

# BULLETIN DE LA S. M. F.

PAUL MALLIAVIN

**Calcul symbolique et sous-algèbres de  $L_1(G)$**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 87 (1959), p. 181-186

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1959\\_\\_87\\_\\_181\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__181_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## CALCUL SYMBOLIQUE ET SOUS-ALGÈBRES DE $L_1(G)$ ;

PAR

PAUL MALLIAVIN.

(Caen).

### I. CALCUL SYMBOLIQUE MAXIMAL.

**1. Introduction.** —  $G$  notera un groupe abélien discret infini,  $G'$  le groupe dual de  $G$ ,  $A(G')$  l'algèbre des fonctions réelles, transformées de Fourier de fonctions  $\in L_1(G)$ . On se propose d'étudier les fonctions définies sur la droite réelle qui opèrent sur un élément fixe  $a \in A(G')$  c'est-à-dire des fonctions  $F$  telles que  $F(a(g')) \in A(G')$ . On notera par  $[a]$  l'ensemble des fonctions qui opèrent sur  $a$ ;  $[a]$  est une sous-algèbre des fonctions définies et continues sur  $a(G')$ .

Rappelons quelques définitions classiques sur les classes de fonctions différentiables. Étant donnée une suite  $M_n$  de nombres positifs, on considère la classe  $\mathcal{C}(M_n, I)$  des fonctions  $f(x)$  dont la restriction au segment  $I$  vérifie

$$(1.1) \quad \sup_{n,x} \left| \frac{f^{(n)}(x)}{M_n} \right|^{\frac{1}{n}} < \infty, \quad x \in I$$

Nous considérerons dans la suite uniquement des classes telles que :

1.2  $\log M_n$  est une suite convexe de  $n$  ;

1.3  $\frac{\log M_n - \log n!}{n} = e_n + O(1)$ ,

où  $e_n$  est une suite croissante.

Remarquons que 1.3 n'est introduit que pour démontrer la propriété :

1.3.1 Si  $f \in \mathcal{C}(M_n, I)$ ,  $f(x) \neq 0$  pour tout  $x \in I$ , alors  $\frac{1}{f(x)} \in \mathcal{C}(M_n, I)$ .

Il est loisible dans la suite de remplacer l'hypothèse 1.3 par 1.3.1.

Nous dirons qu'une classe  $\mathcal{C}(M_n, I)$  est non quasi-analytique si, posant

$$(1.4) \quad T(r) = \sup_n [n \log r - \log M_n],$$

$$\int_1^{+\infty} T(r) \frac{dr}{r^2} < \infty.$$

On se propose de démontrer le *théorème* suivant :

1.5 *Étant donné un segment  $I$ , symétrique par rapport à l'origine, de longueur  $2l$ ,  $\varepsilon$  un nombre  $> 0$ , une suite de nombres  $M_n$  satisfaisant 1.2, 1.3 et (1.4), on peut trouver  $a \in A(G')$  tel que*

$$[a] \subset \mathcal{C}(M_n, I)$$

et tel que la norme de  $a$  dans  $A(G')$ , soit  $\|a\|'_1$ , vérifie

$$(1.5.1) \quad \|a\|'_1 < l + \varepsilon.$$

Il s'agit d'un énoncé de calcul symbolique individuel, dans le sens qu'on étudie les fonctions opérant sur un élément  $a$ , *fixé*, au lieu d'étudier comme HELSON, KAHANE, KATZNELSON, RUDIN [1], [2], [3] les fonctions qui opèrent sur  $a$  quel que soit  $a \in A(G')$ .

La démonstration de 1.5 sera obtenue en prenant un point de vue dual de celui de [1], [2], [3]. On construira une série lacunaire  $a$  convenable sur  $G'$ , on étudiera l'image par  $a$  de la mesure de Haar sur  $G'$ , et enfin quelques calculs élémentaires montreront que la classe  $\mathcal{C}(M_n, I)$  considérée est, en vertu de 1.2 et 1.3, une algèbre dans laquelle toute fonction, partout différente de zéro, est inversible.

