BULLETIN DE LA S. M. F.

YVONNE FOURÈS-BRUHAT

Théorèmes d'existence en mécanique des fluides relativistes

Bulletin de la S. M. F., tome 86 (1958), p. 155-175

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1958__86__155_0>

Bull. Soc. math. France,
86, 1958, p. 155 à 175

THÉORÈMES D'EXISTENCE EN MÉCANIQUE DES FLUIDES RELATIVISTES;

PAR

M[me] YVONNE FOURÈS-BRUHAT.

(Reims).

INTRODUCTION.

1. Nous nous proposons, dans ce travail, de démontrer des théorèmes d'existence, dans le cas non analytique, pour les solutions des équations de la Relativité générale avec tenseur d'impulsion-énergie au second membre, d'abord dans le cas matière pure, puis dans le cas fluide parfait. Dans les deux cas, les résultats s'étendent aux équations de Maxwell-Einstein et aux équations de la théorie unitaire de Jordan-Thiry des fluides chargés sans induction.

Nous utiliserons, tout au long de ce Mémoire, les coordonnés isothermes de G. DARMOIS, après avoir montré tout d'abord qu'à toute solution des équations d'Einstein on pouvait faire correspondre, de façon unique, une solution en coordonnées isothermes.

Nous montrerons, dans la première partie, que le système des équations d'Einstein, puis de Maxwell-Einstein, jointes aux conditions de conservation, forme dans le cas matière pure un système hyperbolique au sens de Leray, pour lequel le problème de Cauchy est bien posé. Le même résultat est valable pour les équations de Jordan-Thiry.

Dans le cas fluide parfait, chargé, puis non chargé (deuxième partie), nous établirons d'abord, à l'aide des conditions de conservation, des équations relativistes correspondant aux équations d'Helmholtz donnant la propagation des tourbillons (tels qu'ils ont été définis en Relativité par LICHNEROWICZ), puis des équations donnant les vitesses en fonction des tourbillons dont les caractéristiques sont les fronts d'onde hydrodynamiques, confondus avec les fronts d'onde gravitationnels pour un fluide incompressible. Nous montrerons enfin que l'ensemble des équations d'Einstein et des équations précédentes est encore un système hyperbolique au sens de LERAY pour lequel le problème de Cauchy est un problème bien posé.

Dans les deux cas, un théorème d'unicité physique (c'est-à-dire à un changement de coordonnées près) est valable et la solution en un point x ne dépend que de ses valeurs initiales à l'intérieur du conoïde caractéristique engendré par les rayons lumineux issus de x, c'est-à-dire ne dépend que du passé de ce point. Nous montrons ainsi la cohérence, au point de vue du déterminisme de la mécanique des fluides relativistes.

Coordonnées isothermes.

2. Nous utiliserons dans les démonstrations, les coordonnées isothermes de G. DARMOIS. Dans ces coordonnées les potentiels satisfont aux quatre équations

$$F^{\mu} \equiv \nabla_{\lambda} g^{\lambda(\mu)} = \frac{1}{\sqrt{+|g|}} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} (\sqrt{|g|}\, g^{\lambda\mu}) = 0.$$

On sait que, dans de telles coordonnées, la composante $R_{\alpha\beta}$ du tenseur de Ricci ne contient que les dérivées secondes du potentiel $g_{\alpha\beta}$, la composante $S_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R$ ne contient que les dérivées secondes de la densité tensorielle $G_{\alpha\beta}$. On a par exemple;

$$R_{\alpha\beta} \equiv R^{(i)}_{\alpha\beta} + L_{\alpha\beta}, \tag{2.1}$$

$$R^{(i)}_{\alpha\beta} \equiv g^{\lambda\mu} \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} + f_{\alpha\beta}(g_{\lambda\mu}, \partial_{\gamma} g_{\lambda\mu}), \tag{2.2}$$

$$L_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} g_{\beta\mu} \partial_{\alpha} F^{\mu} + \frac{1}{2} g_{\alpha\mu} \partial_{\beta} F^{\mu}. \tag{2.3}$$

Nous résoudrons le système des équations d'Einstein

$$\left\{\begin{array}{l} S_{\alpha\beta} = \chi\, T_{\alpha\beta}, \\ \nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta} = 0 \end{array}\right. \tag{I}$$

en coordonnées isothermes. Nous résoudrons donc le problème de Cauchy pour le système d'équations

$$\left\{\begin{array}{l} S^{(i)}_{\alpha\beta} = \chi\, T_{\alpha\beta}, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad R^{(i)}_{\alpha\beta} = \chi\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T \right), \\ \nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta} = 0. \end{array}\right. \tag{II}$$

Nous allons montrer tout d'abord que, moyennant des conditions vérifiées par les données de Cauchy, la solution trouvée vérifie les équations tensorielles initiales (I).

Supposons que l'hypersurface initiale S, portant les données de Cauchy, ait pour équation locale $x^0 = 0$. Les quatre « équations initiales » nécessairement vérifiées par ces données sont alors.

$$S^0_\alpha = \chi T^0_\alpha \qquad \text{pour} \quad x^0 = 0. \tag{2.4}$$

Supposons, de plus, que les données de Cauchy vérifient les conditions d'isothermie initale

$$F^\mu = 0 \qquad \text{pour} \quad x^0 = 0, \tag{2.5}$$

on déduit alors de (2.1), (2.4), et (2.5),

$$\frac{\partial F^\mu}{\partial x^0} = 0 \qquad \text{pour} \quad x^0 = 0. \tag{2.6}$$

Soit $g_{\alpha\beta}$ la solution trouvée des équations (II). Construisons le tenseur $S_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\beta\alpha}$, R relatif à cette solution. Il vérifie les identités de conservation

$$\nabla_\alpha S^{\alpha\beta} = 0. \tag{2.7}$$

$g_{\alpha\beta}$ vérifie donc, compte tenu de (2.1), (2.7) et (II),

$$\nabla_\alpha \left(L^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} L \right) = 0,$$

c'est-à-dire [1]

$$\frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \frac{\partial^2 F^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\lambda} + P_\mu(\partial_\alpha F^\lambda) = 0.$$

Les quantités F^λ vérifient donc un système d'équations du second ordre, hyperboliques si la forme quadratique $g_{\lambda\mu} X^\lambda X^\mu$ est hyperbolique normale, d'un type connu [1], pour lequel est valable un théorème d'unicité.

D'où, d'après (2.5) et (2.6),

$$F^\lambda = 0$$

dans le domaine d'existence de la solution $g_{\alpha\beta}$.

