BULLETIN DE LA S. M. F.

CARLO MIRANDA

Su alcuni aspetti della teoria delle equazioni ellittiche

Bulletin de la S. M. F., tome 86 (1958), p. 331-354
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1958__86__331_0>

Réunion des Mathématiciens
d'Expression latine (1957, Nice).
Bull. Soc. math. France,
86, 1958, p. 331 à 354.

SU ALCUNI ASPETTI DELLA TEORIA DELLE EQUAZIONI ELLITTICHE;

CONFERENZA DI

CARLO MIRANDA.

Nel corso degli ultimi venti anni la teoria delle equazioni ellittiche ha compiuto dei notevoli progressi, sviluppandosi secondo nuovi indirizzi che differiscono profondamente da quelli classici.

Secondo il punto di vista classico risolvere un problema al contorno significa determinare una o più funzioni incognite che verifichino puntualmente certe equazioni differenziali e certe condizioni al contorno. Secondo l'indirizzo moderno invece si suole sostituire alla considerazione delle equazioni puntuali quella di certe condizioni di carattere globale, espresse di regola sotto forma integrale. Le funzioni che soddisfano tali condizioni sono dette *soluzioni deboli* del problema. La questione di stabilire fino a che punto e sotto quali condizioni tali soluzioni deboli sono anche soluzioni nel senso classico costituisce il cosiddetto problema della *regolarizzazione* delle soluzioni deboli.

Questo indirizzo trae indubbiamente la sua origine dalle ricerche variazionali di COURANT, FRIEDRICHS, SOBOLEV, ma si è sviluppato soprattutto, utilizzando i metodi dell'analisi funzionale lineare, sotto l'influsso di una classica memoria di WEYL, ed ha ricevuto nuovo impulso dalla teoria delle distribuzioni di SCHWARTZ.

Esso ha il suo maggior pregio nella relativa facilità con cui, utilizzando la teoria degli operatori negli spazi hilbertiani, si arriva a dimostrare i teoremi di esistenza o di alternativa per le soluzioni deboli, in ipotesi assai generali sul dominio in cui si vuol determinare la soluzione e sui termini noti delle equazioni e delle condizioni al contorno.

Non è men vero però che questi procedimenti presentano anche degli inconvenienti. Uno di questi è per esempio il fatto che alla grande generalità delle ipotesi relative ai termini noti fa riscontro purtroppo la necessità di introdurre ipotesi piuttosto restrittive sui coefficienti delle equazioni.

Un secondo inconveniente, forse più grave, si riscontra poi nella grande difficoltà che presentano le questioni di regolarizzazione, gran parte delle quali sono tuttora aperte. Avviene sovente, infatti, che sia più facile dimostrare direttamente l'esistenza di una soluzione nel senso classico di un dato problema piuttosto che dedurla dalla regolarizzazione di una soluzione debole.

Di più le soluzioni deboli che si studiano con i metodi moderni sono, in generale, funzioni a integrale di Dirichlet finito, laddove è ben noto, secondo una famosa osservazione di HADAMARD, che le soluzioni in senso classico dei problemi al contorno non hanno necessariamente tale proprietà.

Vengo ora allo scopo di questa mia conferenza che è quello di esporre in sintesi i contributi apportati a questa teoria dalla Scuola Italiana durante gli ultimi dieci o quindici anni.

Dirò subito che queste ricerche si sono sviluppate in Italia secondo un indirizzo autonomo e indipendente da quello della produzione scientifica di altri paesi. Queste ricerche infatti iniziate subito dopo la guerra, in un periodo in cui le possibilità di informazione bibliografica erano assai limitate, sono state poco o nulla influenzate dai lavori di COURANT, FRIEDRICHS, SOBOLEV e WEYL, mentre costituiscono invece, almeno in parte, la naturale continuazione di alcune memorie di PICONE, CACCIOPPOLI e CIMMINO, publicate fra il 1934 e il 1940, memorie che, pur essendo rimaste poco note fuori d'Italia, segnano non pertanto una tappa importante nello sviluppo della teoria delle equazioni ellittiche.

È davvero singolare che, malgrado questa sua particolare origine, l'attività scientifica italiana in questo campo abbia progredito su binari paralleli a quelli seguiti in altri paesi. Analoghi infatti sono i metodi di analisi funzionale adoperati, mentre il cosiddetto *lemma di* WEYL si trova già utilizzato in alcuni lavori di CACCIOPPOLI e CIMMINO, di qualche anno anteriori alla memoria di WEYL.

Questo parallelismo di indirizzi è però solo parziale perchè notevoli differenze si riscontrano sovente nel modo di impostare i vari problemi. E ciò ha fatto si che i risultati da noi ottenuti siano spesso complementari di quelli ottenuti in altri paesi.

Una caratteristica delle nostre ricerche è per esempio quella di rivolgersi allo studio di problemi generalizzati, non molto discosti dai problemi classici. E gli stessi problemi classici sono stati oggetto di nuove interessanti ricerche. Scarse invece le ricerche dedicate esclusivamente allo studio delle soluzioni deboli. Da rilevare anche il fatto che particolari modalità nell'applicazione dei metodi dell'analisi funzionale lineare hanno permesso lo studio di problemi la cui soluzione non ha necessariamente integrale di Dirichlet finito.

Accanto alle ricerche basate sui metodi dell'analisi funzionale lineare sono poi da ricordare quelle di carattare variazionale, in parte ispirate dai metodi del TONELLI.

E in un altro importante gruppo di ricerche ci si è valsi di quei procedimenti, basati sulla maggiorazione *a priori* delle soluzioni, che traggono la loro lontana origine dalle celebri memorie di S. BERNSTEIN e che, venticinque o trenta anni fà, ricevettero nuovo impulso dai lavori di SCHAUDER, LERAY e CACCIOPPOLI.

Non mancano infine alcune ricerche basate sul metodo classico della traduzione dei problemi al contorno in equazioni integrali.

Esporre in dettaglio, nel corso di una sola conferenza, tutto quanto si è fatto in Italia, nell'ultimo decennio, nell'ambito della teoria delle equazioni ellittiche, sarebbe del tutto impossibile, trattandosi di riferire su oltre cento lavori.

Mi limiterò a parlare, perciò, dei risultati ottenuti nello studio del cosiddetto *problema misto*. E poichè tutti o quasi i metodi di cui ho discorso in generale sono stati applicati allo studio di questo problema, spero di riuscire in tal modo a dare un'idea abbastanza chiara degli indirizzi di ricerca seguiti in Italia.

Per quanto riguarda invece tutti i problemi di altro tipo mi limiterò a qualche citazione bibliografica, che si estenderà però anche ai lavori concernenti le equazioni paraboliche in vista del fatto che la maggior parte dei metodi indicati hanno trovato larghe applicazioni anche nello studio di queste ultime equazioni.

*
* *

Consideriamo l'equazione ellittica in m variabili

$$\mathfrak{M}u = \sum_{i,k}^{1\ldots m} a_{ik}p_{ik} + \sum_{i}^{1\ldots m} b_i p_i + cu = f \tag{1}$$

e supponiamo che i coefficienti a_{ik}, b_i c siano definiti in un insieme aperto C e ivi rispettivamente di classe $C^{(2,\lambda)}$, $C^{(1,\lambda)}$, $C^{(0,\lambda)}$ (1).

Sia D un *dominio regolare* (2) contenuto in C la cui frontiera $\mathcal{F}D$ sia la somma di due insiemi privi di punti comuni $\mathcal{F}_1 D$ e $\mathcal{F}_2 D$ il primo aperto su $\mathcal{F}D$, il secondo chiuso. Supponiamo anche che la frontiera comune di $\mathcal{F}_1 D$ ed $\mathcal{F}_2 D$ su $\mathcal{F}D$ sia una varietà *regolare* a $m-2$ dimensioni, che indicheremo con V.

(1) Una funzione si dirà di classe $C^{(n)}$ se dotata di derivate n-esime continue, di classe $C^{(n,\lambda)}$ se dotata di derivate n-esime hölderiane con esponente λ.

(2) Secondo l'uso italiano per *dominio* si intende l'involucro (o chiusura) di un insieme aperto. Per il significato dell'aggettivo *regolare*, che potrà variare da caso a caso, rimandiamo alle memorie dei vari autori.

Se α et β sono due funzioni definite rispettivamente su $\mathcal{F}_1 D$ e $\mathcal{F}_2 D$ dicesi *problema misto* il problema al contorno che consiste nel ricercare una soluzione della (1) che verifichi le condizioni al contorno

$$u = \alpha \quad \text{su } \mathcal{F}_1 D, \qquad \frac{du}{d\nu} = \beta \quad \text{su } \mathcal{F}_2 D, \tag{2}$$

ν designando l'asse *conormale* alla frontiera di D, rivolto verso l'interno di D e $du/d\nu$ designando per convenzione l'operatore

$$\frac{du}{d\nu} = \sum_{i,k}^{1\ldots m} a_{ik} X_i p_k,$$

dove X_i sono i coseni direttori della normale interna a $\mathcal{F} D$.

