BULLETIN DE LA S. M. F.

HANS GRAUERT

Une notion de dimension cohomologique dans la théorie des espaces complexes

Bulletin de la S. M. F., tome 87 (1959), p. 341-350

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__341_0>

Colloques intern. C. N. R. S. [89. 1959. Lille].
Bull. Soc. math. France,
87, 1959, p. 341 à 350.

UNE NOTION DE DIMENSION COHOMOLOGIQUE DANS LA THÉORIE DES ESPACES COMPLEXES;

PAR

HANS GRAUERT
(Münster).

INTRODUCTION. — La notion de cohomologie à coefficients dans un faisceau analytique cohérent est importante pour l'étude de nombreux problèmes de la théorie des fonctions de plusieurs variables. H. CARTAN [1] a montré que cette cohomologie est triviale dans le cas des variétés de Stein ou plus généralement des espaces holomorphiquement complets, c'est-à-dire que $H^n(X, S) = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ lorsque X est un espace holomorphiquement complet, et S un faisceau analytique cohérent sur X. On a conjecturé, depuis longtemps, que la propriété : $H^n(X, S) = 0$, $n \geqq q > 0$ est satisfaite par des espaces qui ne sont pas holomorphiquement complets. Il sera montré dans la présente note que ce problème est en relation étroite avec la q-convexité, introduite par ROTHSTEIN, et une notion de dimension homologique. Du résultat principal, on déduit finalement un théorème sur la nullité des groupes de cohomologie des espaces complexes compacts.

Une partie des résultats du paragraphe 4 a été obtenue en collaboration avec A. ANDREOTTI. Ils seront publiés ainsi que leurs démonstrations dans un travail ultérieur plus developpé.

1. Notions générales. — Par espace annelé, on entend, d'après J.-P. SERRE [2] un espace topologique X, muni d'un faisceau $\mathcal{O} = \mathcal{O}(X)$ d'anneaux commutatifs, $\mathcal{O}$ est appelé le faisceau structural de X. On supposera que chaque fibre $\mathcal{O}_x$, $x \in X$ contient un élément unité.

(1) CARTAN (Henri), *Variétés analytiques complexes et cohomologie*, *Colloque sur les fonctions de plusieurs variables* [1953, Bruxelles]. Paris, Masson, 1953; p. 41-55.
(2) SERRE (Jean-Pierre), *Faisceaux algébriques cohérents*, *Annals of Math.*, t. 61, 1955, p. 197-278.

DÉFINITION 1. — Un espace annelé $(X, \mathcal{O})$ est appelé espace annelé complexe lorsque son faisceau structural est un sous-faisceau du faisceau $C(X)$ des germes de fonctions continues à valeurs complexes contenant les germes de fonctions constantes.

Si $(X, \mathcal{O})$ est un espace annelé complexe, ou peut considérer, comme il est bien connu, toute section de $\mathcal{O}$ comme une fonction à valeurs complexes. Les fonctions ainsi obtenues ont été appelées par SERRE : « fonctions morphiques ».

Les sous-ensembles analytiques [3] A des domaines G de l'espace complexe à n dimensions C^n forment des exemples simples d'espaces annelés complexes. Désignons par Λ le faisceau des germes de fonctions holomorphes dans G, par $I \subset \Lambda$ le sous-faisceau des germes de fonctions holomorphes nulles sur A, et choisissons comme faisceau structural sur A le faisceau $(\Lambda/I) \mid A = \mathcal{O}(A)$. $\mathcal{O}(A)$ peut être considéré comme sous-faisceau de $C(A)$. Le plongement naturel : $\mathcal{O}(A) \to C(A)$ est obtenu par l'injection : $\Lambda \to C(G)$.

Si $(X, \mathcal{O}_1)$ et $(Y, \mathcal{O}_2)$ sont deux espaces annelés, il peut exister des applications continues $\varphi : X \to Y$ qui sont compatibles avec les faisceaux structuraux.