Nous supposerons désormais le tenseur $S_{\alpha\beta}$ écrit en coordonnées isothermes, $S_{\alpha\beta} = S^{(i)}_{\alpha\beta}$. Nous supposerons toujours que les données initiales satisfont aux conditions (2.4) et (2.5), les équations (II) entraînent alors (I).

Unicité. — On montre que la solution du problème d'évolution est physiquement unique, c'est-à-dire unique à un changement de coordonnées près,

---

(1) *Cf.* [2].

en montrant que, pour tout système de potentiels $g^{\alpha\beta}$ prenant des valeurs initiales satisfaisant à (2.4), (2.5) sur une hypersurface S d'équation locale $x^0 = 0$, on peut construire un système de coordonnées isothermes où S ait encore pour équation $x^0 = 0$ et où les données initiales conservent en chaque point la même valeur (*cf.* la démonstration dans [2]).

Potentiel vecteur électromagnétique. Condition de normalisation.

3. Dans le cas de matière chargée nous utiliserons d'abord les équations de Maxwell-Einstein

$$S_{\alpha\beta} = \chi(T_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}), \tag{3.1}$$

où $T_{\alpha\beta}$ est le tenseur matériel du paragraphe précédent et $\tau_{\alpha\beta}$ le tenseur de Maxwell

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu} - F_\alpha{}^\rho F_{\beta\rho},$$

$F_{\alpha\rho}$ est le tenseur antisymétrique champ électromagnétique.

Les raisonnements précédents montrent encore que toute solution $g^{\alpha\beta}$ des équations d'Einstein en coordonnées isothermes,

$$S^{(i)}_{\alpha\beta} = \chi(T_{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta}),$$
$$\nabla_\alpha(T^{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta}) = 0$$

satisfait aux équations tensorielles (3.1) si elle satisfait aux conditions initiales correspondant à (2.4) et (2.5).

Considérons maintenant les équations de Maxwell qui sont, en désignant par F la forme différentielle extérieure,

$$F = F_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta,$$

$$dF = 0, \tag{3.2}$$

$$\delta F = J, \tag{3.3}$$

où J est la forme courant électrique, qui vérifie l'équation

$$\delta J = 0.$$

Le premier système d'équations de Maxwell (3.2) se traduit par l'existence, locale, d'un potentiel vecteur, forme différentielle linéaire φ telle que

$$F = d\varphi,$$
$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x^\beta};$$

le deuxième système d'équations de Maxwell (3.3) s'écrit alors

(3.4) $$\delta d\varphi = J,$$

où

(3.5) $$(\delta d\varphi)_\beta = -\nabla^\alpha\left(\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x^\beta}\right).$$

Normalisons le potentiel vecteur φ par la condition habituelle

$$\delta\varphi \equiv -\nabla_\alpha\varphi^\alpha = -g^{\alpha\gamma}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x^\gamma} + g^{\alpha\gamma}\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\varphi_\beta = 0.$$

Les seuls termes du second ordre figurant dans (3.5) sont alors, en coordonnées isothermes, où $g^{\alpha\gamma}\Gamma^\beta_{\alpha\gamma} = 0$, les dérivées de φ_β,

$$(\delta d\varphi)^{(i)}_\beta = -g^{\alpha\gamma}\frac{\partial^2\varphi_\beta}{\partial x^\alpha\partial x^\gamma} - \frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x^\gamma}\frac{\partial g^{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + g^{\alpha\gamma}\Gamma^\lambda_{\beta\gamma}F_{\alpha\lambda} = J_\beta;$$

pour un potentiel vecteur non normalisé, on a

(3.6) $$\delta d\varphi = (\delta d\varphi)^{(i)} - d\delta\varphi.$$

Nous remplacerons donc les équations de Maxwell, en coordonnées isothermes, par les équations

(3.7) $$\delta d\varphi^{(i)} = \square\,\varphi = J,$$

où $\square$ est l'opérateur de De Rham,

$$\square = d\delta + \delta d$$

et où J vérifie

(3.8) $$\delta J = 0.$$

Dans ces équations, les dérivées secondes des inconnues sont séparées.

Nous allons montrer que toute solution des équations (3.7) et (3.8) vérifie l'équation (3.4) à condition que le potentiel vecteur φ vérifie, d'une part la « condition initiale », sur une hypersurface d'espace S, l'équation locale $x^0 = 0$,

(3.9) $$(\delta d\varphi)^0 = J^0 \quad \text{pour} \quad x^0 = 0;$$

la quantité figurant au premier membre ne contient pas, en effet, de dérivées transversales à S d'ordre 2, et s'exprime donc uniquement à l'aide des données de Cauchy (φ et dérivées premières), et que, d'autre part,

(3.10) $$\delta\varphi = -\nabla_\alpha\varphi^\alpha = 0 \quad \text{pour} \quad x^0 = 0.$$

On déduit de (3.9), (3.10) et (3.6) que les solutions de (3.7) vérifient aussi

(3.11) $$\frac{\partial}{\partial x^0}(\delta\varphi) = 0 \quad \text{pour} \quad x^0 = 0.$$

Il résulte, d'autre part, de (3.7) et (3.8), que

$$\delta(\square\varphi) = \square(\delta\varphi) = 0. \tag{3.12}$$

On déduit alors de (3.11) et (3.12), par un théorème d'unicité, que

$$\delta\varphi = 0,$$

donc que φ vérifie l'équation primitive (3.4).

Nous supposerons désormais, quand nous utiliserons le potentiel vecteur, qu'il est normalisé.

Si *nous ne supposons pas l'existence d'un potentiel vecteur global* dans le domaine d'espace-temps envisagé, nous écrirons les équations de Maxwell (3.2) et (3.3)

$$\square F = \delta J,$$

ce qui nous permettrait des raisonnements analogues à ceux faits dans la suite pour établir l'existence de φ, pour établir l'existence du champ $F_{\alpha\beta}$. Les théorèmes d'existence que nous établirons ayant pour corollaires des théorèmes d'unicité, on voit que, si le potentiel vecteur existe globalement à l'instant initial, il en est aussi dans tout le domaine d'existence de la solution $F_{\alpha\beta}$.

