BULLETIN DE LA S. M. F.

ANDRÉ LICHNEROWICZ

Isométries et transformations analytiques d'une variété kählérienne compacte

Bulletin de la S. M. F., tome 87 (1959), p. 427-437
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__427_0>

Colloques intern. C. N. R. S. [89. 1959, Lille].
Bull. Soc. math. France,
87, 1959, p. 427 à 437.

ISOMÉTRIES ET TRANSFORMATIONS ANALYTIQUES D'UNE VARIÉTÉ KÄHLÉRIENNE COMPACTE;

PAR

ANDRÉ LICHNEROWICZ

(Paris).

Étant donnée une variété analytique complexe compacte V_{2n}, admettant une métrique kählérienne, je me propose d'étudier dans cet exposé certains rapports entre l'algèbre de Lie des transformations analytiques de la variété et l'algèbre des isométries infinitésimales de V_{2n}. Une première partie sera consacrée à des résultats généraux reliant les transformations analytiques envisagées à la structure kählérienne. Dans une seconde partie des cas particuliers et des applications seront étudiés.

I. Transformations analytiques complexes et structure kählérienne.

1. Notion de transformation infinitésimale analytique. — *a*. Soit V_{2n} une variété analytique complexe arbitraire de dimension topologique $m = 2n$. Nous désignons par $(z^\alpha)(\alpha, \beta, \ldots$, tout indice grec $= 1, \ldots, n)$ un système de coordonnées locales analytiques complexes. Aux coordonnées locales réelles usuelles (x^i) $(i, j, \ldots$, tout indice latin $= 1, \ldots, 2n)$, on substitue les $2n$ coordonnées complexes (z^i) définies par :

$$(z^\alpha) \quad (z^{\alpha^*} = \bar{z}^\alpha).$$

L'existence d'indices de deux espèces conduit à la notion de type pour un tenseur. Si d est l'opérateur de différentiation extérieure sur les formes, je poserai : $d = d' + d''$, où d' est de type $(1, 0)$ et d'' de type $(0, 1)$. Je désignerai par $\mathcal{J}(\mathcal{J}^2 = -Id)$ la « structure presque complexe » définie par la structure analytique complexe de V_{2n}.

b. *Une transformation analytique de* V_{2n} est une transformation laissant invariante la structure analytique complexe, ou — ce qui est équivalent — laissant $\mathcal{J}$ invariant. Une transformation infinitésimale (t. i.) définie par un champ de vecteurs X est *analytique* si :

$$\mathcal{L}(X)\mathcal{J} = 0,$$

où $\mathcal{L}(X)$ est l'opérateur de transformation infinitésimale (ou de « dérivée de Lie »). En coordonnées locales complexes, (1.1) s'écrit [1]

$$(1.2) \qquad \partial_{\beta^*} X^\alpha = 0.$$

Les composantes X^α sont ainsi des fonctions holomorphes des coordonnées (z^β). Les t. i. analytiques sont celles qui correspondent aux champs de vecteurs holomorphes. *Si X définit une t. i. analytique, il en est de même pour* $\mathcal{J}X$, et

$$(1.3) \qquad [\mathcal{J}X, Y] = [X, \mathcal{J}Y] = \mathcal{J}[X, Y].$$

c. Je supposerai désormais V_{2n} *compacte*. Soit G_a le plus grand groupe de transformations analytiques de V_{2n}. Bochner et Montgomery [2] ont établi que G_a est un groupe de Lie complexe opérant de manière analytique complexe sur V_{2n}. L'algèbre de Lie de G_a peut être identifiée à l'algèbre L_a des t. i. analytiques. $\mathcal{J}$ définit sur L_a une structure d'algèbre de Lie complexe qui correspond à la structure complexe de G^a. C'est l'algèbre de L_a que nous nous proposons d'étudier.

2. **L'idéal I de L_a.** — *a*. Si $h_{(1,0)}$ est une 1-forme holomorphe de V_{2n}, X un élément de L_a, le scalaire $X^\alpha h_\alpha$ est holomorphe sur la variété compacte V_{2n} et, par suite,

$$(2.1) \qquad i(X)h_{(1,0)} = X^\alpha h_\alpha = \mathrm{Cte},$$

où $i(X)$ désigne l'opérateur de produit intérieur par X. Nous représentons par $h_{(0,1)}$ la forme complexe conjuguée et posons $h = h_{(1,0)} + h_{(0,1)}$.

Soit H l'espace vectoriel complexe des 1-formes holomorphes *fermées*. On sait que toute forme $h_{(0,1)} \in H$ à périodes imaginaires pures est nécessairement nulle et que, par suite, $\dim H \leq b_1(V_{2n})$ [2]. Introduisons le sous-espace H_0 de H défini par les $h_{(1,0)} \in H$ tels que :

$$i(X)h_{(1,0)} = 0 \quad \text{quel que soit } X \in L_a.$$

Si, en particulier, L_a est *transitive* sur V_{2n}, $i(X)h = 0$ entraîne $h = 0$, et $H_0 = 0$.

