Bulletin de la S. M. F.

M. Chasles

Mémoire de géométrie sur la construction des normales à plusieurs courbes mécaniques

Bulletin de la S. M. F., tome 6 (1878), p. 208-250
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__208_1>

Mémoire de Géométrie sur la construction des normales à plusieurs courbes mécaniques; par M. Chasles [1].

I.

1. Nous entendrons par *courbe mécanique* toute courbe décrite par un point pendant le mouvement d'une figure plane dans son plan, soit que le point décrivant soit mobile avec la figure, soit qu'il reste fixe et qu'il imprime à chaque instant sa trace sur le plan mobile.

---

[1] Ce Mémoire inédit a été présenté à la Société philomathique le 11 août 1829. (*Note de la Rédaction.*)

Ces deux manières de considérer la description mécanique des courbes planes sont essentiellement différentes, et donnent lieu aussi à des courbes différentes; mais il existe toujours une certaine position du stylet fixe qui décrit la même courbe que dans le mode accoutumé de description par un point mobile. Ainsi, quand on fait mouvoir un angle pour décrire la cissoïde de Dioclès, à la manière de Newton, un stylet fixe, placé convenablement, trace aussi une cissoïde sur le plan mobile de l'angle.

La première manière de décrire les courbes par un point mobile est la seule qu'on ait considérée jusqu'à ce jour dans les spéculations géométriques. La seconde manière, par la trace d'un stylet fixe, y a été à peine aperçue. Cependant elle est en usage dans l'art du tourneur, et elle donne lieu, dans la théorie, à des descriptions de courbes intéressantes et curieuses, qui pourraient recevoir des applications utiles.

Clairaut est peut-être le seul géomètre qui ait pensé à cet ordre de questions, sur lequel il a donné un court écrit dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de 1740.

Après avoir signalé ce nouveau mode de description des courbes qui, au premier coup d'œil, dit-il, lui avait paru devoir produire les mêmes courbes que le mode de description ordinaire, il se borne à en faire deux applications. Il cherche les équations des courbes formées par la trace d'un stylet fixe sur un plan dont le mouvement est produit par le roulement d'un cercle sur une droite ou sur un autre cercle. Dans le premier cas, il trouve que, pour une certaine position du stylet fixe, on obtient une spirale d'Archimède et non une cycloïde, qui est la courbe décrite par un point du cercle roulant.

Cette matière présente à l'analyse de grandes difficultés : on en peut juger par la complication des calculs de Clairaut; mais des considérations géométriques parviennent à la rendre aussi simple que le mode ordinaire de description des courbes. Ainsi nous verrons sans difficulté que les courbes que Clairaut a exprimées par des équations qui renferment plusieurs intégrations qu'il n'a pas effectuées sont simplement des épicycloïdes produites à la manière ordinaire, par le roulement d'une droite sur un cercle ou d'un cercle sur un autre cercle.

Il ne va être question dans le présent travail que des courbes décrites par un stylet mobile. Dans un second Mémoire, nous traiterons, d'une manière générale, des courbes décrites par un stylet fixe, en indiquant le mécanisme particulier à chaque courbe, comme dans le tour à ovale et à épicycloïde.

2. La méthode que nous allons exposer, pour mener les normales aux courbes mécaniques, s'applique à une infinité de courbes *géométriques* et autres, pour lesquelles on peut trouver une description mécanique convenable : telles sont l'ellipse, les conchoïdes, la cissoïde de Dioclès, la ligne à longue inflexion, qui dirige le piston d'une machine à vapeur, la courbe qui est le lieu des sommets de tous les angles égaux circonscrits à une courbe donnée, etc. Cette méthode sert aussi pour déterminer les points où une courbe en mouvement touche la courbe enveloppe de l'espace qu'elle parcourt, par exemple pour déterminer les points où toutes les cordes égales d'une courbe quelconque touchent leur courbe enveloppe, et enfin pour déterminer les centres de courbure de certaines courbes, telles que la *tractoire,* la *spirale logarithmique,* etc.

Les principes auxquels conduisent les développements de cette méthode peuvent devenir d'un usage utile dans diverses recherches de pure Géométrie, comme nous aurons occasion de le faire voir par divers exemples.

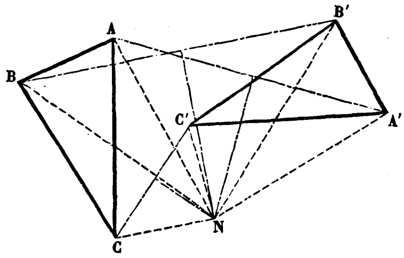
Cette méthode n'exige aucun calcul, et elle est indépendante de la doctrine des mouvements composés, sur laquelle repose la méthode de Roberval; elle a pour base unique une proposition de Géométrie élémentaire, que nous allons d'abord démontrer.

3. Lemme. — *Si l'on a dans un plan deux polygones égaux placés d'une manière quelconque, et qu'on joigne deux à deux par des droites leurs sommets correspondants, les perpendiculaires élevées sur ces droites par leurs milieux passeront toutes par un même point.*

En effet, soient A, B, C (*fig.* 1) trois sommets du premier polygone, et A′, B′, C′ les trois sommets correspondants du second polygone. Menons les droites AA′, BB′, CC′, et, par leurs milieux, élevons-leur des perpendiculaires. Soit N le point de rencontre des deux premières de ces perpendiculaires; il s'agit de prouver que la troisième passera par ce point N.

Le point N est également éloigné des deux points A, A'; on a donc NA = NA', et pareillement NB = NB'. Les côtés AB, A'B' des deux polygones sont égaux; les deux triangles ANB, A'NB'

Fig. 1.



sont donc égaux comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun; donc les deux angles NAB, NA'B' sont égaux. Or les deux angles BAC, B'A'C' des deux polygones sont égaux; on en conclut que l'angle NAC(= NAB — CAB) est égal à l'angle NA'C'(= NA'B'— C'A'B'); mais les deux côtés AC, A'C' des polygones sont égaux; donc les deux triangles NAC, NA'C' sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux; donc leurs côtés NC, NC' sont égaux, ce qui prouve que le point N est sur la perpendiculaire élevée sur le milieu de CC'.

Ainsi le lemme est démontré [1].

4. Pour faire l'application du lemme, supposons que les deux polygones soient infiniment voisins l'un de l'autre, de sorte que le second pourra être considéré comme étant précisément le premier polygone qui aurait éprouvé un déplacement infiniment petit; on en conclut cette proposition générale :

Si une figure plane, de forme quelconque, éprouve un déplace-

[1] Si l'on considère le point N comme appartenant au premier polygone, il sera lui-même son point correspondant dans le second polygone. On conclut de là cette proposition :

Quand on a une figure plane, si on la déplace d'une manière quelconque dans son plan, il y aura toujours dans cette figure un point qui, après le déplacement, se retrouvera au même lieu.

Conséquemment tout déplacement d'une figure sur son plan peut se faire par un mouvement de rotation autour d'un point fixe.

ment infiniment petit dans son plan, les normales menées par ses différents points aux directions des lignes infiniment petites parcourues par ces points passeront toutes par un même point.

En d'autres termes :

Si une figure plane est en mouvement dans son plan, les normales menées à un instant quelconque du mouvement par les différents points de la figure, à leurs trajectoires respectives, passeront toutes par un même point.

5. Ce point, considéré comme appartenant à la figure en mouvement, sera évidemment fixe pendant le mouvement infiniment petit de la figure, à l'instant où l'on mène les normales, de sorte que nous pouvons dire que :

Quel que soit le mouvement d'une figure plane dans son plan, il se réduit toujours, à chaque instant, à une rotation autour d'un point qui reste fixe pendant cet instant [1].

Par exemple, si la figure en mouvement est une courbe qui roule sur une autre courbe fixe, elle éprouvera à chaque instant un mouvement de rotation infiniment petit autour de son point de contact avec la courbe fixe.

6. On pourrait croire que ce mouvement d'une figure, dont le périmètre roule sur une courbe fixe, est un cas particulier du mouvement général d'une figure dans son plan.

---

(1) Il est à remarquer que le lemme que nous avons démontré a également lieu pour deux polygones sphériques tracés sur une même sphère, c'est-à-dire que, *quand on a sur une sphère deux polygones sphériques égaux, si l'on joint deux à deux par des arcs de grands cercles leurs sommets correspondants, et si, par les milieux de ces arcs, on mène d'autres arcs de grands cercles qui leur soient perpendiculaires, ces nouveaux arcs passeront tous par un même point.* On en conclut immédiatement que : *Tout mouvement infiniment petit d'un corps solide, retenu par un point fixe, est un mouvement de rotation autour d'un axe fixe mené par ce point,* ce qu'on a coutume de démontrer par l'analyse. Mais il résulte de notre lemme, appliqué aux polygones sphériques, cette proposition plus générale : *Quand un corps solide, retenu par un point fixe, éprouve un déplacement quelconque, il existe toujours dans ce corps une droite passant par le point fixe, qui, après le déplacement, se trouve au même lieu qu'auparavant.* D'où il suit que le déplacement du corps aurait pu se faire par un mouvement de rotation autour de cette droite.

Mais nous verrons que *tout mouvement d'une courbe plane dans son plan, de quelque nature et de quelque durée qu'il soit, n'est autre que le roulement d'une courbe mobile sur une courbe fixe* (56).

II.

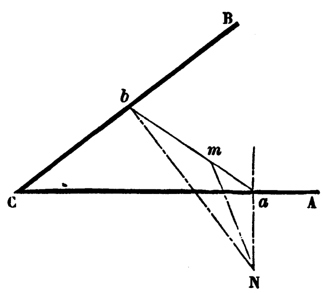
7. Du théorème (3), on conclut sur-le-champ ce premier principe général sur la construction des normales aux courbes planes :

Premier principe. — *Quand une courbe est décrite par un point d'une figure plane en mouvement dans son plan, il suffit, pour mener les normales à cette courbe, de connaître le mouvement de deux points de la figure.*

On mènera par ces points les normales aux courbes qu'ils décrivent et l'on joindra par une droite le point de concours de ces normales au point décrivant : cette droite sera la normale à la courbe décrite par ce point.

