BULLETIN DE LA S. M. F.

PAUL P. GILLIS

Propriétés et existence des solutions de certaines classes d'équations du type elliptique

Bulletin de la S. M. F., tome 86 (1958), p. 283-297
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1958__86__283_0>

Réunion des Mathématiciens
d'Expression latine (1957, Nice).
Bull. Soc. math. France,
86, 1958, p. 283 à 297.

PROPRIÉTÉS ET EXISTENCE DES SOLUTIONS DE CERTAINES CLASSES D'ÉQUATIONS DU TYPE ELLIPTIQUE;

PAR

PAUL P. GILLIS.

1. Introduction. — Au cours de ces dernières années, on a beaucoup étudié les équations aux dérivées partielles du type elliptique. Parmi les travaux récents, il convient de signaler ceux qui concernent l'extension de la théorie des équations du second ordre aux équations d'ordre supérieur et aux systèmes d'équations. On a obtenu des résultats assez complets pour les équations linéaires; il n'en est pas de même pour les équations non linéaires qui jouent un rôle important dans les applications.

Aujourd'hui, dans l'étude des problèmes aux limites pour les équations linéaires, on utilise fréquemment la méthode variationnelle ou la méthode basée sur la théorie des opérateurs dans un espace de Hilbert. A titre d'exemple, considérons l'équation linéaire du second ordre

$$Lu \equiv -a_{ij} D_i D_j u + a_i D_i u + au = f, \tag{1}$$

en la fonction inconnue $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Nous désignons par D_i la dérivée $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$; on applique la convention de sommation; les coefficients a_{ij}, a_i, a et f dépendent seulement des variables indépendantes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Soit $\mathcal{D}$ un domaine borné de l'espace euclidien R^n, $\dot{\mathcal{D}}$ sa frontière, $\overline{\mathcal{D}}$ son adhérence. Supposons qu'il existe des constantes positives M et m telles que

$$|a_{ij}|, \quad |a_i|, \quad |a| \leqq M, \quad \text{dans } \overline{\mathcal{D}}, \tag{2}$$

$$a_{ij}\xi_i\xi_j \geqq m\xi_i^2; \tag{3}$$

la condition (3) exprime que l'équation est du type elliptique. Considérons le problème aux limites homogène de Dirichlet : déterminer une solution de (1) qui s'annule sur $\dot{\mathcal{D}}$. Nous savons que la solution est unique si $a \geqq 0$; dans le cas contraire, nous avons le théorème de l'alternative. Au problème de Dirichlet pour (1), on peut faire correspondre un problème variationnel ou une équation fonctionnelle dans un espace de Hilbert de manière telle que :

a. toute solution du problème de Dirichlet est solution du problème variationnel ou de l'équation fonctionnelle;

b. toute solution du problème variationnel ou de l'équation fonctionnelle qui est suffisamment régulière dans $\overline{\mathcal{D}}$, est solution du problème de Dirichlet.

D'une manière générale, la fonction qu'on obtient en résolvant le problème variationnel ou l'équation fonctionnelle n'est pas suffisamment régulière; on peut la considérer comme une solution faible ou généralisée du problème aux limites. Il faut montrer ensuite que cette solution faible est différentiable un certain nombre de fois; par exemple, dans le cas de l'équation (1), qu'elle possède des dérivées secondes au sens classique et pas seulement au sens de la théorie des distributions de L. Schwartz.

Signalons, en passant, qu'on peut affaiblir les hypothèses de régularité imposées aux solutions « classiques » en remplaçant l'équation par sa forme intégrale; ce procécé a été utilisé par plusieurs auteurs (*cf.*, par exemple, P. P. Gillis [28], C. B. Morrey [53]).

En ce qui concerne les propriétés de régularité des solutions, il faut étudier le comportement des solutions au voisinage des points intérieurs et des points frontières de $\mathcal{D}$; nous y reviendrons ci-dessous.

Parmi les travaux récents, mentionnons aussi ceux relatifs au caractère analytique des solutions d'équations analytiques et ceux concernant le prolongement unique des solutions. On sait que les solutions des équations du type elliptique analytiques, sont analytiques. On peut trouver une démonstration de cette propriété et des références bibliographiques dans le livre de F. John [41] (*cf.* aussi C. B. Morrey-L. Nirenberg [57]).

La propriété de prolongement unique pour une équation du type elliptique homogène, soit $Lu = 0$, s'énonce comme suit : la seule solution de l'équation dans un certain domaine (ensemble ouvert connexe) qui a un zéro d'ordre infini en un point du domaine, est $u(x) \equiv 0$. Pour une équation à coefficients analytiques, la propriété résulte du fait que toute solution est analytique. Il est probable que cette propriété importante subsiste pour les solutions d'équations ou systèmes d'équations non analytiques. Elle a été démontrée dans un certain nombre de cas particuliers. Pour une équation linéaire du second ordre à deux variables indépendantes, dont les coefficients admettent des dérivées premières continues höldériennes, elle résulte d'un théorème de T. Carleman [16]. Elle a encore été établie pour une telle équation à coefficients mesurables et uniformément bornés (*cf.* L. Bers-L. Nirenberg [6], [7]). Ces résultats ont été étendus par C. Müller [58]

E. Heinz [36] et P. Hartmam-A. Wintner [35], au cas des équations linéaires du second ordre, à un nombre quelconque de variables indépendantes, dont la partie principale — c'est-à-dire l'ensemble des termes du second ordre — est le laplacien. P. D. Lax [43] a donné une autre démonstration de ce résultat et a montré que les solutions d'une équation du type elliptique jouissent de la propriété du prolongement unique si, et seulement si, elles possèdent la propriété de Runge. Ce fait a été observé indépendamment par B. Malgrange [48] et étendu au cas des domaines non compacts. N. Aronsajn [3] a établi la propriété pour l'équation linéaire générale du second ordre, à coefficients variables; il suppose que les coefficients admettent des dérivées continues du quatrième ordre.

