \sum b_i(x) P_i(D)\varphi \right\|_t \leqq \frac{C}{2} \| \varphi \|_{f,t}$$

et par suite,

$$\| P(x, D)\varphi \|_t \geqq \frac{C}{2} \| \varphi \|_{f,t},$$

d'où le lemme.

Avant d'énoncer le résultat suivant, remarquons que $\mathcal{D}^{f,s}$ est de type local (puisque f est de la forme gh, où g et h vérifient les hypothèses de la propositions I.3.3) (*cf.* I.3, exemples).

Théorème III.1.4. — *φ étant une distribution dans Ω, pour qu'on ait, $\varphi \in \mathcal{L}_\Omega^{f,s}$, il faut et il suffit qu'on ait*

$$P(x, D)\varphi \in \mathcal{L}_\Omega^s.$$

a. Supposons d'abord qu'on a : $\varphi \in \mathcal{L}_\Omega^{f,1}$, et démontrons le théorème avec cette hypothèse supplémentaire. D'après la proposition II.1.5, il existe $k > 0$ tel que, pour tout i, et tout $\alpha \in N^n$, $\alpha \neq 0$, on ait

$$|P_i^\alpha(\xi)|^2 \leq C\left(1 + \sum \xi_i^2\right)^{-k}(1 + |P(\xi)|^2);$$

on peut supposer $k \leq 1$.

Par récurrence, il suffit de démontrer le résultat suivant :

Les hypothèses $\varphi \in \mathcal{L}_\Omega^{f,\sigma}$; $P(x, D)\varphi \in \mathcal{L}_\Omega^s$; $1 \leq k + \sigma \leq s$ *entraînent :* $\varphi \in \mathcal{L}_\Omega^{f,k+\sigma}$. (Comparer avec [7].)

Ce résultat étant de caractère local, il suffit de le démontrer au voisinage de tout point $a \in \Omega$; soit alors A un voisinage compact de a vérifiant le lemme III.1.3 pour $t = k + \sigma - 1$, et soit ψ une fonction indéfiniment dérivable à support dans l'intérieur de A. Il suffit de démontrer qu'on a

$$\psi\varphi \in \mathcal{K}_A^{f,k+\sigma}.$$

Pour cela, remarquons qu'en vertu de la formule de Leibnitz

$$P(x, D)(\psi\varphi) = \psi P(x, D)\varphi + \sum_{|\alpha| \geq 1} \frac{D_\alpha \psi}{\alpha!} P^\alpha(x, D)\varphi$$

et des hypothèses, on a

$$P(x, D)(\psi\varphi) \in \mathcal{K}_A^{k+\sigma}$$

et employons un artifice dû à Nirenberg [10].

$\tau_{h,j}$ ayant la même signification qu'au lemme I.2.1, on a, pour h assez petit,

$$\tau_{h,j}(\psi\varphi) \in \mathcal{K}_A^\sigma;$$

a fortiori

$$\tau_{h,j}(\psi\varphi) \in \mathcal{K}_A^{k+\sigma-1}.$$

D'autre part (³),

$$P(x, D)\frac{\tau_{h,j}(\psi\varphi) - \psi\varphi}{h}$$

$$= \frac{\tau_{h,j}[P(x, D)(\psi\varphi)] - P(x, D)(\psi\varphi)}{h} - \frac{\tau_{h,j}P(x, D) - P(x, D)}{h}\tau_{h,j}(\psi\varphi).$$

(³) Nous notons $\tau_{h,j}P(x, D)$ l'opérateur $\sum [\tau_{h,j}\, a_i(x)]\, P_i(D)$ (qui est défini dans un voisinage de A lorsque h est assez voisin de 0).