## 2. Construction de la série lacunaire $a$ . — Posons

$$(1.6) \quad a(g') = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \operatorname{Im} \langle g_k, g' \rangle, \quad g_k \in G$$

les  $\alpha_k$  étant des nombres réels  $> 0$ , tels que  $\sum_1^{\infty} \alpha_k < \infty$ . Posons  $N(t) =$  nombre de  $\alpha_k \geq t$ . D'une manière générale nous noterons  $\Psi'$  la transformée de Fourier de  $\Psi(g')$ ,  $\|\Psi\|'_{\infty} = \|\Psi'\|_{\infty}$ .

On a alors le lemme suivant :

2.1 *Soit  $\gamma(u)$  une fonction croissante tendant vers  $+\infty$ , arbitrairement lentement, soit  $\alpha_k$  une suite donnée, soit  $N(t)$  sa fonction de répartition, alors on peut déterminer les  $g_k$  de façon convenable de telle sorte que*

$$\log \|\exp(iua(g'))\|'_{\infty} < -\rho [N(\delta u^{-1}) - N(2\delta u^{-1})] + \gamma(u) \log(8eu + 4),$$

où  $\rho$  et  $\delta$  sont des constantes numériques.

PREUVE. — [4], paragraphe 5

Nous prendrons  $N$  de telle sorte que

$$(2.1.1) \quad N(v) - N(u) \geq \lambda \int_{u^{-1}}^{v^{-1}} T(r) \frac{dr}{r}, \quad 0 < v < u < 1,$$

où  $\lambda$  désigne une constante numérique déterminée ci-dessous. On a

$$N(\delta u^{-1}) - N(2\delta u^{-1}) > \int_{u(2\delta)^{-1}}^{u\delta^{-1}} T(r) \frac{dr}{r} > \lambda T\left(\frac{u}{2\delta}\right) \log 2.$$

Prenons  $\lambda$  tel que  $\lambda \rho \log 2 > 4$  et  $\gamma(u)$  tel que  $\gamma(u) < \frac{T\left(\frac{u}{2\delta}\right)}{\log 2(u+1)}$  ce qui est possible si  $\frac{\log T(u)}{\log u} \rightarrow \infty$  c'est-à-dire si  $M_n < \infty$  pour tout  $n$ . On obtient d'après 2.1 :

$$(2.3) \quad \log \|\exp(iua(g'))\|'_\infty < -T\left(\frac{u}{2\delta}\right).$$

Nous notons par  $d\mu$  l'image de la mesure de Haar sur  $G'$  par l'application  $g' \rightarrow a(g')$ . La transformée de Fourier de  $d\mu(x)$  s'écrit

$$\int e^{iu \cdot x} d\mu(x) = \int_{G'} e^{iua(g')} dg'.$$

Si (2.3) est satisfait,  $d\mu(x) = m(x)dx$ , où  $m(x)$  est une fonction indéfiniment dérivable.

2.4 PROPOSITION. — On peut choisir convenablement  $N(u)$  et les  $g_k$  de telle sorte que  $F \in [a]$  entraîne

$$m(x)F(x) \in \mathcal{C}(M_n, I).$$

PREUVE. — Considérons la transformée de Fourier de  $F(x)m(x)$ ,

$$\int F(x)m(x)e^{iu \cdot x} dx = \int_{G'} F(a(g'))e^{iua(g')} dg'$$

ou, en appliquant Parseval,

$$= \int_G (F(a))' (e^{iua})',$$

cette dernière intégrale se majore par  $\|F(a)\|'_1 \|e^{iua}\|'_\infty$ . La transformée de Fourier permet de majorer la dérivée  $n$ -ième par

$$\left(1 + \sup_{u>1} \|e^{iua}\|'_\infty u^{n+2}\right) \|F(a)\|'_1.$$

En tenant compte de (2.3), on a

$$(2.4.1) \quad \sup_{u>1} \left[ (n+2) \log u - T\left(\frac{u}{2\delta}\right) \right] = M_{n+2} (2\delta)^{n+2}.$$

Il suffit de poser  $M_n^* = M_{n-2}$  et d'effectuer la construction qui précède avec  $M_n^*$  pour obtenir la proposition 2.4.