DÉFINITION 2. — Un morphisme $\varphi : X \to Y$ est une application continue : $X \to Y$ satisfaisant à :

si g est une fonction morphique sur un ouvert $V \subset Y$, $f = g \circ \varphi$ est une fonction morphique sur l'ouvert $U = \overset{-1}{\varphi}(V) \subset X$.

φ est un bimorphisme de X sur Y lorsque :

1° φ est un homéomorphisme de X sur Y.

2° φ et $\overset{-1}{\varphi}$ sont des morphismes.

On reconnaît facilement qu'un bimorphisme $\varphi : X \to Y$ définit toujours un isomorphisme $\hat{\varphi} : \mathcal{O}_2 \to \mathcal{O}_1$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_1 & \xleftarrow{\hat{\varphi}} & \mathcal{O}_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow[\varphi]{} & Y \end{array}$$

soit commutatif. S'il existe un bimorphisme : $X \to Y$, il en résulte que $(X, \mathcal{O}_1)$. $(Y, \mathcal{O}_2)$ sont structuralement équivalents (isomorphes).

Si $(X, \mathcal{O})$ est un espace annelé complexe, il en est de même de tout ouvert $U \subset X$. Le faisceau structural de U s'obtient par restriction à U du faisceau $\mathcal{O}$ (ce qui se note : $\mathcal{O}(U) = \mathcal{O} \mid U$).

([3]) Pour la théorie des ensembles analytiques, *cf.* : REMMERT (R.) und STEIN (K.), *Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen*, *Math. Annalen*, t. 126, 1953, p. 263-306.

DÉFINITION 3. — Un espace annelé complexe $(X, \mathcal{O})$ est appelé un espace complexe lorsque :

1° X est un espace d'Hausdorff.

2° Chaque point $x \in X$ possède un voisinage (ouvert) $U(x)$ isomorphe à un ensemble analytique ([4]) $A \subset G \subset C^n$.

Dans les paragraphes qui suivent, nous ne considérons que des espaces complexes X. « morphique » sera donc toujours remplacé par holomorphe. Une application isomorphe de X sur un ensemble analytique $A \subset G \subset C^n$ sera encore appelée un plongement (biholomorphe) de X dans G.

Les notions usuelles, nécessaires à la construction d'une théorie des fonctions peuvent se définir sur les espaces complexes. Elles seront supposées connues

Par faisceau analytique sur X, on entend un faisceau S de groupes abéliens sur lequel opère le faisceau structural $\mathcal{O}$ (c'est-à-dire : chaque fibre $\mathcal{O}_x$ opère sur S_x, $x \in X$). Le faisceau structural $\mathcal{O}$, ainsi que la somme directe $\mathcal{O}^p$ de p copies de $\mathcal{O}$ sont des faisceaux analytiques particuliers. Entre deux faisceaux analytiques S_1, S_2 peuvent se définir des homomorphismes de faisceaux analytiques. Ce sont des applications continues α : $S_1 \to S_2$ qui sont pour chaque $x \in X$ des homomorphismes de $\mathcal{O}_x$-modules de $(S_1)_x$ dans $(S_2)_x$.

DÉFINITION 4. — Un faisceau analytique S sur un espace complexe X est dit cohérent lorsque chaque point $x \in X$ possède un voisinage $\mathrm{U}(x)$ sur lequel on peut définir une suite exacte de faisceaux analytiques :

$$\mathcal{O}^p(U) \to \mathcal{O}^q(U) \to S(U) \to 0.$$

Nous considérerons en particulier dans ce qui suit des faisceaux analytiques libres S, c'est-à-dire isomorphes au faisceau $\mathcal{F}$ des germes de sections holomorphes d'un espace fibré analytique F à fibre vectorielle. Les propriétés suivantes se démontrent facilement :

1. F est déterminé par S à une équivalence analytique près.

2. S est libre si et seulement s'il est cohérent et si chaque fibre S_x, $x \in X$ est module libre sur $\mathcal{O}_x$.

Nous devrons plus loin considérer des espaces analytiques normaux, c'est-à-dire des espaces pour lesquels chaque fibre $\mathcal{O}_x$ est un anneau d'intégrité intégralement clos dans son corps de fractions. Comme tous les domaines ramifiés et non ramifiés dans et sur l'espace C^n sont des espaces complexes

([4]) C'est J.-P. SERRE qui a posé le premier cette définition sur la théorie des espaces complexes, *voir* aussi : GRAUERT (H.) und REMMERT (R.), *Komplexe Räume*, *Math. Annalen*, t. 136, 1958, p. 245-318, où un exposé complet est donné.

normaux particuliers, il n'est pas besoin d'insister plus sur l'importance des espaces complexes pour la théorie des fonctions de plusieurs variables.