Lorsque $h \to 0$, le premier terme du second membre a une limite dans $\mathcal{H}_A^{k+\sigma-1}$, d'après le lemme I.2.1; le second terme aussi, parce que la multiplication est une opération continue de $\mathcal{E}_\Omega^\infty \times \mathcal{H}_A^{k+\sigma-1}$ dans $\mathcal{H}_A^{k+\sigma-1}$. D'après le lemme III.1.3, $\frac{\tau_{h,j}(\psi\varphi)-\psi\varphi}{h}$ une limite dans $\mathcal{H}_A^{f,k+\sigma-1}$ lorsque $h \to 0$; par conséquent,

$$\frac{\partial(\psi\varphi)}{\partial x_j} \in \mathcal{H}_A^{f,k+\sigma-1} \qquad \text{et} \qquad \psi\varphi \in \mathcal{H}_A^{f,k+\sigma},$$

ce qui démontre a.

b. Passons maintenant au cas général. En remplaçant au besoin Ω par un ouvert plus petit, nous pouvons supposer que φ est somme finie de dérivées de fonctions continues (*cf.* [11]), donc qu'il existe q tel qu'on ait : $\varphi \in \mathcal{E}_\Omega^{f,q}$.

En raisonnant encore par récurrence, il suffit de démontrer ceci :

Les hypothèses $\varphi \in \mathcal{E}_\Omega^{f,q}$; $P(x, D)\varphi \in \mathcal{E}_\Omega^{q+1}$ *entraînent* : $\varphi \in \mathcal{E}_\Omega^{f,q+1}$.

Nous allons nous ramener au cas précédent; pour cela choisissons un entier p tel qu'on ait $q + 2p \geq 1$, et soit ψ une solution de l'équation $\Delta^p \psi = \varphi$ (localement, l'existence d'une telle ψ est triviale, et cela suffit ici; on sait par ailleurs qu'une telle solution existe globalement [8]).

De $\varphi \in \mathcal{E}_\Omega^{f,q}$, on déduit : $\psi \in \mathcal{E}_\Omega^{f,q+2p}$ (¹).

Or, on a

$$\begin{aligned} \Delta^p P(x, D)\psi &= P(x, D)\,\Delta^p\psi + \sum Q_i(x, D)\,P_i(D)\psi \\ &= P(x, D)\quad \varphi \quad + \sum Q_i(x, D)\,P_i(D)\psi, \end{aligned}$$

les Q_i étant des opérateurs différentiels d'ordre $\leq 2p-1$, par suite,

$$\Delta^p P(x, D)\psi \in \mathcal{E}_\Omega^{q+1}, \qquad \text{d'où} \qquad P(x, D)\psi \in \mathcal{E}_\Omega^{q+2p+1} \quad (^1).$$

Alors, d'après a,

$$\psi \in \mathcal{E}_\Omega^{f,q+2p+1} \qquad \text{et} \qquad \varphi = \Delta^p\psi \in \mathcal{E}_\Omega^{f,q+1}.$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.1.5. — *$P(x, D)$ est hypoelliptique.*

REMARQUES. — a. Le raisonnement précédent ne suppose pas, à proprement parler, qu'on sache que $P(D)$ est hypoelliptique, mais seulement

(¹) Cette variante d'un résultat bien connu (*cf.* [7]) peut, par exemple, se démontrer par un procédé de descente analogue à a. La différence est qu'ici, une fois qu'on sera ramené à des distributions à support compact, on conclura immédiatement par transformation de Fourier, au lieu d'utiliser le lemme III.1.3 et les quotients différentiels.

que $P(D)$ vérifie la proposition II.1.5; il peut donc être utilisé dans le cas des opérateurs à coefficients constants (où le raisonnement se simplifie [*cf.* note (4)].

b. En utilisant une variante des démonstrations précédentes, on pourrait par exemple démontrer le résultat suivant : soit $Q(\xi)$ un opérateur hypoelliptique, et s un nombre réel; posons

$$f(\xi)=(1+|P(\xi)|^2)(1+|Q(\xi)|^2)^s \quad \text{et} \quad g(\xi)=(1+|Q(\xi)|^2)^s;$$

alors, pour qu'on ait $\varphi \in \mathcal{L}^f_\Omega$, il faut et il suffit que