S'il n'existe pas de zéros d'ordre infini, le problème de Cauchy pour l'équation elliptique considérée ne peut avoir plus d'une solution; la réciproque n'a pas été démontrée.

Pour des systèmes elliptiques à deux variables indépendantes et à un nombre pair de fonctions inconnues, on sait que la solution du problème de Cauchy est unique (*cf.* T. Carleman [17], A. Douglis [21], P. Hartman-A. Wintner [34]; pour des équations à coefficients analytiques, *cf.* F. John [38]).

On peut formuler la propriété du prolongement unique sous une forme plus faible, à savoir : une solution d'une équation elliptique homogène dans un domaine, qui s'annule sur un sous-ensemble ouvert, s'annule identiquement. On voit aisément que cette assertion est équivalente à la propriété d'unicité pour le problème de Cauchy. L. Nirenberg [64] a démontré l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour certaines classes d'équations d'ordre quelconque; on connaît aussi des exemples pour lesquels il n'y a pas unicité (*cf.* A. Plis [66] et E. de Giorgi [20]).

On a étudié le comportement asymptotique des solutions au voisinage d'un zéro qui n'est pas infini et quelques autres propriétés des solutions (*cf.* L. Bers [4] et L. Nirenberg [63]).

Signalons encore certains travaux récents concernant le problème de Neumann (*cf.* L. Bers-L. Nirenberg [6], [7]), le problème de la dérivée oblique (*cf.* J. L. Lions [45]), les problèmes mixtes au sens de Hadamard (*cf.* J. L. Lions [46], F. E. Browder [11]).

Les résultats que nous énoncerons ici ne concernent que le problème de Dirichlet pour certains opérateurs elliptiques.

2. Équations du second ordre. — La méthode variationnelle ou la méthode des opérateurs linéaires dans l'espace de Hilbert, utilisée dans l'étude des équations elliptiques, est basée essentiellement sur l'obtention de limitations *a priori* pour les solutions et leurs dérivées. Nous nous proposons de rappeler, dans ce paragraphe, quelques-unes de ces limitations et les théorèmes d'existence qui en résultent.

Soit $\mathcal{D}$ un domaine borné de l'espace euclidien à n dimensions, $\dot{\mathcal{D}}$ sa frontière, $\overline{\mathcal{D}}$ son adhérence. Nous posons

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = D_i u \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

$D^j u$ représente une dérivée quelconque, d'ordre j, de u.

Une fonction f est dite höldérienne, d'exposant $\alpha (0 \leqq \alpha < 1)$ et de constante M, si pour tout couple de points P, Q, de son domaine de définition, on a

$$|f(P) - f(Q)| \leqq M |P - Q|^\alpha.$$

où $|P - Q|$ est la distance de P à Q.

Nous désignons par $C_j^{\mathfrak{A}}$ la classe des fonctions ayant des dérivées continues jusqu'à l'ordre j (entier non négatif) dans $\overline{\mathfrak{A}}$, par $C_{j+\alpha}^{\mathfrak{A}}$ la classe des fonctions ayant des dérivées continues höldériennes, d'exposant α, jusqu'à l'ordre j dans $\overline{\mathfrak{A}}$. Pour les fonctions $u \in C_{j+\alpha}^{\mathfrak{A}}$, on considère la norme

$$|u|_{j+a}^{\mathfrak{A}} = \max_{\overline{\mathfrak{A}}} |u| + \ldots + \max_{\overline{\mathfrak{A}}} |D^j u| + \sup_{P, Q \in R} \frac{|D^j u(P) - D^j u(Q)|}{|P - Q|^\alpha};$$

les max et sup sont pris par rapport à toutes les dérivées jusqu'à l'ordre j. Avec cette norme, $C_{j+\alpha}^{\mathfrak{A}}$ est un espace de Banach.

On considère aussi des normes intégrales, dérivant de produits scalaires, du type

$$\| u \|_j^{\mathfrak{A}} = \left\{ \sum_{i=0}^{j} \int_{\mathfrak{A}} |D^i u|^2 \, dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

qui permettent de définir des espaces de Hilbert. On désigne par $H_j^{\mathfrak{A}}$ et $\mathring{H}_j^{\mathfrak{A}}$ respectivement l'espace des fonctions $C_j^{\mathfrak{A}}$ et l'espace des fonctions $C_j^{\mathfrak{A}}$ s'annulant dans un voisinage de $\dot{\mathfrak{A}}$, complétés suivant cette norme. On pose

$$H_j^{\mathcal{D}} = H_j \qquad \text{et} \qquad \mathring{H}_j^{\mathcal{D}} = \mathring{H}_j.$$

On dit qu'une fonction $u \in H_j$ possède des dérivées généralisées (dérivées fortes) jusqu'à l'ordre j (*cf.* S. L. Sobolev [71], K. Friedrichs [23]) et que les dérivées jusqu'à l'ordre $j - 1$ d'une fonction $u \in \mathring{H}_j$ s'annulent (en un sens généralisé) sur la frontière $\dot{\mathcal{D}}$.

On a montré qu'il existait des relations entre les limitations ponctuelles d'une fonction $\left(|u|_{j+\alpha}^{\mathfrak{A}}\right)$ et des limitations intégrales pour ses dérivées (*cf.* par exemple, S. L. Sobolev [71], L. Hörmander [37], L. Nirenberg [63]); ces relations jouent un rôle important dans certaines démonstrations.