**3. Image de la mesure de Haar par  $a$ .** — Pour déduire de 2.4 des renseignements sur  $F(x)$ , nous devons minorer  $m(x)$ . Ce sera l'objet du lemme suivant :

**3.1** Soit  $\alpha_k$  une suite telle que

$$(3.1.1) \quad 0 < \alpha_{2k_0+j} < \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \alpha_{2k+j}, \quad k_0 = 0, 1, \dots, \quad j = 0, 1.$$

Soit  $I$  le segment  $[-l, +l]$  où  $l < \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ , alors on peut choisir la fonction  $\gamma(u)$  décroissant assez lentement de telle sorte que

$$(3.1.2) \quad \sigma = \min_I m(x) > 0.$$

PREUVE. — D'après [5], paragraphe 5, dont nous allons utiliser les notations, la transformée de Fourier de  $m(x)$  s'écrit

$$(3.2) \quad \prod_{k=1}^{\infty} P_{r_k, 0}(\alpha_k u) + \eta(u),$$

où  $\|\eta\| = \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta(u)| du$  peut être rendue arbitrairement petite en prenant une fonction  $\gamma(u)$  très lentement croissante. Notons par  $m^*(x)$  la fonction qui a pour transformée de Fourier

$$\prod_{k=1}^{\infty} P_{r_k, 0}(\alpha_k u).$$

Alors

$$|m(x) - m^*(x)| > \|\eta\|_1$$

et  $m^*(x)$  s'interprète comme un produit de composition de mesures  $d\mu_k$  dont les transformées de Fourier sont  $P_{r_k, 0}(\alpha_k u)$ . Chaque mesure  $d\mu_k$  a son support contenu dans  $[-\alpha_k, +\alpha_k]$  et dans aucun segment plus petit. Il résulte de (3.1.2) que  $m^*(x)$  ne peut s'annuler identiquement sur aucun intervalle intérieur au segment  $[-l, +l]$ . De plus  $m^*(x) = m_1 \star m_2$ , où la transformée de Fourier de  $m_1(x)$  est le produit (3.2) pris pour les valeurs

de  $k$  paires.  $m_1(x)$  et  $m_2(x)$  ont, en vertu de (3.1.1), pour support deux segments; par suite

$$m(x_0) = \int m_1(x_0 - t) m_2(t) dt > 0$$

si  $x_0$  est intérieur au support de  $m$ .  $m(x) = 0$  seulement si  $|x| > l$ ; soit  $\sigma_1 = \min m^*(x)$ ,  $|x| \leq l$ .

Prenons  $\eta$  tel que  $\|\eta\| < \frac{\sigma_1}{2}$ , alors  $m(x) > \frac{\sigma_1}{2} > 0$  pour tout  $x$  tel  $|x| \leq l$ ,

C. Q. F. D.

**4. Étude de l'algèbre  $\mathcal{C}(M_n, I)$ .** — Si  $f$  et  $g \in \mathcal{C}(M_n, I)$  alors  $fg \in \mathcal{C}(M_n, I)$ .

En effet  $(fg)^{(n)} = \sum C_n^p f^{(p)} g^{(n-p)}$ .

Utilisons la convexité de  $\log M_n$  et le fait que  $|f^{(p)}| < \rho^p M_p$ ,  $|g^{(q)}| < \rho_1^q M_q$ , on obtient

$$|(fg)^{(n)}| < M_n(\rho + \rho_1)^n, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

**4.1** Supposons que  $f \in \mathcal{C}(M_n, I)$  et que  $f(x) \neq 0$ ,  $x \in I$ ;

alors  $\frac{1}{f(x)} \in \mathcal{C}(M_n, I)$ .

PREUVE. — Posons  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ ,  $\sigma = \min f(x)$  alors

$$g^{(p)} = f^{-p-1} \sum \delta_{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p} f^{\alpha_0} f'^{\alpha_1} f''^{\alpha_2} \dots f^{(p)\alpha_p},$$

où les coefficients  $\delta_x$  sont indépendants de  $f$ . Remplaçons dans cette formule  $f$  par un polynôme  $Q$  de degré  $p$  dont les  $p$  premières dérivées à l'origine coïncident avec  $f(x)$ , on obtient

$$g^{(p)}(0) = \left(\frac{1}{Q}\right)_{x=0}^{(p)}$$

Si l'on pose

$$h_p(r) = \sigma - \sum_{s=1}^p \frac{M_s}{s!} r^s.$$

On a

$$|Q(z)| > h_p(|z|),$$

d'où une majoration de la dérivée  $p$ -ième de  $Q^{-1}$  en utilisant la formule de Cauchy :

$$|g^{(p)}(0)| < \frac{p! r^{-p}}{h_p(r)} \quad \text{pour tout } r \text{ tel que } h_p(r) > 0.$$