$$P(x, D)\varphi \in \mathcal{L}^g_\Omega.$$

2. **Autres propriétés.** — Nous allons généraliser quelques propriétés connues des équations elliptiques (*voir*, par exemple, [8], chap. III, prop. 9 et 10). Gardons les notations du numéro précédent, et considérons l'adjoint $P^*(x, D)$ de $P(x, D)$; on a

$$P^*(x, D)\varphi=\sum \overline{P}_i(D)[\overline{a}_i(x)\varphi].$$

En appliquant la formule de Leibnitz

$$P^*(x, D)\varphi=\sum \overline{a}_i(x)\overline{P}_i(D)\varphi+Q(x, D)\varphi,$$

où $Q(x, D)$ est une combinaison linéaire à coefficients $\in \mathcal{L}^\infty_\Omega$ des $\overline{P}_i^\alpha(D)$, $|\alpha|\geqq 1$.

De là résulte immédiatement que $P^*(x, D)$ est encore équivalent à $P(D)$. Cela étant, nous pouvons généraliser le lemme III.1.3 :

Lemme III.2.1. — *t étant un nombre réel, tout point $a\in\Omega$ possède un voisinage compact A (dépendant éventuellement de t) tel que l'application : $\varphi \to P(x, D)\varphi$ soit un monomorphisme : $\mathcal{H}^{f,t}_A \to \mathcal{H}^t_A$.*

Nous pouvons nous contenter de traiter le cas où $t=-t'\leqq 0$. Pour le faire, choisissons d'abord un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de a tel que l'application $P(x, D) : \mathcal{H}^{f,0}_{\overline{\mathcal{O}}} \to \mathcal{H}^0_{\overline{\mathcal{O}}}$ soit un monomorphisme (lemme III.1.3).

Par transposition et passage au complexe conjugué, on obtient ceci : l'application adjointe de la précédente est surjective; interprétons (au moins partiellement) ce résultat :

Soit ψ une distribution $\in \mathcal{L}^g_\Omega$, avec $g(\xi)=(1+|P(\xi)|^2)^{-1}$; l'application $\varphi \to (\psi, \varphi)$ est une forme antilinéaire continue sur $\mathcal{H}^{f,0}_{\overline{\mathcal{O}}}$ (et toute forme antilinéaire continue sur cet espace peut être obtenue ainsi). Le résultat précédent entraîne alors : quel que soit $\psi\in\mathcal{L}^g_\Omega$, il existe $\chi\in\mathcal{L}^0_\Omega$ tel qu'on ait, dans $\mathcal{O}$,

$$P^*(x, D)\chi=\psi.$$

Soit maintenant $h(\xi)$ la fonction-poids $(1+|P(\xi)|^2)^{-1}\left(1+\sum \xi_i^2\right)^{t'}$ et supposons qu'on ait $\psi \in \mathcal{L}_\Omega^h$; alors, la restriction $\tilde{\chi}$ de χ à $\mathcal{O}$ vérifie $\tilde{\chi} \in \mathcal{L}_\Omega^{t'}$ (cela résulte d'une variante du théorème précédent, dont la démonstration peut être laissée au lecteur). Par une nouvelle transposition, on obtient ceci : quel que soit A, compact $\subset \mathcal{O}$, l'application $P(x, D) : \mathcal{K}_A^{f, -t'} \to \mathcal{K}_A^{-t'}$ est un monomorphisme, d'où le lemme.

THÉORÈME III.2.2. — *A étant un compact $\subset \Omega$, pour tout nombre réel t l'application : $\varphi \to P(x, D)\varphi$ est un homomorphisme : $\mathcal{K}_A^{f, t} \to \mathcal{K}_A^t$ et son noyau est de dimension finie.*

Soit, en effet, $\{\mathcal{O}_i\}$ un recouvrement localement fini de Ω par des ouverts relativement compacts dans Ω tels que les $\overline{\mathcal{O}}_i$ vérifient le lemme précédent; et soit $\{\gamma_i\}$ une partition de l'unité indéfiniment différentiable subordonnée à ce recouvrement. Désignons par I l'ensemble (fini) des i tels que $\mathcal{O}_i$ rencontre A. L'application considérée se factorise ainsi

$$\varphi \to \{\gamma_i P(x, D)\varphi\} \to P(x, D)\varphi \qquad (i \in I)$$

et il suffit de voir que la première de ces applications est un homomorphisme dont le noyau est de dimension finie.