II. — CAS MATIÈRE PURE.

A. — Cas purement gravitationnel.

4. Les équations du cas matière pure. — Si l'on néglige les autres formes d'énergie que l'énergie pondérable, le tenseur d'impulsion-énergie $T_{\alpha\beta}$ prend la forme

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta,$$

où ρ est la densité propre de la matière et u_α son vecteur vitesse unitaire satisfaisant à

$$g^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = 1. \tag{4.1}$$

Les équations d'Einstein s'écrivent alors

$$S_{\alpha\beta} = \chi\rho u_\alpha u_\beta. \tag{1}$$

Les équations de conservation s'écrivent, compte tenu de (4.1),

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = 0, \tag{2}$$

$$\nabla_\alpha(\rho u^\alpha) = 0. \tag{3}$$

Les équations (2) sont dites équations du mouvement, elles expriment le fait que les lignes de courant sont des géodésiques de la métrique d'univers, L'équation (3) joue le rôle d'une équation de continuité.

5. Caractère hyperbolique du système (1), (2), et (3). — Dérivons les équations (1) le long des lignes de courant, nous obtenons, compte tenu de (2) et (3),

$$u^\gamma \nabla_\gamma S_{\alpha\beta} = -\chi \rho u_\alpha u_\beta \nabla_\gamma u^\gamma. \tag{1'}$$

Les équations (1'), (2) et (3) forment un système de 15 équations avec 15 inconnues : les dix $g_{\alpha\beta}$ (soit g l'une quelconque d'entre elles), les quatre u_α (soit u l'une quelconque d'entre elles) et ρ. Affectons les inconnues g, u et ρ respectivement des indices suivants (²) :

$$s(g) = 3, \qquad s(u) = 2, \qquad s(\rho) = 1$$

et chacune des équations (1'), (2) et (3) des indices

$$t(1') = 1, \qquad t(2) = 2, \qquad t(3) = 1.$$

Les parties principales des équations (1') pour les inconnues g, u et ρ sont alors respectivement d'ordre 3, 2 et 1. Pour les équations (2), elles sont d'ordre 2, 1 et 0 [les équations (2) ne contiennent d'ailleurs pas l'inconnue ρ]. Pour l'équation (3), elles sont de nouveau d'ordre 3, 2 et 1. La matrice constituée avec ces parties principales est une matrice diagonale. Les éléments de la diagonale principale sont pour les dix premiers (inconnues g), équations (1'),

$$u^\gamma g^{\lambda\mu} \frac{\partial^3}{\partial x^\gamma \, \partial x^\lambda \, \partial^\mu};$$

pour les suivants (inconnues u et ρ),

$$u^\gamma \frac{\partial}{\partial x^\gamma}.$$

Le système considéré est donc hyperbolique pour des valeurs des inconnues telles, d'une part que la forme quadratique $g^{\lambda\mu} X_\lambda X_\mu$ soit hyperbolique normale, d'autre part que, en chaqne point, le vecteur courant u^λ soit intérieur au cône élémentaire $g_{\lambda\mu}\, dx^\lambda\, dx^\mu = 0$ (c'est-à-dire orienté dans le temps) : les cônes duals ont alors un intérieur non vide, le dual du cône élémentaire de lumière.

6. Problème de Cauchy. — Donnons-nous sur une hypersurface S les inconnues g et leurs dérivées premières et secondes, u et ρ telles que la forme quadratique $g_{\lambda\mu}\xi^\lambda \xi^\mu$ soit hyperbolique normale, l'hypersurface S orientée dans l'espace et la tangente à la ligne de courant, u^λ, orientée dans le temps. Les théorèmes de Leray montrent alors que, moyennant des conditions de différentiabilité et de continuité des données de Cauchy, le système

(²) Nous appliquons les résultats de LERAY [5], et utilisons ses notations (*cf* p. 206).

des équations (1'), (2), (3) admet une solution et une seule au voisinage de S; la valeur de cette solution en un point x ne dépend que des valeurs des données de Cauchy intérieures au conoïde caractéristique de sommet x (ce conoïde est engendré par les géodésiques de longueur nulle de la métrique $g_{\lambda\mu}\, dx^\lambda\, dx^\mu$).

CONCLUSION. — Considérons le système des équations d'Einstein (1), (2), (3). Donnons-nous sur l'hypersurface S les potentiels $g_{\alpha\beta}$ et leurs dérivées premières, la vitesse u_λ et la densité ρ (suffisamment différentiables). Déterminons les dérivées secondes des $g_{\alpha\beta}$ par les équations

$$S_{\alpha\beta} = \chi\rho u_\alpha u_\beta \qquad \text{pour} \quad x^0 = 0. \tag{6.1}$$

La solution du problème de Cauchy correspondant pour les équations (1'), (2) et (3) vérifiant

$$u^\gamma \nabla_\gamma (S_{\alpha\beta} - \chi\rho u_\alpha u_\beta) = 0$$

vérifie donc aussi, d'après (6.1),

$$S_{\alpha\beta} - \chi\rho u_\alpha u_\beta = 0,$$

B. — Équations de Maxwell-Einstein.

7. Pour un milieu pulvérulent chargé les équations d'Einstein sont

$$S_{\alpha\beta} = \chi(\rho u_\alpha u_\beta + \tau_{\alpha\beta}), \tag{7.9}$$

où $\tau_{\alpha\beta}$ est le tenseur d'énergie d'un champ électromagnétique $F_{\alpha\beta}$

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F^{\lambda\mu} F_{\lambda\mu} - F_\alpha{}^\rho F_{\beta\rho}.$$

Le tenseur $F_{\alpha\beta}$ satisfait aux équations de Maxwell, soit

$$\nabla_\beta F^{\beta\alpha} = \mu u^\alpha, \tag{7.1}$$

où μ est la densité de charge propre du fluide (nous supposons ici la conductivité du milieu nulle) et

$$\nabla_\alpha F_{\beta\rho} + \nabla_\beta F_{\rho\alpha} + \nabla_\rho F_{\alpha\beta} = 0 \tag{7.2}$$

qui expriment que, localement, le champ électromagnétique dérive d'un potentiel vecteur φ_α

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\beta \varphi_\alpha - \partial_\alpha \varphi_\beta. \tag{7.3}$$

Les conditions de conservation donnent encore une équation de continuité :

$$\nabla_\alpha(\rho u^\alpha) = 0 \tag{7.8}$$

et les équations du mouvement :

(7.6) $$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = \frac{\mu}{\rho} F_{\beta\alpha} u^\alpha.$$

La conservation de l'électricité se traduit par l'équation

(7.7) $$\nabla_\alpha (\mu u^\alpha) = 0.$$

Désignons par F la forme extérieure du second ordre définie par le tenseur antisymétrique $F_{\alpha\beta}$

$$F = \mathrm{F}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta$$

et par ω la forme linéaire

$$\omega = u_\alpha\, dx_\alpha,$$

les équations de Maxwell (7.2) et (7.1) s'écrivent alors

$$d\mathrm{F} = 0, \qquad \delta\mathrm{F} = \mu\omega.$$

Les équations (7.3) se traduisant par

$$F = d\varphi,$$

où φ est la forme linéaire

$$\varphi = \varphi_\alpha\, dx^\alpha$$

dans le cas où il existe un potentiel vecteur φ.