Les variétés analytiques complexes apparaissent également comme des espaces complexes particuliers. Un espace complexe est une variété complexe lorsque chaque point $x \in X$ est un point régulier, c'est-à-dire lorsque chaque anneau local $\mathcal{O}_x$ est régulier. Comme on le voit facilement, on peut définir dans un voisinage $U(x)$ d'un point régulier des coordonnées complexes $z_1, \ldots, z_n$ telles que $\mathcal{O}(U)$ coïncide avec le faisceau des germes de fonctions holomorphes de $z_1, \ldots, z_n$.

2. **Notions de Dimension.** — Tout espace complexe X, puisqu'il est localement isomorphe à des ensembles analytiques $A \subset G \subset C^n$, a en chaque point x une dimension topologique finie bien déterminée $d_x(X)$, qui est toujours un nombre pair.

$\dim_x(X) = 1/2\, d_x(X)$ est appelé la dimension complexe de X au point x et $\dim_x(X) = \max_x \dim_x(X)$ la dimension complexe de X. Si pour tout point $x \in X$ l'égalité $\dim_x(X) = \dim(X)$ a lieu, X sera dit équidimensionnel.

La géométrie algébrique montre que la dimension $\dim(X)$ d'un espace complexe ne satisfait pas aux propriétés qui valent dans le cas d'une variété. Ainsi par exemple, le « vanishing theorem » de KODAIRA (5), qui affirme la nullité des groupes de cohomologie $H^n(X, F)$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, $N = \dim X$, lorsque F est un espace fibré en droites négatif, est faux lorsque X est un espace complexe. Il y a même des contre-exemples dans lesquels l'espace est équidimensionnel et normal.

$\dim(X)$ n'est évidemment pas la bonne notion de dimension pour les théorèmes de cette sorte.

Afin de lever les difficultés indiquées, nous procèderons de la manière suivante : X désigne encore un espace complexe et S un faisceau analytique cohérent sur X. Soit $x \in X$ un point quelconque. Nous choisissons alors un voisinage $U(x)$ qui se laisse plonger par une application biholomorphe ψ dans un domaine $Z \subset C^m$ et nous posons $A = \psi(U)$. Naturellement U, m, Z et ψ ne sont pas univoquement déterminés. Parmi toutes les dimensions possibles de l'espace de plongement, il y en a cependant une plus petite que nous désignons par $m(x)$. On prouve que $m(x) = \dim_C i(x)/i^2(x)$ (6), où $i(x)$ est l'idéal du germe des fonctions localement holomorphes nulles en x, $i^2(x)$ est engendré par les produits $f.g$ de germes $f \in i(x)$, $g \in i(x)$,

On poursuit en démontrant facilement la proposition suivante :

(*) Soit $\psi^* : U^* \to Z^* \subset C^m$ un plongement analytique d'un voisinage $U^*(x)$

(5) *Voir* : KODAIRA (K.), *On a differential-geometric method in the theory of analytic stacks*, *Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 39, 1953, p. 1268-1273.

(6) La démonstration m'a été communiquée par A. ANDREOTTI.

dans un domaine $Z^\star \subset C^{m^\star}$ tel que $m^\star = m(x)$. Il existe alors dans un voisinage $V^\star(\psi^\star(x)) \subset Z^\star$ un isomorphisme analytique $V^\star \rightarrow V = V(\psi(x)) \subset Z$ qui est un isomorphisme analytique de $V^\star \cap A^\star$, $A^\star = \psi^\star(V^\star)$ sur $V \cap A$.