Se la varietà V è vuota il problema misto non presenta difficoltà diverse da quelle dei problemi di Dirichlet e Neumann ed è stato ampiamente trattato da G. Giraud ([3]). Nel seguito pertanto noi supporremo sempre che V sia non vuota. Un problema di questo tipo, relativo all'equazione di Laplace in due variabili, era stato considerato fin dal 1882 da Vito Volterra. E per quanto riguarda l'equazione di Laplace la letteratura in proposito è ricca di nomi anche celebri, Rimandando per le relative indicazioni bibliografiche alle memorie [3] e [7] di E. Magenes, ricorderemo soltanto che, per quanto riguarda invece il caso di un'equazione ellittica generale, l'unico risultato importante, contenuto nella letteratura meno recente, si deve ancora a G. Giraud ([4]).

Nel 1933 infatti il Giraud riusci a dimostrare che per il problema misto inteso *nel senso classico* ([5]) vale il teorema dell'alternativa di Fredholm, anche quando la varietà V non è vuota.

Il metodo adoperato dal Giraud, che consisteva nel trasformare il problema misto in un problema di Neumann considerato su di una conveniente varietà riemanniana e nel tradurre quest'ultimo problema in un sistema di equazioni integrali, conduceva inevitabilmente a imporre delle ipotesi assai restrittive sia alla varietà V che ai dati al contorno α e β. Più precisamente il Giraud aveva bisogno di supporre che lungo la varietà V l'ipersuperficie $\mathcal{F}_1 D$ risultasse *trasversale* a $\mathcal{F}_2 D$, che cioè la normale a $\mathcal{F}_1 D$ risultasse ortogonale alla conormale a $\mathcal{F}_2 D$. Di più α, β e le loro derivate dovevano verificare lungo V certe condizioni di raccordo.

([3]) *Vedi* G. Giraud, *Sur certains problèmes non linéaires de Neumann et sur certains problèmes non linéaires mixtes* (*Ann. scient. Éc. Normale Sup.*, t. 49, 1932, p. 1-105 e 245-308).

([4]) *Vedi* G. Giraud, *Problèmes mixtes et problèmes sur des variétés closes, relativement aux équations linéaires du type elliptique* (*Ann. Soc. Polon. Math.*, t. 12, 1933, p. 35-54).

([5]) Il significato esatto di questa locuzione sarà precisato più avanti.

Lo studio di questo problema meritava perciò di essere ripreso con altri metodi allo scopo di ottenere un risultato del tutto generale.

* * *

Un primo contributo alla questione fu portato nel 1949 da G. FICHERA [7]. Questi si pone nelle seguenti condizioni : l'operatore $\mathfrak{M}$ è supposto autoaggiunto, la funzione c negativa (o anche non positiva), le funzioni α ed f nulle, la β di quadrato sommabile su $\mathcal{F}_2 D$. Le equazioni del problema si scrivono perci` :

$$\mathfrak{M} u = 0 \quad \text{in } D - \mathcal{F} D, \tag{3}$$

$$u = 0 \quad \text{su } \mathcal{F}_1 D, \tag{4}$$

$$\frac{du}{d\nu} = \beta \quad \text{su } \mathcal{F}_2 D \tag{5}$$

e la soluzione viene ricercata nella classe Γ delle funzioni u che godono delle seguenti proprietà :

a. u è continua in $D - \mathcal{F}_2 D$, ammette derivate prime e seconde continue in $D - \mathcal{F} D$ e verifica le (3) e (4) ;

b. per x_0 quasi ovunque su $\mathcal{F}_2 D$ esistono i limiti :

$$\lim_{x \to x_0 (\text{su } \nu_x)} u(x) = \mu(x_0), \tag{6}$$

$$\lim_{x \to x_0 (\text{su } \nu_{x_0})} \frac{du}{d\nu} = \beta(x_0), \tag{7}$$

le funzioni μ e β risultando di quadrato sommabile su $\mathcal{F}_2 D$;

c. detto D' un dominio regolare contenuto in C e contenente D, tale che sia $\mathcal{F} D' \cap \mathcal{F} D = \mathcal{F}_1 D$ valgono per u le formule di Green :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x) = \displaystyle\int_{\mathcal{F}_2 D} \left[\mu(y) \frac{dG(x, y)}{d\nu_y} - \beta(y)\, G(x, y) \right] d_y \sigma \\ \qquad\qquad\qquad \text{per} \quad x \in D - \mathcal{F} D, \end{array} \right. \tag{8}$$

$$0 = \int_{\mathcal{F}_2 D} \left[\mu(y) \frac{dG(x,y)}{d\nu_y} - \beta(y)\, G(x, y) \right] d_y \sigma \qquad \text{per} \quad x \in D' - D, \tag{9}$$

avendo designato con $G(x, y)$ la funzione di Green dell'operatore $\mathfrak{M}$ relativa al dominio D'. Fondamentale ai fini della trattazione del Fichera è il seguente *teorema d'inversione della formula di Green :*

Se μ e β sono due funzioni di quadrato integrabile su $\mathcal{F}_2 D$, per le quali si verifica la (9), *la funzione u definita dalla* (8) *appartiene alla classe* Γ.

Segue da tale teorema che per risolvere nella classe Γ il problema misto (3), (4), (5), basta risolvere l'equazione integrale di prima specie (9), considerando in tale equazione la β come una funzione nota e la μ come incognita.

A tale scopo si consideri un sistema di funzioni $\{\varphi_k(x)\}$ hilbertianamente completo in $D'-D$ e, per $x \in D$, si ponga

$$v^{(k)}(x) = \int_{D'-D} G(x, y)\, \varphi_k(y)\, dy.$$

La (9) è allora equivalente al sistema di equazioni di Fischer-Riesz :

$$\int_{\mathcal{F}_2 D} \mu \frac{dv^{(k)}}{d\nu}\, d\sigma = \int_{\mathcal{F}_2 D} \beta\, v^{(k)}\, d\sigma. \tag{10}$$

Per risolvere il sistema (10) si osservi che é sempre possibile scegliere le φ_k in modo che il sistema della $v^{(k)}$ risulti ortogonale e normale in D rispetto al prodotto scalare

$$(v^{(h)}, v^{(k)}) = \int_D \left[\sum_{i,j}^{1\ldots m} a_{ij} \frac{\partial v^{(h)}}{\partial x_i} \frac{\partial v^{(k)}}{\partial x_j} - c v^{(h)} v^{(k)} \right] dx.$$

Poichè si può dimostrare che la serie

$$\sum_h^{1\ldots\infty} \left(\int_{\mathcal{F}_2 D} \beta\, v^{(h)}\, d\sigma \right)^2$$

è convergente, ne segue che la serie

$$-\sum_k^{1\ldots\infty} v^{(k)}(x) \int_{\mathcal{F}_2 D} \beta\, v^{(k)}\, d\sigma$$

converge in media in D verso una funzione $u(x)$ di quadrato sommabile in D insieme con le sue derivate prime, per la quale si ha :

$$(u, v^{(k)}) = -\int_{\mathcal{F}_2 D} \beta\, v^{(k)}\, \partial\sigma.$$

Si prova poi che $u(x)$ è una soluzione della (3) di classe $C^{(2)}$ in $D - \mathcal{F}D$, per la quale il limite (6) esiste quasi ovunque su $\mathcal{F}D$, la funzione μ risultando quasi ovunque nulla su $\mathcal{F}_1 D$ e di quadrato sommabile su $\mathcal{F}_2 D$. Dalla formula di Green, la cui applicazione può essere opportunamente giustificata si trae allora :

$$(u, v^{(k)}) = -\int_{\mathcal{F}_2 D} \mu \frac{dv^{(k)}}{d\nu}\, d\sigma.$$

E tale formula, insieme con la precedente, prova che μ è soluzione delle (10).

Questo risultato del FICHERA va inquadrato in un vasto gruppo di ricerche a cui hanno collaborato numerosi autori. In ordine di tempo : M. PICONE [1, 2, 3, 4, 5], L. AMERIO [1, 2, 4, 5, 6], G. FICHERA [1, ..., 4; 6, ..., 10], A. GHIZZETTI [1, 2, 3, 4], M. PICONE e G. FICHERA [1], R. B. ANCORA [1], S. ALBERTONI [1, 2], E. MAGENES [5], G. PRODI [5], S. CAMPANATO [1, 2], D. GRECO [5], B. PETTINEO [1, 2, 3],

All'origine di queste ricerche stanno alcuni lavori di M. PICONE [1, 2] nei quali questo Autore, nel periodo che va dal 1934 al 1940, proponeva lo studio di certi metodi di calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno, consistenti nel tradurre tali problemi, a mezzo della formula di Green, in sistemi equivalenti di equazioni di FISCHER-RIESZ. La questione proposta da PICONE fu studiata in modo esauriente da AMERIO [4], il quale fu il primo a studiare classi funzionali del tipo della Γ, a dimostrare un teorema di inversione della formula di Green dello stesso genere di quello utilizzato poi da FICHERA e a servisi di sistemi di funzioni del tipo delle $v^{(k)}$.

Spetta invece a FICHERA il merito di aver mostrato che gli strumenti analitici adoperati da AMERIO per lo studio del metodo di calcolo di PICONE potevano, se opportunamente integrati da altre considerazioni, rendere utilissimi servigi anche in ricerche di carattere esistenziale.

Non è qui possibile elencare tutti i risultati ottenuti in questo ordine di idee sia dal punto di vista dell'esistenza che del calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno. Mi limiterò perciò a ricordare che il procedimento adoperato da FICHERA per lo studio del problema misto è stato da lui esteso allo studio di analoghi problemi relativi a certi sistemi di equazioni del secondo ordine. Tra l'altro egli è anche riuscito, credo per la prima volta, a dimostrare un teorema di esistenza per il problema misto relativo all'equilibrio di un corpo elastico, consistente nell'assegnare su una porzione della frontiera gli spostamenti e sulla rimanente parte gli sforzi.

