BULLETIN DE LA S. M. F.

RAOUL BOTT

Quelques remarques sur les théorèmes de périodicité

Bulletin de la S. M. F., tome 87 (1959), p. 293-310
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__293_0>

Colloques intern. C. N. R. S. [89. 1959. Lille].
Bull. Soc. math. France,
87, 1959, p. 293 à 310.

QUELQUES REMARQUES SUR LES THÉORÈMES DE PÉRIODICITÉ;

PAR

RAOUL BOTT

(Ann Arbor) (1).

1. Introduction. — Les récents travaux de ATIYAH et HIRZEBRUCH [3] ont inspiré cette note. Son modeste but est de discuter les propriétés de naturalité des équivalences d'homotopie (faibles) définies dans [2].

ATIYAH interprète l'équivalence d'homotopie faible

(1.1) $$\gamma : B_U \to \Omega^2 B_U$$

où B_U désigne l'espace de base universel du groupe unitaire infini comme une formule de Kunneth dans le domaine des complexes *C. W.* de dimension finie. Il obtient cette transformation de la manière suivante. Soit

$$E(X) = \pi(X;\, B_U)$$

les classes d'homotopie d'applications de X dans B_U (2). On voit sans peine que $E(X)$ est un groupe abélien pour la somme de Whitney, [ou, si l'on veut, en vertu de (1.1)]. De plus, il existe un couplage naturel de $E(X) \otimes_Z E(Y)$ dans $E(X \# Y)$, ou $X \# Y$ désigne l'espace obtenu à partir de $X \times Y$ en identifiant $X \vee Y$ (accolement de X et Y par leur points-bases) au point base de $X \# Y$. Ce couplage sera appelé le produit tensoriel réduit. (Pour les détails, voir le paragraphe 2.)

Nous avons donc, en particulier, un couplage naturel de $E(X) \otimes_Z E(S^2)$ dans $E(X \# S^2)$. L'adjointe de γ est une application

(1.2) $$\gamma_* : S^2 \# B_U \to B_U$$

(1) L'auteur bénéficie d'un Sloan Fellowship.

(2) Dans tout ceci, X et Y désigneront des complexes $C.W.$ connexes de dimension finie avec un point base.

en vertu de la formule bien connue :

$$(1.3) \qquad \pi(X; \Omega^2 Z) \approx \pi(X \# S^2; Z)$$

et parce que γ est une équivalence d'homotopie, γ_* induit une application bijective.

$$(1.1) \qquad \gamma_* : E(X) \to E(X \# S^2).$$

Il est clair que $E(S^2) = \pi_2(B_U) = Z$. ATIYAH a observé que γ_* coïncide avec l'homomorphisme de $E(X)$ en $E(X \# S^2)$ donné par le produit tensoriel réduit par un générateur de $E(S^2)$. En bref, on peut préciser (1.1) par la formule de Kunneth.

$$(1.5) \qquad E(X) \otimes_Z E(S^2) = E(X \# S^2).$$

Cette expression (1.5) est non seulement plus satisfaisante que (1.1), mais aussi plus précise. D'abord, elle met explicitement en évidence les propriétés additives de γ_*. Ensuite, et ceci me paraîts on principal avantage, elle donne implicitement la description de l'homomorphisme induit par γ_* [dans (1.2)] dans la cohomologie, parce qu'on connaît l'action du produit tensoriel sur les caractères des fibrés. [La démonstration d'ATIYAH va en sens inverse et déduit (1.5) de (1.1) au moyen de la formule donnée dans [2] pour l'homomorphisme en question].

Le but principal de cette note est d'interpréter les théorèmes de périodicité : $B_0 = \Omega^4 B_{Sp}$, $B_{Sp} = \Omega^4 B_0$ d'une manière analogue. Comme ces espaces ont de la torsion en homotopie, une démonstration cohomologique n'est pas possible. Nous devons donc faire usage d'une méthode élémentaire en déformant les applications données dans [2] pour les faire coïncider avec le produit tensoriel réduit.

Pour commencer, nous donnerons dans le paragraphe suivant un bref exposé du produit tensoriel réduit. Les théorèmes de périodicité sous leur nouvel aspect seront donnés dans le § 3, et les démonstrations suivront.

Avant de passer à l'exécution de ce programme, il convient de noter qu'en fait ATIYAH a donné le théorème de périodicité sous une forme un peu différente de celle qui vient de lui être attribuée. Pour diverses raisons formelles, il est avantageux d'utiliser le $K(X)$ de Grothendieck plutôt que notre $E(X)$. De notre point de vue, $K(X)$ peut être défini comme le groupe abélien $E(X) \oplus Z$. [La projection sur le second facteur joue le rôle d'une augmentation de $K(X)$]. Le produit tensoriel réduit ($\#$) définit alors un couplage μ de $K(X) \otimes K(Y)$ dans $K(X \times Y)$ de la maniére suivante :

$$\mu\{(\alpha, n); (\beta, m)\} = (j^*(\alpha \# \beta) + n\pi_1^*(\beta) + m\pi_2^*(\alpha); mn)$$

où $j : X \times Y \to X \# Y$, $\pi_1 : X \times Y \to Y$ et $\pi_2 : X \times Y \to X$ sont les projections naturelles.

En utilisant $K(X)$ plutôt que $E(X)$, le théorème de périodicité affirme que :

$$K(X \times S^2) \approx K(X) \otimes_Z K(S^2),$$

ce qui est précisément l'énoncé d'Atiyah.

Dans ce qui va suivre, j'utiliserai uniquement les classes-S de fibrés [c'est-à-dire $E(X)$] et je laisserai au lecteur le soin d'étendre les résultats aux « classes-K » correspondantes.

2. Le produit tensoriel réduit. — Soit Γ_n la variété de Grassmann des plans complexes à n dimensions dans C^{2n}. Comme fibré universel au-dessus de Γ_n, nous prendrons le fibré η_n formé des couples (A, x), $A \in \Gamma_n$, $x \in A$, et nous désignerons par $\eta_n^\perp$ le fibré complémentaire formé de couples (A, y), $A \in \Gamma_n$, $y \in C^{2n}/A$. Il est clair alors que $\eta_n + \eta_n^\perp$ (somme au sens de WHITNEY) est un fibré trivial de dimension $2n$.

