BULLETIN DE LA S. M. F.

G. DARBOUX

Note relative à deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité

Bulletin de la S. M. F., tome 7 (1879), p. 7-12
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__7_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Note relative à deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité; par M. G. Darboux.

(Séance du 31 juillet 1878.)

L'intéressante Communication de M. Laisant (*voir* le volume précédent, p. 193) a trait à deux remarquables théorèmes qui, depuis Lagrange, ont été étudiés par différents géomètres. Poinsot les a donnés dans sa *Statique*, et Jacobi, après les avoir établis dans sa *Mécanique analytique* (p. 22), en fait un usage important dans les considérations qu'il développe sur la stabilité du système du monde.

J'indiquerai ici comment je démontre, dans mon enseignement, les propositions ou plutôt la proposition de Lagrange (car le premier théorème de Lagrange n'est qu'un cas particulier du second). En développant une remarque de Leibnitz, on est conduit, en même temps qu'au théorème de Lagrange, à un nouveau mode d'exposition de la théorie du centre des forces parallèles.

On sait que, étant données trois forces concourantes qui se font équilibre, leur point commun d'application est le centre de gravité du triangle formé par leurs extrémités. Leibnitz a remarqué plus généralement que, si n forces concourantes se font équilibre, leur point commun d'application est le centre de gravité de n points de masses égales placés à leurs extrémités. C'est cette remarque, un peu généralisée, qui nous servira de point de départ. Nous allons d'abord indiquer quelques définitions qui serviront à abréger les raisonnements.

Étant donnée une force, nous la désignerons toujours en commençant par son point d'application. Ainsi, la force OA aura son point d'application en O et son extrémité en A. Comme nous n'examinerons que des forces concourantes, il n'y a aucun inconvénient à dire qu'une force OA est la résultante de deux forces PB, QC. Cela signifiera que, si les trois forces étaient déplacées parallèlement à elles-mêmes et ramenées à avoir le même point d'application, la première deviendrait la résultante des deux autres. Ainsi, en tenant compte des deux conventions précédentes, nous pourrons dire, étant donné un triangle ABC, que AB est la résultante de AC et de CB.

Étant donnée une force OA, nous dirons que nous la multiplions par un nombre positif ou négatif m, quand nous lui substituerons une force OB de même direction et de même point d'application, égale à la première multipliée par la valeur absolue de m, de même sens si m est positif, de sens contraire si m est négatif. Il est clair que la force $(m_1 + m_2)\mathrm{OA}$ est la résultante de $m_1\,\overline{\mathrm{OA}}$ et de $m_2\,\overline{\mathrm{OA}}$, et, d'autre part, que, si une force F est la résultante de deux autres F', F'', $m\mathrm{F}$ sera de même la résultante de $m\mathrm{F}'$, $m\mathrm{F}''$.

Ces définitions étant admises, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème I. — *Considérons p points $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_p$ affectés de coefficients positifs ou négatifs $m_1, m_2, \ldots, m_p$ dont la somme n'est pas nulle; O désignant un point quelconque de l'espace, la résultante des forces $m_1\,\overline{\mathrm{OA}_1}$, $m_2\,\overline{\mathrm{OA}_2}$, $\ldots$, $m_p\,\overline{\mathrm{OA}_p}$ ira passer par un point fixe C et era égale à $\mathrm{M}.\overline{\mathrm{OC}}$, M désignant la somme $m_1 + m_2 + \ldots + m_p$.*

Dans le cas exceptionnel où la somme M est nulle, la résultante conservera une grandeur et une direction invariables quand le point O se déplacera; en particulier, si elle est nulle pour une position du point O, elle sera nulle pour toutes les autres.

Soit, en effet, OR la résultante des forces $m_i\,\overline{\mathrm{OA}_i}$. Cherchons la résultante O′S quand le point O est remplacé par le point O′ et les forces $m_i \overline{OA_i}$ par $m_i \overline{O'A_i}$. La force $O'A_i$ peut être regardée comme la résultante de O′O et de OA_i. De même, $m_i O'A_i$ peut être regardée comme la résultante de $m_i \overline{O'O}$ et de $m_i \overline{OA_i}$. On obtiendra donc la résultante O′S : 1° en composant toutes les forces $m_i OA_i$, ce qui donnera OR; 2° en composant toutes les forces $m_i O'O$, ce qui donnera $M.\overline{O'O}$; 3° en composant les deux résultantes partielles

$$\text{(1)} \qquad \text{OR} \quad \text{et} \quad M.\overline{O'O}.$$

Supposons d'abord que M ne soit pas nul, et déterminons sur OR un point C par la condition

$$\text{OR} = M.\text{OC}.$$

Alors O′S, étant la résultante de $M.\overline{OC}$ et de M.O′O, sera évidemment égale à $M.\overline{O'C}$. Elle passera donc toujours par le point C, et sera égale à $M.\overline{O'C}$, ce qui démontre la première partie du théorème, relative au cas où M n'est pas nul.

Supposons maintenant que M soit nul. Alors les deux résultantes partielles (1) se réduiront à une seule. O′S sera égale et parallèle à OR, ce qui achève de démontrer la proposition.

Il est évident que le point C, par lequel va passer la résultante quand M n'est pas nul, ne dépend que des rapports mutuels des coefficients m_i. En mettant à profit cette remarque, considérons les forces $m_1 \frac{\overline{OA_1}}{k}$, $m_2 \frac{\overline{OA_2}}{k}$, ..., $m_p \frac{\overline{OA_p}}{k}$; elles auront pour résultante $\frac{M}{k}$ OC.