Questi stessi procedimenti sono poi stati applicati da L. AMERIO [3] e da E. MAGENES [1, 2] allo studio dei problemi al contorno per l'equazione del calore.

*
* *

Ritornando per il momento alla considerazione del problema misto studiato da FICHERA aggiungeremo alcune osservazioni.

Innanzitutto rileviamo che la soluzione del problema misto trovata da FICHERA è ad integrale di Dirichlet finito, e che anzi per essa vale la formula

$$\int_D \left[\sum_{i,k}^{1\dots m} a_{ik} p_i p_k - c u^2 \right] dx = - \int_{\mathcal{F}_2 D} \mu \beta \, d\sigma. \tag{11}$$

La stessa formula vale anche per ogni funzione della classe Γ che abbia integrale di Dirichlet finito. Ciò prova che nella classe Γ il problema misto ammette un'unica soluzione ad integrale di Dirichlet finito.

Tutto quanto si è fin qui detto circa il problema misto mostra poi che i ragionamenti adoperati sono molto affini a quelli di cui ci si serve nelle applicazioni del metodo delle proiezioni ortogonali. Rimandando ad una conferenza di E. MAGENES [10] per un più approfondito confronto fra i due metodi, osserveremo soltanto che nel lavoro di FICHERA l'impostazione del problema è tale che la dimostrazione dell'esistenza di una soluzione debole e la sua successiva regolarizzazione risultano fuse in un unico procedimento. Con ciò si perde forse il vantaggio di affrontare in tempi successivi le difficoltà inerenti alle due diverse questioni, ma si riesce però ad approfondire meglio, e più rapidamente, il senso in cui va inteso il verificarsi delle condizioni al contorno.

Un altro fatto da rilevare è che questi metodi, al pari di quelli di proiezione ortogonale, si prestano assai bene a mettere in luce le proprietà di minimo delle soluzioni dei problemi al contorno. A questo proposito ricorderemo la nota [11] di G. FICHERA in cui si dà un'elegante dimostrazione di un teorema di esistenza per il problema di Lauricella relativo all'equazione $\Delta_4 u = 0$, provando anche una proprietà di minimo di questa soluzione. In questa nota, che si ricollega ad un'altra [5] del FICHERA sullo stesso argomento, il metodo seguito nello studio del problema misto viene rielaborato e semplificato con modalità che sono poi state applicate da diversi altri autori [6] per lo studio di vari problemi.

*
* *

Vogliamo ora accennare ad alcuni risultati ottenuti da G. STAMPACCGIA [2, 4, 5, 6] mediante l'uso dei metodi diretti del calcolo delle variazioni. Il procedimento seguito da Stampacchia ha un notevole interesse, soprattuto perchè esso si presta anche allo studio di problemi al contorno relativi ad equazioni e condizioni ai limiti non lineari anche di ordine superiore. Fra l'altro egli ha ritrovato il risultato di FICHERA relativo al problema misto, estendendolo al caso di un'equazione non lineare. Noi però per semplicità ci limiteremo ad esporre il procedimento seguito da STAMPACCHIA [4, 5] nel caso del problema misto per una equazione lineare autoaggiunta.

Si consideri la classe A_2 delle funzioni $u(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ definite in D che sono assolutamente continue rispetto ad ogni variabile x_i per quasi tutte le $(m-1)$-uple $(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)$ e che hanno derivate prime di quadrato sommabile in D. Ogni funzione di A_2 ammette su $\mathcal{F}D$ una *traccia*, nel senso che, per quasi tutti i punti di $\mathcal{F}D$, essa ammette limite lungo la normale e tale limite è *una funzione* di quadrato sommabile su $\mathcal{F}D$ [7].

---

[6] *Vedi* T. VIOLA [1], B. PINI [7], M. L. PRINCIVALLI [1, 2] e ancora il n° 7 della memoria [16] di FICHERA.

[7] Limitatamente al caso delle funzioni di A_2 che sono anche di classe $C^{(2)}$ in $D - \mathcal{F}D$, questo teorema era stato precedentemente dimostrato da FICHERA [8].

Si consideri allora il problema di minimizzare il funzionale

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_D \left[\sum_{i,k}^{1\ldots m} u_i p_i p_k - c u^2 \right] dx + \int_{\mathcal{F}_2 D} u \beta \, d\sigma$$

nella sottoclasse $\overline{A}_2$ delle funzioni di A_2 che hanno traccia nulla su $\mathcal{F}_1 D$. Data una successione $\{u_k\}$ di funzioni di $\overline{A}_2$, si dirà che essa è μ_{n-1}-quasi uniformemente convergente in D se, per ogni ε, è possibile costruire un insieme I_ε, avente proiezioni sugli iperpiani coordinati di misura minore di ε, tale che in $D - I_\varepsilon$ la $\{u_k\}$ converga uniformemente. Ora rispetto a questo tipo di convergenza il funzionale $\mathcal{J}(u)$ è semicontinuo inferiormente ed ogni successione minimizzante $\mathcal{J}(u)$ in $\overline{A}_2$ è compatta, le sue funzioni limiti appartenendo ancora ad $\overline{A}_2$. Il funzionale $\mathcal{J}(u)$ ammette pertanto un minimo in $\overline{A}_2$. Si dimostra poi che la funzione minimizzante è unica ed appartiene alla classe Γ; essa è perciò soluzione del problema misto.

Un'interessante conseguenza di questo risultato di STAMPACCHIA è l'osservazione che, agli effetti della validità del teorema di unicità per il problema misto, la condizione c della definizione della classe Γ può essere sostituita dall'altra che la funzione u renda minimo il funzionale $\mathcal{J}(u)$.

In classi più estese invece il teorema di unicità può mancare. Come risulta da un esempio di E. DE GIORGI [1] ciò avviene, per esempio, se alla u, invece di richiedere di rendere minimo il funzionale $\mathcal{J}(u)$, si richiede soltanto di avere integrale di Dirichlet finito (8).

Aggiungiamo ancora che questo metodo è applicabile anche nel caso $\alpha \neq 0$, E modificando l'espressione di $\mathcal{J}(u)$ anche nel caso $f \neq 0$. Bisogna però, in questi casi più generali, supporre che esista almeno una funzione di A_2 che abbia traccia eguale ad α su $\mathcal{F}_1 D$. Ad una limitazione analoga andrebbe soggetto il metodo di Fichera ove lo si volesse estendere al caso $\alpha \neq 0$.

* * *

Passiamo ora ad esaminare un terzo gruppo di ricerche condotte con un metodo che permette anche di considerare soluzioni ad integrale di Dirichlet non finito e che si applica anche ad equazioni non autoaggiunte (9).

Tali ricerche traggono la loro origine da una nota [1], di R. CACCIOPPOLI del 1934, rielaborata poi [2], nel 1937 concernente i teoremi di esistenza di Riemann su di una superficie chiusa. In queste note il CACCIOPPOLI mostrava come si potesse arrivare assai agevolmente alla dimostrazione di questi

(8) In proposito *vedi* anche L. MYRBERG, *Ueber die vermischte Randwertaufgabe der harmonischen funktionen* (*Ann. Acad. scient. Fennicæ* Series A, I. *Math. Phys.*, 1951, n° 103).

(9) Per un confronto fra questo metodo e quello basato sulle formule di Green vedi G. FICHERA [12]; per una formulazione generale del metodo vedi G. CIMMINO [4].

teoremi applicando opportunamente il teorema di Hahn-Banach sul prolungamento dei funzionali lineari e servendosi poi di quel lemma che è oggi noto sotto il nome di lemma di Weyl. Altre applicazioni di questo metodo, sempre a problemi considerati su di una superficie chiusa, si devono a G. CIMMINO [1] per quanto riguarda le equazioni ellittiche generali, a G. ZWIRNER [1] per certe equazioni del quarto ordine, a B. PINI [5, 10] per le equazioni di ordine superiore e per i sistemi di equazioni del secondo ordine, a G. FICHERA [17] per le forme differenziali armoniche.

Succesivamente ai lavori di CACCIOPPOLI, e precisamente nel 1938, G. CIMMINO [2] mostrò come il procedimento di CACCIOPPOLI permettesse di studiare anche i problemi relativi a domini dotati di frontiera, a condizione di considerare le condizioni al contorno in un senso opportunamente generalizzato. Questo modo di considerare le condizioni al contorno è affine a quello introdotto da SOBOLEV nella sua memoria sulle funzioni poliarmoniche, che precede di poco il lavoro di CIMMINO ([10]). La trattazione di CIMMINO consente però, a differenza di quella di SOBOLEV, di pervenire al teorema di esistenza anche quando la soluzione non ha integrale di Dirichlet finito.

Illustreremo questo metodo riassumendo l'applicazione fattane da E. MAGENES [3, 7, 8] al problema misto, limitandoci per semplicità al caso di due variabili.