En ajoutant à $A \in \Gamma_n$ un plan fixé à k dimensions, on définit une application $i : \Gamma_n \to \Gamma_{n+k}$ (toutes les inclusions étant équivalentes à une homotopie près), et à proprement parler :

$$E(X) = \lim_{n \to \infty} \pi(X; \Gamma_n).$$

On peut également arranger les inclusions $\Gamma_n \subset \Gamma_{n+1}$ d'une certaine façon, définir B_U comme limite directe de ces complexes $C.\ W.$ et poser alors $E(X) = \pi(X; B_U)$. Les deux procédés présentent des inconvénients, et l'on ne pourrait pas entrer dans les détails sans allonger exagérément l'exposé et en rendre la lecture difficile. Nous interpréterons en général $E(X)$ comme classes d'équivalence de fibrés principaux en $U(n)$ au-dessus de X, $n = 1, 2, \ldots$, deux fibrés étant considérés comme équivalents s'ils peuvent être rendus isomorphes par l'addition de multiples convenables du fibré trivial à chacun d'eux. Cette façon de faire se justifie parce que, dès que n dépasse une certaine borne, les fibrés principaux en $U(n)$ au-dessus de X sont classifiés par les classes d'homotopie des applications de X dans Γ_n, où la correspondance est définie par $f \to f^* \eta_n$, $f \in \pi(X; \Gamma_n)$. Si ξ est un fibré principal en U au-dessus de X, sa classe dans $E(X)$ sera désignée par $[\xi]$ et appelée sa classe-S. Il est clair que la somme de Whitney définit une addition dans $E(X)$, où les fibrés triviaux jouent le rôle de O. De la formule

$$[\eta_n] + [\eta_n^\perp] = [0],$$

il résulte alors qu'avec cette loi $E(X)$ est un groupe abélien.

Soit ξ un fibré au-dessus de X et η un fibré au-dessus de Y. Alors leur produit tensoriel [3] $\xi \otimes \eta$ est bien défini au-dessus de $X \times Y$. Toutefois, $[\xi \otimes \eta]$ n'est *pas* une fonction de $[\xi]$ et $[\eta]$ seulement.

[3] Dans ce paragraphe, nous n'utiliserons que le produit tensoriel sur les nombres complexes.

Pour y porter remède, soit $\xi \# \eta$ défini par :

$$\xi \# \eta = \xi \otimes \eta + \xi^{\perp} \otimes \eta_0 + \xi_0 \otimes \eta^{\perp} \tag{2.1}$$

où $\xi^{\perp} \in -[\xi]$, $\eta^{\perp} \in -[\eta]$, et $\xi_0 = 1 . \dim \xi$, $\eta_0 = 1 . \dim \eta$ (1 représente ici le fibré trivial). Il est clair alors que :

$$(\xi + a . 1) \# (\eta + b . 1) = \xi \# \eta + a . 1 \otimes (\eta + \eta^{\perp}) + (\xi + \xi^{\perp}) \otimes b . 1$$

ce qui entraîne que $[\xi \# \eta]$ ne dépend que de $[\xi]$ et $[\eta]$, et peut donc être représenté par $[\xi] \# [\eta]$.
On a de plus :

(2.2) *La restriction de $\xi \# \eta$ à $X \vee Y$ est triviale.* — En effet, considérons la face $X \vee y_0$. Sur ce sous-ensemble, η est trivial et est donc isomorphe à η_0. Il en résulte que

$$\xi \# \eta \mid X \vee y_0 = (\xi + \xi^{\perp}) \otimes \eta_0 + \eta_0 \otimes \eta_0^{\perp}$$

ce qui est la somme directe de fibrés triviaux.

Nous pouvons donc considérer $\xi \# \eta$ comme un fibré au-dessus de $X \# Y$. Plus précisément, on procédera comme suit. Soit $X \times Y \xrightarrow{\pi} X \# Y$ la projection naturelle, et soit $r : X \vee Y \to X \times Y$ l'injection. On a alors une suite d'homomorphismes :

$$0 \to E(X \# Y) \xrightarrow{\pi^*} E(X \times Y) \xrightarrow{r^*} E(X \vee Y) \to 0 \tag{2.3}$$

qui est exacte parce que chaque face de $X \times Y$ est un rétracte de $X \times Y$.

Nous venons de montrer que $[\xi] \# [\eta]$ appartient au noyau de r^*. Comme la suite (2.3) est exacte, $(\pi^*)^{-1} [\xi] \# [\eta]$ est bien déterminé, et nous le représenterons simplement par $[\xi] \# [\eta]$ dans ce qui suit. C'est là le produit tensoriel réduit que nous désirions construire. On voit aisément que cette opération est bilinéaire.

On peut ici faire trois remarques, bien que nous n'en fassions pas usage dans cette note.

1° Soit $\Delta : X \to X \times X$ l'application diagonale. Alors l'application

$$(\alpha, \beta) \to \Delta^*(\alpha \# \beta), \qquad \alpha, \beta \in E(X)$$

définit une structure d'anneau sur $E(X)$.

2° Soit $A \subset X$ un sous-complexe contenant le point base, et soit $\pi : X \to X/A$ la projection. Alors $E(X/A)$ est un $E(X)$ module, et cette structure est compatible avec π^*. $\pi^* E(X/A)$ est donc un *idéal* dans $E(X)$. Pour le voir, observons que l'application diagonale recouvre une application

$\Delta' : X/A \to X \# X/A$. Le couplage en question est donné par $\Delta'^*(\alpha \# \beta)$.

3° On peut concevoir le produit tensoriel réduit comme une application

$$\mu : B_U \# B_U \to B_U.$$

Cette application et l'application

$$\nu : B_U \times B_U \to B_U$$

donnée par la somme de Whitney font de B_U un « espace anneau » homotopiquement commutatif et associatif. Cette structure sur B_U induit le couplage de

$$\pi(X, B_U) \otimes_Z \pi(Y, B_U)$$

dans $\pi(X \# Y; B_U)$.

3. Les groupes $E_F(X)$. — Soit F, un des trois corps sur les nombres réels R. Nous écrirons C pour les nombres complexes et H pour les quaternions. Cette dernière notation est proposée au lieu de Q en l'honneur de Hamilton, et aussi pour éviter l'ire de N. Bourbaki. Correspondant à ces trois corps, nous aurons des fibrés vectoriels pour groupe de structure $O_R = \{ O(n) \}$ dans le cas de R, $O_C = \{ U(n) \}$ dans le cas de C, et $O_H = \{ Sp(n) \}$ dans le cas de H. (*Dans ce dernier cas, nous considérerons toujours des H-modules à droite.*)

Dans chacun de ces cas, la somme de Whitney est bien définie, ce qui nous permet de définir des classes-S de fibrés qui seront désignés respectivement par $E_R(X)$, $E_C(X)$ et $E_H(X)$.

Les groupes $E_F(X)$ sont liés par des homomorphismes d'extension et de restriction. Si $F \subset F'$ sont deux des champs mentionnés ci-dessus, tout F'-module peut être considéré comme un F-module et induit donc un homomorphisme de restriction [4] :

$$(3.1) \qquad \rho_{F'}^{F} : E_{F'} \to E_F.$$

Réciproquement, notre F-module peut être multiplié tensoriellement à droite par F' considéré comme un F-module à gauche, et donne ainsi un F'-module à droite. L'homomorphisme correspondant est désigné par :

$$(3.2) \qquad \varepsilon_F^{F'} : E_F \to E_{F'}.$$

Lorsque le contexte est clair, nous écrivons simplement ε et ρ respectivement pour $\varepsilon_F^{F'}$ et $\rho_{F'}^{F}$.