D'après la formule de Leibnitz, cette application (de $\mathcal{K}_A^{f, t}$ dans $[\mathcal{K}_A^t]^I$) est la somme :

a. de l'application

$$\varphi \to \left\{-\sum_{|\alpha| \geq 1} \frac{D_\alpha \gamma_i}{\alpha!} P^\alpha(x, D)\varphi\right\}$$

qui est compacte (lemme I.2.2);

b. et de l'application

$$\varphi \to \{P(x, D)(\gamma_i \varphi)\}.$$

Or, cette application est un monomorphisme; le théorème résulte alors de la théorie des applications compactes (par exemple de [12], th. 1).

REMARQUES. — *a.* Le noyau de l'application précédente ne dépend pas de t, puisque, d'après le théorème III.1.4, il est formé de fonctions indéfiniment différentiables (en particulier, dans le lemme III.2.1, A ne dépend pas de t).

b. Il serait intéressant de savoir dans quelles conditions on peut déduire du théorème précédent des résultats analogues à [8] (chap. III, th. 5 et 6). La question se ramène à la suivante : φ étant une distribution à support compact, majorer le support de φ à partir du support de $P(x, D)\varphi$; il est peut-être inutile d'ajouter que ce problème est loin d'être résolu dans le cas général... (5).

3. **Cas des opérateurs autoadjoints.** — Comme dans les numéros précédents, nous désignerons par Ω un ouvert $\subset X^n$, par $P(D)$ un opérateur hypoelliptique à coefficients constants, et $P(x, D)$ un opérateur différentiel à coefficients indéfiniment différentiables (pour simplifier) dans Ω, équivalent à $P(D)$. Nous ferons, en outre, les hypothèses suivantes :

a. $n > 1$ (pour éliminer les opérateurs différentiels ordinaires d'ordre impair; *cf.* [5], lemme 3.13).

b. Ω est connexe;

c. $P(x, D) = P^*(x, D)$.

Explicitons cette dernière formule

$$P(x, D)\varphi = \sum a_i(x)\, P_i(D)\varphi = \sum \overline{P}_i(D)[\overline{a}_i(x)\varphi]$$
$$= \sum \overline{a}_i(x)\, \overline{P}_i(D)\varphi + Q(x, D)\varphi,$$

$Q(x, D)$ étant une combinaison linéaire à coefficients $\in \mathcal{E}_\Omega^\infty$ des $\overline{P}_i^\alpha(D)$, avec $|\alpha| \geqq 1$; par suite, l'opérateur différentiel

$$R(x, D) = \frac{1}{2} \sum \left[a_i(x)\, P_i(D) + \overline{a}_i(x)\, \overline{P}_i(D)\right]$$

possède les propriétés suivantes :

a. Pour tout $a \in \Omega$, $R(a, D)$ est autoadjoint et hypoelliptique;

b. Les $R(a, D)$ sont équivalents à $P(D)$; par conséquent, dans la suite, nous pourrons supposer $P(D)$ lui-même autoadjoint.

Raisonnons alors comme [5] (lemme 3.13) : pour tout $a \in \Omega$, $R(a, \xi)$ est

---

(5) On voit facilement qu'il suffirait de résoudre le problème précédent pour des fonctions φ assez différentiables. Lorsque $P(x, D)$ est à coefficients analytiques, un bon résultat (dont j'ignore dans quelle mesure il est le meilleur possible) peut être obtenu en utilisant le classique théorème d'unicité du problème de Cauchy (pour des données initiales non caractéristiques) de Holmgren.

