JEAN-LOUIS KOSZUL

Complexes d'espaces topologiques

Bulletin de la S. M. F., tome 87 (1959), p. 403-408
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__403_0>

Colloques intern. C. N. R. S. [89. 1959. Lille].
Bull. Soc. math. France,
87, 1959, p. 403 à 408.

COMPLEXES D'ESPACES TOPOLOGIQUES;

PAR

JEAN-LOUIS KOSZUL
(Strasbourg).

Les constructions dont il sera question au début de cet exposé sont étroitement liées aux « bar constructions ». Elles en diffèrent par leur caractère géométrique. C'est ce caractère géométrique qui permet d'en donner une version où les classes de cohomologie en jeu sont des classes d'espaces fibrés principaux. La plus grande partie de l'exposé est consacrée à l'une de ces versions qui touche aux problèmes de classification des espaces fibrés.

1. Définitions. — Étant donnés deux espaces topologiques X et Y, on notera $M(X, Y)$ le groupe abélien libre ayant pour base l'ensemble des appplications continues de X dans Y. Pour trois espaces X, Y, Z, la composition des applications définit une application bilinéaire de $M(Y, Z)\times M(X, Y)$ dans $M(X, Z)$. Avec pour homomorphismes de X dans Y les éléments de $M(X, Y)$, les espaces topologiques vont constituer une catégorie pré-additive. Les complexes de cette catégorie seront appelés des *complexes d'espaces*. Un complexe d'espaces Y_* est donc une suite d'espaces Y_n (n entier), avec, pour tout n un opérateur bord $d_n \in M(Y_n, Y_{n-1})$, les opérateurs bords vérifiant, pour tout n la condition $d_{n-1}d_n = 0$.

Dans les cas qu'on envisagera, on aura toujours $Y_n = \emptyset$ pour $n < 0$. Les notions d'homomorphismes de complexes et d'homomorphismes homotopes se définissent comme pour toute catégorie pré-additive. Tout espace topologique X pourra être identifié au complexe d'espaces X_* tel que $X_0 = X$ et $X_n = \emptyset$ pour $n \neq 0$.

Pour tout complexe d'espaces X_*, on appelle *chaîne singulière* de type (p, q) de X_* une chaîne singulière de degré p de l'espace X_q c'est-à-dire un élément de $M(\sigma^p, X_q)$ où σ^p est le simplexe euclidien type de dimension p. Dans le groupe bigradué : $S(X_*) = \sum_{p,q} M(\sigma^p, X_q)$, on définit un opérateur bord en posant $d_{p,q} = d'_{p,q} + d''_{p,q}$ avec $d'_{p,q}\, c = (-1)^q\, \partial c \in M(\sigma^{p-1}, X_q)$ et $d''_{p,q}\, c = d_q c \in M(\sigma^p, X_{q-1})$ pour tout $c \in M(\sigma^p, X_q)$. On obtient ainsi un complexe bigradué à partir duquel les modules d'homologie et de cohomologie du complexes d'espace X_* se définissent de la manière habituelle. Pour un anneau de coefficients k, on notera ces derniers $\mathrm{H}^n(X_*, k)$; ce sont des foncteurs contravariants de la catégorie des complexes d'espaces dans la catégorie des k-modules.

2. Complexes. $R(X)/\Gamma$. — Pour tout espace X, on notera $R(X)$ le complexe d'espaces :

$$X \xleftarrow{d_1} X^2 \xleftarrow{d_2} X^3 \ldots \xleftarrow{d_n} X^{n+1} \ldots$$

défini par $\mathrm{R}_n(X) = X^{n+1}$ et $d_n = \Sigma(-1)^i d_{n,i}$ avec :

$$d_{n,i}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (x_0, x_1, \ldots \hat{x}_i, \ldots x_n)$$

pour tout point $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in X^{n+1}$ et $0 \leqq i \leqq n$. Soit Γ un groupe topologique opérant de manière continue à droite dans X. En faisant opérer Γ diagonalement dans chaque produit X^{n+1}, les applications $d_{n,i} : X^{n+1} \to X^n$ permutent avec les opérations de Γ et définissent par passage aux quotients des applications $\mathbf{d}_{n,i} : X^{n+1}/\Gamma \to X^n/\Gamma$. On obtient donc, en posant

$$\mathbf{d}_n = \Sigma(-1)^i\, \mathbf{d}_{n,i},$$

un complexe d'espaces $R(X)/\Gamma$:

$$X/\Gamma \xleftarrow{\mathbf{d}_1} X^2/\Gamma \leftarrow \ldots X^n/\Gamma \xleftarrow{\mathbf{d}_n} \ldots$$