Une involution naturelle est définie sur $E_C(X) = E(X)$. Elle est induite par le passage au complexe conjugué dans $O_C = \{ U(n) \}$, et sera désignée par *. Dans les autres cas, il sera commode de définir * comme l'identité.

---

[4] Pour simplifier les notations, nous avons supprimé l'argument X dans (3.1), il en sera ainsi lorsqu'il n'y aura pas de danger de confusion.

Ceci est en accord avec le fait que ces familles n'admettent pas d'automorphisme externe qui ne soit pas homotopiquement trivial. [Observons que $SO(2n)$ admet un pareil automorphisme, mais il devient un automorphisme interne dans $SO(2n+1)$ et n'a donc pas d'effet sur $E_R(X)$.]

PROPOSITION 3.1. — Soit $F \subset G$, alors :

a. $$\varepsilon_F^G \circ \rho_G^F = \dim G/F \quad \text{si} \quad G \neq C.$$

b. $$\rho_G^F \circ \varepsilon_F^G = \dim G/F \quad \text{si} \quad F \neq C.$$

De plus, on a :

d. $$\varepsilon_R^C \circ \rho_C^R = 1 + {}^*, \qquad \rho_H^C \circ \varepsilon_C^H = 1 + {}^*.$$

e. ρ et ε commutent tous deux avec *.

Chacune de ces formules correspond à un isomorphisme de modules plus ou moins bien connu. Par exemple, l'identité $\rho_H^C \circ \varepsilon_C^H = 1 + {}^*$ résulte du C-isomorphisme

$$L \otimes_C H =_C L \oplus \bar{L} \tag{3.3}$$

où L est un c-module et $\bar{L}$ est anti-isomorphe à L. Cet isomorphisme est évidemment donné par $L \otimes_C H = L \otimes_C 1 + L \otimes_C j$, où l'on a $jz = \bar{z}j$ pour $z \in C$. Le C-isomorphisme analogue :

$$L \otimes_R C =_C L \oplus \bar{L} \tag{3.4}$$

donne l'identité $\varepsilon_R^C \circ \rho_C^R$. L'isomorphisme est donné par l'application

$$(x \oplus y) \to 1/2 \left\{ x \underset{R}{\otimes} 1 - xi \underset{R}{\otimes} i \right\} + 1/2 \left\{ y \underset{R}{\oplus} 1 + yi \underset{R}{\oplus} i \right\}.$$

Comme dernier exemple, prenons la formule $\varepsilon_R^H \circ \rho_H^R = 4$. Si M est un H-module (à droite !), on doit donner un H-isomorphisme

$$M \otimes_R H =_H M \oplus M \oplus M \oplus M. \tag{3.5}$$

Celui-ci est donné par l'application :

$$(m, h) \to 1/4 \{ m.h + m.ihi^{-1} + mjhj^{-1} + mkhk^{-1} \} \tag{3.6}$$

où i, j, k ont leur signification habituelle dans H.

Ayant ainsi écarté ces considérations triviales, passons au problème de la définition du produit tensoriel réduit. Si F est dans le centre de G, il est clair que la construction du paragraphe précédent donne un couplage

$$E_F(X) \otimes_Z E_G(Y) \to E_G(X \# Y). \tag{3.7}$$

En effet, si A et B sont respectivement un F-module et un G-module, $A \otimes_F B$ est défini en faisant d'abord de B un F-module à gauche. et en considérant alors $A \otimes_F B$ comme un G-module à droite. Ceci est possible parce que F appartient au centre de G. Le cas $G = H$ est visiblement le seul qui nécessite une description plus détaillée. Nous ferons les conversions suivantes :

(3.8). — Les réels seront identifiés avec le centre H.

(3.9). — Le corps C sera identifié avec $R + Ri$ dans H.

(3.10). — Tous les H-modules à droite seront transformés en H-modules à gauche en posant $h.w = wh^\sigma$, où σ est l'anti-isomorphisme qui laisse 1, i, k invariants et change j en $-j$.

En utilisant (3.10), nous pouvons définir encore un couplage induit par le produit tensoriel, qui sera fondamental pour ce qui va suivre :

Si N et M sont des H-modules à droite, $N \otimes_H M$ est bien défini comme R-module en transformant M en un H-module à gauche conformément à (3.10), il en résulte un couplage

$$E_H(X) \underset{Z}{\otimes} E_H(Y) \to E_R(X \# Y). \tag{3.11}$$

Proposition 3.2. — *Le produit tensoriel commute avec l'opération* *. *On a donc* $(\alpha \# \beta)^* = \alpha^* \# \beta^*$. *De plus, les diagrammes suivants sont commutatifs* (⁵).

(3.12)
$$\begin{array}{ccc} E_R \otimes E_H & \to & E_H \\ \varepsilon \otimes 1 \downarrow & & \downarrow \rho \\ E_H \otimes E_H & \to & E_R \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} E_H \otimes E_H & \to & E_R \\ \rho \otimes 1 \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\ E_R \otimes E_H & \to & E_H \end{array}$$

(3.13)
$$\begin{array}{ccc} E_R \otimes E_H & \to & E_H \\ \varepsilon \otimes \rho \downarrow & & \downarrow \rho \\ E \otimes E & \to & E \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} E_H \otimes E_H & \to & E_R \\ \rho \otimes \rho \downarrow & & \downarrow \varepsilon \\ E \otimes E & \to & E \end{array}$$

Chacune de ces formules est de nouveau une conséquence d'isomorphismes universels entre ces modules. Nous exprimons ces isomorphismes ci-dessous suivant le même plan et avec les notations suivantes :

W désignera un R-module, L un C-module, et M et N désigneront des H-modules. Le corps sur lequel l'isomorphisme sera considéré est indiqué à côté du signe d'égalité

$$(W \underset{R}{\otimes} H) \underset{H}{\otimes} M =_R W \underset{R}{\otimes} M; \qquad M \underset{R}{\otimes} N =_H (M \underset{H}{\otimes} N) \underset{R}{\otimes} H;$$

$$(W \underset{R}{\otimes} C) \underset{C}{\otimes} N =_C W \underset{R}{\otimes} N; \qquad M \underset{C}{\otimes} N =_C (M \underset{H}{\otimes} N) \underset{R}{\otimes} C$$

(⁵) Sauf mention contraire, le signe tensoriel $\otimes$ est pris sur Z.