Prenons $k = OA_1$, et supposons que le point O s'éloigne indéfiniment. Alors $\frac{\overline{OA_2}}{k}$, ..., $\frac{\overline{OA_p}}{k}$ auront pour limite l'unité. Les différentes forces $\frac{m_i OA_i}{k}$, que l'on peut supposer transportées parallèlement à elles-mêmes de manière que leurs points d'application coïncident avec les points A_i, finiront par devenir parallèles et auront pour grandeurs les valeurs absolues de $m_1, m_2, \ldots, m_p$, deux forces correspondantes à des coefficients de signes contraires ayant des sens opposés. Quant à la résultante qui passe par C et a pour valeur $\frac{M.\overline{OC}}{k}$, on peut transporter son point d'application en C, et elle aura pour valeur limite M. Ainsi la résultante des forces parallèles passera par un point fixe et sera égale à leur somme algébrique. On reconnaît la proposition fondamentale de la théorie des forces parallèles; le point C est le centre des forces parallèles considérées, ou, si l'on veut, le centre de gravité des masses m_i appliquées aux points A_i, et l'on voit que la notion et les propriétés de ce centre se déduisent comme cas particuliers du théorème I.

Ces remarques préliminaires étant faites, nous obtiendrons sans peine le théorème de Lagrange et une proposition nouvelle. Nous avons appelé OR la résultante des forces $m_i\overline{OA_i}$. En employant la formule connue qui donne la résultante en fonction des composantes, nous aurons

$$(2) \qquad \overline{OR}^2 = \Sigma m_i^2 \overline{OA_i}^2 - 2\Sigma m_i m_k \overline{OA_i}\;\overline{OA_k} \cos \widehat{A_i OA_k}.$$

Or, dans le triangle $A_i OA_k$, on a

$$2\,OA_i\,OA_k \cos \widehat{A_i OA_k} = \overline{OA_i}^2 + \overline{OA_k}^2 - \overline{A_i A_k}^2.$$

En se servant de cette relation pour éliminer les cosinus, la formule (2) deviendra

$$(3) \qquad \overline{OR}^2 = M\Sigma m_i \overline{OA_i}^2 - \Sigma\Sigma m_i m_k \overline{A_i A_k}^2.$$

Si l'on remplace OR par $M.\overline{OC}$, on aura précisément la proposition de Lagrange. Sans insister sur ce cas bien connu, je vais examiner spécialement le cas où l'on a $M = 0$. Alors nous savons que la résultante OR est constante en grandeur et en direction, et, en effet, la formule (3) nous donne pour cette résultante la valeur

$$(4) \qquad \overline{OR}^2 = -\Sigma\Sigma m_i m_k \overline{A_i A_k}^2,$$

indépendante de la position du point O.

Supposons maintenant que, considérant un certain nombre des points A_i, on les supprime et on les remplace par un seul point, leur centre de gravité, affecté d'une masse égale à la somme de leurs masses, je dis que la résultante ne sera pas changée. En effet, cela revient à supprimer, par exemple, deux forces $m_1\overline{OA_1}$, $m_2\overline{OA_2}$, et à ajouter la force $(m_1+m_2)\,OA'$ dirigée vers le centre de gravité A' des points A_1, A_2. Or, d'après le théorème I, cette dernière force est la résultante des deux premières. L'opération indiquée a donc pour effet de substituer à deux ou à plusieurs composantes leur résultante partielle, ce qui ne changera pas évidemment la résultante totale.

Donc, dans l'équation (4), le second membre conservera sa valeur quand on substituera aux points A_i les nouveaux points, en nombre moindre, que l'on aura déduits des premiers par des compositions partielles. Nous sommes ainsi conduits à la proposition suivante :

Théorème II. — *Considérons un système de points dont la masse totale est nulle. Remplaçons un ou plusieurs groupes de ces points par leurs centres de gravité, en affectant à ces centres la masse totale des points qu'ils remplacent. Pour un quelconque des systèmes de points ainsi obtenus, la somme*

$$\Sigma\Sigma m_i m_k \overline{A_i A_k}^2$$

conservera une valeur constante, négative ou nulle.

Il serait facile de prouver que ce théorème peut donner celui de Lagrange; je me contenterai de faire remarquer que l'on peut toujours réduire à deux le nombre total des points du système, par exemple, en prenant le centre de gravité de tous les points à masse positive d'une part, et, d'autre part, celui des points à masse négative. Soient B, B' les deux points ainsi obtenus de masses μ, $-\mu$. La somme précédente sera réduite à un seul terme

$$-\mu^2.\overline{BB'}^2,$$

ce qui permettra de la construire géométriquement. Du reste, les points B, B' donnent aussi la direction de la résultante OR; car, si le point O vient en B', cette résultante se réduit à la seule composante $\mu B'B$, et, comme elle est constante en grandeur et en direction, elle sera toujours parallèle à BB' et égale à $\mu.\overline{B'B}$.

Le théorème II peut conduire à de nombreuses propositions de polygonométrie. J'en indiquerai une seule application.

Soit ABCD un quadrilatère, et soient placées les masses 1, -1, 1, -1 aux sommets A, B, C, D. Si nous appelons I, K les milieux des diagonales BD, AC, on aura

$$\overline{BD}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2 - \overline{DA}^2 = -4\overline{IK}^2.$$