Supposte di quadrato sommabile le funzioni (f, α, β) e la prima anche hölderiana in ogni dominio interno a D, diremo che u è una soluzione di classe Ω del problema misto (1), (2), se u gode delle seguenti proprietà :

A. u è continua con le sue derivate prime e seconde in $D - \mathcal{F} D$ e soddisfa la (1);

B. Detto $\{\gamma_r\}$ un sistema di curve regolari contenute in D, con gli estremi su $\mathcal{F}_2 D$ ed ivi trasversali a $\mathcal{F}_2 D$, e convergenti a $\mathcal{F}_1 D$ per $r \to 0$, riferite sia $\mathcal{F}_1 D$ che γ_r ad uno stesso parametro $t (t_1 \leqq t \leqq t_2)$, si abbia :

$$\lim_{r \to 0} \int_{t_1}^{t_2} [u|_{\gamma_2} - \alpha]^2 \, dt = 0.$$

C. Preso un qualunque sottoarco proprio τ di $\mathcal{F}_2 D$ e considerato il sistema $\{\tau_r\}$ delle curve ad esso parallele, si abbia :

$$\lim_{r \to 0} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{du}{d\nu} \Big|_{\tau_r} - \beta \right]^2 dt = 0.$$

Ciò premesso vediamo come si perviene al teorema di esistenza nell'ipotesi che, sia per il problema dato che per il suo aggiunto, valga il teorema di unicità. Consideriamo lo spazio hilbertiano Σ che ha come elemento la terna

([10]) Su questo modo di considerare le condizioni al contorno nel caso del problema di Dirichlet vedi anche E. MAGENES [4] e B. PINI [12].

(f, α, β), di cui si sia definita la norma ponendo :

$$\|(f, \alpha, \beta)\| = \int_D f^2\,dx + \int_{\mathcal{F}_1 D} \alpha^2\,ds + \int_{\mathcal{F}_2 D} \beta^2\,ds$$

e sia Σ_1 la varietà lineare di Σ costituita dalle terne $\left(\mathfrak{M}u, u\Big|_{\mathcal{F}_1 D}, \frac{du}{d\nu}\Big|_{\mathcal{F}_2 D}\right)$ al variare di u nell'insieme delle funzioni di classe $C^{(2)}$ in D. Dico che l'involucro $\overline{\Sigma}_1$ di Σ_1 coincide con Σ :

(12) $$\overline{\Sigma}_1 \equiv \Sigma.$$

Invero, se la (12) non fosse verificata esisterebbe, per il teorema di Hahn-Banach, un funzionale lineare nullo in Σ_1 e non identicamente nullo in Σ; esisterebbe cioè un elemento (v, φ, ψ) di Σ tale da risultare :

$$\int_D v\,\mathfrak{M}u\,dx + \int_{\mathcal{F}_1 D} \varphi\,u\,ds + \int_{\mathcal{F}_2 D} \psi \frac{du}{d\nu}\,ds = 0$$

qualunque sia la funzione u di classe $C^{(2)}$ in D. Il lemma di Weyl e ragionamenti analoghi ([11]) permetterebbero allora di concludere che v è una soluzione del problema aggiunto omogeneo e che :

$$\varphi = -\frac{dv}{d\nu} + bv, \qquad \psi = v$$

con :

$$b = \sum_i^{1\ldots m}\left(b_i - \sum_k^{1\ldots m}\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}\right)X_i.$$

Avendo presupposto che per il problema aggiunto valga il teorema di unicità si ha $v = 0$ e quindi anche $\varphi = 0$, $\psi = 0$, da cui la (12). Dalla (12) segue che ad ogni terna (f, α, β) si può associare almeno una successione $\{u_n\}$ di funzioni di classe $C^{(2)}$ in D, tale da risultare :

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_D [\mathfrak{M}u_n - f]^2\,dx + \int_{\mathcal{F}_1 D}[u_n - \alpha]^2\,ds + \int_{\mathcal{F}_2 D}\left[\frac{du_n}{d\nu} - \beta\right]^2 ds\right\} = 0.$$

Ora un teorema di compattezza stabilito da Magenes prova che, se gli integrali

(13) $$\int_D u_n^2\,dx$$

sono equilimitati, dalla successione $\{u_n\}$ se ne può estrarre un'altra che

([11]) Si potrebbe ricorrere, per esempio, ai risultati ottenuti da L. AMERIO [4] come conseguenza del suo teorema di inversione della formula di Green.

converge in media verso una funzione u soluzione di classe Ω del problema misto. Il caso che gli integrali (13) non siano equilimitati si esclude perchè applicando lo stesso teorema di compattezza alla successione

$$\left\{ u_n \left[\int_D u_n^2 dx \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}$$

si perverrebbe, contro l'ipotesi, a costruire una soluzione non nulla del problema omogeneo,

Nel caso che non si presupponga valido il teorema di unicità per il problema dato e per il suo aggiunto, lo stesso procedimento conduce a dimostrare il teorema dell' alternativa. In particolare se è $c < 0$ vale un teorema di unicità e perciò, di conseguenza, anche il teorema di esistenza.

Il metodo infine è ancora valido se la condizione su $\mathcal{F}_2 D$ si scrive più generalmente nella forma

$$\frac{du}{dl} + \gamma u = \beta,$$

essendo γ una funzione continua ed l un arbitrario asse non tangente a $\mathcal{F}_2 D$. Aggiungeremo ancora che dal verificarsi delle condizioni al contorno nel senso precisato dalle B e C segue che le stesse condizioni al contorno sono soddisfatte anche puntualmente quasi ovunque su $\mathcal{F} D$. Come già si è osservato a proposito dei problemi studiati da FICHERA e STAMPACCHIA, anche qui non è però vero il viceversa. Non è lecito cioè nella definizione di Ω di sostituire alle proprietà di convergenza in media espresse dalle B e C la sola proprietà di convergenza quasi ovunque. È presumibile, invero, che ciò possa farsi solo imponendo all'insieme eccezionale, in cui tale convergenza non ha luogo, la proprietà di avere non solo misura nulla ma anche capacità nulla. In proposito però si hanno solo risultati parziali e relativi ad equazioni particolari ([12]).

Ricorderemo infine che un procedimento di questo genere è stato applicato da MAGENES [8] anche allo studio del problema misto per l'equazione del calore in m variabili, problema questo per il quale non esistono trattazioni anteriori a quella di MAGENES. Altri risultati assai interessanti relativi ad equazioni sia ellittiche che paraboliche ed anche a equazioni di ordine superiore e a sistemi di equazioni si devono a B. PINI [**1**, **3**, **4**, **5**, **8**, **9**, **10**, **12**, **13**, **14**, **16**, **17**].

*
* *

Passiamo ora a far vedere come questi procedimenti si prestino assai bene anche per la dimostrazione dei teoremi di esistenza nel senso classico.

([12]) *Vedi* E. MAGENES [8]. Alla stessa nota rimandiamo anche per diverse possibili definizioni della classe Ω.

A questo proposito mi sia permesso di rilevare che credo di essere stato il primo a mettere in luce questa possibilità del metodo, dando, in questo ordine di idee, una dimostrazione molto semplice dei teoremi di esistenza per il problema di Dirichlet relativo all'equazione di Laplace [1, 2] e per il problema di Lauricella relativo alle funzioni biarmoniche [3] ([13]).

Qui esporrò in sintesi il procedimento con cui G. FICHERA [16] è pervenuto alla dimostrazione di un teorema di esistenza per il problema misto inteso nel senso classico. Questo risultato del FICHERA può invero, per certi aspetti, ricollegarsi all'indirizzo di ricerche di cui stiamo parlando.

Precisiamo intanto che per *problema misto nel senso classico* deve intendersi la ricerca di una funzione u continua in D, per la quale le (1) e (2) risultano puntualmente verificate ovunque, la seconda delle (2) nel senso che esiste ovunque su $\mathcal{F}_2 D - V$ il limite di $\frac{du}{d\nu}$ lungo la conormale ed è uguale a β. Se si suppone la f hölderiana in D e le α e β continue rispettivamente su $\mathcal{F}_1 D$ e su $\mathcal{F}_2 D$, non si lede la generalità supponendo $f = 0$, $\beta = 0$. Noi faremo appunto tale ipotesi sotto la quale potremo richiedere alla u di essere di classe $C^{(1)}$ in $D - (\mathcal{F}_1 D + V)$. Supporremo di più che sia $c \leqq 0$.

In tali ipotesi sia per il problema misto che per il suo aggiunto :

$$(14) \qquad \begin{cases} \mathfrak{N} v = 0 & \text{in } D - \mathcal{F} D \\ v = \alpha^{\star} & \text{su } \mathcal{F}_1 D, \\ \dfrac{dv}{d\nu} - bv = 0 & \text{su } \mathcal{F}_2 D, \end{cases}$$

sussiste il teorema di unicità, in conseguenza del fatto che per le eventuali soluzioni di questi problemi valgono le formule di maggiorazione :

$$(15) \qquad \max_{D} |u| = \max_{\mathcal{F}_1 D + V} |\alpha|,$$

$$(16) \qquad \max_{D} |v| \leqq K \max_{\mathcal{F}_1 D + V} |\alpha^{\star}| \quad (^{14}).$$

Se ora indichiamo con Σ lo spazio di Banach delle funzioni continue su $\mathcal{F}_1 D + V$ e con Σ_1 l'insieme delle funzioni α di Σ per le quali il problema misto è risolubile, si pu` facilmente provare che, in conseguenza della (15), Σ_1 è una varietà lineare chiusa di Σ. Parimenti chiusa risulta la varietà lineare $\Sigma_1^{\star}$ delle funzioni $\alpha^{\star}$ per cui è risolubile il problema aggiunto.