Ces relations sont induites respectivement par les applications linéaires :

$$(w, h, m) \to w \underset{R}{\otimes} m.h;$$

$$(m, n, h) \to m \underset{R}{\otimes} n.h - mi \underset{R}{\otimes} nih + mj \underset{R}{\otimes} njh - mk \underset{R}{\otimes} nkh.$$

$$(w, z, n) \to w \underset{R}{\otimes} n.z; \qquad (m, n, z) \to m \underset{C}{\otimes} nz + mj \underset{C}{\otimes} njz.$$

(Remarquons qu'a droite nous avons décrit les isomorphismes de droite à gauche) il convient peut-être de noter que *tous les diagrammes ne sont pas commutatifs*. Ainsi le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} E_H \otimes E_H & \to & E_R \\ \rho \otimes \rho \downarrow & & \downarrow 1 \\ E_R \otimes E_R & \to & E_R \end{array}$$

n'est pas commutatif. Pour le rendre commutatif, le 1 doit être remplacé par 4, ce qui explique l'intérêt du couplage $E_H \otimes E_H \to E_R$.

Voici enfin les théorèmes de périodicité dans la forme suggérée par Atiyah :

Théorème 1. — *Le produit tensoriel réduit induit les bijections suivantes* :

a. $\quad E\ (X) \otimes E\ (S^2) = E\ (X \# S^2)$,

b. $\quad E_R(X) \otimes E_H(S^4) = E_H(X \# S^4)$,

c. $\quad E_H(X) \otimes E_H(S^4) = E_R(X \# S^4)$.

D'après notre convention, X est supposé connexe dans ces formules. On ne peut donc pas commencer l'induction en considérant $E_F(S^0)$ et il convient donc d'examiner $E_F(S^4)$. Il est clair que $E_R(S^4)$, $E_C(S^4)$ et $E_H(S^4)$ correspondent respectivenent à $\pi_3\{O(n)\}$, $\pi_3\{U(n)\}$, $\pi_3\{Sp(n)\}$.

Il en résulte qu'on a les bijections :

$$(3.14) \qquad E_H(S^n) \stackrel{\rho}{=} E_C(S^n) \stackrel{\rho}{=} E_R(S^n) \qquad \text{pour } n = 4.$$

D'après la proposition 3.1, * est l'identité sur $E_C(S^4)$, et l'on a les suites exactes :

$$(3.15) \qquad \begin{cases} 0 \to E_R(S^4) \xrightarrow{\varepsilon} E_C\ (S^4) \to Z_2 \to 0 \\ 0 \to E_R(S^4) \xrightarrow{\varepsilon} E_H(S^4) \to Z_4 \to 0 \end{cases} \qquad \text{pour } n = 4.$$

En utilisant ces résultats initiaux, mes formules de périodicité sont maintenant une conséquence immédiate du théorème 1, et s'expriment par :

$$E_H(S^n) = E_R(S^{n+4}), \qquad E_R(S^n) = E_H(S^{n+4}).$$

La proposition (2.1) entraîne de plus que (2.7) et (2.8) restent valables pour $n = 4$ modulo 8, tandis que pour $n > 0$ et $n = 0$ modulo 8 ces deux suites restent valables en y permutant ε et ρ.

4. — **Préliminaires.** — Les constructions de [2] définissent implicitement les applications suivantes :

$$f_H : \Gamma_n(C) \to \Omega\ SU(2n). \tag{4.1}$$

$$f_R : \Gamma_n(H) \to \Omega^3 SO(8n). \tag{4.2}$$

$$f_C : \Gamma_n(R) \to \Omega^3\ Sp\,(2n), \tag{4.3}$$

où $\Gamma_n(F)$ représente la variété de Grassmann des sous-espaces à n dimensions dans un F-module à $2n$ dimensions, les autres rotations étant classiques. Le résultat principal de [1] affirme alors que *lorsque $n \to \infty$ ces applications induisent des isomorphismes d'homotopie.*

Nous y ajouterons trois autres applications que nous allons décrire explicitement.

Avec les notations du § 3, ces applications seront désignées par

$$\lambda_F : O_F(n) \to \Omega\Gamma_n(F) \tag{4.4}$$

Pour construire λ_F, nons identifions $O_n(F)$ avec un gronpe d'automomorphismes du F-module W_n, et nous interprétons $\Gamma_n(F)$ comme les F-sous-espaces à n dimensions du F-module $W_n \underset{R}{\otimes} V_2^0$, où V_2^0 est un R-module à deux dimensions avec $\{e_1, e_2\}$ pour base. Définissons alors (4.4) par

$$\begin{cases} \lambda_F(a,\ \varphi) = \left[x \underset{R}{\otimes} e_1 \cos\varphi/2 + a(x) \underset{R}{\otimes} e_2 \sin\varphi/2\right] \\ \qquad 0 \leqq \varphi \leqq \pi, \qquad x \in W_n. \end{cases} \tag{4.5}$$

Ici [ ] désigne le « plan sous-tendu par » et $a \in O_F(n)$.
Par cette formule, $O_F(n)$ est alors appliqué dans l'espace des chemins de $\Gamma_n(F)$ avec $W_n \underset{R}{\otimes} e_1$ et $W_n \underset{R}{\otimes} e_2$ pour point-base [on peut identifier ce $\Omega\Gamma_n(A)$ avec l'espace habituel des lacets en $W_n \otimes e_1$ en définissant par exemple $\lambda_F(a, \varphi)$ pour $\pi \leqq \varphi \leqq 2\pi$, par :

$$\lambda_F(a,\ \varphi) = \left[x \underset{R}{\otimes} (e_1 \cos\varphi/2 - e_2 \sin\varphi/2)\right] \qquad x \in W_n$$

mais nous omettrons ceci d'une manière systématique, il n'en résulte pas de difficulté].

L'application (4.4) induit aussi une équivalence d'homotopie pour $n \to \infty$. En effet, (4.4) peut être interprété comme la suspension de la fibre dans le fibré universel

$$\begin{array}{c} O_n \to O_{2n} / O_n \\ \downarrow \\ O_{2n} / O_n \times O_n \end{array} \tag{4.6}$$