Une extension du résultat de Holmgren, sous des hypothèses de régularité assez faibles pour les coefficients de $P(x, D)$, a été récemment annoncée par A. P. Calderon (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 63-64, 1957, p. 232); il ne semble malheureusement pas s'appliquer ici, sauf dans le cas elliptique, car il suppose les caractéristiques distinctes; or, dans notre cas, les $P(a, D)$ ont les mêmes caractéristiques, quel que soit a, et $P(x, D)$ a donc aussi les mêmes caractéristiques et, sauf dans le cas elliptique, un opérateur hypoelliptique à coefficients constants a nécessairement des caractéristiques multiples ([5], § 3. 8). Notons enfin que, dans certains cas particuliers, on pourra utiliser un théorème de L. Nirenberg (*Comm. Pure and Appl. Math.*, t. 10-11, 1957, p. 89-106).

réel et ne peut s'annuler hors d'un compact; donc, à l'extérieur d'un compact; $R(a, \xi)$ est partout soit > 0, soit < 0 (parce qu'on a supposé $n > 1$!).

Montrons que, si b est un autre point $\in \Omega$, $R(b, \xi)$ *a le même signe à l'infini que* $R(a, \xi)$.

Supposons pour cela que la direction $x_1 = 0$ n'est pas direction caractéristique de $R(a, D)$ (en nous ramenant au besoin à ce cas par une tranformation linéaire), et désignons par m l'ordre de $P(D)$ [et de tous les $R(a, D)$]. Alors, m sera nécessairement pair; et si, par exemple, $R(a, \xi)$ est > 0 à l'infini, le coefficient de ξ_1^m dans $R(a, D)$, soit $\gamma(a)$, sera > 0.

De l'inégalité

$$K \leqq \frac{1 + |R(a, \xi)|^2}{1 + |R(b, \xi)|^2} \leqq K' \qquad (K > 0,\ K' > 0),$$

on déduit que $x_1 = 0$ n'est pas caractéristique pour $R(b, D)$, donc $\gamma(b) \neq 0$; comme Ω est connexe, on a, pour tout $x \in \Omega$: $\gamma(x) > 0$; cela montre que $R(b, \xi)$ est > 0 à l'infini.

Nous supposerons, pour fixer les idées, que les $R(a, \xi)$ sont > 0 à l'infini, et nous nous proposons alors de démontrer le résultat suivant, qui généralise un théorème de L. Gårding [4] :

Théorème III.3.1. — *Pour tout compact* $A \subset \Omega$, *il existe un nombre réel* λ *et une constante* $C > 0$ *telles que tout* $\varphi \in \mathcal{H}_A^{P, \frac{1}{2}}$ *vérifie*

$$(P(x, D)\varphi + \lambda\varphi, \varphi) \geqq C \| \varphi \|^2_{P, \frac{1}{2}}.$$

La démonstration suit de près celle de Gårding.

a. Soit a un point $\subset \Omega$. Il existe λ_a tel que $R(a, \xi) + \lambda_a$ soit > 0 pour tout $\xi \in \Xi^n$.

Sur l'espace $\mathcal{S}$, la norme $(R(a, D)\varphi + \lambda_a\varphi, \varphi)^{\frac{1}{2}}$ est alors équivalente à la norme $\| \varphi \|_{P, \frac{1}{2}}$; on aura par exemple,

$$C_1 \| \varphi \|^2_{P, \frac{1}{2}} \leqq (R(a, D)\varphi + \lambda_a\varphi, \varphi) \leqq C_2 \| \varphi \|^2_{P, \frac{1}{2}} \qquad (C_1 > 0,\ C_2 > 0)$$

et ces inégalités se prolongent à $\mathcal{D}^{P, \frac{1}{2}}$.