Limitations et théorèmes d'existence. — *a*. LIMITATION DÉDUITE DU PRINCIPE DU MAXIMUM. — Nous considérons l'équation (1); nous supposons les conditions (2) et (3) remplies et $a \geqq 0$. La solution du problème de Dirichlet homogène $(u = 0 \text{ sur } \dot{\mathcal{D}})$ satisfait à l'inégalité

$$(4) \qquad |u| \leqq \text{Cte}.\max |f|,$$

où la constante dépend seulement de m et M. Cette limitation résulte du principe du maximum (*cf.* par exemple, C. MIRANDA [52]).

b. LIMITATION DU TYPE CARRÉ SCALAIRE. THÉORÈMES D'EXISTENCE. — Supposons que les fonctions $a_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ soient de classe C_1. En désignant par $\overline{u}$ une fonction qui s'annule dans un voisinage de $\dot{\mathcal{D}}$, en multipliant (1) par $\overline{u}$ et en intégrant par parties, on obtient l'inégalité

$$(5) \qquad \int_{\mathcal{D}} \overline{u} L u \, dx \geqq \text{Cte} \, \| u \|_1^2 - \text{Cte} \, \| u \|_0^2,$$

où les constantes (positives) dépendent seulement de m, M et d'une borne pour les dérivées des a_{ij}.

De cette inégalité on déduit aisément, en utilisant la méthode variationnelle (*cf.* par exemple, R. COURANT-D. HILBERT [19], chap. VII) ou le théorème de projection dans l'espace de Hilbert (*cf.* par exemple, H. WEYL [79]), l'existence d'une solution faible, dans $\mathring{H}_1$, du problème de Dirichlet. On peut montrer que cette solution faible est une solution régulière (*cf.* § 3, *e*); nous obtenons ainsi un théorème d'existence au sens classique.

c. LIMITATIONS DE SCHAUDER. THÉORÈMES D'EXISTENCE. — Supposons que les coefficients et f de (1) soient des fonctions $C_\alpha (0 \leqq \alpha < 1)$. J. SCHAUDER [68], [69] a obtenu des limitations ponctuelles intérieures et à la frontière.

Limitations intérieures. — Si $u \in C_{2+\alpha}$ est solution de (1), pour tout sous-domaine compact $\mathcal{A}$ de $\mathcal{D}$, on a

$$(6) \qquad | u |_{2+\alpha}^{\mathcal{A}} \leqq \text{Cte} \, (| f |_\alpha + | u |_0),$$

où la constante dépend du diamètre de $\mathcal{D}$, de la distance de $\mathcal{A}$ à $\dot{\mathcal{D}}$, de m et du maximum des normes $| \ |_\alpha$ des coefficients de (1).

Limitations à la frontière. — Si $u \in C_{2+\alpha}$ est solution de (1) et s'annule sur la frontière du domaine $\mathcal{D}$ supposé suffisamment régulier (domaine de classe $L_{2+\alpha}$: *cf.* L. NIRENBERG [63]), on a

$$(7) \qquad | u |_{2+\alpha} < \text{Cte} \, (| f |_\alpha + | u |_0),$$

où la constante dépend seulement de $\mathcal{D}$, de m et du max des normes $| \ |_\alpha$ des coefficients de (1).

De ces limitations, on déduit aisément la propriété de compacité pour les solutions de l'équation.

En supposant $\mathcal{D}$ de classe $L_{2+\alpha}$, les coefficients et $f \in C_\alpha$ et $a \geqq 0$, le théorème d'existence peut s'établir comme suit : on considère des suites indéfiniment différentiables avec des normes $| \quad |_\alpha$ uniformément bornées, convergeant vers les coefficients et f; on résout les équations approchées en appliquant, par exemple, la méthode rappelée précédemment; de la propriété de compacité, il résulte qu'il existe une sous-suite qui converge vers la solution de (1).

Il existe d'autres méthodes permettant de démontrer le théorème d'existence; par exemple, la méthode de continuité, utilisée par J. SCHAUDER [68]. On considère un opérateur dépendant d'un paramètre t,

$$L_t = tL + (1-t)\Delta \qquad (0 \leqq t \leqq 1),$$

où Δ est le laplacien. Pour $t = 0$, on sait que le problème admet une solution. De la propriété de compacité, on déduit qu'il en est de même pour $t = 1$.

d. AUTRES LIMITATIONS POUR LE CAS $n = 2$. THÉORÈMES D'EXISTENCE. — Pour l'étude des équations non linéaires, il faut des limitations *a priori* plus fines, qui dépendent seulement de m et M, pour les équations linéaires. On a obtenu de telles limitations pour les équations à deux dimensions. A titre d'exemple, citons le résultat suivant (*cf.* L. BERS-L. NIRENBERG [5], [6], [7]) : la solution du problème de Dirichlet pour (1) ($n = 2$), dans le cercle unité $\mathcal{D}$, satisfait à la relation

$$(8) \quad |u|_{1+\alpha} + \sup_{P \in \mathcal{D}} \left\{ \int_{\mathcal{D}} |P-Q|^{-2} |D^2 u(Q)|^2 \, dQ \right\}^{\frac{1}{2}} \leqq K(\max|u| + \max|f|)$$

$$(0 < \alpha < 1, \ K = \text{constante positive}).$$

Cette limitation permet de démontrer un théorème d'existence pour (1), en supposant seulement les coefficients bornés et mesurables. Cependant l'intérêt principal d'une telle limitation réside dans le fait qu'elle permet d'obtenir un théorème d'existence pour certaines équations non linéaires, par exemple pour l'équation semi-linéaire

$$-a_{ij}(x_1, x_2, u, D_1 u, D_2 u) D_i D_j u + a_i(x_1, x_2, u, D_1 u, D_2 u) D_i u$$
$$= f(x_1, x_2, u, D_1 u, D_2 u),$$

$\mathcal{D}$ étant le cercle unité et $u = 0$ sur $\dot{\mathcal{D}}$. Si l'on suppose les a_{ij}, a_i et f, uniformément bornés et satisfaisant à une condition de Hölder par rapport à tous leurs arguments, on peut démontrer l'existence de la solution en utilisant la méthode de J. LERAY-J. SCHAUDER [44] ou la méthode de L. NIRENBERG [60].