---

(1) Vous posons $\partial_i = \partial/\partial z^i$.

(2) Les dimensions envisagées ici sont toujours les dimensions réelles.

b. Soit I l'espace vectoriel complexe défini par les $X \in L_a$ tels que :

$$i(X)h_{(1,0)} = 0 \quad \text{quel que soit } h_{(1,0)} \in H.$$

Si X, $Y \in L_a$, considérons le crochet $Z = [X, Y]$ et le produit :

$$i(Z)h_{(1,0)} = Z^\alpha h_\alpha = X^\beta \partial_\beta Y^\alpha h_\alpha - Y^\beta \partial_\beta X^\alpha h_\alpha,$$

soit

$$i(Z)h_{(1,0)} = X^\beta \partial_\beta (Y^\alpha h_\alpha) - Y^\beta \partial_\beta (X^\alpha h_\alpha) - X^\alpha Y^\beta (\partial_\alpha h_\beta - \partial_\beta h_\alpha).$$

Ainsi, si $L'_a = [L_a, L_a]$ est l'idéal dérivé de L_a, $L'_a \subset I$ et *I est un idéal de L_a tel que L_a/I soit abélien.* La forme bilinéaire $i(X)h_{(1,0)}$ ($X \in L_a$, $h_{(1,0)} \in H$) met en dualité les espaces vectoriels L_a/I et H/H_0

Par suite,

$$\dim L_a - \dim I = \dim H - \dim H_0.$$

c. Si $X \in L_a$ son image sur la variété d'Albanèse de V_{2n} [1] par l'application canonique p est un vecteur fixe. Si $X \in I$, on a $p(X) = 0$.

Si V_{2n} est supposée kählérienne, toute 1-forme holomorphe est fermée, $\dim H = b_1(V_{2n})$ et $p(X) = 0$ entraîne $i(X)h_{(1,0)} = 0$ quel que soit $h_{(1,0)} \in H$.

Ainsi, dans ce cas, *I n'est autre que l'espace des vecteurs holomorphes dont la projection sur la variété d'Albanèse est nulle* [5].

3. Caractérisation des transformations infinitésimales analytiques. — Dans toute la suite, nous supposons que la variété compacte V_{2n} considérée *admet une métrique kählérienne*

$$ds^2 = 2g_{\alpha\beta^*} dz^\alpha dz^{\beta^*} \tag{3.1}$$

dont la 2-forme fondamentale (réelle) est :

$$F = i g_{\alpha\beta^*} dz^\alpha \wedge dz^{\beta^*}. \tag{3.2}$$

Soit M l'opérateur linéaire sur les formes défini sur les formes de type (p, q) par la relation :

$$M f_{p,q} = (p - q)\, i f_{(p,q)}.$$

Cet opérateur satisfait aux relations de commutation

$$\delta M - M\delta = d\Lambda - \Lambda d, \qquad dM - Md = -(\delta L - L\delta) = i(d' - d''), \tag{3.3}$$

où δ est l'opérateur de différentiation et où L (resp Λ) sont les opérateurs de produit extérieur (resp. intérieur) par la forme F.

Par la dualité définie par la métrique, tout champ de vecteurs X peut être identifié avec une 1-forme ξ; à l'opérateur $\mathcal{J}$ se trouve substitué, au signe près, l'opérateur M et (1.2) se traduit par :

$$\nabla_\alpha \xi_\beta = 0,$$

où ∇ est l'opérateur de dérivation covariante dans la connexion kählérienne.

Nous sommes ainsi conduit à associer à toute 1-forme ξ le tenseur $a(\xi)_{ij}$ défini par :

$$a(\xi)_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \xi_\beta, \qquad a(\xi)_{\alpha^*\beta} = a(\xi)_{\alpha\beta^*} = 0,$$
$$a(\xi)_{\alpha^*\beta^*} = \nabla_{\alpha^*}\xi_{\beta^*}.$$

Si $\Delta = d\delta + \delta d$, un calcul local conduit aux deux identités :

$$(3.4) \qquad (\Delta\xi - Q\xi)_i = -2\nabla^j a(\xi)_{ji}$$

et

$$(3.5) \qquad \langle \Delta\xi - Q\xi, \xi \rangle = 4 \langle a(\xi), a(\xi) \rangle$$

où $\langle \ldots \rangle$ désigne le produit scalaire obtenu par intégration sur V_{2n} et où Q est « l'opérateur de Ricci » défini par :

$$Q : \xi_i - 2 R_i{}^j \xi_j.$$

De (3.4) et (3.5) résulte que les *1-formes ξ définissant les* t. i. *analytiques coïncident avec les solutions de l'équation.*

$$(3.6) \qquad \Delta\xi - Q\xi = 0.$$

D'après un résultat classique concernant les variétés riemanniennes compactes, les isométries infinitésimales correspondent aux solutions cofermées ($\delta\xi = 0$) de (3.6). Ainsi, pour que ξ définisse une isométrie infinitésimale, il faut et il suffit qu'elle définisse une t. i. analytique et soit cofermée.