Si X et Y sont deux espaces dans lesquels Γ opère continuement à droite, toute application continue f de X dans Y qui permute avec les opérations de Γ va définir un homomorphisme $\mathbf{f}_*$ de $R(X)/\Gamma$ dans $R(Y)/\Gamma$; $\mathbf{f}_n$ est l'application déduite de $f^{n+1} : X^{n+1} \to Y^{n+1}$ par passage aux quotients. Si f et g sont deux applications continues de X dans Y qui permutent avec les opérations de Γ, on démontre que les homomorphismes $\mathbf{f}_*$ et $\mathbf{g}_*$ sont *homotopes*. Ils définissent donc un même homomorphisme de $H^*(R(Y)/\Gamma, k)$ dans $H^*(R(X)/\Gamma, k)$.

Si X et Y sont des espaces fibrés principaux localement triviaux de groupe Γ, *cet homomorphisme est bijectif.* Enfin, il existe un isomorphisme canonique de $H^*(R(\Gamma)/\Gamma, k)$ sur le module de cohomologie d'un espace classifiant pour le groupe Γ. Par suite, pour tout espace fibré principal Y, $H^*(R(Y)/\Gamma, k)$ *peut être identifié au module de cohomologie d'un espace classifiant de groupe* Γ.

Supposons que Y soit un espace fibré principal de groupe Γ. L'application identique de Y/Γ sur l'espace d'indice 0 de $R(Y)/\Gamma$ définit un homomorphisme c_* de Y/Γ (considéré comme complexe d'espaces) dans $R(Y)/\Gamma$. On vérifie que, avec l'identification précédente, $c^*: H^*(R(Y)/\Gamma, k) \to H^*(Y/\Gamma, k)$ *est l'homomorphisme caractéristique de l'espace fibré Y.*

Soit

$$K_*^m = Y/\Gamma \leftarrow Y^2/\Gamma \ldots Y^{n+1}/\Gamma \leftarrow \emptyset \leftarrow$$

le complexe d'espaces obtenu en tronquant $R(Y)/\Gamma$ à l'espace d'indice $n+1$.

Pout tout $n \geqq 0$, on a encore un homomorphisme de $H^*(K_*^n, k)$ dans $H^*(Y/\Gamma, k)$ dont l'image sera notée Q_n. On obtient ainsi pour tout $p \geqq 0$, une filtration :

$$H^p(Y/\Gamma, k) = Q_0^p \supset Q_1^p \supset \ldots Q_{p+1}^p = Q_{p+2}^p \ldots Q_\infty^p$$

où Q_∞^p est le module des classes caractéristiques de degré p.

3. **Espaces fibrés associés et pré-associés.** — La filtration précédente peut se définir dans l'ensemble $H^1(Y/\Gamma, \mathbf{G})$ des classes de fibrés principaux de base X/Γ et de groupe G. Elle se réduit à :

$$H^1(Y/\Gamma, \mathbf{G}) = Q_0^1 \supset Q_1^1 \supset Q_2^1 = \ldots Q_\infty^1.$$

Les espaces fibrés principaux de base Y/Γ et de groupe G dont la classe est dans Q_2^1 (resp. Q_1^1) sont appelés des espaces fibrés principaux *associés* (resp. *pré-associés*) à l'espace fibré principal Y. Pour tout espace fibré principal P de base Y/Γ et de groupe G, les applications $\mathbf{d}_{1,i}$ $(i = 0, 1)$ définissent deux espaces fibrés réciproques : $P_0 = P\,\mathbf{d}_{1,0}$ et $P_1 = P\,d_{1,1}$ de base Y^2/Γ. L'espace P est pré-associé à Y lorsque ces deux espaces P_0 et P_1 sont isomorphes. Compte tenu de la relation $\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2 = 0$, les espaces fibrés images réciproques de P_0 et P_1 par les applications $\mathbf{d}_{2,j}$ $(j = 0, 1, 2)$ sont deux à deux isomorphes. Posons $P'_0 = P_0\,\mathbf{d}_{2,0} = P_0\,\mathbf{d}_{2,1}$, $P'_1 = P_0\,\mathbf{d}_{2,2} = P_1\,\mathrm{d}_{2,0}$.

$$P'_2 = P_1\,\mathbf{d}_{2,1} = P_1\,\mathbf{d}_{2,2}$$

Tout isomorphisme de P_0 sur P_1 définit un diagramme :

$$\begin{tikzcd} P'_0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P'_1 \arrow[dl] \\ & P'_2 & \end{tikzcd}$$

L'espace P est associé à Y lorsque l'isomorphisme de P_0 sur P_1 peut être choisi de telle sorte que ce diagramme soit commutatif.