Per dimostrare il teorema di esistenza per il problema misto dobbiamo

---

([13]) Per un'applicazione all'equazione del calore vedi C. CILIBERTO [1] e per il problema di Dirichlet relativo a un' equazione ellittica generale : B. PINI [2].

([14]) La prima di tali formule segue immediatamente da note proprietà delle soluzioni delle equazioni ellitiche; la seconda potrebbe essere facilmente dimostrata, per un conveniente valore di K, servendosi di un teorema di M. PICONE ([1], p. 705).

ora provare che

$$\Sigma_1 \equiv \Sigma. \tag{17}$$

E per questo, in forza del teorema di Hahn-Banach, basterà far vedere che è nulla ogni funzione completamente additiva d'insieme μ, definita sui boreliani di $\mathcal{F}_1 D + V$ tale da risultare

$$\int_{\mathcal{F}_1 D+V} \alpha \, d\mu = 0$$

per ogni $\alpha \in \Sigma_1$.

A tale scopo consideriamo un dominio T contenuto in C, contenente D, e tale che sia $\mathcal{F} D \cap \mathcal{F} T = \mathcal{F}_2 D$. Supponiamo anche che da ogni punto di V esca un segmento contenuto in $T - D$ e non tangente a $\mathcal{F}_1$ D. Detta $N(x, y)$ la funzione di Neumann relativa all'operatore $\mathfrak{M}$ e al dominio T, si ha che per ogni $y \in T - D$ la $N(x, y)$ considerata al variare di x su $\mathcal{F}_1 D$ appartiene a Σ_1, da cui :

$$\int_{\mathcal{F}_1 D+V} N(x, y) \, d_x\mu = 0. \tag{18}$$

La (18) varrà poi per continuità anche per $y \in \mathcal{F}_1 D$ ed è intuitivo che, se si fa vedere che essa sussiste anche per $y \in D - \mathcal{F}_1 D$, gli ordinari procedimenti della teoria del potenziale permetteranno di concludere, come volevasi, che $\mu = 0$.

Fissata ora una funzione φ continua in D l'integrale

$$\int_D \varphi v \, dx$$

considerato al variare di v nella classe delle soluzioni del problema aggiunto, risulta, per la (16), un funzionale $F(\alpha^*)$ lineare e continuo per $\alpha^* \in \Sigma_1^*$. Per il teorema di Hahn-Banach e per il teorema di Riesz esiste dunque una funzione completamente additiva $\psi = \mathcal{C}(\varphi)$, definita sui boreliani di $\mathcal{F}_1 D + V$, tale da risultare per ogni $\alpha^* \in \Sigma_1^*$:

$$F(\alpha^*) = \int_D \varphi v \, dx = \int_{\mathcal{F}_1 D+V} \alpha^* \, d\psi. \tag{19}$$

In particolare, per la proprietà della funzione di Neumann di essere come funzione di y soluzione dell'equazione aggiunta, segue dalla (19), per, $x \in T - D$:

$$\int_D N(x, y) \, \varphi(y) \, dy = \int_{\mathcal{F}_1 D+V} N(x, y) \, d_x\psi. \tag{20}$$

Supposta ora hölderiana in D la funzione φ, si può dimostrare che ψ è assolutamente continua. Per continuità ne segue allora che la (20) è valida anche per $x \in \mathcal{F}_1 D + V$ e dalla validità della (18) per $y \in \mathcal{F}_1 D$ si trae :

$$\int_D \varphi(y)\, dy \int_{\mathcal{F}_1 D + V} N(x, y)\, d_x \mu = \int_{\mathcal{F}_1 D + V} d_y \psi \int_{\mathcal{F}_1 D + V} N(x, y)\, d_x \mu = 0.$$

Di qui per l'arbitrarietà di φ si conclude che la (18) vale anche per $x \in D - \mathcal{F} D$.

*
* *

La dimostrazione da noi più sopra riassunta coincide con quella di Fichera salvo che in un punto : noi abbiamo fatto appello esclusivamente al teorema di Hahn-Banach mentre il Fichera, per dimostrare l'esistenza della funzione completamente additiva $\psi = \mathfrak{T}(\varphi)$, si richiama a un teorema di analisi funzionale, da lui dimostrato [16] che può enunciarsi al modo seguente :

Sia W un insieme astratto lineare rispetto al corpo reale (complesso) e siano Σ_1 e Σ_2 due spazi di Banach reali (complessi). In W siano definite due trasformazioni $M_1(w)$ e $M_2(w)$ entrambe lineari, le quali facciano corrispondere ad ogni elemento w di W un elemento rispettivamente di Σ_1 e di Σ_2. Sia Φ un funzionale lineare e continuo definito in Σ_1. Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista un funzionale Ψ lineare e continuo, definito in Σ_2, tale da risultare per ogni w di W :

$$\Phi(M_1(w)) = \Psi(M_2(w)) \tag{21}$$

è che esista una costante K per la quale riesca

$$\| M_1(w) \| \leq K \| M_2(w) \|. \tag{22}$$

Soddisfatta la (22) *esiste una soluzione Ψ della* (21) *verificante la diseguaglianza*

$$\| \Psi \| \leq K \| \Phi \| \tag{23}$$

e ogni altra soluzione si ottiene aggiungendo ad essa un funzionale ortogonale al codominio di M_2.

Di tale teorema il Fichera ha dato numerose applicazioni sia allo studio dei problemi al contorno per le equazioni ellittiche e per l'equazione del calore [16], che alla dimostrazione di teoremi di esistenza per le soluzioni deboli dei problemi al contorno relativi alle equazioni paraboliche di tipo generale [19, 20] e alle equazioni di ordine superiore [21].

Il Fichera [18] ha anche osservato che questo teorema, sfruttando il fatto che la (22) si presenta come conseguenza della (21), può essere utilizzato per dedurre da formule di maggiorazione a priori relative alle soluzioni di un dato problema, formule analoghe relative a un altro problema *duale* del primo.

*
* *

Siamo stati cosi condotti a parlare di un altro argomento della nostra conferenza : la ricerca di formule maggiorazione *a priori* delle soluzioni dei problemi al contorno. La conoscenza di tali formule è utilizzata più o meno in tutti i metodi di cui abbiamo finora parlato. Essa diventa però essenziale quando si voglia conseguire la dimostrazione dei teoremi di esistenza mediante il metodo di prolungamento per continuità. Con quest'ultima locuziane intendiamo indicare sia i procedimenti che si basano sul teorema di Brouwer o sulla nozione di grado topologico di una trasformazione funzionale introdotta da J. Leray e J. Schauder, sia i procedimenti di inversione delle corrispondenze funzionali formulati da R. Caccioppoli.

Le formule di maggiorazione *a priori*, la cui conoscenza è necessaria per l'applicazione di questo metodo, sono in generale piuttosto difficili da ottenere, giacchè esse devono fornire delle limitazioni non solo per le eventuali soluzioni dei problemi al contorno, ma anche per le loro derivate.

In generale si tratterà di limitare convenientemente i massimi moduli e i coefficienti di Hölder di tali derivate oppure certe loro norme integrali.

Difficoltà dello stesso genere si incontrano anche in qualche applicazione del metodo di Perron nonchè in alcune questioni di regolarizzazione di soluzioni deboli.

In questo ordine di idee è innanzitutto da ricordare la memoria [3] di R. Caccioppoli in cui è risolto, in ipotesi molto generali e senza far ricorso al teorema di Lichtenstein-Friedrichs, il problema della maggiorazione in $L^{(2)}$ delle derivate seconde delle soluzioni delle equazioni ellittiche. I risultati di Caccioppoli hanno trovato larghe applicazioni nei lavori di G. Stampacchia [1, 2, 3, 4, 6], l'estensione da $L^{(2)}$ a $L^{(p)}$ è stata di recente conseguita da D. Greco [1, 2] valendosi del teorema di Zygmund-Cameron.

Ricorderò anche una mia memoria [4] sui sistemi ellittici del primo ordine in m variabili, alcuni risultati di B. Pini [11, 15] sulle funzioni biarmoniche, un lavoro di G. Prodi [6] sul problema di Dirichlet per un'equazione con secondo membro singolare, una recente memoria di S. Campanato [3] su un problema di M. Picone relativo alle equazioni dell' elasticità e un notevole complesso di risultati relativi alle equazioni paraboliche, sia lineari che non lineari, dovuti a C. Ciliberto [2, ..., 7], E. Gagliardo [1, 2, 3, 4], e G. Prodi [1, 2, 3, 4].

A questo tipo di ricerche può poi ricollegarsi anche una memoria di F. Stoppelli [1] su un teorema di esistenza in piccolo per le equazioni della elasticità non lineare.

Per restare nel tema di questa conferenza dirò ora qualche parola su una mia memoria [6] relativa al problema misto in cui ho applicato questo metodo per lo studio del problema inteso nel senso classico.

Nel caso specifico tale metodo non si discosta nelle sue linee generali da quello seguito da Schauder e Caccioppoli per lo studio del problema di Dirichlet. In sostanza si tratta di stabilire delle formule di maggiorazione *a priori* delle eventuali soluzioni del problema, dapprima per un'equazione a coefficienti costanti e poi, con l'artificio di Korn, per un'equazione generale. Più precisamente si riesce a far vedere che, in opportune ipotesi per i dati del problema, è possibile maggiorare con una funzione lineare di max $|u|$ sia il coefficiente di Hölder $|u|_{\lambda}^{D}$ della u relativo al dominio D e ad un conveniente esponente λ, sia, per ogni dominio T che abbia dalla varietà V una distanza positiva δ, la quantità

$$\delta^2 \sum_{i,k}^{1\dots m} |p_{ik}|_{\lambda}^{T}.$$

Stabilite queste formule di maggiorazione si perviene al teorema di esistenza e di unicità nell'ipotesi $c \leqq 0$, collegando mediante l'introduzione di un parametro le equazioni del problema dato con quelle del problema analogo relativo alle funzioni armoniche e applicando il principio di prolungamento per continuità.