D'autre part, si B est un voisinage compact de a, les opérateurs $P_i(D)$ [resp. $P_i^\alpha(D)$, $|\alpha| \geqq 1$] et leurs adjoints sont des opérateurs continus (resp. compacts) de $\mathcal{H}_B^{P, \frac{1}{2}}$ dans $\mathcal{H}_B^{P, -\frac{1}{2}}$; enfin, comme $\mathcal{L}_\Omega^{P, -\frac{1}{2}}$ est l'antidual de $\mathcal{H}_\Omega^{P, \frac{1}{2}}$, l'expression (ψ, φ) a bien un sens pour

$$\psi \in \mathcal{H}_B^{P, -\frac{1}{2}}, \qquad \varphi \in \mathcal{H}_B^{P, \frac{1}{2}}.$$

Écrivons alors $P(x, D)$ sous la forme suivante :

$$P(x, D) = R(a, D) + \sum b_i(x) P_i(D) + Q'(x, D),$$

où les b_i appartiennent à $\mathcal{E}_\Omega^\infty$, et vérifient $b_i(a) = 0$, et où $Q'(x, D)$ est une combinaison linéaire à coefficients $\in \mathcal{E}_\Omega^\infty$ des $P_i^\alpha(D)$ et de leurs adjoints.

D'après la proposition II.2.4 (resp. II.2.3), il existe un voisinage compact $K(a)$ de a (que nous pouvons supposer $\subset B$) tel qu'on ait

$$\left|\left(\sum b_i(x) P_i(D)\varphi, \varphi\right)\right| \leq \frac{C_1}{4} \| \varphi \|^2_{P, \frac{1}{2}}$$

$$\left(\text{resp. } |(Q'(x, D)\varphi, \varphi)| \leq \frac{C_1}{4} \| \varphi \|^2_{P, \frac{1}{2}}\right)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{K}_{K(a)}^{P, \frac{1}{2}}$ et, par conséquent,

$$(P(x, D)\varphi + \lambda_a \varphi, \varphi) \geq \frac{C_1}{2} \| \varphi \|^2_{P, \frac{1}{2}}.$$

b. Soit maintenant A un compact quelconque $\subset \Omega$; d'après le résultat précédent, on pourra trouver un nombre réel λ', une constante $C' > 0$, et un recouvrement localement fini $\{\mathcal{O}_j\}$ de A par des ouverts relativement compacts dans Ω, tels que tout $\varphi \in \mathcal{D}^{P, \frac{1}{2}}$ ayant son support dans un $\bar{\mathcal{O}}_j$ vérifie

$$(P(x, D)\varphi + \lambda'\varphi, \varphi) \geq C' \| \varphi \|_{P, \frac{1}{2}}.$$

Soit $\{\alpha_j\}$ une partition de l'unité indéfiniment différentiable subordonnée à ce recouvrement, et posons

$$\beta_j = \frac{\alpha_j}{\sqrt{\sum \alpha_j^2}},$$

$\{\beta_j^2\}$ est encore une partition indéfiniment différentiable subordonnée au recouvrement $\{\mathcal{O}_j\}$.

Appliquons maintenant la formule de Leibnitz

$$\begin{aligned}
&(P(x, D)\varphi + \lambda'\varphi, \varphi) \\
&= \sum (\beta_j P(x, D)\varphi + \lambda'\beta_j\varphi, \beta_j\varphi) \\
&= \sum (P(x, D)(\beta_j\varphi) + \lambda'\beta_j\varphi, \beta_j\varphi) + (Q''(x, D)\varphi, \varphi),
\end{aligned}$$

Q'' étant une combinaison des $P_i^\alpha(D)$, $|\alpha| \geq 1$.

Mais, sur $\mathcal{H}_A^{P,\frac{1}{2}}$, la norme $\left(\sum \| \beta_j \varphi \|_{P,\frac{1}{2}}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ est visiblement équivalente à la norme $\| \varphi \|_{P,\frac{1}{2}}$; on a donc pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_A^{P,\frac{1}{2}}$

$$\sum (P(x, D)(\beta_j \varphi) + \lambda' \beta_j \varphi, \beta_j \varphi) \geqq C'' \| \varphi \|_{P,\frac{1}{2}}^2 \qquad (C'' > 0).$$