8. Soit, par exemple, une droite de longueur donnée, dont les extrémités a, b (*fig.* 2) glissent sur les côtés d'un angle fixe; on

Fig. 2.



sait que chaque point m de la droite engendre une ellipse [1]. Pour

[1] Cette propriété de l'ellipse a donné lieu à l'instrument appelé *compas elliptique*, qui sert à décrire cette courbe d'un mouvement continu; Stévin, dans son Livre Ier de la *Géométrie* (*Description des grandeurs*), l'attribue au marquis Guido Ubaldi.

avoir la normale à cette ellipse, il suffit de mener par les extrémités a, b de la droite mobile les perpendiculaires aux côtés de l'angle que ces extrémités parcourent; la droite qui joint le point de rencontre N de ces deux perpendiculaires au point décrivant m est la normale à l'ellipse.

9. Si l'angle dans lequel se meut la droite ab est droit, et si le point décrivant m de cette droite est son milieu, la courbe engendrée sera un cercle; car la droite Nm, qui est la normale à cette courbe, passera constamment par le sommet C de l'angle droit, ce qui prouve que cette courbe est un cercle. Donc :

Toutes les cordes d'égale longueur qu'on peut inscrire dans un angle droit ont leurs milieux sur une circonférence de cercle (1).

10. Si les deux extrémités de la droite mobile ab, au lieu de glisser sur deux droites fixes, parcourent deux courbes de forme quelconque, il faudra mener les normales à ces deux courbes et joindre par une droite leur point de concours au point décrivant de la droite mobile; cette droite sera la normale à la courbe décrite par ce point.

11. M. Hachette, dans son *Histoire des machines à vapeur,* applique cette construction à la ligne qu'il a nommée *courbe à longue inflexion,* dont on fait usage en Mécanique pour régler le mouvement des pistons.

Cette courbe est décrite par un point d'un côté d'un quadrilatère

---

(1) Puisque le point milieu de la droite ab, qui se meut dans un angle droit, engendre un cercle, pendant qu'un autre point quelconque de cette droite engendre une ellipse, on en conclut que :

Si une droite égale au rayon d'un cercle se meut de manière que ses deux extrémités parcourent respectivement la circonférence du cercle et un diamètre fixe, chaque point de la droite engendrera une ellipse dont la demi-somme des diamètres principaux sera égale au rayon du cercle.

Cette description mécanique de l'ellipse a été démontrée par plusieurs géomètres; elle est due, je crois, à Stone, qui l'a donnée dans son *Dictionnaire de Mathématiques.*

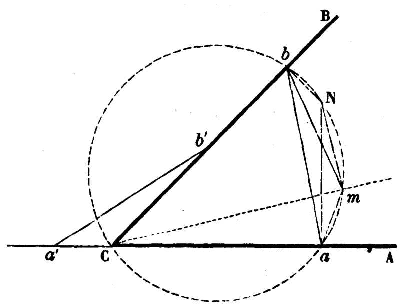
qu'on déforme, en faisant pivoter les deux côtés contigus autour des sommets du quadrilatère opposés au premier côté.

Pour mener la normale à cette courbe, il suffit de prolonger les deux côtés qui pivotent jusqu'à leur point de rencontre, et de joindre ce point par une droite au point décrivant : cette droite est la normale; car le côté du quadrilatère sur lequel est le point décrivant a constamment ses deux extrémités sur deux circonférences de cercles, dont les deux autres côtés mobiles sont les rayons; ces deux côtés sont donc les normales à ces circonférences, ce qui justifie la construction.

12. Au lieu de prendre pour point décrivant dans les deux exemples ci-dessus un point de la droite mobile, on peut prendre un point en dehors de cette droite, ce qui se réduit à considérer cette droite comme la base d'un triangle mobile dont le sommet est le point décrivant. La normale en un point de la courbe décrite par ce sommet passera encore par le point de concours des normales aux deux lignes parcourues par les deux autres sommets du triangle.

Ainsi, soit (*fig.* 3) le triangle *mab*, dont les deux sommets *a*, *b*

Fig. 3.



glissent sur les deux droites CA, CB; le troisième sommet *m* engendrera une courbe dont la normale passera par le point de rencontre N des perpendiculaires aux deux droites CA, CB, menées par les points *a*, *b*.

13. Supposons que le sommet *m* soit sur la circonférence du cercle qu'on peut faire passer par les trois points *a*, *b*, *c*. Cette circonférence, pendant le mouvement de la figure, passera toujours par le point C, parce qu'on ne peut décrire sur la droite ab qu'un segment capable de l'angle C.

Le point N est sur la même circonférence, puisque l'angle $a\mathrm{N}b$ est supplément de l'angle C; donc l'angle $b\mathrm{N}m$ est de grandeur constante, comme ayant pour mesure la moitié de l'arc bm; mais son côté $b\mathrm{N}$ est toujours perpendiculaire à CB; son second côté $\mathrm{N}m$ est donc constamment parallèle à une même droite. Ainsi toutes les normales à la courbe parcourue par le point m sont parallèles entre elles, ce qui prouve que cette ligne est droite.

Il est visible que cette droite passe par le point d'intersection des deux axes CA, CB; car, si l'on prend $\mathrm{C}a' = am$ et $\mathrm{C}b' = bm$, le triangle $\mathrm{C}a'b'$ représentera une position du triangle mobile abm, dans laquelle son sommet m sera en C. On a donc ce théorème :

Quand un plan glisse sur lui-même, de manière que deux de ses points parcourent deux axes fixes, il existe une infinité de points de ce plan qui parcourent aussi des droites, lesquelles passent toutes par le point d'intersection de ces deux axes; tous ces points sont sur une circonférence de cercle.

14. D'après cela, il est clair que *tous les autres points du plan décrivent des ellipses;* car, si, par un de ces points, on mène une transversale qui rencontre ce cercle en deux points, ces deux points décriront deux droites, ainsi que nous venons de le démontrer; donc chaque point de cette transversale décrira une ellipse, comme nous l'avons déjà dit (8).

Ainsi tous les points du plan en mouvement, autres que ceux de la circonférence en question, décriront des ellipses.

Ajoutons que *les normales à ces ellipses, menées à un instant quelconque du mouvement, passeront toutes par un même point* (4).

III.

15. Nous avons supposé jusqu'à présent que le mouvement d'une figure dans son plan était déterminé par le mouvement de deux de ses points, et nous avons mené la normale à la courbe décrite par un autre quelconque de ses points; mais le mouvement

de la figure peut être déterminé par diverses autres conditions. Par exemple, son périmètre peut être assujetti à toucher constamment une ou deux courbes données, ou bien à passer par un ou deux points fixes.

Nous allons examiner ces différents cas, et mener les normales aux courbes décrites par les points de la figure en mouvement.

Cela donnera lieu naturellement à une question inverse, qui est celle-ci :

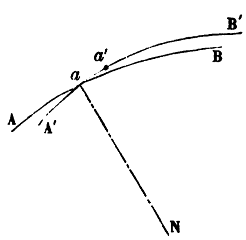
Quand une courbe de forme constante est en mouvement dans son plan, déterminer la courbe à laquelle elle est perpétuellement tangente, c'est-à-dire la courbe enveloppe de l'espace qu'elle parcourt.

La solution de cette question et la construction des normales reposent sur le principe suivant :

16. Deuxième principe. — *Quand une figure, de forme quelconque, est en mouvement dans son plan, les normales aux points où son périmètre touche, à un instant quelconque du mouvement, la courbe enveloppe de l'espace qu'il parcourt, passent toutes par un même point; ce point est celui par lequel passent les normales aux trajectoires des différents points de la figure.*

En effet, pour déterminer les points où une courbe mobile AB (*fig.* 4) touche, dans une de ses positions, la courbe enveloppe de

Fig. 4.



l'espace qu'elle parcourt, il faut, comme l'on sait, considérer aussi cette courbe dans sa position infiniment voisine A'B'; les points cherchés sont les points d'intersection *a* de ces deux courbes infiniment voisines AB, A'B'.

Or la courbe AB, pendant son mouvement pour prendre la position A′B′, a tourné, comme nous l'avons démontré (5), autour d'un certain point N, par où passent les normales aux trajectoires de ses différents points. Si donc on abaisse du point N une normale sur cette courbe, son pied *a* parcourra pendant le mouvement infiniment petit autour du point N l'arc *aa′* de cette courbe, et le point *a′*, où viendra se placer le point *a*, appartiendra à la seconde position A′B′ de la courbe; ce point *a′* sera donc l'intersection des deux courbes infiniment voisines AB, A′B′. Il est donc prouvé que les normales à la courbe AB aux points d'intersection de cette courbe par sa position infiniment voisine, c'est-à-dire les normales aux points où cette courbe touche l'enveloppe de l'espace qu'elle parcourt, passent toutes par un même point N, qui est le point par lequel passent les normales aux trajectoires des différents points de la figure en mouvement. Ainsi le théorème est démontré.

17. Ce théorème va nous servir pour résoudre trois questions :

Première question. — *Connaissant le mouvement d'une figure plane dans son plan, déterminer les points où son périmètre touche, dans chacune de ses positions, la courbe enveloppe de l'espace qu'il parcourt.*

On mènera les normales aux courbes décrites par deux points de la figure, et, par le point de concours de ces deux droites, on abaissera les normales sur le périmètre de la figure; leurs pieds seront les points cherchés, où ce périmètre touche sa courbe enveloppe; ce qui résulte évidemment du deuxième principe (16).

18. Soit, par exemple, une droite *ab* de longueur donnée, dont les extrémités *a*, *b* glissent sur deux droites fixes; pour déterminer le point où cette droite touche, dans chacune de ses positions, sa courbe enveloppe, on mènera par ses extrémités les perpendiculaires aux deux droites qu'elles parcourent, et de leur point de concours on abaissera la perpendiculaire sur la droite mobile; son pied sera le point de la courbe enveloppe.