$\tau(V^\star)$ est ainsi un ensemble analytique sans singularité dans V.

Le faisceau $S(U) = S \mid U$ se transporte par ψ sur A.

On obtient un faisceau analytique cohérent $S^\star$ sur A qui se laisse prolonger trivialement en un faisceau cohérent analytique τ : $S'^\star$ sur Z. D'après le théorème des syzygies de Hilbert, $(S'^\star)_z$, $z = \psi(x)$ possède une résolution libre : $\Lambda \xrightarrow{\varepsilon} (S'^\star)_z \rightarrow 0$ avec :

$$\Lambda = \left[0 \rightarrow (\mathcal{O}^{p_d})_z \xrightarrow{\alpha_d} (\mathcal{O}^{p_{d-1}})_z \xrightarrow{\alpha_{d-1}} \dots \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{O}^{p_0})_z\right]$$

où le noyau de α_r, $r < d - 1$ est un module non libre sur l'anneau $\mathcal{O}_z$. Le nombre d est indépendant du choix de Λ. De plus, il résulte aisément de (*) que $m - d$, ne dépend pas de U, ψ, etc....

Nous désignons $m - d$ par $\mathrm{dih}_x(S)$ et appelons $\mathrm{dih}_x(S)$ la dimension cohomologique de S au point x. Par définition :

$$\mathrm{dih}(S) = \min_x \mathrm{dih}_x(S) \quad (^7).$$

Le cas où $S = \mathcal{O}(X)$, faisceau structural de X, mérite un intérêt particulier. Nous posons $\mathrm{dih}_x(\mathcal{O}(X)) = \mathrm{dih}_x(X)$ et $\mathrm{dih}_x(X) = \min_x \mathrm{dih}_x(X)$. Le nombre $\mathrm{dih}(X)$ s'appelle la dimension cohomologique de X. On a alors :

1° $\mathrm{dih}(X) \leqq \dim(X)$

2° Si $\dim_x(X) > 0$ pour tout $x \in X$ alors $\mathrm{dih}(X) \geqq 1$

3° Si X est un espace complexe normal avec $\dim_x(X) \geqq 2$, $x \in X$, alors $\mathrm{dih}(X) \geqq 2$.

4° Si X est une variété complexe purement dimensionnelle, alors $\mathrm{dih}(X) = \dim(X)$.

3. La q-convexité.

— Une notion, introduite il y a quelques années par W. Rothstein (8), et qui est une généralisation de la pseudo-convexité, est importante pour les propositions qui suivent.

Définition 4. — Une fonction φ à valeurs réelles, deux fois continûment différentiable dans un domaine $G \subset C^n$ est appelée q-sous harmonique dans G, quand en chaque point $z \in G$, la forme de Levi :

$$L(\varphi) = \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_n \partial \bar{z}_m} dz_n d\bar{z}_m$$

(7) Ces définitions et les propriétés qui suivent dans le paragraphe 3 sont connues depuis longtemps en géométrie algébrique. Elles remontent en partie à J.-P. Serre.

(8) Notre q-convexité a été appelé par Rothstein : $(n - q)$-pseudoconvexité.

a au plus l'indice $q-1$. φ est appelée fortement q-sousharmonique dans G, quand $L(\varphi)$ a en chaque point $z \in G$ au moins $n-q+1$ valeurs propres positives, $(q=1, 2, \ldots, n)$. Puisque les espaces complexes X présentent en général des points non uniformisables, la notion de fonction différentiable doit être définie de façon particulière. Une fonction φ définie sur X est dite k fois continûment différentiable lorsque pour chaque point $x \in X$, il existe un voisinage $U = U(X)$, un plongement analytique $\psi : U \to G \subset C^n$ et une fonction k-fois continûment différentiable dans G : $\hat{\varphi}$ tels que : $\varphi \mid U = \hat{\varphi} \circ \psi$.

DÉFINITION 4 *a*. — φ est dite (fortement) q-sousharmonique dans X lorsque $\hat{\varphi}$ peut être choisie (fortement) q-sousharmonique $(q=1, \ldots, n, \ldots)$, [9].