Pour obtenir des limitations qui dépendent seulement de m et M, on utilise certaines propriétés de la théorie des fonctions et des transformations quasi conformes; de ce fait, on doit se limiter au cas $n = 2$.

e. ÉQUATION SEMI-LINÉAIRE A UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES INDÉPENDANTES. THÉORÈME D'EXISTENCE. — Considérons l'intégrale n-uple du calcul des variations

$$\int_{\mathcal{D}} F(u_i)\,dx \qquad \left(u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i};\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n\right).$$

Nous supposons que F est une fonction de classe C_2 et que le problème est régulier, c'est-à-dire qu'il existe une constante positive m telle que

$$F_{n_i u_j}\xi_1\xi_j \geqq m\xi_i^2 \qquad \left(F_{u_i u_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial u_i\,\partial u_j}\right).$$

Le domaine $\mathcal{D}$ est supposé convexe et les valeurs données pour u sur $\dot{\mathcal{D}}$ satisfont à la condition des $n+1$ points. Cette dernière hypothèse est une généralisation de la condition classique des trois points. Elle peut s'énoncer comme suit : la pente de tout hyperplan contenant au moins $n+1$ points de la courbe $u = u(x_i)$, $x_i \in \dot{\mathcal{D}}$, de l'espace $(x_i,\ u)$, est inférieure à une constante A.

Dans ces conditions, nous avons montré (*cf.* P. GILLIS [29]) qu'il existait une et une seule fonction réalisant l'extremum de l'intégrale, par rapport à la classe des fonctions continues et lipschitziennes admissible (le cas $n=2$ a été traité par A. HAAR [33]). A cet effet, on démontre d'abord la propriété de semi-continuité pour l'intégrale et ensuite que la solution éventuelle du problème est une fonction lipschitzienne, de constante A. Cette dernière proposition est une généralisation du résultat classique de T. RADO [67] (*cf.* aussi J. von NEUMANN [78]) pour $n=2$.

Il en résulte que le problème de Dirichlet pour l'équation du type elliptique

$$\frac{d}{dx_i}F_{u_i} = 0,$$

$\mathcal{D}$ étant convexe et les données satisfaisant à la condition des $n+1$ points, admet une solution faible (fonction lipschitzienne). C. B. MORREY (*cf.* par exemple [54]) a montré que si la solution est de classe C_1 elle est aussi de classe C_2; d'un résultat récent obtenu par J. NASH [59], on déduit que la solution lipschitzienne est aussi de classe C_2.

A notre connaissance, c'est le seul théorème d'existence qu'on possède pour les équations elliptiques non linéaires à un nombre quelconque de variables indépendantes.

3. Équations d'ordre supérieur et systèmes d'équations. — Dans ce paragraphe, nous énoncerons quelques propriétés et théorèmes d'existence pour les équations d'ordre quelconque et les systèmes d'équations du type elliptique et linéaires.

Le problème de Dirichlet, pour de telles équations, a été étudié par plusieurs mathématiciens (*cf.* par exemple, M. I. Vishik [77], F. E. Browder [12], L. Gårding [27], C. B. Morrey [54], A. Douglis-L. Nirenberg [22], L. Nirenberg [62], [63], P. D. Lax [42], J. L. Lions [46]).

Les méthodes utilisées dans le cas d'une seule équation s'étendent au cas des systèmes d'équations fortement elliptiques. De tels systèmes ont été considérés en premier lieu par M. I. Vishik [76]; des systèmes plus généraux ont été introduits par A. Douglis et L. Nirenberg [22], [63].

D'une manière générale, on ne sait pas s'il existe une limitation analogue à (4) pour une équation d'ordre supérieur à 2. C. Miranda [50] a obtenu cependant une telle limitation pour l'opérateur biharmonique et en a déduit un théorème d'existence.

a. La théorie d'existence L^2. — La seule méthode qui a conduit à une théorie générale pour les équations linéaires à coefficients variables d'ordre supérieur à 2, est la méthode des espaces de Hilbert (L^2). Elle est basée sur une inégalité qui constitue une généralisation de la formule (5). Pour des équations à coefficients variables, cette inégalité a été obtenue par L. Gårding [27]; elle s'étend immédiatement aux systèmes fortement elliptiques au sens de Vishik. Signalons que pour des systèmes du second ordre à coefficients constants, elle avait été démontrée précédemment par L. Van Hove [72], [73] qui l'a utilisée dans son travail concernant l'extension de la condition de Legendre du calcul des variations aux intégrales multiples à plusieurs fonctions inconnues.

Les constantes qui figurent dans l'inégalité de Gårding dépendent des bornes des coefficients principaux de l'équation, de leur module de continuité, de la constante m figurant dans la relation qui exprime que l'équation est du type elliptique et du diamètre du domaine $\mathcal{D}$.