Pour achever la démonstration, nous allons maintenant raisonner par l'absurde. Si le théorème était faux, il existerait une suite (φ_n) de distributions $\in \mathcal{H}_A^{P,\frac{1}{2}}$ vérifiant

$$(P(x, D)\varphi_n + \lambda' \varphi_n + n \varphi_n, \varphi_n) \leqq \frac{C''}{2} \| \varphi_n \|_{P,\frac{1}{2}}^2$$

d'où

$$(Q''(x, D)\varphi_n, \varphi_n) + n(\varphi_n, \varphi_n) \leqq -\frac{C''}{2} \| \varphi_n \|_{P,\frac{1}{2}}^2$$

et, par suite

$$-\| Q''(x, D)\varphi_n \|_{P,-\frac{1}{2}} \| \varphi_n \|_{P,\frac{1}{2}} + n(\varphi_n, \varphi_n) \leqq -\frac{C''}{2} \| \varphi_n \|_{P,\frac{1}{2}}^2.$$

On peut supposer $\| \varphi_n \|_{P,\frac{1}{2}} = 1$; on a alors

$$n(\varphi_n, \varphi_n) \leqq -\frac{C''}{2} + \| Q''(x, D)\varphi_n \|_{P,-\frac{1}{2}}.$$

Mais l'application $\varphi \to P(x, D)\varphi \times \varphi$ de $\mathcal{H}_A^{P,\frac{1}{2}}$ dans $\mathcal{H}_A^{P,-\frac{1}{2}} \times L^2$ est compacte; soit $\psi \times \chi$ un point d'accumulation de la suite

$$P(x, D)\varphi_n \times \varphi_n \qquad \text{dans} \quad \mathcal{H}_A^{P,-\frac{1}{2}} \times L^2.$$

On a nécessairement

$$\psi = P(x, D)\chi \quad \text{et} \quad (\chi, \chi) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \psi = \chi = 0,$$

ce qui contredit l'inégalité

$$\| Q''(x, D)\varphi_n \|_{P,-\frac{1}{2}} \geqq \frac{C''}{2}.$$

C. Q. F. D.

Le théorème précédent permet de résoudre pour l'opérateur $P(x, D)$, un problème analogue au problème de Dirichlet des équations elliptiques (*cf* [4]). Il serait intéressant de savoir interpréter les conditions aux limites qui interviennent ici, et aussi d'examiner d'autres problèmes aux limites pour l'opérateur $P(x, D)$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] F. E. BROWDER, *Regularity theorems for solutions of partial differential equations* (*Proc. Nat. Acad. Sc.*, t. 43, n° 2, 1956, p. 234).

[2] J. DIEUDONNÉ et L. SCHWARTZ, *La dualité dans les espaces* ($\mathcal{F}$) *et* ($\mathcal{LF}$) (*Ann. Inst. Fourier*, 1949, p. 61).

[3] L. EHRENPREIS, *General theory of elliptic equations* (*Proc. Nat. Acad. Sc.*, t. 42, n° 1, 1956, p. 39).

[4] L. GÅRDING, *Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations* (*Math. Scand.*, t. 1, 1953, p. 55).

[5] L. HÖRMANDER, *On the theory of general partial differential operators* (*Acta Math.*, t. 94, 1955, p. 160).

[6] L. HÖRMANDER et J. L. LIONS, *Sur la complétion par rapport à une intégrale de Dirichlet* (*Math. Scand.*, t. 4, 1956, p. 259).

[7] P. D. LAX, *On Cauchy problem for hyperbolic equations...* (*Comm. pures and appl. Math.*, 1955, p. 615).

[8] .B MALGRANGE, *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 6, 1955-1956, p, 271).

[9] S. MIZOHATA, *Hypoellipticité des équations paraboliques* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 85, 1957, p. 15).

[10] L. NIRENBERG, *Remarks on strongly elliptic partial differential equations* (*Comm. pures and appl. Math.*, t. 8, 1955, p. 648).

[11] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, t. I et II, Hermann, Paris, 1950-1951.

[12] L SCHWARTZ *Homomorphismes et applications complètement continues* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 2472).

[13] L. SCHWARTZ, *Ecuaciones diferenciales parciales elipticas*, Bogota, Colombia, 1956.)

(Manuscrit reçu le 16 juillet 1957.)