Il est maintenant facile de définir la q-convexité des espaces complexes quelconques :

DÉFINITION 5. — Un espace complexe X est appelé fortement q-convexe lorsqu'il est compact ou lorsqu'il existe une partie compacte $K \subset X$ et une fonction φ fortement q-sousharmonique dans $X-K$ tels que tous les ensembles $\{x \in X-K;\ \varphi(x) < r\}$, $r > -\infty$ soient relativement compacts dans X. X est dit o-convexe lorsqu'il est compact.

On voit que tout-espace q-convexe est aussi $(q+1)$-convexe. On a de plus le théorème suivant que nous ne démontrerons pas ici :

THÉORÈME. — *X est fortement 1-convexe si et seulement si une modification holomorphe propre peut le changer en un espace holomorphiquement complet* [10].

La notion d'espace holomorphiquement complet s'énonce :

DÉFINITION 6. — Un espace complexe X est dit holomorphiquement complet s'il est :

1° K-complet

2° holomorphiquement convexe.

K-complet signifie que pour chaque point $x_0 \in X$ il existe un nombre fini de fonctions holomorphes dans X : $f_1, \ldots, f_k$ telles que x_0 soit un point isolé de l'ensemble analytique

$$A = \{x \in X,\ f_r(x) = f_r(x_0),\ r = 1, 2, \ldots, k\}.$$

Un espace complexe est holomorphiquement convexe lorsque l'enveloppe d'holomorphie $\hat{K} = \{x \in X : |f(x)| < \sup |f(K)|$ pour toute fonction holomorphe f dans $X\}$ de toute partie compacte $K \subset X$, est compacte.

---

(9) Il ne serait pas nécessaire d'exiger la différentiabilité dans la définition des fonctions q-sous harmoniques. Elle n'apparaît ici que pour la simplicité. Les résultats qui suivent n'ont pas la plus grande généralité possible.

(10) *Voir* : GRAUERT (H.), *On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds*, *Annals of Math.*, t. 68, 1958, p. 470-472.

Enfin, une modification holomorphe propre est une application holomorphe propre de X sur Y qui est un isomorphisme en dehors d'un sous-ensemble analytique compact de dimension plus petite.

On n'a pas pu vérifier l'exactitude de la proposition suivante, qu'il est facile de conjecturer :

« Si $\dim X \leqq n$ et si X a une topologie dénombrable, alors X est fortement n-convexe ».

Il est encore possible de définir une q-convexité négative :

DÉFINITION 7. — Un espace complexe X est appelé fortement q-convexe $(-\infty < q < 0)$, lorsqu'il existe une partie compacte $K \subset X$ et une fonction $\varphi > 0$ fortement q-sousharmonique définie dans $X - K$ tels que tous les sous-ensembles $\{x \in X - K, \varphi(x) \geqq r\}$, $r > 0$ soient relativement compacts dans X.

On voit de nouveau que tout espace q-convexe est d'abord $(q-1)$ convexe $(q < 0)$. On obtient les exemples les plus simples d'espaces négativement convexes, lorsqu'on enlève des parties q-convexes convenables, $q > 0$, d'espaces compacts complexes. Cependant tous les espaces négativement convexes ne peuvent se construire de cette façon. Il existe même des contre exemples dans le cas $q = 1$, $\dim_x X > 1$, $X =$ variété.

DÉFINITION 8. — Un espace complexe X est dit q-complet $(q > 0)$ lorsqu'il existe dans X une fonction φ fortement q-sousharmonique pour laquelle tous les ensembles $\{x \in X ; \varphi(x) < r\}$ sont relativement compacts dans X.

On démontre le :

THÉORÈME. — *Un espace complexe X est 1-complet si et seulement s'il est holomorphiquement complet (Solution du problème de Levi pour les espaces complexes généraux)* [10].

4. Cohomologie. — Nous indiquons dans ce paragraphe une suite de propositions sur les groupes de cohomologie de Čech des espaces q-convexes. Les démonstrations de ces résultats requièrent une technique très subtile. Elles seront publiées dans un travail commun avec A. ANDREOTTI.