19. Si la droite mobile glisse sur deux courbes quelconques, il faudra mener par ses extrémités les normales à ces deux courbes,

et abaisser de leur point de rencontre une perpendiculaire sur la droite : le pied de cette perpendiculaire sera le point où la droite touche sa courbe enveloppe.

20. Si les deux courbes sur lesquelles glissent les extrémités de la droite mobile se confondent, on en conclut que :

Si l'on inscrit dans une courbe toutes ses cordes égales à une ligne donnée, pour déterminer le point où chacune d'elles touche la courbe qu'elles enveloppent, il faut mener les normales à la courbe proposée par les extrémités de la corde, et du point d'intersection de ces deux normales abaisser une perpendiculaire sur cette corde : le pied de cette perpendiculaire sera le point cherché.

D'après cette construction, on voit facilement que chaque corde touche la courbe enveloppe en un point qui divise cette corde en segments proportionnels aux tangentes trigonométriques des angles qu'elle fait avec les deux tangentes à la courbe proposée, en ses extrémités.

21. Deuxième question. — *Quand une figure se meut dans son plan, de manière que son périmètre touche constamment deux courbes données, déterminer les normales à la courbe décrite par un point de cette figure.*

On mènera les normales aux deux courbes fixes, par les points où le périmètre de la figure mobile les touche, et l'on joindra par une droite le point de concours de ces normales au point décrivant : cette droite sera la normale à la courbe décrite par ce point.

22. Soit un angle de grandeur constante, qui se meut de manière que ses deux côtés touchent constamment deux courbes données; pour avoir la normale à la courbe décrite par le sommet de cet angle, on mènera les perpendiculaires aux deux côtés de l'angle par les points où ils touchent respectivement les deux courbes, et l'on joindra par une droite le point de concours de ces deux perpendiculaires au sommet de l'angle : cette droite sera la normale à la courbe décrite par ce sommet.

On voit facilement que cette droite est le diamètre du cercle qui passe par le sommet de l'angle et par les deux points où ses côtés touchent les deux courbes fixes.

23. Si l'angle mobile est droit, les perpendiculaires à ses côtés, menées par les points où ils touchent les deux courbes fixes, forment avec ses côtés un rectangle dont la diagonale qui aboutit au sommet de l'angle mobile est la normale à la courbe décrite par ce sommet; cette normale passe par le milieu de la seconde diagonale; donc :

Quand un angle droit se meut de manière que ses côtés touchent respectivement deux courbes données, la normale à la courbe décrite par son sommet passe par le milieu de la droite qui joint les points où ses côtés touchent les deux courbes.

24. Les deux courbes peuvent se confondre; alors on considère un angle dont les côtés glissent sur une même courbe.

Soit, par exemple, un angle droit mobile dont les côtés sont constamment tangents à une ellipse, ou à une hyperbole; la normale à la courbe décrite par le sommet de cet angle passera par le milieu de la corde qui joint les points où ses deux côtés touchent la conique; cette normale passe donc par le centre de la conique; ce qui prouve que la courbe décrite par le sommet de l'angle est un cercle; donc :

Tous les angles droits circonscrits à une ellipse, ou à une hyperbole, ont leurs sommets sur un cercle concentrique à cette courbe.

25. Si la conique est une parabole, la droite qui joindra les sommets de l'angle au milieu de la corde de contact de ses côtés sera parallèle à l'axe de la parabole; ainsi la ligne engendrée par le sommet de l'angle a toutes ses normales parallèles à l'axe de la parabole; donc :

Tous les angles droits circonscrits à une parabole ont leurs sommets sur une droite perpendiculaire à son axe.

Ces théorèmes si connus deviennent, comme on voit, d'une évidence remarquable, en vertu des principes dont nous faisons usage. On peut les étendre particulièrement à deux coniques homofocales. Nous en donnerons quelques exemples (Chapitre VIII, 64).

26. Troisième question. — *Une figure de forme quelconque se meut dans son plan de manière qu'un de ses points glisse sur une courbe fixe, et que son périmètre soit toujours tangent à une autre courbe fixe; on demande de déterminer :*

1° *Les normales à la courbe décrite par un point de la figure;*

2° *Les points où le périmètre de la figure touche la courbe enveloppe de l'espace qu'il parcourt.*

Par le point de la figure dont on connaît le mouvement, on mènera la normale à la courbe qu'il parcourt; et par le point où le périmètre de la figure touche la courbe à laquelle il est perpétuellement tangent, on mènera la normale à cette courbe : ces deux normales se rencontreront en un point N.

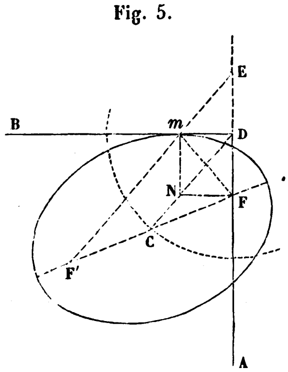
La droite menée de ce point N au point décrivant sera la normale à la courbe décrite par ce point.

Et les pieds des normales abaissées de ce même point N sur le périmètre de la figure seront les points où ce périmètre touchera sa courbe enveloppe.

Cela résulte clairement du second principe (16).

27. Soit, par exemple, une ellipse dont un foyer F parcourt une ligne droite DA (*fig.* 5), pendant que l'ellipse est constamment

Fig. 5.



tangente à une autre droite DB, qui fait avec la première un angle droit.

Pour avoir la normale à la courbe décrite par un point du plan de l'ellipse, on mènera par son foyer F la perpendiculaire à la droite CA, et, par le point m où l'ellipse touche la droite CB, la perpendiculaire à cette droite; ces deux perpendiculaires se couperont en un point N, par où passera la normale à la courbe décrite par un point quelconque du plan de l'ellipse.

Prenons pour ce point décrivant le centre C de l'ellipse; NC sera la normale à la courbe décrite par ce point. Il est facile de voir que cette normale passe constamment par le point de concours des deux axes fixes DA, DB. Car la droite $F'm$, menée du second foyer de la courbe, rencontre DA en E, et l'on a $DE = DF$; mais on a $CF' = CF$; par conséquent la droite CD est parallèle à $F'm$, et passe par le milieu de la droite Fm; ce qui prouve que cette droite CD est la diagonale du rectangle $FDmN$, et, conséquemment, passe par le point N; elle est donc la normale à la courbe décrite par le point C; on conclut de là que ce point C décrit un cercle dont le centre est en D. En plaçant l'ellipse de manière que les deux foyers soient sur la droite CA, on voit que le rayon du cercle est égal à son demi-grand axe; donc :

Si une ellipse se meut, en touchant constamment un côté d'un angle droit, et de manière qu'un de ses foyers parcoure l'autre côté de cet angle, son centre décrira un cercle, qui aura pour centre le sommet de l'angle et pour rayon le demi-grand axe de l'ellipse.

On parviendra au même résultat en prenant une hyperbole, au lieu d'une ellipse.

28. Les questions précédentes conduisent à la solution de plusieurs autres du genre de celle-ci :

Si un angle de grandeur constante se meut de manière que les segments interceptés sur ses côtés par deux courbes fixes, respectivement, soient de grandeur constante, on demande de déterminer la normale à la courbe décrite par le sommet de l'angle.

Par les deux extrémités du segment intercepté sur le premier côté de l'angle par la première courbe, on mènera les normales à cette courbe; elles se couperont en un point d'où l'on abaissera une perpendiculaire sur le premier côté de l'angle.

On fera de même à l'égard du second côté, c'est-à-dire que, par les extrémités de sa partie comprise dans la seconde courbe, on mènera les deux normales à cette courbe, et de leur point de concours on abaissera une perpendiculaire sur ce second côté de l'angle.

Les deux perpendiculaires abaissées sur les côtés de l'angle se couperont en un point qu'on joindra au sommet de l'angle par une droite : ce sera la normale à la courbe décrite par ce sommet.

En effet, les deux perpendiculaires aux côtés de l'angle sont les normales aux deux courbes que ces côtés enveloppent (20) ; la droite qui joint leur point de concours au sommet de l'angle est donc la normale à la courbe décrite par ce sommet (22).

Les segments interceptés par les deux côtés de l'angle pourraient être infiniment petits; alors ces côtés seraient tangents aux deux courbes fixes. Ainsi la question du n° 22 n'est qu'un cas particulier de celle que nous venons de résoudre.

IV.

29. Concevons une figure se mouvant dans son plan, de manière que son périmètre passe toujours par un point fixe; ce point pourra être regardé comme une branche infiniment petite de la courbe enveloppe de l'espace parcouru par ce périmètre; le théorème (16) nous donne donc ce troisième principe :

Troisième principe. — *Quand une figure de forme constante se meut dans son plan, de manière que son périmètre passe constamment par un point fixe, les normales aux trajectoires des différents points de la figure, et les normales aux points où son périmètre touche sa courbe enveloppe passent toutes par un même point situé sur la normale au périmètre, en son point coïncidant avec le point fixe.*

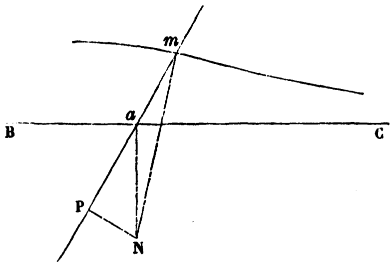
Ce principe est susceptible de nombreuses applications, soit pour mener les normales, soit pour déterminer les points où une figure en mouvement touche sa courbe enveloppe.

30. Soit d'abord la *conchoïde* de Nicomède, qui est engendrée

par un point m (*fig.* 6) d'une droite indéfinie qui glisse sur un point fixe P pendant qu'un de ses points a parcourt une droite fixe BC.