Prenons en particulier  $r = \left(\frac{M_p}{p!}\right)^{\frac{1}{p}} \omega$ , où  $\omega$  est une constante,  $\omega < 1$ , on obtient en vertu de 1.3.

$$h_p(r) > \sigma - \frac{\omega}{1 - \omega} > 0 \quad \text{pour } \omega \text{ assez petit.}$$

d'où

$$|g^{(p)}(0)| < M_p \omega^{-p},$$

C. Q. F. D.

**5. Démonstration de 1.5.** — On détermine d'abord la suite  $\alpha_k$  de telle sorte que (2.1.1); (3.1.1) et (1.5.1) soient satisfaits. Ceci sera possible si  $\int_1^{+\infty} T(r) \frac{dr}{r^2}$  est assez petit, ce qu'on peut toujours obtenir en modifiant un nombre fini de  $M_n$ . Une fois que la suite  $\alpha_k$  est déterminée, on détermine  $\gamma(u)$  pour que (3.1.2) soit satisfait.

En appliquant 2.4 à la fonction  $F(x) = 1$ , on obtient que  $m(x) \in \mathcal{C}(M_n, I)$ . Ensuite (3.1.2) et 4.1 donnent  $m^{-1} \in \mathcal{C}(M_n, I)$ . Comme  $mF \in \mathcal{C}(M_n, I)$  (toujours d'après 2.4) il résulte d'après 4 que  $F \in \mathcal{C}(M_n, I)$ , ce qui achève la démonstration.

**6. Remarque.** — On peut se poser le problème de passer du résultat de calcul symbolique individuel 1.5 à un résultat collectif. Notons par  $\mathfrak{N}$  l'ensemble des classes de fonctions satisfaisant 1.2, 1.3 et 1.4 sur un segment  $I$  fixé (resp.  $\mathfrak{N}_1$  l'ensemble des classes satisfaisant 1.2, 1.3.1 et 1.4), et par  $A(I)$  l'ensemble des fonctions analytiques sur  $I$ . Alors si l'on pouvait démontrer

$$\bigcap_{\{M_n\} \in \mathfrak{N}} \mathcal{C}(M_n, I) = A(I)$$

(resp. le même résultat  $\mathfrak{N}$  étant remplacé par  $\mathfrak{N}_1$ ), alors les seules fonctions opérant sur les boules de rayon  $l$  de  $L_1(G)$  seraient les fonctions analytiques sur l'intervalle  $[-l, +l]$  ce qui est le théorème de KATZNELSON [3] dans le cadre du groupe discret infini le plus général. (A suivre.)

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.

- [1] HELSON (Henri) et KAHANE (Jean-Pierre). — *Sur les fonctions opérant dans les algèbres de transformées de Fourier de suites ou de fonctions sommables* (C. R. Acad. Sc., t. 247, 1958, p. 626-628).
- [2] KAHANE (Jean-Pierre) et RUDIN (Walter). — *Caractérisation des fonctions qui opèrent sur les coefficients de Fourier-Stieltjes* (C. R. Acad. Sc., t. 247, 1958, p. 773-775).
- [3] KATZNELSON (Yitzhak). — *Sur les fonctions opérant sur l'algèbre des séries de Fourier absolument convergentes* (C. R. Acad. Sc., t. 247, p. 404-406).
- [4] MALLIAVIN (Paul). — *Impossibilité de la synthèse spectrale sur les groupes abéliens non compacts* (Institut des Hautes Études scientifiques, Publication n° 2, 1959, p. 61-68).

(Manuscrit reçu le 17 juin 1959.)

Paul MALLIAVIN,  
Prof. Fac. Sc. Caen,  
252, rue de Rivoli,  
Paris 1<sup>er</sup>.