Nel caso generale si perviene facilmente al teorema dell'alternativa trasformando il problema in un' equazione funzionale a cui è applicabile la teoria di Riesz.

Se il metodo, nei suoi fondamenti di analisi funzionale, non ha assolutamente nulla di nuovo, *vice versa* le modalità tecniche par la dimostrazione delle formule di maggiorazione sono assai delicate e non mi è perciò possibile di riassumerle. Mi limiterò, pertanto a confrontare i miei risultati con quelli ottenuti con altri metodi.

Comincerò con l'osservare che il vantaggio sostanziale di questi procedimenti è di consentire la trattazione del problema in ipotesi assai generali per quanto riguarda i coefficienti a_{ik}. b_i, c, f. Invero, mentre le a_{ik} sono supposte soltanto hölderiane con le loro derivate prime in D per le b_i, c, f basta l'ipotesi di hölderianità in ogni dominio contenuto in $D - V$, le stesse funzioni potendo anche divenire infinite su V ma di un ordine non troppo elevato.

E' anche da rilevare che, almeno per il momento, è solo con questo metodo che si è riusciti a dimostrare il teorema dell'alternativa per il problema inteso nel senso classico.

Più restrittive, per esempio rispetto al risultato di FICHERA, sono invece le ipotesi relative alle funzioni α e β e al dominio D. Le α e β invero, pur potendo diventare infinite di un certo ordine su V, vanno supposte localmente hölderiane, la α con le sue derivate seconde, la β con le sue derivate prime. Soltante nel caso $c \leqq 0$ basta per la α la sola ipotesi di continuità.

Quanto al dominio D, oltre alle solite ipotesi di regolarità per $\mathcal{F} D - V$, bisogna supporre verificate altre due condizioni. La prima, che però potrà probabilmente essere rimossa, è la seguente : occorre che D si possa mettere in corrispondenza biunivoca, mediante una trasformazione sufficientemente regolare, con un dominio T, in modo che la porzione $\mathcal{F}_2 T$ di $\mathcal{F} T$, corrispondente a $\mathcal{F}_2 D$, sia contenuta in un iperpiano che non abbia altri punti in comune con T (15).

La seconda condizione è la seguente : occorre che lungo la varietà V le ipersuperficie $\mathcal{F}_1 D$ e $\mathcal{F}_2 D$ formino un angolo φ diverso da o e da π.

Detti $\varphi_1 (> 0)$ e $\varphi_2 (< \pi)$ rispettivamente il minimo e il massimo di φ, si dimostra che si può determinare un $\lambda_0(\varphi_1, \varphi_2)$ tale che ogni soluzione del problema risulta hölderiana in D con esponente $\lambda < \lambda_0$. Appare perciò presumibile che non si possa rinunciare a questa ipotesi fintantocchè si ricerchino soluzioni hölderiane del problema. Il fatto che il FICHERA non abbia bisogno, nella sua trattazione, di questa ipotesi è perciò da ascrivere, probabilmente, alla circostanza che egli studia soluzioni del problema che sono soltanto continue, e non hölderiane, in D.

Ritengo comunque che i risultati da me ottenuti possano riuscire utili per lo studio dei problemi misti relativi a equazioni non lineari.

*
* *

Per terminare la mia esposizione ricorderò ancora alcuni lavori in cui si fa ricorso al classico metodo della traduzione dei problemi in equazioni integrali di seconda specie, sia di Fredholm che singolari.

A questo proposito ricorderò una mia memoria [5] sui problemi al contorno per le forme differenziali esterne e alcuni lavori di B. PETTINEO [4] e D. GRECO [3, 4] relativi al problema di derivata obliqua, concernenti rispettivamente il caso di una sola equazione e quello di certi di sistemi di equazioni in due variabili. Il lavaro [3] di Greco è particolarmente interessante per la caratterizzazione del problema aggiunto, conseguita anche nel caso non regolare. Alla teoria delle equazioni integrali si fa infine ricorso anche in alcuni lavori di B. PINI [6], M. L. PRINCIVALLI [1], S. CAMPANATO [2], relativi il primo ad un'equazione del quarto ordine, gli altri due a problemi di teoria dell'elasticità.

BIBLIOGRAFIA.

ALBERTONI (S.) :

[1] *Sulla soluzione del problema di Neumann per l'equazione* $\Delta_2 u - ku = 0$ (*Rend. Ist. Lombardo*, t. 87, 1954, p. 400-432).

[2] *Sulla risoluzione del problema di Neumann per l'equazione* $\Delta_2 u + ku = f$ *in un dominio con punti angolosi* (*Rend. Ist. Lombardo*, t. 90, 1956, p. 221-243).

AMERIO (L.) :

[1] *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_2 u - \lambda^2 u = 0$ *in un dominio di connessione qualsiasi* (*Rend. Ist. Lombardo*, t. 78, 1944-1945, p. 1-24).

[2] *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_{2k} u = f$ (*Ann. Mat. pura e appl.*, t. 24, 1945, p. 119-138).

(15) Nella mia memoria [6] avevo erroneamente affermato che, se D è ad unico contorno, è sempre possibile istituire la predetta corrispondenza. La possibilità di istituire tale corrispondenza implica invece delle restrizioni di carattere topologico per la varietà V.

[3] *Sull'equazione di propagazione del calore* (*Rend. di Mat. Roma*, t. 5, 1946, p. 84-120).

[4] *Sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico* (*Amer. J. Math.*, t. 69, 1947, p. 447-489).

[5] *Sul calcolo delle autosoluzioni dei problemi al contorno per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico* (*Rend. Acc. Lincei*, t. 1, 1946, p. 352-359 e 505-509).

[6] *Teoremi di esistenza per i problemi di Dirichlet e di Neumann per l'equazione* $\Delta_2 u - ku = 0$, (*Ricerche di Mat. Napoli*, t. 5, 1956, p. 58-96).

ANCORA (R. B.) :

[1] *Problemi analitici connessi alla teoria della piastra elastica appoggiata* (*Rend. Sem. mat. Padova*, t. 20, 1951, p. 99-134).

CACCIOPPOLI (R.) :

[1] *Sui teoremi di esistenza di Riemann* (*Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli*, t. 4, 1934, p. 49-54).

[2] *Sui teoremi di esistenza di Riemann* (*Ann. Scuola norm. sup. Pisa*, t. 6, 1937, p. 177-187).

[3] *Limitazioni integrali per le soluzioni di un'equazione lineare ellittica a derivate parziali* (*Giorn. Mat. Battaglini*, t. 80, 1950-1951, p. 186-212).

CAMPANATO (S.) :

[1] *Teoremi di completezza relativi al sistema di equazioni dell'equilibrio elastico* (*Rend. Sem. mat. Padova*, t. 25, 1956, p. 122-137).

[2] *Sui problemi al contorno relativi al sistema di equazioni differenziali dell'elastostatica piana* (*Rend. Sem. mat. Padova*, t. 25, 1956, p. 307-341).

[3] *Sul problema di M. Picone relativo all'equilibrio di un corpo elastico incastrato* (*Ricerche di Mat. Napoli*, t. 6, 1957, p. 125-149).

CILIBERTO (C.) :

[1] *Sul problema di Holmgren-Levi per l'equazione del calore* (*Giorn. Mat. Battaglini*, t. 80, 1950-1951, p. 1-13).

[2] *Su un problema al contorno per una equazione non lineare di tipo parabolico in due variabili* (*Ricerche di Mat. Napoli*, t. 1, 1952, p. 55-77).

[3] *Su un problema al contorno per l'equazione* $u_{x\overline{x}}u_y = f(x, y, u, u_x)$ (*Ricerche di Mat. Napoli*, t. 1, 1952, p. 245-316).

[4] *Formule di maggiorazione e teoremi di esistenza per le soluzioni delle equazioni paraboliche in due variabili* (*Ricerche di Mat. Napoli*, t. 3, 1954, p. 40-75).

[5] *Sulle equazioni non lineari di tipo parabolico in due variabili* (*Ricerche di Mat. Napoli*, t. 3, 1954, p. 129-164).

[6] *Nuovi contributi alla teoria dei problemi al contorno per le equazioni paraboliche non lineari in due variabili* (*Ricerche di Mat. Napoli*, t. 5, 1956, p. 206-225).

[7] *Sulle equazioni quasi-lineari di tipo parabolico in due variabili* (*Ricerche di Mat. Napoli*, t. 5, 1956, p. 97-125).

CIMMINO (G.) :

[1] *Sulle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico su di una superficie chiusa* (*Ann. Scuola norm. sup. Pisa*, t. 7, 1938, p. 73-96).

[2] *Nuovo tipo di condizione al contorno e nuovo metodo di trattazione per il*

problema generalizzato di Dirichlet (*Rend. Circ. mat. Palermo*, t. 61. 1938, p. 177-221).