En composant (4.1), (4.2) et (4.3) avec le λ_H convenable, on obtient des applications :

$$(4.7)\qquad \gamma_C : \Gamma_n(C) \to \Omega^2\Gamma_{2n}(C).$$

$$(4.8)\qquad \gamma_H : \Gamma_n(H) \to \Omega^4\Gamma_{8n}(R).$$

$$(4.9)\qquad \gamma_R : \Gamma_n(R) \to \Omega^4\Gamma_{2n}(H).$$

En les interprétant convenablement, on a les adjointes de ces applications :

$$(4.10)\qquad \gamma_C^\star : \Gamma_n(C) \# \Gamma_1(C) \to \Gamma_{2n}(C).$$

$$(4.11)\qquad \gamma_H^\star : \Gamma_n(H) \# \Gamma_1(H) \to \Gamma_{8n}(R).$$

$$(4.12)\qquad \gamma_R^\star : \Gamma_n(R) \# \Gamma_1(H) \to \Gamma_{4n}(H).$$

car on sait en effet que $\Gamma_1(C) = S^2$, et $\Gamma_1(H) = S^4$.
Considérons alors les fibrés universels η_n au-dessus de $\Gamma_n(C)$. L'élément $[\eta_n \# \eta_1]$ appartient à $E(\Gamma_n(C) \# \Gamma_1(C))$, et est donc représenté par une application :

$$(4.13)\qquad \alpha_C : \Gamma_n(C) \# \Gamma_1(C) \to \Gamma_{n+k}(C)$$

pour un k convenable. D'une manière tout à fait analogue, ce produit tensoriel réduit $[\eta_n = \eta_1]$ définit des applications

$$(4.14)\qquad \alpha_H : \Gamma_n(H) \# \Gamma_1(H) \to \Gamma_{n+k'}(R).$$

$$(4.15)\qquad \alpha_R : \Gamma_n(R) \# \Gamma_1(H) \to \Gamma_{n+k''}(H).$$

Comme nous le verrons dans un instant, ces applications α peuvent aisément être décrites d'une manière explicite, et nous nous proposons simplement de montrer que ces applications α sont homotopes aux applications $\gamma^\star$ correspondantes, en ce sens que, quand l'image est plongée dans un certain $\Gamma_m(F)$ plus grand, les applications deviennent homotopes. Quand ceci aura été fait, nous aurons démontré le théorème 1, où X est remplacé par le $\Gamma_n(F)$ convenable. Par suite du caractère universel des variétés de Grassmann, ce cas particulier entraîne la validité du théorème général et établit donc le théorème 1.

Remarquons que la commutativité de ces déformations ne doit pas être établie. Ceci résulte du fait que, jusqu'à une dimension donnée, il suffit de considérer un Γ_n particulier, et que nos déformations prouveront que les applications $\gamma^\star$ sont équivalentes aux applications α, lesquelles commutent évidemment avec les inclusions $\Gamma_i \subset \Gamma_{i+j}$ parce qu'il en est ainsi pour le produit tensoriel réduit.

La remarque suivante sera utile aussi. Parce que la suite (2.3) est exacte, les classes d'homotopie d'applications de $X \# Y$ sont représentées univoquement par les classes d'applications de $X \times Y$ qui sont homotopes à zéro sur le « wedge » $X \vee Y$. Nous pouvons donc considérer les applications comme définies sur $X \times Y$ plutôt que sur $X \# Y$.

Nous terminerons ce paragraphe par la description annoncée des applications α_F. Remarquons qu'on peut considérer $\eta_n(F)$ comme induite par l'application identique $\Gamma_n(F) \to \Gamma_n(F)$. On pourra donc décrire α_f par une imitation géométrique de la formule (2.1).

Considérons d'abord le cas de α_C. Pour simplifier les notations, nous écrirons Γ_n au lieu de $\Gamma_n(C)$. Soient A_0 le point base de Γ_n et L_0 le point base de Γ_1. Si A est un plan $\in \Gamma_n$, $A^\perp$ désignera son complément orthogonal dans C^{2n} (par rapport à la structure hermitienne habituelle sur C^{2n}). Nous identifierons alors C^{8n} avec

$$C^{2n} \otimes_C C^2 \otimes C^{2n} \otimes_C C^2.$$

Ceci nous permettra de représenter α_C par une application de Γ_n dans Γ_{4n} qui en $A \times L$ dans $\Gamma_n \times \Gamma_1$ sera définie par

$$(4.16) \quad \alpha_C(A, L) = \left(A \otimes_C L + A^\perp \otimes_C L_0\right) + \left(A_0 \otimes_C L^\perp + A_0 \otimes_C L_0\right).$$

Remarquons que les trois premiers termes sont des représentants explicites de $\xi \otimes_C \eta + \xi^\perp \otimes_C \eta_0$ et de $\xi_0 \otimes_C \eta^\perp$. Le dernier terme est un fibré triviail qui a été ajouté pour obtenir une représentation symétrique.

Les formules pour α_H et α_R sont tout à fait analogues. Pour obtenir α_H, (4.16) sera seulement modifié en prenant le produit tensoriel sur H. Dans α_R, le produit tensoriel sera pris sur R.

5. Le cas complexe. — L'application (4.1) : $\Gamma_n(C) \to \Omega O_c(2n)$ a la forme suivante (voir [1] ou [2]) :

$$(5.1) \qquad f_C(A\,;\,\theta)x = \begin{cases} x\,e^{i\theta}, & x \in A, \quad 0 \leqq \theta \leqq \pi, \\ x\,e^{-i\theta}, & x \in A, \quad 0 \leqq \theta \leqq \pi, \\ x\,e^{i\theta}, & x \in A_0, \quad \pi \leqq \theta \leqq 2\pi, \\ x\,e^{-i\theta}, & x \in A_0, \quad \pi \leqq \theta \leqq 2\pi. \end{cases}$$

Cette formule doit être entendue comme suit : pour A fixé $\in \Gamma_n(C)$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, $f(A; \theta)$ est la transformation linéaire de C^{2n} donnée par le second membre de (5.1). Remarquons que la restriction de f à $\Gamma_n(C) \times [0 \leqq \theta \leqq \pi]$ est l'application importante, envoyant $\Gamma_n(C)$ dans l'espace des chemins de $O_c(2n)$ basé à + et — l'identité. Le restant de l'application se borne à identifier l'espace de chemins avec l'élément neutre de l'espace de lacets à l'identité.

Pour décrire l'application composée $\gamma_C = \lambda_C \circ f$, les conventions suivantes seront utiles. Nous identifierons encore $\Gamma_{2n}(C)$ avec les plans à $2n$ dimensions dans le C-module à $4n$ dimensions $W_{2n} \otimes_C V_2$, et nous interpréterons $\Gamma_n(C)$ et $\Gamma_1(C)$ respectivement comme les plans à n dimensions dans W_{2n} et les droites dans V_2. Nous désignerons par e_1 et e_2 une base pour V_2. Nous désignerons par I_2 le rectangle $0 \leq \theta \leq 2\pi$; $0 \leq \varphi \leq \pi$, et nous définirons une application $\rho : I_2 \to \Gamma_1(C)$ en posant

$$(5.2) \qquad \rho(\theta, \varphi) = [e_1 \cos\varphi/2 + e_2 e^{i\theta} \sin\varphi/2].$$

On voit alors aisément que ρ induit un homomorphisme de $\bar{I}_2$ (l'espace quotient obtenu en identifiant dans I_2 (e, φ) avec $(e + 2\pi, \varphi)$ et en identifiant respectivement les cotes $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi/2$ avec deux points distincts) sur $\Gamma_1(C)$. Nous écrirons $L \to \bar{L}$ pour l'involution définie par le passage au complexe conjugué dans $\Gamma_1(C)$, où e_1 et e_2 sont supposés former une base réelle (c'est-à-dire $\bar{e}_1 = e_1$, $\bar{e}_2 = e_2$).