La méthode (L^2) permet de démontrer que le problème de Dirichlet admet une solution faible. On montre ensuite, les coefficients de l'équation étant supposés suffisamment réguliers, que la solution faible est une solution ordinaire (*cf.* § 3, *e*).

b. Limitation du type de Schauder. — Au cours de ces dernières années, on a démontré d'une manière plus simple les résultats de J. Schauder relatifs aux équations du second ordre(*cf.* C. Miranda [52], chap. IV); C. B. Morrey [54] a obtenu de telles limitations pour les systèmes du second ordre; A. Douglis et L. Nirenberg [22] ont étendu les limitations intérieures au cas des systèmes elliptiques au sens de Nirenberg. Il en résulte la propriété de compacité pour les solutions dans tout sous-domaine compact de $\mathcal{D}$; on peut en déduire aussi des théorèmes de différentiabilité pour les solutions d'équations linéaires ou non linéaires et pour les solutions de problèmes réguliers du calcul des variations.

Des limitations analogues à la frontière permettent de démontrer des théorèmes d'existence pour les systèmes fortement elliptiques, sous des conditions très générales imposées aux coefficients. Il suffit de considérer des suites indéfiniment différentiables convergeant vers les coefficients, de résoudre les équations approchées et d'appliquer la propriété de compacité.

c. LIMITATIONS PLUS FINES POUR $n > 2$. — Pour $n > 2$, on ne connaît pas des limitations du type (8) qui dépendent seulement des bornes des coefficients de l'équation; celles qu'on a obtenues font intervenir une constante K qui dépend aussi des modules de continuité des coefficients (*cf.* L. NIRENBERG [61] et C. MIRANDA [51]). C. B. MORREY [54] a établi de telles limitations pour des systèmes elliptiques de second ordre.

Grâce à un résultat de A. I. CALDERON et A. ZYGMUND [15], on peut encore obtenir de telles limitations pour les solutions de systèmes elliptiques quelconques, dans des sous-domaines compacts de $\mathcal{D}$ (*cf.* N. VEKUA [74]).

Ces limitations, du fait que les constantes qui y figurent dépendent des modules de continuité des coefficients, ne sont pas suffisamment fortes pour fournir des théorèmes d'existence pour les équations non linéaires, sauf pour des équations semi-linéaires du second ordre très particulières (*cf.* H. O. CORDES [18] et L. NIRENBERG [64]).

d. AUTRE MÉTHODE POUR L'ÉTUDE DE PROBLÈMES AUX LIMITES. — S. AGMON [1] a généralisé la méthode classique de Neumann-Fredholm qui consiste à représenter la solution sous forme d'un potentiel de double couche et à ramener le problème à la résolution d'une équation intégrale du type de Fredholm. L'auteur a considéré des équations d'ordre quelconque, à deux dimensions, n'ayant qu'une partie principale, et à coefficients constants. La méthode permet de retrouver les limitations intérieures et à la frontière du type de Schauder. Signalons que la réduction du problème de Dirichlet, pour des équations d'ordre supérieur à 2, à la résolution d'équations intégrales a été envisagée aussi par A. PLEIJEL [65] et Y. B. LOPATINSKII [47].

e. DIFFÉRENTIABILITÉ DES SOLUTIONS. — A plusieurs reprises, nous avons signalé que certaines méthodes permettaient d'obtenir des solutions faibles et qu'il fallait montrer ensuite, que ces solutions faibles étaient des solutions ordinaires, c'est-à-dire que les dérivées des solutions figurant dans l'équation ou dans le système existaient.

L'étude de la différentiabilité des solutions faibles peut se faire de plusieurs manières différentes.

On peut utiliser la singularité fondamentale de l'équation considérée. Cette méthode a été appliquée par H. WEYL [79] à propos de l'équation du potentiel. Elle a été étendue à l'équation du type elliptique la plus générale par F. E. BROWDER [8], [9], [10], [11], L. GÅRDING [26], L. SCHWARTZ [70], M. I. VISHIK [75]; la solution fondamentale pour une telle équation a été construite notamment par F. JOHN [39].

Une deuxième méthode est celle de F. JOHN [40] qui fait appel à la notion de moyenne sphérique.

Une troisième méthode est celle de K. FRIEDRICHS [25] (*cf.* aussi F. E. BROWDER [12]). Au lieu d'utiliser des opérateurs intégraux qui sont spécifiquement adaptés à l'équation — c'est le cas lorsqu'on emploie la solution fondamentale — on peut utiliser des opérateurs non spécifiques régularisants qui ont été considérés par SOBOLEV [71] et K. FRIEDRICHS [23], [24]. La considération de ces opérateurs, appelés « mollifiers », et l'inégalité de Gårding permettent de démontrer, sous des conditions très générales, que les solutions faibles sont des solutions au sens strict.

L'emploi des « mollifiers » peut être remplacé par une opération de différence-quotient appliquée à l'équation, comme l'a montré L. NIRENBERG [62]. On démontre non seulement que la solution faible est régulière à l'intérieur du domaine, mais encore qu'elle est régulière dans le domaine fermé, si la frontière est régulière, et qu'elle prend les valeurs données sur la frontière au sens classique.

Plusieurs auteurs ont utilisé des variantes de ces méthodes; par exemple, P. LAX [43] n'emploie que l'inégalité de Gårding; F. E. BROWDER [14] montre que la solution est différentiable à la frontière en utilisant une inégalité obtenue par N. ARONSAJN [2].

Précédemment, la régularité à la frontière avait été établie pour des équations du second ordre, par R. COURANT et D. HILBERT [19], et pour des systèmes du second ordre par C. B. MORREY [54], C. B. MORREY et L. NIRENBERG [57] ont démontré l'analyticité à la frontière, des solutions du problème de Dirichlet des systèmes analytiques fortement elliptiques, pour un domaine à frontière analytique. Leur méthode permet encore de démontrer l'analyticité en les points intérieurs.