L'équation (7.4) s'écrit [*cf.* (3.6)], φ est normalisé par $\delta\varphi = 0$

(7.10) $$\delta\, d\varphi = \mu\omega.$$

L'ensemble des équations (7.6), (7.7) et (7.8) et des équations (1′) et (2) obtenues par dérivation le long des lignes de courant des équations (7.9) et (7.10) s'écrit, en posant $\frac{\mu}{\rho} = k$

$$(\mathrm{I})\left\{\begin{array}{ll} (1) & u^\gamma \nabla_\gamma S_{\alpha\beta} = \chi(-u_\alpha u_\beta \rho \nabla_\gamma u^\gamma + \rho u^\gamma \nabla_\gamma (u_\alpha u_\beta) = u^\gamma \nabla_\gamma \tau_{\alpha\beta}, \\ (2) & u^\gamma \nabla_\gamma (\square\varphi)_\alpha = k(-u_\alpha \rho \nabla_\gamma u^\gamma + \rho u^\gamma \nabla_\gamma u_\alpha), \\ (3) & u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = k \mathrm{F}_{\alpha\beta} u^\alpha \\ (4) & u^\alpha \partial_\alpha k = 0, \\ (5) & \nabla_\alpha (\rho u^\alpha) = 0; \end{array}\right.$$

ce système est un système hyperbolique au sens de Leray comme on le voit en affectant les équations et les inconnues des indices suivants :

$$\begin{array}{llll} s(1) = s(2) = 3, & s(3) = 2, & s(4) = 2, & s(5) = 3, \\ t(g) = t(\varphi) = 1, & t(u) = 2, & t(k) = 2, & t(\rho) = 3, \end{array}$$

les parties principales des équations (I) sont, pour les inconnues g, φ, u, k

et ρ, respectivement d'ordre :

— pour les équations (1) : 3, 3, 2, 2 et 1;
— pour les équations (2) : 3, 3, 2, 2 et 1;
— pour les équations (3) : 2, 2, 1, 1 et 0;
— pour l'équation (4) : 2, 2, 1, 1 et 0;
— pour l'équation (5) : 3, 3, 2, 2 et 1.

La matrice correspondante est une matrice diagonale dont les éléments sont, comme dans le cas matière pure non chargée, soit $u^\gamma g^{\lambda\mu} \frac{\partial^3}{\partial x^\gamma\, \partial x^\lambda\, \partial x^\mu}$, soit $u^\gamma \frac{\partial}{\partial x^\gamma}$. Le système considéré est donc encore hyperbolique si le vecteur u^γ est orienté dans le temps par rapport à la métrique hyperbolique normale $g_{\lambda\mu}\, dx^\lambda\, dx^\mu$.

L'application des théorèmes de Leray montre donc que le système d'équations (I) est, pour le problème de Cauchy, un problème bien posé.

Des raisonnements analogues à ceux de la section A montrent que la donnée sur une hypersurface S de potentiels $g_{\alpha\beta}$, φ_α et de leurs dérivées premières satisfaisant aux conditions d'isothermie et de normalisation initiale, ainsi que des vitesses u^λ et des densités de masse et de charge ρ et μ déterminent, de manière physiquement unique, les quantités dans un voisinage de S (on suppose évidemment, pour les $g_{\alpha\beta}$ donnés, S orientée dans l'espace et u^λ orienté dans le temps, et les données initiales suffisamment différentiables).

La valeur de $g_{\alpha\beta}$, φ_α, u^λ, ρ et μ en un point x ne dépend que des valeurs des données de Cauchy intérieures au conoïde caractéristique de sommet x.

C. — Théorie unitaire de Jordan-Thiry.

8. Dans la théorie de Jordan-Thiry, l'élément primitif est une variété riemannienne V_5 à cinq dimensions, satisfaisant aux mêmes hypothèses de différentiabilité que la variété espace-temps de la Relativité générale. Sur V_5 est définie une métrique $d\sigma^2$, partout de type hyperbolique normal, d'expression locale :

$$d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3, 4),$$

V_5 admet un groupe d'isométries : dans des coordonnées adaptées, les $\gamma_{\alpha\beta}$ sont indépendantes de x^0.

Les équations du cas unitaire intérieur, schéma matière pure s'écrivent

$$S_{\alpha\beta} \equiv \mathrm{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta} R = r v_\alpha v_\beta, \tag{8.1}$$

où $R_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Ricci de V_5, r un scalaire positif, v_α un vecteur unitaire de V_5.

Les conditions de conservation, $\nabla_\alpha S^\alpha{}_\beta = 0$ (³), donnent, comme dans le cas purement gravitationnel, les équations du mouvement et l'équation de continuité qui s'écrivent respectivement

$$(8.2) \qquad v^\alpha \nabla_\alpha v_\beta = 0,$$

$$(8.3) \qquad \nabla_\alpha (r v^\alpha) = 0.$$

Les raisonnements faits à la section A pour le système des équations (1), (2), (3) s'appliquent exactement ici pour les équations (8.1), (8.2), (8.3) aux 20 inconnues $\gamma_{\alpha\beta}$, r, v_α si les équations (8.1) ont été écrites préalablement en coordonnées isothermes pentadimensionnelles (⁴). Un raisonnement identique à celui de A permet de montrer ensuite que la solution trouvée du problème de Cauchy est effectivement la solution, unique à un changement de coordonnées près, des équations tensorielles.

Des quantités $\gamma_{\alpha\beta}$, r, v_α on déduit le tenseur gravitationnel, le potentiel vecteur électromagnétique et un quinzième potentiel (*cf.* Lichnerowicz [8]), ainsi que les densités propres de matière et de charge et la vitesse unitaire quadridimensionnelle.

III. — CAS FLUIDE PARFAIT.

A. — Cas purement gravitationnel.

9. Tenseur d'impulsion-énergie et équations du mouvement. — Le tenseur d'énergie d'un fluide parfait est

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)\, u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta},$$

ρ est la densité propre, p la pression, u_α la vitesse unitaire. Nous supposons que le fluide admet une équation d'état reliant la densité propre et la pression

$$(9.1) \qquad \rho = e(p).$$

Les conditions de conservation, $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$, donnent les équations du mouvement

$$(9.2) \qquad u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta - \frac{\partial_\alpha p}{\rho + p}(g^\alpha_\beta - u^\alpha u_\beta) = 0$$

(³) ∇_α : dérivation covariante dans V_5.