L'ensemble des droites $L \in \Gamma_1(C)$ telles que $\bar{L} = L$ constitue une circonférence $S^1 \subset \Gamma_1(C)$, qui partage $\Gamma_1(C)$ en deux hémisphères D^+ et D^-. Nous choisirons les notations de telle façon que D^+ devienne l'image par ρ de l'ensemble $\theta \leq \pi$ de I_2. L'ensemble complémentaire est alors envoyé dans D^-.

Nous affirmons maintenant que si $\bar{I}$ est identifié avec $\Gamma_1(C)$ par ρ, alors l'adjointe de γ_C a la forme suivante : Pour $A \in \Gamma_n(C)$, $L \in \Gamma_1(C)$,

$$(5.3) \qquad \gamma_C^\star(A, L) = \begin{cases} A \underset{C}{\otimes} L + A^\perp \underset{C}{\otimes} \bar{L} & \text{lorsque } L \in D^+, \\ A_0 \underset{C}{\otimes} L + A_0^\perp \underset{C}{\otimes} \bar{L} & \text{lorsque } L \in D^-. \end{cases}$$

Ceci est immédiat en vertu de (4.16), (5.1) et (5.2) si nous identifions V_2 avec $V_2^0 \underset{R}{\otimes} C$ et utilisons l'isomorphie $W_{2n} \underset{R}{\otimes} V_2^0 = C\, W_{2n} \underset{C}{\otimes} V_2$.

Ensuite, nous plongeons $\Gamma_{2n}(C)$ dans $\Gamma_{4n}(C)$ de manière que $\gamma_C^\star$ et α_C deviennent des applications en un même espace. Pour cela, nous interprétons $\Gamma_{4n}(C)$ comme les plans à $4n$ dimensions dans $W_{2n} \underset{C}{\otimes} V_2 + W_{2n} \underset{C}{\otimes} V_2$, et définissons $\gamma_C^\star$ par :

$$(5.4) \qquad \gamma_C^\star(A, L) = \begin{cases} \left(A \underset{C}{\otimes} L + A^\perp \underset{C}{\otimes} \bar{L}\right) + A_0 \underset{C}{\otimes} V_2, & L \in D^+, \\ \left(A_0 \underset{C}{\otimes} L + A_0^\perp \underset{C}{\otimes} \bar{L}\right) + A_0 \underset{C}{\otimes} V_2, & L \in D^-. \end{cases}$$

Nous allons alors déformer cette application en α_C en deux étapes. Pour simplifier les notations, nous ne mentionnerons pas le C sous le signe du produit tensoriel. Celui-ci sera toujours pris sur C dans ce paragraphe. La première étape transforme (5.4) en

$$(5.5) \qquad (A, L) \to \begin{cases} \left(A \otimes L + A^\perp \otimes \bar{L}\right) \otimes \left(A_0^\perp \otimes L + A_0 \otimes L^\perp\right), & L \in D^+, \\ \left(A_0 \otimes L + A_0^\perp \otimes \bar{L}\right) \otimes \left(A_0^\perp \otimes L + A_0 \otimes L\right), & L \in D^- \end{cases}$$

Ceci est obtenu en observant que

$$A_0 \otimes V_2 + A_0 \otimes (L + L^{\perp}) = A_0 \otimes L + A_0 \otimes L^{\perp},$$

puisque $L \cap L^{\perp} = 0$ pour toutes les L, il en résulte que l'application

$$(A, L) \to A_0 \otimes L + A_0 \otimes L^{\perp}$$

peut être déformée en

$$(A, L) - A_0^{\perp} \otimes L + A_0 \otimes L^{\perp}.$$

Dans l'étape suivante l'application est laissée inchangée sur $\Gamma_n(C) \times D^+$, tandis que sur $\Gamma_n(C) \times D^-$ on effectue une homotopie relative par rapport à $\Gamma_n(C) \times \partial D^-$, permutant les deux termes voisins du signe $\oplus$. Ceci pourra être fait de manière évidente par une rotation de l'un des espaces dans l'autre. Cette homotopie est relative parce que $L = \overline{L}$ sur la frontière de D^-. Il en résulte une application :

$$(5.6) \quad (A, L) \to \begin{cases} (A \otimes L + A^{\perp} \otimes L) \oplus (A_0^{\perp} \otimes L + A_0 \otimes L^{\perp}), & L \in D^+, \\ (A_0 \otimes L + A_0^{\perp} \otimes L) \oplus (A_0^{\perp} \otimes L + A_0 \otimes L^{\perp}), & L \in D^-. \end{cases}$$

Le premier terme de la ligne inférieure se réduit à $(A_0 + A_0^{\perp}) \otimes L$ qui est égal à $A \otimes L + A^{\perp} \otimes L$ pour tous les $A \in \Gamma_n(C)$. Tenant compte de cette substitution, (5.6) devient :

$$(5.7) \quad (A, L) \to (A \otimes L + A^{\perp} \otimes \Psi(L)) + (A_0^{\perp} \otimes \Psi(\overline{L}) + A_0 \otimes L^{\perp}), \quad L \in \Gamma_1(C),$$

où $\Psi : \Gamma_1(C) \to \Gamma_1(C)$ est défini par :

$$(5.8) \qquad \Psi(\overline{L}) \begin{cases} = \overline{L} & \text{pour} \quad L \in D^+, \\ = L & \text{pour} \quad L \in D^-. \end{cases}$$

Il est clair que cette application est homotope à zéro. (5.7) peut donc être déformé en :

$$(5.8) \qquad (A, L) \to (A \otimes L + A^{\perp} \otimes L_0) \oplus (A_0^{\perp} \otimes L_0 + A_0 \otimes L^{\perp})$$

ce qui est précisément α_C.

Ceci complète la démonstration de la première partie du théorème 1.

6. Le cas quaternionien. — Il n'est malheureusement pas possible de trouver explicitement dans [2] les applications γ_R et γ_H. En outre, elles résultent de la composition d'applications qui ont seulement été décrites dans le cadre des espaces symétriques généraux. Nous allons donc d'abord donner une expression explicite des applications correspondant aux x_ν du paragraphe 7 de [2]. Ceci revient à un passage du général au particulier, et nous nous bornerons donc à énoncer nos résultats.

a. — *L'étape* : $\Gamma_n(H) \to \Omega_\nu\, U(4n)/SP(n)$.