Signalons aussi les travaux de L. NIRENBERG [62], F. E. BROWDER [13], O. V. GUSEVA [32], C. B. MORREY-J. BELLS [56], C. B. MORREY [55] et de A. MILGRAM-P. C. ROSENBLOOM [49] qui dans le cas de certaines équations simples utilisent la solution fondamentale de l'équation de la chaleur.

4. Équations particulières du second ordre, non linéaires. — Nous avons considéré des équations du second ordre non linéaires, à un nombre pair de variables indépendantes, qu'on peut obtenir de la manière suivante (*cf.* P. P. GILLIS [30], [31]).

Soit $u(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ une fonction de classe C_2. Considérons la forme de Pfaff

$$\omega_1^u = -u_2\,dx_1 + u_1\,dx_2 - u_4\,dx_3 + u_3\,dx_4 - \ldots - u_{2n}\,dx_{2n-1} + u_{2n-1}\,dx_{2n}$$

$$\left(u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}\right),$$

et la différentielle extérieure de cette forme, soit $d\omega_1^u$. Posons

$$\frac{1}{n!}(d\omega_1^u)^n = L(u)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_{2n}.$$

Les équations que nous avons étudiées sont du type

$$L(u)=f(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}).$$

Ainsi, pour $n=2$, l'équation s'écrit

$$L(u) \equiv (u_{11}+u_{22})(u_{33}+u_{44})-(u_{13}+u_{24})^2-(u_{14}+u_{23})^2=f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$
$$\left(u_{ij}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right).$$

Cette équation est du type elliptique dans un domaine de l'espace euclidien à quatre dimensions, si

$$(u_{11}+u_{22})(u_{33}+u_{44})>0, \qquad (f>0).$$

Pour de telles équations, du type elliptique, la méthode variationnelle classique permet de démontrer que si n est impair et supérieur à 1, le problème de Dirichtel admet tout au plus une solution; si $n=1$ ou pair, le problème de Dirichlet admet tout au plus deux solutions. On peut donner des exemples pour lesquels les deux solutions existent.

Un travail qui paraîtra prochainement sera consacré aux théorèmes d'existence pour de telles équations.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] AGMON (S.). — *Multiple layer potentials and the Dirichlet problem for higher order elliptic equations in the plane* (*Comm. pure appl. Math.*, vol. 10, 1957, p. 179-239).

[2] ARONSAJN (N.). — *On coercive integro-differential forms* (*Studies in Eigenvalue Problems*, n° 14, Lawrence Kansas, 1955, p. 94-106).

[3] ARONSAJN (N.). — *A unique continuation theorem for all partial differential equations and inequalities of second order* (*Bull. Amer. math. Soc.*, vol. 62, Abstract 184, 1956, p. 154).

[4] BERS (L.). — *Survey of local properties of solutions of elliptic partial differential equations* (*Comm. pure appl. Math.*, vol. 9, 1956, p. 339-350).

[5] BERS (L.) et NIRENBERG (L.). — *Boundary value problems for nonlinear elliptic equations in two independent variables* (*Proc. Int. Congress Amsterdam*, 1954, p. 84-85).

[6] BERS (L.) et NIRENBERG (L.). — *On a representation theorem for linear elliptic systems with discontinuous coefficients and its applications* (*Convegno internazionale sulle equazioni derivate e parziali*, 1954, p. 111-140).

[7] BERS (L.) et NIRENBERG (L.). — *On linear and nonlinear elliptic boundary value problems in the plane* (*Convegno internationale sulle equazioni derivate e parziali*, 1954, p. 141-167).

[8] BROWDER (F. E.). — *The Dirichlet problem for linear elliptic equations of arbitrary even order with variable coefficients* (*Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A.*, vol. 38, n° 3, 1952, p. 230-235).

[9] BROWDER (F. E.). — *The Dirichlet and vibration problems for linear elliptic*

differential equations of arbitrary order (*Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A.*, vol. 38, n° 8, 1952, p. 741-747).

[10] Browder (F. E.). — *Assumption of boundary values and the Green's function in the Dirichlet problem for the general linear elliptic equation* (*Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A.*, vol. 39, n° 3, 1953, p. 179-184).

[11] Browder (F. E.). — *Linear parabolic differential equations of arbitrary order; general boundary-value problems for elliptic equations* (*Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A.*, vol. 39, n° 3, 1953, p. 185-190).

[12] Browder (F. E.). — *Strongly elliptic systems of differential equations* (Contributions to the Theory of partial differental equations, *Ann. Math. Studies* n° 33, Princeton, 1954, p. 15-51).

[13] Browder (F. E.). — *Regularity properties of solutions of elliptic differential equations* (Abstract 695, *Bull. Amer. math. Soc.*, vol. 61, 1955, p. 528).

[14] Browder (F. E.). — *On the regularity properties of solutions of elliptic differential equations* (*Comm. pure appl. Math.*, vol. 9, 1956, p. 351-361).

[15] Calderon (A. P.) et Zygmund (A.). — *On the existence of singular integrals* (*Acta Math.*, vol. 88, 1952, p. 85-139).

[16] Carleman (T). — *Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables* (*C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 197, 1933, p. 471-474).

[17] Carleman (T.). — *Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes* (*Ark. Mat. Astr. Fys.*, vol. 26 B, n° 17, 1939, p. 1-9).

[18] Cordes (H. O). — *Über die erste Randwertaufgabe bei quasilinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in mehr als zwei Variablen* (*Math. Ann.*, vol. 131, 1956, p. 278-312).