[3] *Sul problema generalizzato di Dirichlet per l'equazione di Poisson* (*Rend. Sem. mat. Padova*, t. 11, 1940, p. 28-89).

[4] *Inversione delle corrispondenze funzionali lineari ed equazioni differenziali* (*Rivista Mat. Univ. Parma*, t. 1, 1950, p. 105-116).

[5] *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di tipo ellittico* (*Rend. Sem. mat. Milano*, t. 23, 1952, p. 255-286).

[6] *Spazi hilbertiani di funzioni armoniche e questioni connesse* (*Atti Conv. intern. Eq. lin. alle derivate parz.*, 1954, Trieste). — Roma, Ed. Cremonese, 1955, p. 76-85.

De Giorgi (E.) :

[1] *Osservazioni relative ai teoremi di unicità per le equazioni differenziali a derivate parziali di tipo ellittico con condizioni al contorno di tipo mist o* (*Ricerche di Mat. Napoli*, t. 2, 1953, p. 183-191).

Fichera (G.) :

[1] *Teoremi di completezza connessi all'integrazione dell'equazione* $\Delta_4 u = f$ (*Giorn. Mat. Battaglini*, t. 77, 1947-1948, p. 184-199).

[2] *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni* (*Ann. Mat. pura e appl.*, t. 27, 1948, p. 1-28).

[3] *Sull'equazione di un corpo elastico isotropo e omogeneo* (*Rend. Sem. mat. Padova*, t. 17, 1948, p. 9-28).

[4] *Applicazione della teoria del potenziale di superficie ad alcuni problemi di analisi funzionale lineare* (*Giorn. Mat. Battaglini*, t. 78, 1948-1949, p. 71-80).

[5] *Teorema di esistenza per il problema bi-iperarmonico* (*Rend. Acc. Lincei*, t. 5, 1948, p. 319-324).

[6] *Sui problemi analitici dell'elasticità piana* (*Rend. Sem. mat. Cagliari*, t. 18, 1948, p. 1-22).

[7] *Analisi esistenziale per le soluzioni dei problemi al contorno misti relativi alle equazioni e ai sistemi di equazioni del secondo ordine di tipo ellittico autoaggiunti* (*Ann. Scuola. norm. sup. Pisa*, t. 1, 1947, p. 75-100).

[8] *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno relativi all'equilibrio di un corpo elastico* (*Ann. Scuola. norm. sup. Pisa*, t. 4, 1950, p. 35-99.

[9] *On some general integration methods employed in connection with linear differential equations* (*J. of Math. and Phys.*, t. 29, 1950, p. 59-68).

[10] *Risultati concernenti la risoluzione delle equazioni funzionali lineari dovuti all'I. N. A. C.* (*Mem. Acc. Lincei*, t. 3, 1950, p. 1-80).

[11] *Esistenza del minimo in un classico problema di calcolo delle variazioni* (*Rend. Acc. Lincei*, t. 11, 1951, p. 34-39).

[12] *Interpretazione ed estensione funzionale di recenti metodi di integrazione delle equazioni differenziali lineari* (*Atti IV Congresso Un. mat. It.*, 1951, *Taormina*) — *Roma*, *Ed. Cremonese*, 1953; p. 45-67.

[13] *Sulla « Kernel function »* (*Boll. Un. mat. It.*, t. 7, 1952, p. 4-15).

[14] *Sul problema della derivata obliqua e sul problema misto per l'equazione di Laplace* (*Boll. Un. mat. It.*, t. 7, 1952, p. 367-377).

[15] *Condizioni perchè sia compatibile il problema principale della statica elastica* (*Rend. Acc. Lincei*, t. 14, 1953, p. 397-400).

[16] *Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali lineari* (*Atti Conv. intern. Eq. lin. alle deriv. parz.*, 1954, Trieste). — Roma, Ed. Cremonese, 1955, p. 174-227.

[17] *Sull'esistenza delle forme differenziali armoniche* (*Rend. Sem. mat. Padova*, t. 24, 1955, p. 523-545).

[18] *Su un principio di dualità per talune formule di maggiorazione relative alle equazioni differenziali* (*Rend. Acc. Lincei*, t. 19, 1955, p. 411-418).

[19] *Sulle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine ellittico-paraboliche* (*Rend. Sem. mat. Torino*, t. 15, 1955-1956, p. 27-47).

[20] *Sulle equazioni differenziali lineari ellittico-paraboliche del secondo ordine* (*Mem. Acc. Lincei*, t. 5, 1956, p. 3-30).

[21] *Sulla teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari* (*Rend. Acc. Lincei*, t. 21, 1956, p. 46-55 *e* 1-7).

GAGLIARDO (E.) :

[1] *Formule di maggiorazione integrale per le soluzioni dell'equazione del calore non omogenea* (*Ricerche di Mat. Napoli*, t. 3, 1954, p. 202-219).

[2] *Problema al contorno generalizzato per l'equazione del calore* (*Ricerche di Mat. Napoli*, t. 4, 1955, p. 74-94).

[3] *Problema al contorno per equazioni differenziali lineari di tipo parabolico in n variabili* (*Ricerche di Mat. Napoli*, t. 5, 1956, p. 169-205).

[4] *Teoremi di esistenza e di unicità per problemi al contorno relativi ad equazioni paraboliche lineari e quasi lineari in n variabili* (*Ricerche di Mat. Napoli*, t. 5, 1956, p. 239-257).

GHIZZETTI (A.) :

[1] *Sul metodo della trasformata parziale di Laplace a intervallo d'integrazione finito* (*Rend. Mat. Roma*, t. 6, 1947, p. 1-47).

[2] *Applicazione del metodo della trasformata parziale di Laplace per l'equazione* $\Delta_2 u - \lambda^2 u = F$ *in n variabili* (*Rend. Sem. mat. Padova*, t. 17, 1948, p. 39-74).

[3] *Su un particolare problema misto per una equazione di tipo ellittico a coefficienti costanti* (*Rend. Acc. Lincei*, t. 5, 1948, p. 344-348).

[4] *Flow in a not homogeneous and anisotropic medium* (*Ann. Soc. Polon. Math.*, t, 22, 1949, p. 195-200).

GRECO (D.) :

[1] *Nuove formule integrali di maggiorazione per le soluzioni di un'equazione lineare di tipo ellittico ed applicazioni alla teoria del potenziale* (*Ricerche di Mat. Napoli*, t. 5, 1956, p. 126-149).

[2] *Un teorema di esistenza per il problema di Dirichlet relativo ad un'equazione lineare ellittica in m variabili* (*Ricerche di Mat. Napoli*, t. 5, 1956, p. 150-158).

[3] *Il problema di derivata obliqua per certi sistemi di equazioni a derivate parziali di tipo ellittico in due variabili* (*Ann. Mat. pura e appl.*, t. 42, 1956, p. 1-24).

[4] *Sul problema di Lauricella per una particolare equazione di quarto ordine* (*Boll. Un. mat. It.*, t. 11, 1956, p. 394-401).

[5] *Un'osservazione sul problema di Dirichlet* (*Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli*, t. 23, 1956, p. 73-80).

MAGENES (E.) :

[1] *Sull'equazione del calore : Teoremi di unicità e teoremi di completezza connessi col metodo di integrazione di M. Picone* (*Rend. Sem. mat. Padova*, t. 21, 1952, p. 99-123 e 136-170).

[2] *Problemi al contorno misti per l'equazione del calore* (*Rend. Sem. mat. Padova*, t. 24, 1955, p. 1-28).

[3] *Sui problemi al contorno misti per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo misto* (*Ann. Scuola norm. Sup. Pisa*, t. 8, 1954, p. 93-120).

[4] *Problema generalizzato di Dirichlet e teoria del potenziale* (*Rend. Sem. mat. Padova*, t. 24, 1955, p. 220-229).

[5] *Sui problemi di derivata obliqua regolare per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico* (*Ann. Mat. pura e appl.*, t. 40, 1955, p. 143-160).

[6] *Sulla teoria del potenziale* (*Rend. Sem. mat. Padova*, t. 24, 1955, p. 510-522).

[7] *Sul teorema dell'alternativa nei problemi misti per le equazioni lineari ellittiche del secondo ordine* (*Ann. Scuola norm. sup. Pisa*, t. 9, 1955, p. 161-200).

[8] *Osservazioni su alcuni teoremi di completezza connessi con i problemi misti per le equazioni lineari ellittiche* (*Boll. Un. mat. It.*, t. 10, 1955, p. 452-459).

[9] *Su alcune recenti impostazioni dei problemi al contorno, in particolare misti, per le equazioni lineari ellittiche del secondo ordine* (*Ann. Scuola norm. sup. Pisa*, t. 10, 1956, p. 75-84).

[10] *Recenti sviluppi nella teoria dei problemi misti per le equazioni lineari ellittiche* (*Rend. Sem. mat. Milano*, t. 27, 1955, 1956, p. 75-95).

MIRANDA (C.) :

[1] *Sul principio di Dirichlet per le funzioni armoniche* (*Rend. Acc. Lincei*, t. 3, 1947, p. 55-59).

[2] *Sull'approssimazione delle funzioni armoniche* (*Rend. Acc. Lincei*, t. 5, 1948, p. 530-533).

[3] *Formule di maggiorazione e teorema di esistenza per le funzioni biarmoniche di due variabili* (*Giorn. Mat. Battaglini*, t. 78, 1948-1949, p. 97-118).