(⁴) On montre qu'on obtient de telles coordonnées en prenant des coordonnées isothermes sur l'espace-temps (quotient de V_5 par le groupe d'isométries), et en satisfaisant une condition supplémentaire correspondant à la condition de normalisation usuellement imposée au potentiel vecteur électromagnétique (*cf.* Yvonne Fourès-Bruhat [3]).

et une équation de continuité

$$\nabla_\alpha((\rho + p)\, u^\alpha) - u^\alpha \partial_\alpha p = 0. \tag{9.3}$$

Suivant LICHNEROWICZ nous désignons par f, indice du milieu, la quantité suivante :

$$f = \exp \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho + p}; \tag{9.4}$$

nous posons

$$C_\alpha = f u_\alpha$$

et désignons par $\overline{ds}^2$ la métrique conforme à la métrique d'univers

$$\overline{ds}^2 = f^2\, ds^2$$

et surmontons d'un trait les opérations relatives à cette métrique. Les équations (9.2) s'écrivent alors

$$C^\alpha\, \overline{\nabla}_\alpha C_\beta = 0 \tag{9.5}$$

et l'équation (9.3), en posant $r = \rho + p$,

$$\nabla_\alpha C^\alpha = - C^\alpha \partial_\alpha \log(f^{-2} r). \tag{9.6}$$

10. Équations d'Helmholtz. — Définissons, avec LICHNEROWICZ, le tenseur tourbillon par

$$\Omega_{\alpha\beta} = \partial_\alpha C_\beta - \partial_\beta C_\alpha = \overline{\nabla}_\alpha C_\beta - \overline{\nabla}_\beta C_\alpha.$$

Le vecteur C_α étant unitaire dans la métrique $\overline{ds}^2$ on a $C^\alpha\, \overline{\nabla}_\beta C_\alpha = 0$. Les équations (9.5) s'écrivent donc

$$C^\alpha\, \Omega_{\alpha\beta} = 0. \tag{10.1}$$

D'où

$$\nabla_\gamma(C^\alpha \Omega_{\alpha\beta}) \equiv C^\alpha \nabla_\gamma \Omega_{\alpha\beta} + \Omega_{\alpha\beta} \nabla_\gamma C^\alpha = 0.$$

La forme $\Omega = \Omega_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta$ étant la différentielle de la forme $\omega = C_\alpha\, dx^\alpha$ est fermée, donc

$$\nabla_\gamma \Omega_{\alpha\beta} + \nabla_\beta \Omega_{\gamma\alpha} + \nabla_\alpha \Omega_{\beta\gamma} = 0,$$

d'où les équations suivantes qui sont les équations d'Helmholtz relativistes

$$C^\alpha \nabla_\alpha \Omega_{\beta\gamma} = \Omega_{\alpha\beta} \nabla_\gamma C^\alpha + \Omega_{\gamma\alpha} \nabla_\beta C^\alpha. \tag{10.2}$$

Remarquons qu'on déduit de ces équations, que si un mouvement est irrotationnel à un instant donné ($\Omega_{\alpha\beta} = 0$ sur une hypersphère d'espace), il l'est ultérieurement.

11. Relations entre les tourbillons et les vitesses. — Les relations entre $\Omega_{\alpha\beta}$ et C_α sont données par

$$d\omega = \Omega \tag{11.1}$$

et l'équation de continuité (9.6) qui s'écrit, en utilisant le symbole de codifférenciation δ dans la métrique ds^2

$$d\omega = C^\alpha \partial_\alpha \log(f^{-2} r). \tag{11.2}$$

Remplaçant (11.1) et (11.2) par

$$\square\, \omega = \delta\Omega + d[C^\alpha \partial_\alpha (\log f^{-2} r)] \tag{11.3}$$

où

$$\square = d\delta + \delta d$$

c'est-à-dire, ω étant de degré 1,

$$(\square\, \omega)_\gamma = -g^{\alpha\beta} \nabla_\beta \nabla_\alpha C_\gamma - R^\alpha_\gamma C_\alpha.$$

Posons, d'autre part, pour le fluide considéré

$$\log(f^{-2} r) = \Phi(f^2),$$

où Φ est une fonction déterminée par l'équation d'état (9.1). L'équation (11.3) s'écrit, puisque $C^\alpha C_\alpha = f^2$.

$$\square\, \omega = \delta\Omega + d[C^\alpha \partial_\alpha \Phi(C^\beta C_\beta)],$$

or

$$\partial_\alpha \Phi(C^\beta C_\beta) = 2\Phi'(C^\beta C_\beta) C^\beta \nabla_\alpha C_\beta,$$

d'où, en utilisant la relation $C^\beta \Omega_{\beta\gamma} = 0$ et l'équation

$$\nabla_\gamma \nabla_\alpha C_\beta - \nabla_\alpha \nabla_\gamma C_\beta = R^\lambda{}_{\beta\alpha\gamma} C_\lambda,$$

$$\begin{aligned}\{ d[C^\alpha \partial_\alpha \Phi(C^\beta C_\beta)] \}_\gamma &= 2 C^\alpha C^\beta \Phi' \nabla_\alpha \nabla_\beta C_\gamma + 2 C^\alpha \Phi' \nabla_\beta C_\gamma \nabla_\alpha C^\beta \\ &+ 2\Phi' \nabla_\gamma C^\alpha C^\beta \nabla_\alpha C_\beta + 4\Phi'' C^\alpha C^\beta \nabla_\gamma C_\beta C^\lambda \nabla_\alpha C_\lambda.\end{aligned}$$

Les équations (11.3) s'écrivent finalement

$$\begin{aligned}\{g^{\alpha\beta} + 2 C^\alpha C^\beta \Phi'\} \nabla_\alpha \nabla_\beta C_\gamma &+ 2 C^\alpha \Phi' (\nabla_\beta C_\gamma \nabla_\alpha C^\beta + \nabla_\gamma C^\beta \nabla_\beta C_\alpha) \\ &+ 4\Phi'' C^\alpha C^\beta \nabla_\gamma C_\beta C^\lambda \nabla_\alpha C_\lambda + R^\alpha_\gamma C_\alpha - \nabla_\alpha \Omega_{\alpha\gamma} = 0.\end{aligned} \tag{11.4}$$