D'après le principe énoncé, il faut, pour déterminer la normale au point m de cette courbe, mener par le point a la perpendiculaire

Fig. 6.



à la droite BC que parcourt ce point, et par le point P la perpendiculaire à la droite mobile Pm; ces deux perpendiculaires se rencontrent en un point N, qu'on joint par une droite au point m; cette droite est la normale à la conchoïde [1].

31. La construction serait la même si la *base* BC de la conchoïde était une courbe de forme quelconque, au lieu d'être une ligne droite.

Dans ce cas, la droite aN serait la normale à cette courbe.

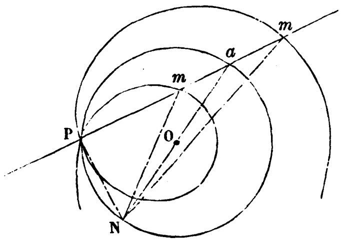
Par exemple, si l'on prend la conchoïde à base circulaire appelée le *limaçon* de Pascal (*fig.* 7), qui a pour pôle un point P de la circonférence du cercle qui lui sert de base, il faudra, pour avoir la normale au point m, mener la perpendiculaire PN à la droite mobile Pm, et le rayon Oa jusqu'à la rencontre de cette perpendiculaire en N; la normale à la conchoïde sera Nm.

Cette conchoïde a, comme on sait, fixé l'attention de Pascal, Roberval, de la Hire, Carré, Maclaurin, et dernièrement M. Quetelet a résolu plusieurs problèmes intéressants au sujet de cette courbe

[1] Les constructions de la normale à la conchoïde données par Descartes comme application de ses méthodes analytiques, et par Roberval comme application de sa méthode des mouvements composés, diffèrent de celle-ci; mais il est très-facile de voir comment elles se peuvent déduire l'une de l'autre.

(*Mémoire sur les caustiques,* inséré dans le tome III des *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles,* année 1826).

Fig. 7.



32. De la Hire, dans son *Traité des conchoïdes* (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris,* 1708), a généralisé leur définition. Il suppose qu'un angle de grandeur donnée se meuve dans son plan (*fig.* 8), de manière qu'un de ses côtés tourne en glissant sur un point fixe, pendant que son sommet parcourt une ligne quelconque; chaque point du second côté de l'angle décrit alors une *conchoïde.*

Il suit du principe (29) que, pour construire la normale à cette courbe, il faut mener par le point fixe la perpendiculaire au côté de l'angle qui glisse sur ce point, et, par le sommet de l'angle, la normale à la courbe qu'il parcourt; ces deux droites se coupent en un point N, et la droite menée de ce point au point décrivant est la normale à la conchoïde.

Cette construction est aussi celle que de la Hire a trouvée par des considérations géométriques ([1]), et que de la Condamine a démontrée par l'analyse (*Mémoires de l'Académie des Sciences,* 1734).

33. Mais cette manière plus générale d'envisager les conchoïdes

([1]) De la Hire donne, dans son Mémoire sur les conchoïdes :

1° La construction des normales;

2° La quadrature de l'espace compris entre la conchoïde et sa base;

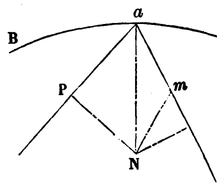
3° La rectification des conchoïdes;

4° La construction de leurs points de rebroussement.

Ce Mémoire offre une des belles applications des infiniment petits dans la Géométrie pure.

donne lieu à une autre question, que ces deux célèbres géomètres n'ont pas traitée : c'est la construction de la courbe enveloppe du second côté *am* de l'angle mobile.

Fig. 8.



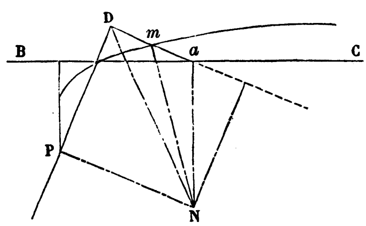
Il suffit d'abaisser du point N la perpendiculaire sur le côté *am*; son pied est le point où ce côté touche sa courbe enveloppe, ce qui résulte du principe (29).

Si l'angle mobile entraînait une courbe quelconque qui lui serait fixée, et qu'on voulût déterminer les points où cette courbe touche sa courbe enveloppe, il faudrait abaisser du point N les normales sur cette courbe : leurs pieds seraient les points de la courbe enveloppe.

34. Soit la *cissoïde* de Dioclès, que son inventeur a considérée dans le cercle, et dont Newton a trouvé une autre description par un mouvement continu.

Si l'on fait mouvoir un angle droit PD*a* (*fig.* 9), de manière

Fig. 9.



qu'un de ses côtés indéfini passe constamment par un point fixe P, et que l'extrémité de son second côté parcoure une ligne droite BC, dont la distance au point P soit égale à la longueur D*a* du second côté, le point milieu *m* de ce second côté engendrera la cissoïde

(*Arithmétique universelle,* problème 34 des *Questions géométriques*).

Pour déterminer la normale à cette courbe, on mènera par le point fixe P la perpendiculaire au côté PD, par le point a la perpendiculaire à la droite BC; ces deux droites se rencontreront en N; la droite Nm sera la normale à la cissoïde, ce qui résulte du principe (29).

Ajoutons que, si l'on veut la normale à la courbe décrite par le sommet D de l'angle mobile, cette normale sera ND. En outre, si l'on veut déterminer le point où le côté Da de l'angle touche sa courbe enveloppe, ce point sera le pied de la perpendiculaire abaissée du point N sur ce côté.

35. Il est un genre de courbes dont la description est plus générale que celle des conchoïdes de de la Hire, et dont s'est occupé de la Condamine dans ses Mémoires sur le tour (*Mémoires de l'Académie des Sciences,* année 1734), mais auxquelles il n'a point mené les normales.

Il suppose qu'une droite, à laquelle est fixée invariablement une courbe plane, glisse sur un point fixe, pendant qu'un point de la courbe parcourt une ligne donnée, ou bien pendant que cette courbe est constamment tangente à cette ligne, et il cherche analytiquement les propriétés de la courbe décrite par un point de cette figure en mouvement.

Ces questions rentrent dans les deux suivantes, qui sont plus générales :

36. *Une figure de forme quelconque se mouvant dans son plan, de manière que son périmètre passe toujours par un point fixe, et qu'un de ses points parcoure une ligne donnée; déterminer les normales à la courbe décrite par un point quelconque de cette figure.*

On mènera par le point fixe la normale au périmètre de la figure en mouvement, et par le point dont le mouvement est connu la normale à la courbe que parcourt ce point; ces deux droites se rencontreront en un point qu'on joindra par une droite au point décrivant; cette droite sera la normale à la courbe décrite par ce point.

37. *Une figure se mouvant dans son plan, de manière que son périmètre glisse sur un point fixe et sur une courbe donnée, mener la normale à la courbe décrite par un point de cette figure.*

On mènera les deux normales au périmètre de la figure par le point fixe et par le point où il touche la courbe sur laquelle il roule, ces deux normales se rencontreront en un point qu'on joindra par une droite au point décrivant; cette droite sera la normale à la courbe décrite par ce point, ce qui résulte évidemment du principe (29).

38. *D'un point fixe on abaisse sur les tangentes d'une courbe quelconque des obliques sous un angle de grandeur constante (dans un même sens de rotation) : les pieds de ces obliques forment une courbe à laquelle on demande de mener une normale.*

Par le point où une tangente touche la courbe proposée, on mènera la normale à cette courbe, et par le point fixe on mènera la perpendiculaire à l'oblique correspondant à cette tangente; ces deux droites se rencontreront en un point qu'on joindra par une droite au pied de l'oblique : cette droite sera la normale en ce point à la courbe qui sera le lieu des pieds des obliques.

En effet, cette courbe peut être considérée comme engendrée par le sommet d'un angle de grandeur constante dont un côté glisse sur un point fixe pendant que l'autre côté est constamment tangent à la courbe proposée.

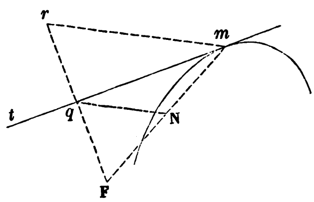
D'après cela, la construction que nous venons de donner résulte sans difficulté du principe (29).

39. Si l'angle mobile est droit, la normale passe évidemment, d'après cette construction, par le milieu de la droite menée du point fixe au point de contact du second côté de l'angle avec la courbe donnée; ce qui résulte aussi du n° 23, le point fixe étant regardé somme une courbe infiniment petite; donc :

Les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe sur les tangentes d'une courbe quelconque forment une seconde courbe dont les normales passent respectivement par les milieux des droites menées du point fixe au point de contact des tangentes avec la courbe proposée.

Ainsi : *si d'un point* F (*fig.* 10) *on abaisse une perpendiculaire* Fq *sur chaque tangente* mt *d'une courbe donnée, la normale au point* q *de la courbe lieu des pieds de ces perpendiculaires passera par le milieu* N *de la droite* Fm.

Fig. 10.



40. Si l'on prolonge Fq en r d'une longueur $qr = Fq$, et qu'on mène rm, le point r aura pour lieu géométrique une courbe semblable à la courbe formée par les points q, et semblablement placée par rapport à leur centre de similitude F; les normales à ces courbes aux deux points homologues q, r seront donc parallèles; de sorte que la normale à la seconde courbe est la droite rm; car, les points q et N étant les milieux des deux droites Fr, Fm, les deux droites qN, rm sont parallèles. Les angles rmq, qmF sont égaux; mr est donc le prolongement du rayon de lumière qui, émané du point F, se serait réfléchi en m sur la courbe proposée. La ligne mr est évidemment égale à Fm; on en conclut donc que :

Si des rayons émanés d'un point lumineux se réfléchissent sur une courbe, et qu'on prenne sur les prolongements des rayons réfléchis, à partir des points d'incidence, des lignes égales aux rayons incidents, leurs extrémités formeront une courbe qui sera une trajectoire orthogonale des rayons réfléchis.