[4] *Sui sistemi di tipo ellittico lineari a derivate parziali del primo ordine in n variabili indipendenti* (*Mem. Acc. Lincei*, t. 3, 1952, p. 85-121).

[5] *Sull'integrazione delle forme differenziali esterne* (*Ricerche di Mat. Napoli*, t. 2, 1953, p. 151-182).

[6] *Sui problemi misti per le equazioni lineari ellittiche* (*Ann. Mat. pura e appl.*, t. 39, 1955, p. 279-303).

[7] *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico.* — Berlin, Springer, 1955 (*Ergebnisse der Mathematik, neue Folge*, 2).

PETTINEO (B.) :

[1] *Trattazione funzionale dei problemi al contorno relativi alle equazioni e ai sistemi di equazioni lineari alle derivate parziali* (*Rend. Circ. mat. Palermo*, t. 5, 1956, p. 101-116).

[2] *Sulla funzione di Green pel problema di Dirichlet relativo alle equazioni lineari ellittiche* (*Rend. Acc. Lincei*, t. 20, 1956, p. 306-311).

[3] *Sulla funzione di Green pel problema di Dirichlet relativo alle equazioni lineari ellittiche* (*Atti Acc. Sc. Palermo*, t. 16, 1955-1956, p. 65-68).

[4] *Sul problema di derivata obliqua per le equazioni lineari a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico in due variabili* (*Atti Acc. Sc. Palermo*, t. 16, 1955-1956, p. 5-26).

PICONE (M.) :

[1] *Appunti di Analisi superiore.* — Napoli Ed. Rondinella, 1940.

[2] *Nuovi metodi risolutivi per i problemi di integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali e nuova applicazione della trasformata multipla di Laplace nel caso delle equazioni a coefficienti costanti.* (*Atti Acc. Sc. Torino*, t. 75, 1939-1940, p. 413-426).

[3] *Sulla traduzione in equazione integrale lineare di prima specie dei problemi*

al contorno concernenti i sistemi di equazioni lineari a derivate parziali (*Rend. Acc. Lincei*, t. 2, 1947, p. 365-371, 485-492 e 717-725).

[4] *Esistenza e calcolo della soluzione di un certo problema al contorno per il sistema di equazioni dell'elasticità* (*Rend. Acc. Lincei*, t. 3, 1947, p. 427-435).

[5] *Exposition d'une méthode d'integration numérique des systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles* (*Colloque sur les Machines à calculer et la pensée humaine*, 1951, Paris). — Paris, C. N. R. S., 1953 (*Coll. intern. du C. N. R. S.*, 37), p. 239-264).

PINI (B.):

[1] *Sulle equazioni a derivate parziali lineari del secondo ordine in due variabili di tipo parabolico* (*Ann. Mat. pura e appl.*, t. 32, 1951, p. 179-204).

[2] *Sul problema di Dirichlet per le equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico* (*Rend. Acc. Lincei*, t. 11, 1951, p. 325-333).

[3] *Sul primo problema di valori al contorno della teoria dell'elasticità* (*Rend. Sem. mat. Padova*, t. 21, 1952, p. 345-369).

[4] *Sul problema di Dirichlet per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico nei domini non limitati* (*Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli*, t. 19, 1952, p. 157-170).

[5] *Sulle equazioni lineari a derivate parziali d'ordine* $2n$ *di tipo ellittico e sui sistemi ellittici di equazioni lineari del secondo ordine sopra una superficie chiusa* (*Rend. Mat. Univ. Roma*, t. 11, 1952, p. 176-195).

[6] *Traduzione in equazioni integrali di un problema analogo al problema biarmonico fondamentale* (*Rend. Sem. mat. Padova*, t. 22, 1953, p. 192-206).

[7] *Un problema di valori al contorno per l'equazione* $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (*Rend. Acc. Lincei*, t. 14, 1953, p. 609-615 e 746-749).

[8] *Sui sistemi di equazioni lineari a derivate parziali del secondo ordine dei tipi ellittico e parabolico* (*Rend. Sem. mat. Padova*, t. 22, 1953, p. 265-280).

[9] *Osservazioni sulle soluzioni dei sistemi di equazioni a derivate parziali lineari di tipo ellittico* (*Rend. Sem. mat. Padova*, t. 22, 1953, p. 366-379).

[10] *Precisazioni a un ragionamento contenuto in una mia nota sulle equazioni a derivate parziali di tipo ellittico* (*Ricerche di Mat. Napoli*, t. 3, 1954, p. 3-12).

[11] *Sulle funzioni sub e super-biarmoniche* (*Rend. Acc. Lincei*, t. 16, 1954, p. 702-707).

[12] *Osservazioni sopra un problema generalizzato di Dirichlet per le equazioni lineari del secondo ordine ellittiche e paraboliche* (*Rend. Acc. Lincei*, t. 19, 1955, p. 237-246).

[13] *Una generalizzazione del problema biarmonico fondamentale* (*Rend. Sem. mat. Padova*, t. 25, 1956, p. 196-213).

[14] *Su una generalizzazione del problema fondamentale di valori al contorno per l'equazione del calore iterata* (*Rend. Sem. Fac. Sc. Cagliari*, t. 26, 1956, p. 30-57).

[15] *Sul comportamento alla frontiera delle derivate delle soluzioni dei problemi fondamentali armonico e biarmonico in due variabili* (*Rend. Sem. Fac. Sc. Cagliari*, t. 26, 1956, p. 7-29).

[16] *Sul problema di Dirichlet per le equazioni a derivate parziali lineari ellittiche in due variabili* (*Rend. Sem. mat. Padova*, t. 26, 1956, p. 177-200).

[17] *Sull'unicità della soluzione del problema di Dirichlet per le equazioni lineari ellittiche in due variabili* (*Rend. Sem. Mat. Padova*, t. 26, 1956, p. 223-231).

PRINCIVALLI (M. L.):

[1] *Sul sistema di equazioni lineari alle derivate parziali, relativo all'equilibrio delle volte cilindriche* (*Ann. Scuola. norm. sup. Pisa*, t. 8, 1954, p. 157-291).

[2] *Su un teorema di unicità per un problema al contorno relativo all'equilibrio delle volte cilindriche* (*Ann. Scuola. norm. sup. Pisa*, t. 9, 1955, p. 235-245).

PRODI (G.) :

[1] *Questioni di stabilità per equazioni non lineari alle derivate parziali di tipo parabolico* (*Rend. Acc. Lincei*, t. 10, 1951, p. 365-370).

[2] *Soluzioni periodiche di equazioni alle derivate parziali di tipo parabolico non lineari* (*Riv. di Mat. Univ. Parma.*, t. 3, 1952, p. 265-290).

[3] *Teoremi di esistenza per equazioni alle derivate parziali non lineari di tipo parabolico* (*Rend. Ist. Lombardo*, t. 86, 1953, p. 3-26 e 27-47).

[4] *Problemi al contorno non lineari per equazioni di tipo parabolico non lineari in due variabili. Soluzioni periodiche* (*Rend. Sem. mat. Padova*, t. 23, 1954, p. 25-85).

[5] *Sull'equivalenza fra la seconda formula di Green e la corrispondente equazione di Fredholm per l'equazione* $\Delta_2 u + \lambda u = 0$ (*Rend. Sem. mat. Padova*, t. 24, 1955, p. 103-122).

[6] *Sul primo problema al contorno per equazioni a derivate parziali ellittiche o paraboliche, con secondo membro illimitato sulla frontiera* (*Rend. Ist. Lombardo*, t. 90, 1956, p. 189-208).

STAMPACCHIA (G.) :

[1] *Problema di Dirichlet e proprietà qualitative della soluzione* (*Giorn. Mat. Battaglini*, t. 80, 1950-1951, p. 226-237).

[2] *Problemi al contorno per equazioni di tipo ellittico a derivate parziali e questioni di calcolo delle variazioni connesse* (*Ann. Mat. pura e appl.*, t. 33, 1952, p. 211-238).

[3] *Sistemi di tipo ellittico a derivate parziali del primo ordine e proprietà delle estremali degli integrali multipli* (*Ricerche di Mat. Napoli*, t. 1, 1952, p. 200-226).

[4] *Problemi al contorno misti per equazioni del calcolo delle variazioni* (*Ann. Mat. pura e appl.*, t. 40, 1955, p. 193-209).

[5] *Osservazioni sull'esistenza e sull'unicità della soluzione dei problemi al contorno misti per equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico* (*Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli*, t. 22, 1955, p. 144-148).

[6] *Su un problema relativo alle equazioni di tipo ellittico del secondo ordine Ricerche di Mat. Napoli*, t. 5, 1956, p. 3-24).

STOPPELLI (F.) :

[1] *Un teorema di esistenza ed unicità relativo alle equazioni dell'elastostatica isoterma per deformazioni finite* (*Ricerche di Mat. Napoli*, t. 3, 1954, p. 247-267).

VIOLA (T.)

[1] *Sull'esistenza del minimo assoluto di taluni integrali multipli, connessi con i problemi al contorno per le funzioni iperarmoniche* (*Ann. Scuola norm. sup. Pisa*, t. 6, 1952, p. 109-145).

ZWIRNER (G.) :

[1] *Su una particolare classe di equazioni alle derivate parziali del quarto ordine sopra una superficie chiusa* (*Rend. Sem. mat. Padova*, t. 17, 1948, p. 139-159).

Carlo MIRANDA,
Via Francesco Crispi, 31,
Napoli (Italie).