Si le fluide a pour équation d'état $\rho = e(p)$, on a

$$f = \exp \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{e(p) + p},$$

d'où

$$\frac{\partial \log f}{\partial p} = \frac{1}{e(p) + p};$$

on en déduit qu'inversement

$$\frac{\partial p}{\partial \log f} = e(p) + p,$$

donc

$$\frac{\partial p}{\partial f^2} = \frac{e(p)+p}{2f^2}.$$

D'où aussi, si $\Phi(f^2) = \log(f^{-2}r) = \log[f^{-2}(e(p)+p)]$,

$$\Phi' = \frac{d[\Phi(f^2)]}{df^2} = \frac{e'(p)-1}{2f^2}.$$

Les coefficients des termes du deuxième ordre en C_γ sont donc

$$g^{\alpha\beta} + \frac{C^\alpha C^\beta}{f^2}(e'-1) = g^{\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta (e'-1),$$

on reconnaît la métrique hyperbolique donnant la propagation des ondes hydrodynamiques, orientées dans le temps, pour $e' \geq 1$ $\left(\text{vitesse de propagation } \frac{1}{\sqrt{e'}} \text{ si la vitesse de la lumière est prise pour unité}\right)$.

Cas incompressible : Un fluide incompressible relativiste admet pour équation d'état $\rho - p = \text{Cte}$, alors $e' = 1$, $\Phi' = 0$. L'équation de continuité se réduit à

$$\nabla_\alpha C^\alpha = -\delta\omega = 0$$

et l'équation (11.3) à

$$\square\, \omega = \delta\Omega.$$

12. Problème de Cauchy. — Nous remplaçons l'ensemble des équations de la Mécanique des fluides relativistes par les équations

$$(1) \qquad S_{\alpha\beta} = \chi\left(r\frac{C_\alpha C_\beta}{f^2} - p g_{\alpha\beta}\right).$$

$$(2) \qquad C^\alpha \nabla_\alpha \Omega_{\beta\gamma} = \Omega_{\alpha\beta}\nabla_\gamma C^\alpha + \Omega_{\gamma\alpha}\nabla_\beta C^\alpha,$$

$$(3) \qquad \left[g^{\alpha\beta} + \frac{C^\alpha C^\beta}{f^2}(e'-1)\right]\nabla_\alpha \nabla_\beta C_\gamma + \Psi_\gamma = -\nabla^\alpha \Omega_{\alpha\beta},$$

où l'on a

$$g^{\alpha\beta} C_\alpha C_\beta = f^2,$$

r et p sont des fonctions de f qu'on calcule, dans le cas du fluide parfait, par l'équation d'état $\rho = e(p)$. Les fonctions Ψ_γ dépendent des $g_{\alpha\beta}$ et de leurs dérivées premières et secondes ainsi que des C_α et de leurs dérivées premières.

Remplaçons les équations (3) par les équations (3′) déduites des précédentes par dérivation le long des lignes de courant (opération $C^\alpha \nabla_\alpha$), et où l'on a remplacé $C^\alpha \nabla_\alpha \Omega_{\beta\gamma}$ par sa valeur tirée de (2). Affectons aux inconnues g (potentiels de gravitation $g_{\alpha\beta}$), C (pseudo-vitesses C_α) et Ω (tourbillons $\Omega_{\alpha\beta}$) respectivement les indices

$$s(g) = 3, \qquad s(C) = 2, \qquad s(\Omega) = 1;$$

affectons aux équations (1), (2), (3′) respectivement les indices :

$$t(1) = 2, \qquad t(2) = 1, \qquad t(3') = 0.$$

Les parties principales pour les inconnues g, C et Ω sont respectivement d'ordre :

— dans les équations (1) : 2, 1, 0;
— dans les équations (2) : 3, 2, 1;
— dans les équations (3′) : 4, 3, 2;

on voit alors que la matrice correspondant à ces parties principales est une matrice diagonale dont les éléments sont l'un des trois opérateurs

$$g^{\lambda\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\mu}, \qquad C^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda},$$
$$C^\alpha \left[g^{\lambda\mu} + \frac{C^\lambda C^\mu}{f^2}(e' - 1) \right] \frac{\partial^3}{\partial x^\alpha \partial x^\lambda \partial x^\mu}.$$

Si la forme quadratique $g^{\lambda\mu} X_\lambda X_\mu$ est hyperbolique normale, le vecteur C^λ orienté dans le temps pour cette métrique $g^{\lambda\mu}$ et si $e' \geqq 1$, le cône Γ défini par

$$\left[g^{\lambda\mu} + \frac{C^\lambda C^\mu}{f^2}(e' - 1) \right] X_\lambda X_\mu = 0$$

est un cône convexe, extérieur au cône $g^{\lambda\mu} X_\lambda X_\mu = 0$, et ne coupant pas le plan $C^\lambda X_\lambda = 0$. Le système d'équations (1), (2), (3′) est alors un système hyperbolique. Son domaine de dépendance en un point x est le conoïde caractéristique formé des rayons lumineux issus de x.

Le cône Γ de sommet x est le dual du cône caractéristique en x de l'équation du premier ordre :

$$\left[g^{\lambda\mu} + \frac{C^\lambda C^\mu}{f^2}(e' - 1) \right] \partial_\lambda \varphi \, \partial_\mu \varphi = 0.$$

Les hypersurfaces $\varphi(x^\alpha) = 0$ solutions de cette équation sont les fronts d'ondes hydrodynamiques. Sous les hypothèses précédentes ils sont orientés dans le temps.

Problème de Cauchy : Les théorèmes de Leray montrent que, si l'on prend des données initiales ($g^{\lambda\mu}$ et dérivées premières, $\Omega_{\alpha\beta}$, C_γ et dérivées premières et secondes) suffisamment différentiables, sur un domaine d'une hypersurface S, telles que les hypothèses du paragraphe précédent soient vérifiées et que S soit orientée dans l'espace pour les $g^{\lambda\mu}$ considérés, le problème de Cauchy correspondant a pour les équations (1), (2) et (3′) une solution et une seule qui dépend continûment des données initiales.

Montrons que cette solution est solution des équations primitives [équations d'Einstein et conditions de conservation (9.2), (9.3)], à condition que les données initiales soient compatibles avec ces équations. Les quantités $g^{\lambda\mu}$ et leurs dérivées premières, ainsi que les u^λ et p, étant donnés arbitrairement sur S [satisfaisant évidemment à (2.4), c'est sous-entendu ici], les équations (9.1), (9.4), (9.5) permettent de déterminer les valeurs sur S des C^λ et de leurs dérivées premières et secondes, et des $\Omega_{\alpha\beta}$. L'ensemble de ces quantités (où $g^{\lambda\mu}$ et ses dérivées premières, u^λ et p sont seuls arbitraires) est un système de données initiales compatibles avec les équations primitives. Pour montrer que la solution correspondant à de telles données des équations (1), (2) et (3′) vérifie les équations primitives, on remarque que, pour des données initiales analytiques, ces équations ont une solution et une seule ([5]) qui coïncide alors avec la solution correspondante des équations (1), (2) et (3′). Un passage à la limite montre alors que cette dernière solution vérifie également les équations primitives dans le cas de données suffisamment différentiables.