Cela est un cas particulier des théorèmes de M. Quetelet sur les *caustiques secondaires.*

41. Quand la courbe, sur les tangentes de laquelle on abaisse, d'un point fixe, des perpendiculaires, est une ellipse ou une hyperbole, le lieu géométrique de leurs pieds est, ainsi que l'a fait voir Maclaurin (*Géométrie organique*), une courbe du quatrième degré; pour une parabole, c'est une courbe du troisième degré; et

cette courbe est précisément la cissoïde de Dioclès quand le point d'où l'on abaisse les perpendiculaires est le sommet de la parabole. Pour un cercle, la courbe en question, toujours du quatrième degré, est une ovale de Descartes, dans laquelle deux foyers se confondent (1); et si le point d'où l'on abaisse les perpendiculaires est sur la circonférence du cercle, cette courbe devient le limaçon de Pascal. Ces courbes des troisième et quatrième degrés, produites dans les sections coniques, jouissent de plusieurs propriétés remarquables, que M. Dandelin a déduites de la théorie des projections stéréographiques, dans un Mémoire inséré dans le tome IV des *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale de Bruxelles*, 1827.

42. Ajoutons que ces courbes, et généralement la courbe formée par les pieds des perpendiculaires abaissées d'un même point sur les tangentes d'une courbe quelconque, sont des *épicycloïdes* dont chacune est engendrée par un point du plan d'une courbe qui roule sur une courbe fixe qui lui est égale, de manière que les deux courbes se touchent toujours dans leurs points correspondants : ce qui a été démontré par le marquis de L'Hôpital, Maclaurin et Clairaut.

Il suit de là, et de la remarque que nous avons faite au sujet des caustiques secondaires (40), que *toute caustique secondaire par réflexion est une épicycloïde;* ce qui a déjà été démontré par M. Quetelet, dans sa *Nouvelle théorie des caustiques*.

43. Nous avons vu que, si une courbe plane éprouve un mouvement infiniment petit dans son plan, ce mouvement n'est autre qu'un mouvement de rotation autour d'un certain point fixe (5), et que, pour avoir les points où le périmètre de cette figure, considérée dans sa nouvelle position, coupe sa trace primitive, il faut abaisser de ce point des normales sur ce périmètre (16). On conclut de là et de ce que nous venons de dire (42) que :

Si une courbe plane à laquelle sont menées toutes ses tangentes

---

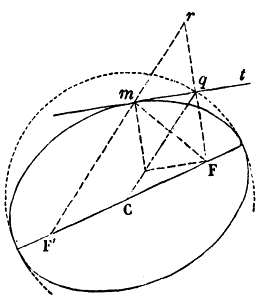
(1) Nous démontrerons ailleurs que les fameuses ovales de Descartes, dans lesquelles on n'a jamais considéré que deux foyers, jouissent de la propriété singulière d'en avoir *trois*, qui sont *conjugués* deux à deux.

éprouve un mouvement infiniment petit dans son plan, ces tangentes, dans leurs nouvelles positions, couperont respectivement leurs positions respectives en des points dont le lieu géométrique sera une épicycloïde.

Si, au lieu des tangentes à une courbe, on conçoit une infinité de droites passant toutes par un même point, l'épicycloïde se réduira à un cercle, qui sera le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées sur ces droites du point autour duquel la figure aura tourné pendant son mouvement infiniment petit.

44. Soit une conique, du foyer de laquelle on abaisse des perpendiculaires Fq sur ses tangentes mt (*fig.* 11); la normale en q à

Fig. 11.



la courbe lieu des pieds de ces perpendiculaires passera par le milieu du rayon vecteur Fm (39); si donc on prolonge la perpendiculaire Fq jusqu'à r, de sorte que $qr = \mathrm{F}q$, cette normale se trouvera parallèle à la ligne mr; mais cette droite mr passe par le second foyer de la conique, ce qui prouve que la normale passe par le point milieu des deux foyers, c'est-à-dire par le centre de la courbe; d'où l'on conclut que le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires est un cercle décrit du centre de la courbe; donc :

Les pieds des perpendiculaires abaissées des foyers d'une conique sur ses tangentes sont sur un cercle concentrique à la conique ([1]).

([1]) La normale du point m et la perpendiculaire en F à la droite Fq se coupent sur la droite Cq, puisque cette droite passe par le milieu de la droite Fm.

Si la conique est une parabole, on voit facilement, par ce mode de démonstration, que ce cercle devient une droite perpendiculaire à l'axe de la parabole, parce que toutes ces normales sont parallèles à cet axe.

45. Il suit de ces théorèmes que :

Si un cercle éprouve un mouvement infiniment petit dans son plan, les tangentes aux trajectoires de ses différents points envelopperont une ellipse ou une hyperbole.

Si une droite éprouve un mouvement infiniment petit dans un plan, les tangentes aux trajectoires de ses points envelopperont une parabole.

V.

46. Nous avons déjà supposé (29) que, dans le théorème (16), l'une des deux courbes sur lesquelles glisse le périmètre de la figure en mouvement se réduit à un point. Supposons maintenant que la seconde courbe se réduise aussi à un point; nous aurons ce quatrième principe :

Quatrième principe. — *Quand une courbe de forme constante se meut dans son plan en passant toujours par deux points fixes, chaque point de la courbe décrit une trajectoire dont la normale passe par le point d'intersection des normales menées par les deux points fixes à la courbe en mouvement.*

Les pieds des autres normales abaissées de ce point d'intersection sur la courbe sont les points où elle touche la courbe enveloppe de l'espace qu'elle parcourt.

47. Soit, par exemple, un triangle qui se meut dans son plan, de manière que deux de ses côtés passent toujours par deux points fixes : un point du troisième côté engendrera une courbe, dont la normale passera par le point d'intersection des perpendiculaires aux deux premiers côtés menés respectivement par les deux points fixes; et le point où le troisième côté touchera sa courbe enveloppe sera le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point d'intersection sur ce troisième côté.

VI.

48. Nous avons vu que, si deux points a, b d'une courbe en mouvement dans son plan glissent sur une courbe fixe, la normale à la trajectoire d'un point quelconque de la première courbe passe par le point de rencontre des normales à la courbe fixe, menées par les deux points a, b (7); et les normales abaissées de ce point de concours sur la courbe mobile y déterminent par leurs pieds les points où elle touche sa courbe enveloppe (16).

Si les deux points a, b sont infiniment voisins, auquel cas la courbe mobile touchera constamment la courbe fixe en l'un de ces points, les deux normales à cette courbe fixe se couperont au centre de son cercle osculateur en ce point; on a donc ce cinquième principe :

Cinquième principe. — *Si une courbe de forme quelconque glisse sur une autre courbe fixe, de manière que leur contact ait toujours lieu en un même point de la ligne mobile, la normale à la courbe décrite par un point quelconque de cette courbe mobile passe par le centre de courbure de la courbe fixe au point de contact des deux courbes; et les pieds des normales abaissées de ce centre de courbure sur la courbe mobile sont les points où elle touche la courbe enveloppe de l'espace qu'elle parcourt.*

49. Donc, si l'on connaît le mouvement d'un point de la courbe mobile, il servira à déterminer les centres de courbure de la courbe sur laquelle elle glisse.

Et réciproquement, si le centre de courbure de cette courbe est connu, il servira à déterminer les normales aux courbes décrites par les points de la courbe mobile, et à déterminer les points où cette courbe mobile touche sa courbe enveloppe.

50. Soit la *tractoire,* dont la propriété caractéristique est que toutes ses tangentes, comprises entre leurs points de contact et un axe fixe, sont égales.

Il suffit, pour avoir le centre de courbure de cette courbe, d'élever une perpendiculaire à cet axe par le point où une tangente le rencontre; cette perpendiculaire rencontre la normale à la tractoire, menée par le point de contact de cette tangente, en un point qui est le centre de courbure en ce point de contact.

51. Soit la *spirale logarithmique*, dont toutes les tangentes sont également inclinées sur les rayons vecteurs : on peut la considérer comme l'enveloppe d'un côté d'un angle mobile dont l'autre côté passe constamment par un point fixe, et qui se meut de manière que le premier côté touche toujours sa courbe enveloppe au sommet de l'angle. Il faut donc, pour avoir le centre de courbure, en un point m de cette spirale, mener par le point fixe la perpendiculaire au rayon vecteur qui passe par un point m : cette perpendiculaire rencontrera la normale à la courbe, en un point qui sera le centre de courbure.

52. On peut concevoir le mouvement d'un angle tel, que, l'un de ses côtés passant toujours par un point fixe, son second côté touche son enveloppe constamment au même point de ce côté, autre que son sommet. Cette enveloppe sera une courbe dont la spirale logarithmique n'est qu'un cas particulier. Pour avoir le centre de courbure de cette courbe, il faut mener par le point fixe la perpendiculaire au premier côté de l'angle, et par le point décrivant la perpendiculaire au second côté; l'intersection de ces deux droites sera le centre de courbure cherché.

53. On peut encore concevoir le mouvement de l'angle, de manière que son premier côté soit toujours tangent à une courbe donnée, au lieu de passer par un point fixe, et que son second côté touche toujours sa courbe enveloppe au sommet de l'angle : pour avoir le centre de courbure de cette courbe enveloppe, il faudra mener par le point de contact du premier côté de l'angle et de la courbe prposée la normale; elle rencontrera la normale à la courbe décrite par le sommet de l'angle en un point qui sera le centre de courbure de cette courbe.

54. Supposons que, par les différents points d'une courbe, on mène des droites faisant toutes des angles égaux avec les tangentes à la courbe en ces points respectivement; ces droites envelopperont

une courbe qu'elles toucheront en des points faciles à construire; car il suffit de considérer chaque droite et la tangente correspondante comme les côtés d'un angle de grandeur constante, qui se meut, de manière que son premier côté touche constamment la courbe proposée en son sommet; il faut donc, pour avoir le point où son second côté touche sa courbe enveloppe, abaisser du centre de courbure de la courbe proposée une perpendiculaire sur ce second côté; son pied est le point de la courbe enveloppe de ce côté.