On démontre facilement que tout espace fibré P pré-associé à Y est trivialisé par la projection q de Y sur sa base $X = Y/\Gamma$. Si P est pré-associé à Y, il existe donc une application continue r de Y dans P telle que, pour tout $y \in Y$, $r(y)$ soit dans la fibre de P au-dessus de $q(y)$. Une telle application définit un « facteur » sur Y à valeurs dans G; c'est l'application continue $k : Y \times \Gamma \to G$ telle que $r(ys) = r(y)\,k(y, s)$, pour tout $y \in Y$ et $s \in \Gamma$.

On démontre les critères suivants :

Soit P un espace fibré principal de base X de groupe G trivialisé par $q : Y \to X$.

(A) *pour que P soit associé à Y, il faut et il suffit que r puisse être choisi de telle sorte que le facteur k soit indépendant de y.* (Dans ce cas, k est un homomorphisme continu de Γ dans G : « associé » à donc ici son sens habituel).

($P. A$) *pour que P soit pré-associé à Y, il faut et il suffit qu'il existe une application continue $g : Y^2 \to G$ telle que*

$$g(y, y')\, k(y', s) = k(y, s)\, g(ys, y', s)$$

quels que soient $y, y' \in Y$ et $s \in \Gamma$.

Dans la fin de ce paragraphe, on supposera que Y est le révêtement universel de X, supposé connexe et localement connexe par arcs, et Γ sera le groupe des automorphismes de Y. Dans le cadre différentiable, on sait que, pour qu'un espace fibré principal P de base X, soit associé à Y, il faut et il suffit qu'il possède une connexion intégrable.

Si $\mathcal{C}(x, x')$ désigne l'ensemble des classes de chemins homotopes d'origine x et d'extrémité x' dans X, une connexion intégrable dans P fait correspondre à tout $c \in \mathcal{C}(x, x')$ une application $t(c)$ de la fibre P_x dans la fibre P'_x : le *transport* le long des chemins de classes c. Ces transports vérifient les conditions :

a. chaque $t(c)$ commute avec les opérations de G et $t(c)$ dépend de manière continue de c.

b, pour tout couple de classes de chemins c, c' dont le composé cc' est défini, on a $t(cc') = t(c)\, t(c')$.

On démontre, sans hypothèse de différentiabilité, que l'existence d'une loi de transport t vérifiant les conditions (a) et (b) caractérise les espaces fibrés de base X associés à Y. Et l'existence d'une loi de transport vérifiant la seule condition (a) caractérise les espaces fibrés pré-associés à Y.

4. Cas holomorphe. — La définition des espaces fibrés associés et pré-associés s'étend évidemment au cas des espaces fibrés holomorphes. On se limitera encore au cas où Y est le revêtement universel d'une variété holomorphe connexe X. La condition ($P. A.$) dans laquelle on exige que g soit holomorphe devient alors très restrictive.

THÉORÈME. — *Tout espace fibré principal holomorphe de base X, pré-associé au revêtement universel de X possède une connexion holomorphe.*

Les formes de connexion holomorphe sont données par l'application g de $(P.\ A.)$.

Dans la suite, on examinera le cas suivant : $Y = C^n$, Γ est un sous-groupe discret de rang maximum de Y, G est un groupe abélien connexe quotient de C par un sous-groupe discret D^m. On considère sur Y les facteurs de type *thêta*, c'est-à-dire de la forme $k(y, s) = \exp h(y, s)$, où exp désigne l'homomorphisme canonique de C^m sur G, et où, pour tout $s \in \Gamma$, $y \to h(y, s) - h(0, s)$ est une application linéaire complexe de Y dans C. L'exposant $h(y, s)$ s'écrit $L(y, s) + H(s)$ où L est une application bilinéaire réelle de Y^2 dans C^m telle que $L(iy, y') = iL(y, y')$, quels que soient $y, y' \in Y$.

Théorème. — *Pour que les espaces fibrés de facteur k soient associés à Y, il faut et il suffit que L soit symétrique. Pour qu'ils soient pré-associés a Y, il faut et il suffit que L soit bilinéaire* complexe.