13. Cas incompressible. — Un fluide relativiste est dit incompressible s'il admet pour équation d'état

$$\rho - p = \text{Cte}.$$

Alors $e'(p) = 1$, $\Phi' = 0$. La vitesse de propagation des ondes hydrodynamiques a la vitesse maximum, celle de la lumière.

Pour un fluide incompressible, l'équation de continuité (9.5) se réduit à

$$-\delta\omega = \nabla_\alpha C^\alpha = 0.$$

L'équation reliant les vitesses aux tourbillons est alors

$$\square\,\omega = \delta\Omega,$$

c'est-à-dire

$$g^{\alpha\beta}\nabla_\beta\nabla_\alpha C_\gamma + R^\alpha_\gamma C_\alpha = \nabla^\alpha \Omega_{\alpha\gamma}.$$

Les variétés caractéristiques de cette équation sont les mêmes que celles des équations d'Einstein.

Le système obtenu est un cas particulier du cas général traité précédemment.

([5]) *Cf.* Lichnerowicz, [8].

14. Cas irrotationnel. Potentiel des vitesses. — Le mouvement du fluide sera dit irrotationnel, comme en Mécanique classique, si le tenseur tourbillon est nul. On a alors

$$d\omega = \Omega = 0.$$

On déduit de cette égalité que, localement du moins, la forme ω est la différentielle d'une fonction φ qu'on appelle potentiel des vitesses

$$\omega = d\varphi, \qquad \text{donc} \quad C_\alpha = \partial_\alpha \varphi;$$

φ étant une fonction, on a $\delta\varphi \equiv 0$. L'équation s'écrit donc ici

$$\square\,\varphi = -g^{\lambda\mu}\nabla_\mu(\partial_\lambda\varphi) = -\nabla_\lambda C^\lambda = C^\alpha\partial^\alpha\Phi, \tag{14.1}$$

or

$$\partial_\alpha\Phi = 2\Phi' C^\beta \nabla_\alpha C_\beta, \tag{14.2}$$

d'où, d'après (14.2) et (10.1), l'écriture suivante de l'équation (14.1)

$$(g^{\alpha\beta} + 2\Phi' C^\alpha C^\beta)\,\nabla_\beta(\partial_\alpha\varphi) = 0,$$

soit, dans le cas fluide parfait,

$$[g^{\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta(e' - 1)]\,\nabla_\beta\partial_\alpha\varphi = 0,$$

équation hyperbolique du second ordre à l'inconnue φ pour des $g^{\alpha\beta}$ définissant une métrique hyperbolique, des u^α orientés dans le temps et $e' \geqq 1$.

15. Mouvement permanent. — Supposons que le champ des vitesses C^α admette un groupe d'isométries de trajectoires orientées dans le temps. En choisissant pour lignes de temps les trajectoires, les termes du deuxième ordre en C^γ des équations (11.4) s'écrivent (en réservant les indices latins i, j aux variables d'espace)

$$[g^{ij} + u^i u^j(e' - 1)]\,\frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^j}.$$

Pour étudier le type de cette équation en un point les g^{ij} étant connus, définissant une forme quadratique $g^{ij}X_iX_j$ définie négative, prenons en ce point un repère propre : les $g^{\alpha\beta}$ prennent alors les valeurs lorentziennes

$$g^{00} = 1, \qquad g^{ij} = -\delta^j_i.$$

L'axe temporel doit évidemment être orienté suivant la tangente à la ligne de temps, qui ne coïncide pas, en général, avec la ligne de courant. Par une rotation des axes de références autour de l'axe temporel on pourra toujours avoir, par exemple,

$$u^2 = u^3 = 0,$$
$$(u^0)^2 = 1 + (u^1)^2;$$

la forme quadratique

$$[g^{ij} + u^i u^j (e' - 1)] X_i X_j$$

se réduit alors à

$$(X_1)^2[(u^1)^2 (e' - 1) - 1] - (X_2)^2 - (X_3)^2;$$

cette forme quadratique est elliptique pour

$$(u^1)^2 < \frac{1}{e' - 1}. \tag{15.1}$$

hyperbolique dans le cas contraire.

Ce résultat s'avère en conformité avec ceux de la Mécanique classique. La vitesse matérielle usuelle à associer au vecteur u^α a, en effet, pour composantes

$$v^i = \frac{u^i}{u^0}.$$

Ici une seule de ses composantes est différente de zéro

$$v^1 = \frac{u^1}{\sqrt{1 + (u^1)^2}}.$$

L'équation (15.1) s'écrit, en fonction de v^1,

$$(v^1)^2 < \frac{1}{e'},$$

c'est-à-dire, dans un système d'axes d'espace quelconque,

$$\Sigma (v^i)^2 < \frac{1}{e'},$$

on voit que, comme en Mécanique classique, dans un mouvement permanent l'équation reliant les vitesses aux tourbillons, ou l'équation donnant le potentiel des vitesses dans le cas irrotationnel, est elliptique pour une vitesse du fluide inférieure à la vitesse de propagation des ondes hydrodynamiques, hyperbolique dans le cas contraire.

B. — Cas où il existe un champ électromagnétique. Équations de Maxwell-Einstein.

16. Tenseur d'impulsion-énergie d'un fluide parfait chargé et équations d'Helmholtz. — Le tenseur d'impulsion-énergie d'un fluide parfait chargé est de la forme

$$T_{\alpha\beta} (\rho + p) u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta},$$

où $\tau_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Maxwell.

Les conditions de conservation donnent les équations différentielles des lignes de courant

$$(16.1)\qquad u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = (g^\alpha{}_\beta - u^\alpha u_\beta)\left(\frac{\partial_\alpha p}{\rho + p} + \frac{\mu}{\rho + p} C_{\alpha\rho} u^\rho\right)$$

et l'équation de continuité

$$(16.2)\qquad \nabla_\alpha[(\rho + p)u^\alpha] = u^\alpha \partial_\alpha p.$$

Soit toujours f l'indice du fluide

$$f = \exp \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho + p}.$$

avec $\rho = e(p)$ (équation d'état du fluide) et

$$C_\alpha = f u_\alpha,$$

le tenseur tourbillon du fluide chargé est :

$$\Pi_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha\beta} + k F_{\alpha\beta},$$

où

$$k = \frac{\mu}{\rho^*}, \qquad \rho^* = \frac{\rho + p}{f}$$

et où, comme en B, $\Omega_{\alpha\beta} = \partial_\alpha C_\beta - \partial_\beta C_\alpha = \overline{\nabla}_\alpha C_\beta - \overline{\nabla}_\beta C_\alpha$.