Cette courbe est, comme l'on sait, une des *développoïdes* de Réaumur (*Mémoires de l'Académie des Sciences,* 1709).

55. Remarquons que, si sur toutes les droites menées par les points de la courbe proposée, on porte, à partir de ces points, des lignes égales entre elles, leurs extrémités formeront une courbe dont les normales passeront, comme les normales de la développoïde, par les centres de courbure de la courbe proposée, ce qui résulte du cinquième principe (48).

On peut donc former une infinité de courbes dont les normales passent par les centres de courbure d'une courbe proposée, ce qui offre une solution graphique, susceptible d'uue grande précision, de la question suivante :

Trouver les centres de courbure d'une courbe quelconque dont on connaît les tangentes.

VII.

56. Nous avons dit (6) que le mouvement d'une figure quelconque dans son plan n'est autre que le mouvement produit par le roulement d'une courbe sur une autre courbe fixe.

En effet, la figure en mouvement tourne à chaque instant autour d'un point qui est fixe pendant cet instant infiniment petit (5). Soient N, N′, N″, ... les points autour desquels tourne successivement la figure; ces points, étant considérés comme appartenant au plan fixe sur lequel se meut la figure, forment une courbe immobile.

Soit N celui de ces points autour duquel tourne la figure à l'instant où on la considère; prenons sur le plan de cette figure ses différents points ν', ν'', ..., qui, pendant le mouvement, viendront successivement se confondre avec les points N′, N″, . . . supposés fixes, comme appartenant au plan fixe sur lequel se meut la figure. Les points ν′, ν″, ν‴, . . . forment une courbe qui fait partie de la figure et qui est mobile avec elle. Cette courbe passe par le point N autour duquel tourne la figure au moment où on la considère.

Après un mouvement infiniment petit autour du point N, le point ν′ s'appliquera sur le point N′; après un mouvement infiniment petit autour de ce point N′, le point ν″ s'appliquera sur le point N″, et ainsi de suite. Les éléments Nν′, ν′ν″, ν″ν‴, . . . de la courbe mobile Nν′ν″ . . . viennent donc successivement s'appliquer sur les éléments NN′, N′N″, N″N‴, ... de la courbe fixe NN′N″..., ce qui prouve que la courbe νν′ν″... roule sur la courbe NN′N″.... Donc :

De quelque nature et de quelque durée que soit le mouvement d'une figure dans son plan, ce mouvement n'est autre que celui que produirait le roulement d'une certaine courbe mobile sur une autre courbe fixe.

57. Il suit de là que :

Toute courbe décrite par un point d'une figure plane en mouvement dans son plan est une épicycloïde (1).

58. Pour faire une application de ces principes, considérons la mouvement d'une droite *ab* (*fig.* 12) de longueur donnée, dont les extrémités *a*, *b* glissent sur deux axes fixes CA, CB. Cette droite tourne pendant un instant infiniment petit autour du point d'intersection N des perpendiculaires à ces deux axes, menées par les points *a*, *b*. Ce point N se trouve évidemment sur la circonférence

(1) Nous avons vu (5, note) que, quand un corps solide retenu par un point fixe est en mouvement, il tourne à chaque instant autour d'un axe fixe; on en conclut, comme nous venons de faire pour le mouvement d'une figure plane, que :

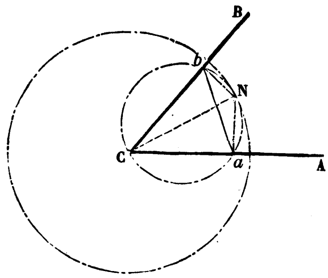
Quel que soit le mouvement d'un corps solide retenu par un point fixe, il n'est autre que celui que produirait le roulement d'une certaine surface conique, ayant ce point pour sommet, sur une autre surface conique fixe ayant même sommet.

Donc :

Quel que soit le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, chacun de ses points décrit une épicycloïde sphérique.

de cercle menée par les trois points C, a, b, et CN est le diamètre de ce cercle. La corde ab de ce cercle sous-tend un segment capable de l'angle aCb; cette corde est de grandeur constante quelle

Fig. 12.



que soit sa position; le diamètre CN du cercle est donc aussi de grandeur constante, ce qui prouve que le point N appartient à un autre cercle décrit du point C comme centre.

Ainsi les points N, N′, N″, ..., autour desquels tournera successivement la droite ab pendant son mouvement, forment un cercle ayant son centre en C.

Cherchons maintenant quelle est la courbe $vv'v''$... qui, pendant le mouvement de la droite ab, roulera sur ce cercle.

On voit facilement que cette courbe sera précisément la circonférence du cercle CaNb, qui est d'un rayon sous-double de celui du cercle NN′N″...; car on sait que, si l'on fait rouler le cercle CaNb sur le cercle du rayon CN, chacun des points de sa circonférence décrira un rayon de celui-ci (*Correspondance* de M. Hachette, t. II, p. 23); mais nous avons vu que, pendant le mouvement de la droite ab, chaque point de la circonférence de ce même cercle décrit aussi une droite passant par le point C (13); cela prouve que le mouvement de la droite ab est le même que le mouvement produit par le roulement du cercle CaNb sur le cercle de rayon CN.

59. Il suit de là que :

Quand un cercle roule sur la concavité d'un autre cercle fixe, d'un rayon double du sien, chaque point de sa circonférence décrit une droite, et chaque autre point de son plan décrit une ellipse (14).

60. Nous avons démontré que toute courbe décrite par un point d'une figure en mouvement est une épicycloïde (57); on en peut conclure que :

Toute courbe quelconque peut être considérée, d'une infinité de manières, comme une épicycloïde.

En effet, il suffit de prouver que toute courbe peut être regardée, d'une infinité de manières, comme décrite d'un mouvement continu par un point d'une figure de forme constante.

Or, que d'un point fixe P on mène des rayons aux points de la courbe, et qu'on les prolonge tous d'une même quantité, les extrémités de ces rayons prolongés formeront une nouvelle courbe, par rapport à laquelle, prise pour *base,* la courbe proposée sera une conchoïde, c'est-à-dire que cette courbe sera engendrée d'un mouvement continu par un point d'une droite qui glissera sur le point fixe P, et dont l'extrémité parcourra la nouvelle courbe.

D'après cette description mécanique, la courbe proposée sera une épicycloïde engendrée par un point du plan d'une courbe mobile qui roulera sur une autre courbe fixe (57), ce qui démontre la proposition énoncée.

61. Ces deux courbes, qui servent à décrire l'épicycloïde par le roulement de l'une sur l'autre, sont faciles à construire.

La courbe fixe est le lieu des points autour desquels tourne successivement la droite mobile; il faut donc mener par le point fixe P une perpendiculaire à cette droite, et par le point décrivant, c'est-à-dire par le point où cette droite mobile rencontre la courbe proposée, il faut mener la normale à cette courbe; le point de concours N de cette normale et de la perpendiculaire à la droite mobile appartiendra à la courbe fixe.

Quant à la courbe mobile, elle est également facile à construire; car il suffit de considérer la droite mobile dans une de ses positions et de prendre tous les points qui seront placés par rapport à elle comme les points N, N′, N″, ... sont placés par rapport aux positions correspondantes de la droite mobile; les points ainsi déterminés formeront la courbe mobile.

Ainsi nous avons déterminé la courbe fixe qui sert de base à l'épicycloïde et la courbe mobile qui doit rouler sur cette première.

La construction de ces deux courbes serait évidemment la même si, au lieu d'une droite pour figure mobile, on prenait une courbe.

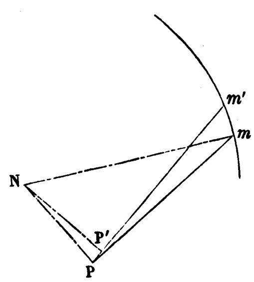
62. Quand une courbe est déterminée par une équation en coordonnées polaires, on peut regarder cette équation comme exprimant le mouvement d'une droite dont un point décrit la courbe.

Cette droite est le rayon vecteur mené du pôle des coordonnées à un point de la courbe; car on peut considérer ce rayon vecteur comme glissant sur le pôle, de manière que son extrémité parcoure la courbe. Son mouvement sera déterminé par l'équation de la courbe, qui est une relation entre la longueur du rayon vecteur et l'angle qu'il fait avec un axe fixe.

Cette manière d'envisager la description d'une courbe conduit sur-le-champ à la construction de ses normales.

Soient Pm, P$'m'$ deux rayons vecteurs (*fig.* 13) infiniment voi-

Fig. 13.



sins; le premier, pour prendre la position du second, aura tourné autour d'un certain point N par lequel passe la normale à la courbe en m (4). Ce point N est sur la perpendiculaire au rayon Pm menée par le point P (29). Pendant le mouvement infiniment petit autour du point N, le point P, considéré comme appartenant au rayon vecteur mobile Pm, vient en P$'$ sur la nouvelle position Pm' de ce rayon vecteur, et l'on a

$$P'm' = Pm,$$

de sorte que PP$'$ égale la différence des deux rayons vecteurs Pm,

Pm'; or PP' est un arc infiniment petit décrit du point N comme centre, avec le rayon NP; on a donc

$$PP' = NP \text{ angle } PNP';$$

l'angle PNP' est égal à l'angle des deux rayons vecteurs : donc

$$PP' = NP \text{ angle } mPm', \quad \text{d'où} \quad NP = \frac{Pm' - Pm}{\text{angle } mPm'};$$

NP s'appelle la *sous-normale de la courbe :* donc *la sous-normale d'une courbe exprimée en coordonnées polaires est égale au rapport des variations du rayon vecteur et de l'angle qu'il décrit.*

63. On pourrait supposer dans l'équation d'une courbe que les rayons vecteurs, au lieu de passer par un point fixe, fussent tangents à une autre courbe, et prendre pour longueur de chaque rayon la distance comprise entre son point de contact avec cette courbe et son extrémité située sur l'autre courbe; la seconde variable de l'équation de cette courbe serait l'angle que le rayon vecteur fait avec un axe fixe.