Soit W_{2n} un H-module (à droite, comme toujours !) à $2n$-dimensions, et soit $\Gamma_n(H)$ l'ensemble de ces sous-espaces à n dimensions. Pour $A \in \Gamma_n(H)$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$; soit $f_1(A, \theta)$ le C-endomorphisme de W_{2n} défini par

$$(6.1) \qquad f_1(A, \theta)x = \begin{cases} x\, e^{i\theta/2}, & x \in A, \\ x\, e^{-i\theta/2}, & x \in A^{\perp}, \end{cases}$$

$f(A, \theta)$ est donc un élément bien déterminé de $U(4n)$, ce groupe étant interprété comme un sous-groupe des C-automorphismes de W_{2n}.

Identifions $Sp(2n)$ avec le sous-groupe de $U(4n)$ qui induit des H-automorphismes de W_{2n}, et désignons par $\pi_1 : U(4n) \to U(4n)/Sp(n)$ la projection naturelle. Alors l'application composée

$$(6.2) \qquad \pi_1 \circ f_1 : \Gamma_n(H) \to \Omega_\nu\, U(4n)/Sp(2n),$$

où Ω_ν désigne les chemins allant de la classe de l'identité à la classe de $f_1(A, \pi)$, est un représentant pour le ν de [2], paragraphe 8.3. (Remarquons que cette classe est indépendante de A. En effet, si $u \to u^*$ désigne l'automorphisme $u \to r(j)^{-1} u\, r(j)$, où $r(j)$ désigne la multiplication à droite par j, alors l'ensemble des points fixes de * est $Sp(2n)$. De plus,

$$\{f_1(A, \theta)\}^* = \{f(A, \theta)\}^{-1}.$$

Par conséquent, pour montrer que les classes de $f = f_1(A, \pi)$ et $f' = f_1(A', \pi)$ coïncident, il suffit de montrer que $(ff')^* = ff'$, ou, ce qui revient au même, que $f^2 = \{f'\}^2$. Mais ceci est évident, chacune de ces expressions revenant à la multiplication par -1).

b. — *L'étape* : $U(4n)/Sp(2n) \to \Omega_\nu\, SO(8n)/U(4n)$.

Nous conservons nos notations, et nous interprétons $SO(8n)/U(4n)$ comme un groupe de R-automorphismes de W_{2n}. Pour $u \in U(4n)$ et $0 \leqq \varphi \leqq \pi$, définissons $\hat{f}_2(u, \varphi) \in SO(8n)$ par

$$(6.3) \qquad \hat{f}_2(u, O).x = u\{(u^{-1}.x)\, e^{j\theta/2}\}.$$

Remarquons que $\hat{f}_2$ est constant sur les classes de $Sp(2n)$, et induit par conséquent une application f_2 de $U(4n)/Sp(2n) \times I$ en $SO(8n)$. Désignons par $\pi_2 : SO(8n) \to SO(8n)/U(4n)$ la projection naturelle. Alors l'application :

$$(6.4) \qquad \pi_2 \circ f_2 : U(4n)/Sp(2n) \to \Omega_\nu\, SO(8n)/U(4n)$$

est l'application qui correspond au ν de [2], § 8.1. Comme plus haut, la seconde extrémité de ν correspond à la classe de $f_2(u, \pi)$, qui ne dépend pas de $u \in U(4n)$ pour la même raison : $U(4n)$ est l'ensemble des points fixes de l'automorphisme .

$$o \to r^{-1}(i) \circ r(i) \qquad \text{de } SO(8n).$$

c. — L'étape : $SO(8n)/U(4n) \to \Omega_\nu SO(8n)$.

Définissons $f_3 : SO(8n) \times I \to SO(8n)$ par

$$(6.5) \quad f_3(g, x) = g\{(g^{-1}x).e^{ix}\}, \qquad 0 \leq x \leq \pi, \qquad g \in SO(8n)$$

f_3 induit alors l'application cherchée (*voir* [2], § 7.3) :

$$(6.6) \qquad f_3 : SO(8n)/U(4n) \to \Omega_\nu SO(8n),$$

la deuxième extrémité de ν étant moins l'identité. Il est clair que la composition de ces trois applications engendre une application

$$F : \Gamma_n(H) \times I_3 \to SO(8n)$$

qui est définie par

$$(6.7) \qquad F(A; \theta, \Phi, \Psi) = \begin{cases} x.h, & x \in A, \\ x.h^\sigma, & x \in A^\perp \end{cases}$$

avec

$$h = e^{-i\theta/2} e^{-j\varphi/2} e^{i\psi} e^{j\varphi/2} e^{i\theta/2}.$$

Comme aucun de nos espaces de chemins n'était un des espaces de lacets habituels, cette application ne représente pas encore f_H. Par F la frontière de I_3 n'est pas envoyée en un seul point. Pour obtenir f_H, il faut donc encore une homotopie de $F | \Gamma_n(H) \times \partial I_3$ en l'application triviale *qui soit indépendante de $A \in I_n(H)$ et telle que pour un A donné l'application correspondante de S^3 en $SO(8n)$ soit homotope à l'application constante.*

Soit S^3 la sphère à 3 dimensions des quaternions de norme unité. L'ensemble des points fixes de l'antiautomorphisme σ/S^3 est une sphère S^2 à 2 dimensions, intersection de S^3 avec l'espace à 3 dimensions sous-tendu par les quaternions dont la coordonnée j est nulle. Désignons par E^+ l'hémisphère supérieur déterminé par S^2. E^+ est donc formé des quaternions de S^3 dont la composante j est ≥ 0. E^- désignera l'hémisphère inférieur.

L'application

$$\lambda : (\theta, \varphi, \psi) \to e^{-i\theta/2} e^{-\varphi/2} e^{i\psi} e^{j\varphi/2} e^{i\theta/2}$$

envoie le cube $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \psi \leq \pi$ sur E^+.

De plus, cette application est un homéomorphisme à l'intérieur du cube, et il est clair que l'application est compatible avec les identifications provoquées par λ sur la frontière du cube. Nous pouvons donc considérer F comme définie sur le sous-ensemble $\Gamma_n(H) \times E^+ \subset \Gamma_n(H) \times S^3$, par la formule :

$$(6.8) \qquad F(A, g)x = \begin{cases} xg, & x \in A, \quad g \in E^+, \\ xg^\sigma, & x \in A, \quad g \in E^+. \end{cases}$$

Nous affirmons maintenant que $f_H^\star$ est représentée par l'application

$$\Gamma_n(H) \times S^3 \to SO(8n).$$

$$(6.9) \qquad (A, g).x \to \begin{cases} xg, & x \in A, & g \in E^+, \\ xg^\sigma, & x \in A^\perp, & g \in E^+, \\ xg, & x \in A_0, & g \in E^-, \\ xg^\sigma, & x \in A_0^\perp, & g \in E^-. \end{cases}$$

En effet, cette application étend l'application F à $\Gamma_n(H) \times S^3$, puis sur l'ensemble $S^2 = E^+ \cap E^-$, $g = g^\sigma$. De plus, pour $g \in E^-$, (A, g) est indépendant de A. Il en résulte que cette extension représente une homotopie cherchée de $F | \Gamma_n(H) \times S^2$. Enfin, la restriction de (6.10) à $A_0 \times S^3$ est donnée par

$$(A_0, g)x \to \begin{cases} xg, & x \in A_0, & g \in S^3, \\ xg^\sigma, & x \in A_0^\perp, & g \in S^3. \end{cases}$$

L'opération σ renverse l'orientation de S^3, et il en résulte que cette restriction est triviale.