La première assertion se démontre comme dans le cas classique ($m=1$, $G=C^*$). Pour la seconde, on observe que, si les fibrés de facteur k sont pré-associés à Y, alors, d'après $(P.\ A.)$, il existe une application *holomorphe* f de Y^2 dans C^m telle que :

$$(1) \qquad f(y, y') + h(y', s) = h(y, s) + f(y+s, y'+s) \bmod D$$

quels que soient $y, y' \in Y$ et $s \in \Gamma$. On peut choisir f de sorte que $f(y, y) = 0$ pour tout $y \in Y$. Soit b l'application holomorphe de Y^2 dans C^m définie par $f(y, y') = b(y - y', y + y')$. On a $L(y, s) = b(y, y') - b(y, y' + 2s)$. Il en résulte que, pour tout $y \in Y$, l'application $y' \to b(y, y') - b(y, 0)$ est une application linéaire complexe de Y dans C^m. Puisqu'elle coïncide avec $-\frac{1}{2}L(y, y')$ lorsque $y' \in \Gamma$, ceci prouve que $L(y, y')$ est linéaire complexe en y'. Réciproquement, si L est bilinéaire complexe, alors $f(y, y') = -\frac{1}{2}L(y - y', y + y')$ est holomorphe et vérifie la condition (1), donc les espaces fibrés de facteur k sont pré-associés à Y.

Sotent F_{pa} le groupe abélien des facteurs pour lesquels L est bilinéaire complexe et soit Ω le groupe abélien libre des applications bilinéaires complexes alternées $A : Y^2 \to C^m$ telles que $A(s, t) \in D$ quels que soient $s, t \in \Gamma$. En associant à tout facteur $\exp(L(y, s) + H(s))$ du groupe F_{pa} la forme $L(y, y') - L(y', y)$, on définit un homomorphisme $F_{pa} \to \Omega$ dont le noyau est le groupe F_a des facteurs correspondant à des espaces fibrés associés à Y. Cet homomorphisme est surjectif. En effet, soit γ_i une base de Γ et pour tout $A \in \Omega$, soit H_A l'application de Γ dans C^m définie par

$$H_A\left(\sum p_i \gamma_i\right) = \sum_{j<k} A(p_j\gamma_j, p_k\gamma_k).$$

En associant à tout $A \in \Omega$ le facteur $\exp\left(\frac{1}{2} A(y, s) + H_A(s)\right)$, on définit un isomorphisme de Ω dans F_{pa} qui relève l'homomorphisme $F_{pa} \to \Omega$. D'autre part, il est évident que si k et k' sont deux facteurs de type thêta et si les fibres qui leur correspondent sont isomorphes, alors $k^{-1} k' \in F_a$. Par suite, l'isomorphisme de Ω dans F_{pa} définit *un isomorphisme du groupe* Ω *sur un sous-groupe de* $H^1(X, \mathbf{G})$. Tout les espacee fibrés dont la classe est dans ce sous-groupe sont pré-associés à Y et possèdent donc une connexion holomorphe. Exception faite des espaces fibrés triviaux, ils ne sont pas associés à Y et ne possèdent donc pas de connexion holomorphe intégrable.

La classification des espaces fibrés de groupe G pré-associés à Y qu'on vient d'esquisser a été faite par S. MURAKAMI qui, à la place des facteurs, utilise la forme de courbure des connexions holomorphes. Son étude concerne tous les espaces fibrés holomorphes de groupe G de base X qui possèdent une connexion holomorphe. Mais lorsque X est un tore complexe, l'existence d'une connexion holomorphe est non seulement nécessaire, mais encore suffisante pour que le fibré soit pré-associé à Y.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KOSZUL (J.-L.). — *Multiplicateurs et classes caractéristiques*, (*Trans. Amer, math. Soc.*, t. 89, 1958, p. 256-266).

[2] KOSZUL (J.-L.). *Espaces fibrés associés et pré-associés*, (*Nagoya math. J.*, t. 15). 1959 p. 155-169.

[3] MURAKAMI (S.) *Sur certains espaces fibrés principaux holomorphes admettant des connexions holomorphes*, (*Osakamath. J.* t. 11, 1959, p. 43-62).

Jean-Louis KOSZUL
Professeur à la Faculté des Sciences de Strasbourg
47, rue du Maréchal Foch
Strasbourg (Bas-Rhin).