La normale à la courbe proposée se déterminerait par la même formule que nous venons de trouver, c'est-à-dire qu'on élèverait une perpendiculaire au rayon vecteur par son point de contact avec la courbe auxiliaire, et l'on prendrait cette perpendiculaire égale au rapport des variations du rayon vecteur et de l'angle qu'il fait avec l'axe fixe, et son extrémité appartiendrait à la normale à la courbe.

VIII.

64. Nous avons dit (25) que nos démonstrations pouvaient s'étendre à des questions concernant deux coniques homofocales.

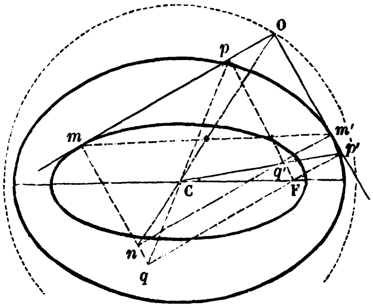
Quand deux coniques ont mêmes foyers, si les côtés d'un angle droit touchent respectivement ces deux courbes, la droite menée du sommet de l'angle au milieu de la corde qui joint les deux points de contact passe par le centre commun des deux courbes.

En effet, soit O (*fig.* 14) le sommet de l'angle; soient m et m'

les points de contact de ses côtés avec les deux coniques respectivement, et F l'un des deux foyers des deux courbes; il s'agit de prouver que la droite menée par le point O et par le milieu de la droite mm' passe par le centre C des deux courbes; ou bien que la diagonale On du rectangle construit sur Om et Om' passe par le point C.

Du point F abaissons les perpendiculaires Fp, Fq sur les côtés

Fig. 14.



mO, mn de ce rectangle, et joignons leurs pieds p, q; la droite pq passera par le centre C de la première conique; ce que nous avons démontré (44, note).

Du point F abaissons les perpendiculaires Fp', Fq' sur les deux côtés $m'O$, $m'n$, et joignons leurs pieds p', q' par la droite $p'q'$; cette droite passera pareillement par le centre C de la seconde conique.

Or il est facile de voir que les deux droites pq, $p'q'$ doivent se couper sur la diagonale On du rectangle $Omnm'$; car, en appelant ρ, ρ' les points où cette diagonale On rencontre ces deux droites pq, $p'q$, on aura :

1° Dans le triangle mnO, coupé par la transversale $\rho q p$,

$$\frac{\rho n}{\rho O} = \frac{mp.nq}{mq.pO};$$

2° Dans le triangle $m'nO$, coupé par la transversale $\rho' p' q'$,

$$\frac{\rho' n}{\rho' O} = \frac{m'p'.nq'}{m'q'.p'O}.$$

Or on a

$$mp = nq', \quad nq = m'p', \quad mq = Op', \quad Op = m'q';$$

il en résulte que

$$\frac{\rho n}{\rho O} = \frac{\rho' n}{\rho' O},$$

ce qui prouve que ρ et ρ' se confondent; par conséquent la droite On passe par le point de concours des deux droites pq, $p'q'$, lequel est le centre de la courbe. Le théorème est donc démontré.

Il résulte de ce théorème, en vertu de celui du n° 23, que :

Quand un angle droit se meut de manière que ses deux côtés touchent respectivement deux coniques qui ont mêmes foyers, son sommet engendre un cercle qui a même centre que les deux courbes.

Si les deux coniques étaient des paraboles, on verrait, par le même mode de démonstration, que le sommet de l'angle droit mobile engendre une droite perpendiculaire à leur axe commun.

Quand les deux coniques se confondent, on retrouve les deux théorèmes (**24**, **25**). Et si l'une des coniques a son petit axe nul, de manière qu'elle se réduise à une droite limitée aux deux foyers de l'autre conique, on en conclut le théorème (**44**).

IX.

EXTENSION AUX SURFACES DU SECOND DEGRÉ DE DIVERSES PROPRIÉTÉS DES SECTIONS CONIQUES.

65. Les deux théorèmes (**24**, **25**) relatifs à une seule conique sont dus à de la Hire (*Mémoires de l'Académie des Sciences* de 1704); leurs analogues dans les surfaces du second degré ont été énoncés par Monge, et démontrés en premier lieu par M. Poisson (*Correspondance* de M. Hachette, t. I, p. 237), puis en plusieurs circonstances. Mais toutes les démonstrations qu'on en a données sont, je crois, analytiques. Nous allons les démontrer d'une manière purement géométrique, qui s'appliquera aussi à quelques théorèmes plus généraux.

Soit d'abord une surface ayant un centre. Il s'agit de prouver que :

Le point d'intersection de trois plans rectangulaires tangents à un ellipsoïde ou à un hyperboloïde a pour lieu géométrique une sphère concentrique à cette surface.

Soit m le point d'intersection de trois plans rectangulaires tangents à la surface, que je suppose un ellipsoïde. Circonscrivons à la surface un cylindre ayant ses arêtes parallèles à l'intersection de deux de ces plans. Faisons rouler sur ce cylindre les deux premiers plans rectangulaires ; leur intersection engendrera un second cylindre, et les sections de ces deux cylindres par le troisième plan tangent à la surface, lequel est perpendiculaire à leurs arêtes, seront dans le premier une ellipse, et dans le second un cercle, concentrique à cette ellipse (d'après le théorème 24) ; ce cercle appartiendra à la surface lieu géométrique du point d'intersection des trois plans rectangulaires tangents à l'ellipsoïde. Ce cercle étant concentrique à la section du premier cylindre, son centre se trouve sur l'axe de ce cylindre, lequel passe par le centre de l'ellipsoïde ; or, tout plan normal au cercle passe par l'axe de ce cylindre, puisque cet axe est perpendiculaire au plan du cercle ; donc tout plan normal au cercle passe par le centre de l'ellipsoïde.

En faisant mouvoir le premier et le troisième plan tangent, de manière qu'ils touchent toujours la surface et que leur droite d'intersection soit toujours perpendiculaire au second plan tangent, cette droite engendrera un cylindre dont la trace sur ce second plan tangent sera encore un cercle, qui passera par le point m, et qui sera sur la surface cherchée ; tout plan normal à ce second cercle passera par le centre de l'ellipsoïde.

La normale au point m de la surface cherchée est l'intersection des plans normaux en ce point aux deux cercles ; elle passe donc par le centre de l'ellipsoïde : ce qui prouve que cette surface cherchée est une sphère concentrique à l'ellipsoïde. C. Q. F. D.

66. Soit un paraboloïde, elliptique ou hyperbolique, et soit m le point d'intersection de trois plans rectangulaires tangents à cette surface.

Concevons que les deux premiers plans se meuvent en restant toujours rectangulaires entre eux et avec le troisième plan, et tangents au paraboloïde; ils rouleront sur un cylindre circonscrit au paraboloïde et dont la section droite faite par le troisième plan tangent sera une parabole ayant son axe parallèle à la projection orthogonale sur ce troisième plan tangent de l'axe du paraboloïde. L'intersection des deux plans rectangulaires mobiles engendrera donc un plan dont la trace sur le troisième plan tangent sera une droite perpendiculaire à l'axe du paraboloïde.

Cette droite appartiendra à la surface qui sera le lieu du point d'intersection des trois plans rectangulaires tangents au paraboloïde.

En faisant mouvoir le premier et le troisième plan tangent, on obtiendra senblablement une seconde droite passant par le point m, qui appartiendra à cette surface; cette droite sera encore perpendiculaire à l'axe du paraboloïde. Le plan de ces deux droites est donc perpendiculaire à cet axe; mais ce plan est tangent à la surface cherchée; tout plan tangent à cette surface est donc perpendiculaire à l'axe du paraboloïde, ce qui prouve que cette surface est un plan perpendiculaire à cet axe. Donc :

Le point d'intersection de trois plans rectangulaires tangents à un paraboloïde a pour lieu géométrique un plan perpendiculaire à l'axe du paraboloïde.

67. Les démonstrations des deux théorèmes précédents s'appliquent au cas où, au lieu d'une surface du second degré, on a une conique à laquelle on mène trois plans tangents rectangulaires; et l'on obtient ces deux théorèmes :

I. *Quand on mène trois plans rectangulaires tangents à une ellipse, ou à une hyperbole, leur point d'intersection a pour lieu géométrique une sphère qui a même centre que la conique.*

II. *Le point d'intersection de trois plans rectangulaires tangents à une parabole a pour lieu géométrique un plan perpendiculaire à l'axe de la parabole.*

X.

THÉORÈMES RELATIFS AUX DEUX CONIQUES DONT CHACUNE EST LE LIEU DES SOMMETS DES CÔNES DE RÉVOLUTION QUI PASSENT PAR L'AUTRE.

68. Soient, dans deux plans rectangulaires, deux coniques, dont l'une soit le lieu géométrique des *foyers* de la seconde; c'est-à-dire que chacune de ces courbes sera le lieu des sommets de tous les cônes de révolution qu'on peut faire passer par l'autre courbe.

Nous avons dit (*Mémoire sur les surfaces du second degré,* inséré dans le tome V des *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles,* 1829, p. 68) que ces deux coniques jouissent, entre autres propriétés, de celle-ci : *De quelque point qu'on regarde ces deux courbes, elles paraissent se couper à angles droits.* En supposant que ce point soit à l'infini, on conclut de là que : *les projections orthogonales des deux courbes sur un plan quelconque sont deux coniques décrites des mêmes foyers.*

L'occasion se présente de démontrer quelques autres propriétés de ces courbes.