Remarquons ici que l'expression (6.10) de f_H est tout à fait analogue à (5.1). La suite du raisonnement sera donc une imitation du cas complexe. Nous reprenons brièvement les premières étapes.

Nous identifions $\Gamma_{8n}(R)$ avec $W_{2n} \otimes_H V_2$ où W_{2n} et V_2 sont des H-modules à droite des dimensions indiquées, et $V_2 = V_2^0 \otimes_R H$. Nous choisissons alors une H-base e_1, e_2 dans V_2 et nous définissons $\rho : S^3 \times I_1 \to \Gamma_1(H)$ en posant

$$(6.10) \quad \rho(g, \beta) = [e_1 \cos\beta/2 + e_2 g^\sigma \sin\beta/2], \qquad g \in S^3, \qquad 0 \leqq \beta \leqq \pi.$$

Cette application envoie respectivement la face inférieure $S^3 \times O$ et la face supérieure $S^3 \times \pi$ sur deux points distincts, et induit un homéomorphisme de l'espace quotient avec $S^4 = \Gamma_1(H)$. Par conséquent, en vertu de (4.4) et (6.10) l'application composée $\gamma_H = \gamma_R \circ f_H$ sera de la forme

$$(6.11) \quad \gamma_H^\star(A, L) = \begin{cases} A \otimes_H L + A^\perp \otimes_H L^\sigma, & \text{lorsque } L \in D^+, \\ A_0 \otimes_H L + A_0 \otimes_H L^\sigma, & \text{lorsque } L \in D^-. \end{cases}$$

Ici $A \in \Gamma_n(H)$ et $L \in \Gamma_1(H)$, tandis que D^+ et D^- désignent encore respectivement les deux hémisphères dont l'intersection est la sphère à 2 dimensions S^2, sur laquelle $L^\sigma = L$.

A partir d'ici, le raisonnement qui prouve que $\gamma_H^\star \approx \alpha_H$ est tout à fait parallèle à celui du § 5, et sera laissé au lecteur.

Il reste à identifier $\gamma_R^\star$ avec α_R. Ici encore, F_R sera interprété comme résultant de la déformation de la composition de trois applications : La première étape va de $\Gamma_n(R)$ à $\Omega_\vee U(2n)/O(2n)$, la deuxième de $U(2n)/O(2n)$ à $\Omega_\vee Sp(2n)/U(2n)$ et la troisième de $Sp(2n)/U(2n)$ à $\Omega_\vee Sp(2n)$. Heureusement, ces trois applications sont respectivement induites par les applications (6.3), (6.5) et (6.7). En effet, désignons par $\varepsilon = \varepsilon_R^H$ l'identification

$$(6.12) \qquad \varepsilon : R_{2n} \otimes_R H \to W_{2n},$$

où R_{2n} est un R-module à $2n$ dimensions et W_{2n} est le H-module à $2n$ dimensions du paragraphe précédent. Sur W_{2n} nous avons défini la suite de groupes de R-automorphismes

$$(6.13) \qquad Sp(n) \times Sp(n) \subset Sp(2n) \subset U(4n) \subset SO(8n).$$

En vertu de ε, ces groupes opèrent sur $R_{2n} \otimes_R H$. Considérons alors les sous-groupes respectifs de ces groupes qui commutent avec les *translations à gauche de H sur $R_{2n} \otimes_R H$.* [Celles-ci sont définies par $l(R)\, e \otimes_R w = e \otimes_R hw$]. On voit que ces intersections forment la suite emboîtée :

$$(6.14) \qquad O(n) \times O(n) \subset O(2n) \subset U(2n) \subset Sp(2n).$$

De plus, l'inclusion de (6.15) dans (6.14) induit des plongements

$$(6.15) \quad \begin{cases} \varepsilon : \quad \Gamma_n(R) \subset \Gamma_n(H); \qquad U(2n)/O(2n) \subset U(4n)/Sp(2n); \\ \qquad Sp(2n)/U(2n) \subset SO(8n)/U(4n); \qquad Sp(2n) \subset SO(8n). \end{cases}$$

Enfin, parce que les applications (6.3), (6.5) et (6.7) ne font appel qu'à la structure de H-module à droite de W_{2n}, ces applications conservent les sous-ensembles dans l'image de ε.

L'examen de [2], § 7.8 montrera que

(6.16) *Les trois applications dont la composition donne γ_R sont respectivement les ε-restrictions des applications* (6.3), (6.5) *et* (6.7).

Il en résulte que $F_R : \Gamma_n(R) \times S^3 \to Sp(2n)$ est représentée par

$$F_R = \varepsilon^{-1} \circ F_H \circ \varepsilon.$$

Par conséquent,

$$\gamma_R^\star : \Gamma_n(R) \times \Gamma_1(H) \to \Gamma_{2n}(H)$$

est donné par

$$(6.17) \qquad \gamma_R^\star(A, L) = \begin{cases} A \underset{R}{\otimes} L + A^\perp \underset{R}{\otimes} L^\sigma & \text{lorsque} \quad L \in D^+, \\ A_0 \underset{R}{\otimes} L + A_0^\perp \underset{R}{\otimes} L^\sigma & \text{lorsque} \quad L \in D^-. \end{cases}$$

Nous avons employé ici les notations de (5.3), ainsi que l'isomorphisme canonique

$$\left(A \underset{R}{\otimes} H\right) \underset{H}{\otimes} M = A \underset{R}{\otimes} M,$$

qui est valable pour un R-module A et un H-module M.

A partir d'ici, le raisonnement du paragraphe 5 est de nouveau applicable, ce qui achève de démontrer le théorème 1.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BOTT (R.). — *The space of loops on a Lie group* (*Mich. math. J.*, t. 5, 1958, p. 35-61)

[2] BOTT (R.). — *The stable homotopy of the classical groups* (*Annals of Math.*, t. 70, 1959, p. 313-337).

[3] HIRZEBRUCH (F.). — *A Riemann-Roch theorem for differentiable manifolds* (*Séminaire Bourbaki*, t. 11, 1958-1959, n° 177).

Raoul BOTT,
Department of Mathematics,
Harvard University,
Cambridge 38, Mass. (États-Unis).