[19] Courant (R.) et Hilbert (D.). — *Methoden der mathematischen Physik*, vol. 2, chap. 7, Berlin, Springer, 1937.

[20] de Giorgi (E.). — *Un esempio di non-unicità della soluzione del problema di Cauchy, relativo ad una equazione differenziale lineare a derivate parziali di tipo parabolico* (*Rend. Mat. e Appl.*, 5ᵉ série, vol. 14, 1955, p. 382-387).

[21] Douglis (A.). — *Uniqueness in Cauchy problems for elliptic systems of equations* (*Comm. pure appl. Math.*, vol. 6, 1953, p. 291-298).

[22] Douglis (A.) et Nirenberg (L.). — *Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations* (*Comm. pure appl. Math.*, vol. 8, 1955, p. 503-538).

[23] Friedrichs (K. O.). — *On differential operators in Hilbert spaces* (*Amer. J. Math.*, vol. 61, 1939, p. 523-544).

[24] Kriedrichs (K. O.). — *The identity of weak and strong extensions of differential operators* (*Trans. Amer. math. Soc.*, vol. 55, n° 1, 1944, p. 132-151).

[25] Friedrichs (K. O.). — *Differentiability of solutions of elliptic differential equations* (*Comm. pure appl. Math.*, vol. 6, 1953, p. 299-326).

[26] Gårding (L.). — *Le problème de Dirichlet pour les équations aux dérivées partielles elliptiques homogènes à coefficients constants* (*C. R. Acad., Sc. Paris*, t. 230, 1950, p. 1030-1032).

[27] Gårding (L.). — *Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations* (*Math. Scand.*, vol. 1, 1953, p. 55-72).

[28] Gillis (P. P.). — *Sur certaines classes d'équations aux dérivées-partielles* (*Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sc.*, vol. 22, 1936, p. 835-854 et 941-947).

[29] Gillis (P. P.). — *Sur les problèmes réguliers du calcul des variations* (*Studia Mathematica*, vol. 8, 1938, p. 68-77).

[30] Gillis (P. P.). — *Équations de Monge-Ampère à quatre variables indépendantes* (*Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sc.*, vol. 36, 1950, p. 474-484).

[31] Gillis (P. P.). — *Équations de Monge-Ampère à six variables indépendantes* (*Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sc.*, vol. 37, 1951, p. 229-240).

[32] GUSEVA (O. V.). — *On boundary problems for strongly elliptic systems* (*Doklady Akad. Nauk S. S. S. R.*, vol. 12, 1955, p. 1069-1072).

[33] HAAR (A.), — *Zur Variationsrechnung* (*Abh. Math. Sem. Hamburgischen Univ.* vol. 8, 1930, p. 1-27).

[34] HARTMAN (P) et WINTNER (A.). — *On the local behavior of solutions of non-parabolic partial differential equations* (*Amer. J. Math.*, vol. 75, 1953, p. 449-476).

[35] HARTMAN (P.) et WINTNER (A.). — *On the tocal behavior of solutions of non-parabolic partial differential equations.* III : *Approximations by spherical means* (*Amer. J. Math.*, vol. 77, 1955, p. 453-483).

[36] HEINZ (E.). — *Über die Eindeutigkeit beim Cauchyschen Anfangswertproblem einer elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung* (*Nachr. Akad. Wiss. Göttingen*, *Math. Phys.*, Kl. II *a*, n° 1, 1955, p. 1-12).

[37] HÖRMANDER (L.). — *On the theory of general partial differential operators* (*Acta Math.*, vol. 94, 1955, p. 161-248).

[38] JOHN (F.). — *On linear partial differential equations with analytic coefficients* (*Comm. pure appl. Math.*, vol. 2, 1949, p. 209-253).

[39] JOHN (F.). — *The fundamental solution of linear elliptic differential equations with analytic coefficients* (*Comm. pure appl. Math.*, vol. 3, 1950, p. 273-304).

[40] JOHN (F.). — *Derivatives of continuous weak solutions of linear elliptic equations* (*Comm. pure appl. Math.*, vol. 6, 1953, p. 327-335).

[41] JOHN (F.). — *Plane waves and spherical means applied to partial differential equations*, New-York, Interscience Publ., 1955.

[42] LAX (P. D.). — *On Cauchy's problem for hyperbolic equations and the differentiability of solutions of elliptic equations* (*Comm. pure appl. Math.*, vol. 8, 1955, p. 615-633).

[43] LAX (P. D.). — *A stability theorem for solutions of abstract differential equations and its application to the study of the local behavior of solutions of elliptic equations* (*Comm. pure appl. Math.*, vol. 9, 1956, p. 747-766).

[44] LERAY (J.) et SCHAUDER (J.). — *Topologie et équations fonctionnelles* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 51, 1934, p. 45-78).

[45] LIONS (J. L.). — *Sur les problèmes de dérivées obliques* (*C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 240, 1955, p. 266-268).

[46] LIONS (J. L.). — *Problèmes aux limites en théorie des distributions* (*Acta Math.*, vol. 94, 1955, p. 13-153).

[47] LOPATINSKII (Ya. B.). — *On a method of reducing boundary problems for a system of differential equations of elliptic type to regular equations* (*Ukrain. Mat. Ž.*, t. 5, 1953, p. 123-151).

[48] MALGRANGE (B.). — *Exixtence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution* (*Thèse Sc. math.*, Paris, 1955).

[49] MILGRAM (A.) et ROSENBLOOM (P. C.). — *Harmonic forms and heat conduction.* I : *Closed Riemannian manifols;*
II : *Heat distribution on complexes and approximation theory* (*Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, vol. 37, 1951, p. 180-184 et 435-438).