69. Concevons deux plans rectangulaires tangents à ces deux courbes respectivement; joignons par une droite leurs deux points de contact avec les courbes, et menons un plan par l'intersection de ces deux plans et le milieu de cette droite. Ce plan passera par le centre commun des deux courbes. En effet, projetons orthogonalement les deux courbes sur un plan perpendiculaire à l'intersection des deux plans tangents; nous aurons deux coniques ayant les mêmes foyers; les traces des deux plans tangents sur le plan de projection seront les côtés d'un angle droit, tangents respectivement à ces deux coniques; la droite menée du sommet de cet angle au milieu de la droite qui joindra les deux points de contact passera par le centre des deux coniques; mais cette droite sera la trace du plan mené par l'intersection des deux plans tangents et par le milieu de la droite qui joint leurs points de contact;

ce plan passe donc par le centre des deux courbes en projection, et dès lors par le centre des deux coniques proposées; donc :

Quand on a deux coniques dont chacune est le lieu des foyers de l'autre, si l'on mène deux plans rectangulaires tangents à ces courbes respectivement, le plan mené par leur droite d'intersection et par le milieu de la droite qui joint leurs points de contact passe par le centre commun des deux coniques.

70. Faisons tourner les deux plans rectangulaires, de manière qu'ils soient toujours tangents aux deux coniques et que leur intersection reste parallèle à un axe fixe; *cette droite engendrera un cylindre droit circulaire.*

Car les projections orthogonales des deux coniques, sur un plan perpendiculaire aux arêtes du cylindre, seront deux coniques décrites des mêmes foyers; et la base du cylindre sur ce plan sera le lieu des sommets d'un angle droit mobile dont les côtés toucheront respectivement ces deux coniques : ce qui prouve que cette base sera un cercle.

71. Soient toujours les deux coniques dont l'une est le lieu des foyers de l'autre. Concevons trois plans rectangulaires dont les deux premiers soient tangents à la première conique, et le troisième soit tangent à la seconde conique : nous allons démontrer que le lieu géométrique du point d'intersection de ces trois plans est une sphère ayant même centre que les deux coniques.

En effet, soit m le point d'intersection des trois plans tangents dans une de leurs positions; faisons mouvoir le premier et le troisième, de manière qu'ils soient toujours rectangulaires, qu'ils touchent respectivement les deux coniques, et que leur intersection soit toujours perpendiculaire au deuxième plan; cette droite engendrera un cylindre dont la base sur ce second plan sera un cercle (70), qui passera par le point m et qui appartiendra à la surface cherchée; tout plan normal à ce cercle passera par l'axe du cylindre, et par conséquent par le centre commun des deux coniques.

Si l'on fait mouvoir semblablement le deuxième et le troisième plan, de manière qu'ils touchent respectivement les deux coniques et qu'ils soient perpendiculaires entre eux et perpendiculaires au premier plan, leur intersection engendrera un cylindre dont la base sur ce premier plan sera un cercle qui passera par le point m, et qui sera sur la surface cherchée ; tout plan normal à ce cercle passera par le centre commun des deux coniques. Il suit de là que la normale à la surface cherchée au point m passera par le centre des deux coniques : ce qui prouve que cette surface est une sphère ; donc :

Quand on a deux coniques, dont chacune est le lieu des foyers de l'autre, si l'on fait mouvoir trois plans rectangulaires de manière que deux d'entre eux soient toujours tangents à l'une des deux coniques et que le troisième soit tangent à l'autre, le point d'intersection de ces trois plans engendrera une sphère concentrique aux deux coniques.

72. On sait que les deux coniques peuvent être deux paraboles. Il est facile de voir ce que deviennent dans ce cas les théorèmes précédents. Il suffit de supposer que le centre des deux coniques soit situé à l'infini sur leur axe commun. La sphère du théorème précédent devient un plan perpendiculaire à cet axe, et le cylindre droit circulaire du théorème (70) devient aussi un plan.

Tout cela est, d'ailleurs, facile à démontrer directement par la même voie que nous avons suivie.

73. Nous démontrerons ailleurs que :

Quand deux surfaces du second degré ont leurs sections principales dans les mêmes plans et décrites des mêmes foyers, deux cylindres circonscrits à ces surfaces respectivement, et ayant leurs arêtes parallèles entre elles, ont pour sections, sur un même plan perpendiculaire à ces arêtes, deux coniques décrites des mêmes foyers (1).

De là on conclut aisément, en continuant de suivre la même marche, les deux théorèmes suivants :

Quand deux surfaces du second degré ont leurs sections prin-

(1) Les deux surfaces jouissent de cette propriété plus générale : *De quelque point de l'espace qu'on les considère, leurs contours apparents paraissent se couper à angles droits.*

cipales décrites des mêmes foyers, si l'on mène deux plans rectangulaires qui les touchent respectivement, le plan mené par l'intersection de ces deux plans et par le milieu de la droite qui joint leurs points de contact passe par le centre commun des deux surfaces.

74. *Quand trois surfaces du second degré ont leurs sections principales décrites des mêmes foyers, si l'on mène trois plans rectangulaires tangents à ces surfaces respectivement, leur point d'intersection a pour lieu géométrique une sphère concentrique aux trois surfaces.* (1er août 1829.)

XI [1].

75. J'aurai occasion de donner deux démonstrations purement géométriques du théorème énoncé ci-dessus (note du n° 73), parmi d'autres plus généraux; mais, comme il est facile aussi de le démontrer par l'Analyse, je vais employer cette voie, qui a pour le moment l'avantage de n'exiger aucune proposition préliminaire. On peut même, sans plus de frais, poser la question d'une manière plus générale, et démontrer le théorème suivant :

Quand deux surfaces du second degré sont concentriques et ont un même système de trois droites diamétrales conjuguées, si on leur mène une tangente commune quelconque qui les touche en deux points, les plans tangents en ces points aux deux surfaces respectivement seront toujours parallèles à deux plans diamétraux conjugués *d'une troisième surface du second degré.*

En effet, les trois droites diamétrales conjuguées communes étant prises pour les trois axes des coordonnées, les équations des deux surfaces seront de la forme

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$
$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 = 1.$$

Soient (x', y', z') et (x'', y'', z'') les deux points où la tangente

[1] Invité par M. Hachette à donner la démonstration du théorème énoncé dans la Note relative à l'article (73), j'ai ajouté (2 avril 1830) ce Chapitre XI.

commune touche ces deux surfaces respectivement; les équations des plans tangents en ces points seront

$$\begin{aligned} Ax'x + By'y + Cz'z &= 1, \\ A'x''x + B'y''y + C'z''z &= 1. \end{aligned}$$

Pour que la droite qui joint les deux points de contact soit tangente aux deux surfaces, il faut que chacun de ces plans passe par le point de contact de l'autre plan; on aura donc les deux équations de condition

$$\begin{aligned} Ax'x'' + By'y'' + Cz'z'' &= 1, \\ A'x'x'' + B'y'y'' + C'z'z'' &= 1. \end{aligned}$$

Retranchant l'une de l'autre, on a

$$(A - A')x'x'' + (B - B')y'y'' + (C - C')z'z'' = 0$$

ou

$$AA'\left(\frac{1}{A'} - \frac{1}{A}\right)x'x'' + BB'\left(\frac{1}{B'} - \frac{1}{B}\right)y'y'' + CC'\left(\frac{1}{C'} - \frac{1}{C}\right)z'z'' = 0.$$

Sous cette forme, cette équation prouve que les deux plans tangents sont parallèles à deux plans diamétraux, *conjugués* par rapport à la surface représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{\frac{1}{A'} - \frac{1}{A}} + \frac{y^2}{\frac{1}{B'} - \frac{1}{B}} + \frac{z^2}{\frac{1}{C'} - \frac{1}{C}} = 1.$$

Le théorème est donc démontré.

76. Si les trois axes coordonnés sont rectangulaires, et si l'on a

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{A'} = \frac{1}{B} - \frac{1}{B'} = \frac{1}{C} - \frac{1}{C'};$$

la troisième surface sera une sphère : les plans tangents aux deux proposées seront donc rectangulaires; mais alors ces deux surfaces ont leurs sections principales dans les trois plans coordonnés, et ces courbes, deux à deux, ont les mêmes foyers; il s'ensuit donc que :

Quand deux surfaces du second degré ont les mêmes plans principaux, et que leurs sections par ces plans ont les mêmes *foyers, si on leur mène une tangente commune quelconque, leurs plans tangents aux points où cette tangente les touche seront toujours à angle droit.*

Si la tangente touche les deux surfaces en un même point pris sur leur courbe d'intersection, on en conclut ce théorème déjà démontré par MM. Binet et Ch. Dupin : *Les deux surfaces se coupent partout à angle droit.*

77. Si l'on circonscrit aux deux surfaces deux cônes qui aient pour sommet commun un point quelconque de l'espace, chacune de leurs quatre arêtes d'intersection sera une tangente commune aux deux surfaces; donc les plans tangents aux deux cônes suivant une de ces arêtes seront à angle droit, comme étant aussi tangente aux deux surfaces respectivement; nous pouvons donc dire que :

De quelque point de l'espace qu'on considère les deux surfaces, leurs contours apparents sembleront se couper à angles droits. C. Q. F. D.

Si, au lieu de deux cônes, on circonscrit aux deux surfaces deux cylindres qui aient le même axe, ils se couperont aussi à angles droits; donc leurs sections, par un plan perpendiculaire à leurs arêtes, seront deux coniques concentriques qui se couperont à angles droits, ce qui prouve qu'elles ont les mêmes foyers. C'est la proposition que nous avons admise (73).

78. On peut regarder les deux coniques dont nous avons parlé (68) comme faisant partie de la série des surfaces du second degré dont les sections principales sont décrites des mêmes foyers; par conséquent, les propriétés de ces surfaces appartiennent aux deux coniques; d'où il suit, par exemple, que, *de quelque point qu'on les considère, elles semblent se couper à angles droits;* et que, dans le théorème (74), on peut prendre une de ces coniques, ou toutes les deux, à la place d'une ou de deux des trois surfaces.