THÉORÈME 1. — *Soit X un espace q-convexe, $q > 0$, S un faisceau analytique cohérent sur X. On a alors $\dim_c H^n(X, S) < \infty$ pour $n \geqq q$. Si X est q-complet, on a même : $H^n(X, S) = 0$, $n \geqq q$* [11].

On doit appliquer pour démontrer le théorème 1, le lemme suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit X un espace q-convexe, $K \subset X$ une partie compacte,*

---

[11] Le résultat analogue pour les domaines $G \subset C^n$ a été indiqué sans démonstration par EHRENPREIS au *Congrès de Théorie des fonctions* [1957 Princeton].

φ une fonction fortement q-sousharmonique dans $X - K$, pour laquelle tout ensemble $B_r = K \cup \{ x \in X - K : \varphi(x) < r \}$ est, pour r suffisamment grand, un ensemble ouvert relativement compact dans X. Alors l'injection $i : B_r \to X$ détermine un homomorphisme $i^* : H^n(X, S) \to H^n(B_r, S)$, $n \geqq q$ qui est bijectif.

On démontre alors que la cohomologie de B_r est finie, resp. nulle si $n \geqq q$, d'où résulte le théorème 1.

THÉORÈME 3. — *Soient X un espace complet, S un faisceau analytique cohérent sur X, B un domaine ouvert de X, et φ une fonction fortement q-sousharmonique dans B, telle que chaque $B_r = \{ x \in B : \varphi(x) < r \}$ soit relativement compact dans B. Alors l'homomorphisme i^* :*

$$H^n(X, S) \to H^n(X - B_r, S), n < \operatorname{dih}(S) - q$$

est bijectif et pour $n = \operatorname{dih}(S) - q$ encore injectif ($q > 0$).

THÉORÈME 4. — *Soient X un espace q-convexe, S un faisceau analytique cohérent sur X, $q < 0$. On a alors $\dim_c H^n(X, S) < \infty$ pour $n < \operatorname{dih}(S) + q$.*

Une application possible pour la cohomologie à supports compacts est le :

THÉORÈME 5. — *Soit X un espace holomorphiquement complet, S un faisceau analytique cohérent sur X. On a alors pour les groupes de cohomologie à supports compacts : $H_c^n(X, S) = 0$ pour $n < \operatorname{dih}(S)$.*

Le théorème 5 peut encore être démontré directement au moyen d'une méthode de plongement.

K. KODAIRA a défini pour un fibré en droites analytique complexe F sur une variété complexe compacte M une notion de courbure. F est dit négatif lorsqu'une certaine forme quadratique attachée à F est définie négative. D. C. SPENCER a démontré que cette propriété est équivalente à la propriété que le fibré F est fortement 1-convexe.

Nous définissons :

DÉFINITION 9. — Un fibré en droites analytique complexe F sur un espace complexe compact est dit q-négatif lorsque l'espace fibré F est fortement q-convexe.

F^k étant le produit tensoriel k-uple de F, $\mathfrak{F}^k$ le faisceau des germes de sections holomorphes dans F^k, on prouve :

THÉORÈME 6. — *$H^n(X, \mathfrak{F}^k) = 0$ pour $k > k_0$ et $n \leqq \operatorname{dih}(X) - q$ lorsque F est q-négatif.*

Le théorème 6, est une généralisation d'un lemme connu de ENRIQUES-

ZARISKI ([12]). Il est dans le cas ou $q = 1$ et X est une variété, contenu dans le célèbre « vanishing theorem » de KODAIRA, qui affirme que dans ce cas particulier, on peut même poser $k_0 = 0$. Il n'est pas connu si cela est possible sans restriction. Par contre, le théorème 6 est certainement faux en général pour $n > \operatorname{dih}(X) - q$.