Les équations (16.1) peuvent alors s'écrire

$$(16.4)\qquad C^\alpha \Pi_{\alpha\beta} = 0.$$

Les équations de Maxwell sont, si la conductivité est nulle,

$$dF = 0,$$
$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu u^\alpha,$$

la conservation de l'électricité se traduisant alors par

$$(16.3)\qquad \nabla_\alpha(\mu u^\alpha) = 0.$$

On déduit de (16.2) et (16.3)

$$u^\alpha \partial_\alpha \log \frac{\mu}{\rho^*} = 0$$

le rapport $\frac{\mu}{\rho^*} = k$ est donc constant le long d'une ligne de courant. Nous n'étudierons dans la suite que les fluides chargés d'une manière homogène, c'est-à-dire tels que le rapport k reste constant dans tout le domaine d'espace-temps envisagé.

Si k est constant, la forme $\Pi = \Pi_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta$ est fermée comme les formes Ω et F. On déduit alors de (16.4) les équations d'Helmholtz relativistes des fluides chargés qui expriment la conservation des tourbillons

$$C^\alpha \nabla_\alpha \Pi_{\beta\gamma} = \Pi_{\alpha\beta} \nabla_\gamma C^\alpha + \Pi_{\gamma\alpha} \nabla_\beta C^\alpha.$$

17. Équations reliant les vitesses aux tourbillons. — Les composantes C_α de la pseudo-vitesse sont liées au tenseur $\Omega_{\alpha\beta}$ par les mêmes relations qu'en A

$$d\omega = \Omega,$$
$$\delta\omega = C^\alpha \partial_\alpha \Phi(C^\beta C_\beta),$$

d'où les équations identiques à (11.3), avec ici

$$\delta\Omega = \delta\Pi - k\delta F = \delta\Pi - k\mu\omega.$$

18. Problème de Cauchy. — L'ensemble des équations de Maxwell-Einstein a été remplacé par les quatre groupes d'équations

$$S_{\alpha\beta} = \chi\left(r\,\frac{C_\alpha C_\beta}{F^2} - p g_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}\right), \tag{1}$$

$$(\Box\varphi)_\alpha = \frac{k(\rho+p)}{f^2} C_\alpha \tag{4}$$

(ces équations utilisent le potentiel vecteur φ tel que $dF = \varphi$, normé par $\delta\varphi = 0$, *cf.* Introduction),

$$C^\alpha \nabla_\alpha \Pi_{\beta\gamma} = \Pi_{\alpha\beta} \nabla_\gamma C^\alpha + \Pi_{\gamma\alpha} \nabla_\beta C^\alpha = 0, \tag{2}$$

$$\left[g^{\alpha\beta} + \frac{C^\alpha C^\beta}{f^2}(e' - 1)\right] \nabla_\alpha \nabla_\beta C_\gamma + \Theta_\gamma = -\nabla^\alpha \Pi_{\alpha\gamma} - \frac{k^2(\rho+p)}{f^2} C_\gamma, \tag{3}$$

où k est une constante, ρ et p des fonctions données de $f^2 = C^\gamma C_\gamma$, et Θ_γ une fonction des $g^{\alpha\beta}$ et de leurs dérivées premières et secondes ainsi que des C_γ et de leurs dérivées premières.

Des raisonnements identiques à ceux du cas fluide parfait non chargé s'appliquent ici en affectant les inconnues φ_α du même indice que les $g^{\alpha\beta}$, et les équations (4) du même indice que les équations (1).

Le problème de l'évolution pour les fluides parfaits chargés a donc une solution physiquement unique. Les données initiales sont le champ électromagnétique $F_{\alpha\beta}$, les potentiels de gravitation $g^{\alpha\beta}$ et dérivées premières, les vitesses u^α et la pression p [l'équation d'état $\rho = e(p)$ est supposée connue).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] DARMOIS (Georges). — *Les équations de la gravitation einsteinienne*, Gauthier-Villars, Paris, 1927, (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. 25).

[2] FOURÈS-BRUHAT (Mme Yvonne). — *Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires*, (*Acta Mathematica*, t. 88, 1952, p. 141-225).

[3] FOURÈS-BRUHAT (Mme Yvonne). — *Le problème de Cauchy dans la théorie relativiste de l'électromagnétisme et dans la théorie unitaire de Jordan-Thiry* (*Cinquantenaire de la théorie de la relativité*, 1955, Berne), Basel, Birkhaüser 1956, (*Helvetica Mathematica*, *Acta*, Supplementum 4), p. 76-78.

[4] FOURÈS-BRUHAT (Mme Yvonne). — *Équations d'Helmholtz, détermination des vitesses à partir des tourbillons, problèmes d'évolution* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 246, 1957, p. 3319-3122).

[5] LERAY (Jean). — *Hyperbolic differential equations*, Princeton Institute for advanced Study, 1951-1952, (multigraphié).

[6] LICHNEROWICZ (André). — *Sur l'invariant intégral de l'hydraulique relativiste* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 58, 1941, p. 285-304).

[7] LICHNEROWICZ (André). — *Problèmes généraux d'intégration des équations de la relativité* (*Cinquantenaire de la théorie de la relativité*, 1955, Berne), Basel, Birkhaüser, 1956 (*Helvetica Mathematica Acta*, Supplementum 4), p. 176-191.

[8] LICHNEROWICZ (André). — *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris, 1956.

[9] DE RHAM, (Georges). — *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955, (*Act. scient. et ind.*, n° 1222).

[10] THIRY (Yves). — *Étude mathématique d'une théorie unitaire à 15 variables de champ* (*J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 30, 1951, p. 275-396, *Thèse Sc. math.*, Paris, 1950).

[11] VILLAT (Henri). — *Leçons sur la théorie des tourbillons*, Gauthier-Villars, Paris, 1939.

Mme Y. FOURÈS-BRUHAT,
Professeur à l'École des Sciences de Reims,
Pavillon H 3, Résidence de Tourvoie,
Fresnes (Seine),

(Manuscrit reçu le 27 novembre 1958).