[50] MIRANDA (C). — *Formule di maggiorazione e teorema di esistenza per le funzioni biarmoniche di due variabili* (*Giorn. Mat. Battaglini*, vol. 78, 1948-1949, p. 97-118).

[51] MIRANDA (C.). — *Sui sisteme di tipo ellittico di equazioni lineari a derivate parziali del primo ordine*, *in n variabili indipendenti* (*Atti delle Ac. naz. dei Lincei.*, 8ᵉ série, 1 *a*, vol. 3, 1952, p. 85-121).

[52] MIRANDA (C.). — *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellitico*, Berlin, Springer, 1955.

[53] MORREY (C. B.). — *Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics* (*Univ. Calif. Publ. Math.*, nouv. série, vol. 1, 1943, p. 1-130).

[54] MORREY (C. B.). — *Second order elliptic systems of differential equations* (Contribution to the theory of partial differential equations, *Ann. math. Studies* n° 33, Princeton, 1954, p. 101-159).

[55] MORREY (C. B.). — *A variational method in the theory of harmonic integrals*, II (*Amer. J. Math.*, vol. 78, 1956, p. 137-170).

[56] MORREY (C. B.) et EELLS (J.). — *A variational method in the theory of harmonic integrals*, I (*Ann. of Math.*, vol. 63, 1956, p. 91-128).

[57] MORREY (C. B.) et NIRENBERG (L.). — *On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations* (*Comm. pure appl. Math.*, vol. 10, 1957, p. 271-290).

[58] MÜLLER (C). — *On the behavior of solutions of the differential equation* $\Delta u = F(x, u)$ *in the neighbourhood of a point* (*Comm. pure appl. Math.*, vol. 7, 1954, p. 505-515).

[59] NASH (J). — *Parabolic equations* (*Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A.*, vol. 43, 1957, p. 754-758).

[60] NIRENBERG (L.). — *On nonlinear elliptic partial differential equation and Hölder continuity* (*Comm. pure appl. Math.*, vol. 6, 1953, p. 103-156).

[61] NIRENBERG (L.). — *On a generalization of quasi-conformal mappings and its application to elliptic partial differential equations* (Contribution to the theory of partial differential equations, *Ann. math. studies*, n° 33, Princeton, 1954, p. 95-100).

[62] NIRENBERG (L). — *Remarks on strongly elliptic partial differential equations* (*Comm. pure appl. Math.*, vol. 8, 1955, p. 649-676).

[63] NIRENBERG (L.). — *Estimates and existence of solutions of elliptic equations* (*Comm. pure appl. Math.*, vol. 9, 1956, p. 509-552).

[64] NIRENBERG (L.). — *Uniqueness in Cauchy problems for differential equations with constant leading coefficients* (*Comm. pure appl. Math.*, vol. 10, 1957, p. 89-105).

[65] PLEIJEL (A.). — *On Green's functions for elastic plates with clamped, supported and free edges* (*Proc. Symposium on spectral theory and differential problems*, Oklahoma, 1951, p. 413-437).

[66] PLIS (A.). — *The problem of uniqueness for the solution of a system of partial differential equations* (*Bull. Acad. polon. Sc.*, Cl. III, 2, 1954, p. 55-57).

[67] RADO (T.). — *Über zweidimensionale reguläre Variationsprobleme* ... (*Math. Ann.*, vol. 101, 1929, p. 620-632).

[68] SCHAUDER (J.). — *Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung* (*Math. Z.*, vol. 38, 1934, p. 257-282).

[69] SCHAUDER (J.). — *Numerische Abschätzungen in elliptischen linearen Differentialgleichungen* (*Stud. Math.*, vol. 5, 1934, p. 34-42).

[70] SCHWARTZ (L.). — *Théorie des distributions*, Paris, Hermann, 1950-1951.

[71] SOBOLEV (S. L.). — *On a theorem of functional analysis* (*Mat. Sbornik*, nouv. série, vol. 4, 1938, p. 471-497).

[72] VAN HOVE (L.). — *Sur l'extension de la condition de Legendre du calcul des variations aux intégrales multiples à plusieurs fonctions inconnues* (*Indag. Math.*, vol. 7, n° 1, 1947, p. 3-8).

[73] VAN HOVE (L.). — *Sur le signe de la variation seconde des intégrales multiples à plusieurs fonctions inconnues* (*Acad. Roy. Belgique*, *Cl. Sc.*, Mémoires, vol. 24, fasc. 5, p. 1-68).

[74] VEKUA (N). — *On a method of solving boundary value problems for partial differential equations* (*Doklady Akad. Nauk. S. S. S. R.*, vol. 101, 1955, p. 593-596).

[75] VISHIK (M. I.). — *The method of orthogonal and direct decomposition in the theory of elliptic differential equations* (*Math. Sbornik*, nouv. série, vol. 25, 1949, p. 189-234).
[76] VISHIK (M. I.). — *On strongly elliptic systems of differential equations* (*Mat. Sbornik*, nouv. série, vol. 29, 1951, p. 615-676).
[77] VISHIK (M. I.). — *On general boundary problems for elliptic differential equations* (*Trudy Moskov. Mat. Obsč.*, vol. 1, 1952, p. 187-246).
[78] VON NEUMANN (J.). — *Über einen Hilfssatz der Variationsrechnung* (*Abh. Mat. Sem. Hamburgischen Univ.*, vol. 8, 1930, p. 28-31).
[79] WEYL (H.). — *The method of orthogonal projection in potential theory* (*Duke Math. J.*, vol. 7, 1940, p. 411-444).

Paul P. GILLIS,
Docteur ès sciences,
134, rue de Livourne,
Bruxelles (Belgique).