Indiquons brièvement la démonstration du théorème 6. Nous complétons d'abord l'espace fibré F par addition de l'ensemble $\hat{\rho}$ des points à l'infini des fibres en un espace complexe compact $\overline{F}$. π désigne également la projection : $\overline{F} \to X$, ρ la section nulle de F. L'espace fibré en droites $\hat{F}^k = \tilde{F}^k \otimes (+ k\hat{\rho})$, où $\tilde{F}^k$ est obtenu par relèvement de F^k sur $\overline{F}$ par π, est analytiquement équivalent à l'espace fibré en droites qui appartient au diviseur $(+ k\rho)$. Il exise un plongement naturel du faisceau $\hat{\mathcal{F}}^p \to \hat{\mathcal{F}}^q$ pour $0 \leq p \leq p$. De plus, on a $\hat{\mathcal{F}}^p \mid \overline{F} - \rho \approx \mathcal{O}(\overline{F} - \rho)$ c'est-à-dire que le fibré en droites $\hat{F}^p \mid \overline{F} - \rho$ est analytiquement trivial.

Mais $\overline{F} - \rho$ est $(-q)$-convexe. Ainsi les espaces vectoriels :

$$H^n(\overline{F} - \rho;\, \mathcal{O});\ n < \operatorname{dih}(\overline{F} - \rho) - q = \operatorname{dih}(X) + 1 - q$$

ont une dimension finie. Nous choisissons un recouvrement de Stein $U = \{U_i\}$ de X et obtenons par relèvement un recouvrement ouvert $\hat{U} = \{\hat{U}_i\}$ de $\overline{F}$. On a toujours :

$$H^m(\hat{U}_{i_0, \ldots, i_s},\, \hat{\mathcal{F}}^k) = H^m(\hat{U}_{i_0, \ldots, i_s - \rho},\, \hat{\mathcal{F}}^k) = 0,\ m > 0,\ k \geq 0.$$

U, $\hat{U}$, $\hat{U} \cap (\overline{F} - \rho)$ sont ainsi des recouvrements de Leray par rapport aux faisceaux qui doivent être considérés ici. Un raisonnement simple prouve : il existe un nombre fini de cocycles $\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_{l_n}^{(n)} \in Z^n(\hat{U}, \hat{\mathcal{F}}^{k_0})$ tels que les restrictions $\xi_m^{(n)} \mid \overline{F} - \rho$, $m = 1, \ldots, l_n$ représentent une base de l'espace vectoriel complexe : $H^n(\overline{F} - \rho, \mathcal{O})$. Si maintenant $\xi \in H^n(X, \mathcal{F}^k)$ est une classe de cohomologie, elle sera représentée par un cocycle $\eta \in Z^n(U, \mathcal{F}^k)$. Si l'on relève η par π au dessus de $\overline{F}$, on obtient un cocycle $\hat{\eta} \in Z^n(\hat{U}, \hat{\mathcal{F}}^k)$. Si $k > k_0$, $n \leq \operatorname{dih}(X) - q$, il existe ainsi une cochaîne :

$$\hat{\alpha} \in C^{n-1}(\hat{U} \cap (\overline{F} - \rho), \mathcal{O}),$$

telle que

$$\hat{\eta} \mid (\overline{F} - \rho) - \delta\hat{\alpha} = \Sigma\, a_m \xi_m^{(n)} \mid \overline{F} - \rho,$$

où les a_m sont des nombres complexes convenablement choisis, On développe $\hat{\alpha}$ le long de chaque fibre en une suite de Laurent $\hat{\alpha} = \Sigma \alpha_{im} W_i^m$ où l'on

([12]) Cf. SERRE (J.-P.), *Faisceaux algébriques cohérents*, *Annals of Math.*, t. 61, 1955, p. 197-278 désigne par W_i des coordonnées permises sur la fibre de F. Comme on voit facilement, on peut considérer α_{ik} indépendamment de i comme cochaîne

$$\alpha \in C^{n-1}(U, \mathfrak{F}^k)$$

On a : $\delta\alpha = \eta$, donc $\xi = 0$,

C. Q. F. D.

Hans GRAUERT
Mathematisches Institut der Universität
Bunsenstr. 3 Göttingen
(Allemagne).