4. Holonomie et transformations infinitésimales analytiques. — *a.* Soit J l'opérateur qui à une forme bilinéaire $t_x(v, w)$, $(x \in V_{2n})$ fait correspondre la forme bilinéaire $t_x(v, \mathcal{J}_x w)$. Si ξ définit une t. i. analytique, l'étude du tenseur $\nabla_j \xi_j$ conduit au résultat suivant [4] : *le tenseur $\nabla_i \xi_j$ appartient en chaque point x à l'espace vectoriel S_x de tenseurs de type* (1.1) *défini par :*

$$S_x = \Psi_x + J\Psi_x,$$

où Ψ_x désigne l'algèbre d'homonomie en x de la variété kählérienne.

b. Supposons que le groupe d'homonomie Ψ_x de la variété V_{2n} réductible dans le réel. L'espace vectoriel T_x tangent en x admet la décomposition en somme directe :

$$(4.1) \qquad T_x = T_x^0 + \hat{T}_x$$

avec

$$\hat{T}_x = \sum_{a=0}^{k} Q_x^a$$

où les différents sous-espaces introduits sont orthogonaux deux à deux, invariants par $\mathcal{J}$ et par le groupe Ψ_x; T_x^0 désigne l'espace des vecteurs invariants par Ψ_x et Q_x^0 son orthocomplément dans l'espace des vecteurs invariants par la composante connexe de l'identité de Ψ_x.

Si $\xi \in L_a$, en décomposant ξ_x selon T_x^0 et les Q_x^a, on déduit du résultat précédent concernant $\nabla_i \xi_j$ qu'à la décomposition de T_x selon l'holonomie correspond une décomposition de L_a en somme directe d'idéaux complexes.

Tout élément ξ de L_a tel que $\xi_x \in T_x^0 + Q_x^0$ est tel que : $Q\xi = 0$, donc à dérivée covariante nulle (en particulier $\xi_x \in T_x^0$); ξ définissant une 1-forme holomorphe, si $\xi_{(1)} \in I$ on a $\xi_{(1)}^\alpha \xi_\alpha = \xi_{(1)}^i \xi_i = 0$, et $\xi_{(1)x} \in \hat{T}_x$. Ainsi :

THÉORÈME. — *Si C est l'espace vectoriel des champs de vecteurs à dérivée covariante nulle, l'algèbre L_a admet la décomposition en somme directe d'idéaux complexes*

$$L_a = C + \hat{L}_a \tag{4.2}$$

où C appartient au centre de L_a et où $I \subset \hat{L}_a$.

5. Décomposition des formes définissant une transformation infinitésimale analytique. — *a*. Si $\xi \in L_a$, il est clair que $Md\xi = 0$. Décomposons ξ en une somme :

$$\xi = \eta + \zeta \qquad (\delta\eta = 0,\ d\zeta = 0). \tag{5.1}$$

On a $M\,d\eta = 0$ et en appliquant (3.3) à η, il vient :

$$dM\eta = -\delta L\eta = 0.$$

Ainsi $M\eta$ est fermée, $M\zeta$ est cofermée et

$$M\xi = M\zeta + M\eta \qquad (\delta M\zeta = 0,\ dM\eta = 0). \tag{5.2}$$

En particulier, pour que $\xi \in L_a$ soit l'image par M d'une 1-forme définissant une isométrie infinitésimale (plus brièvement soit une M-isométrie), il faut et il suffit que ξ soit fermée.

b. Décomposons selon de Rham ξ en la somme :

$$\xi = \eta + d\varphi,$$

où $\delta\eta = 0$ et $\zeta = d\varphi$ (φ, scalaire réel). En décomposant $M\eta$ fermée selon de Rham, on a :

$$\xi = d\varphi + Md\psi + H\xi, \tag{5.3}$$

où φ, ψ sont des scalaires réels et où H est le projecteur sur l'espace des 1-formes harmoniques; (5.3) peut se traduire en introduisant le scalaire complexe $\rho = \varphi + i\psi$: la partie $\xi(1, 0)$ de type $(1, 0)$ de ξ s'écrit :

$$\xi_{(1,0)} = d'\rho + H\xi_{(1,0)}. \tag{5.4}$$

La fonction ρ étant définie à une constante complexe additive près sera normalisée par la condition :

$$\int_{V_{2n}} \rho(\star 1) = 1, \tag{5.5}$$

où $(\star 1)$ est l'élément de volume. Pour que ξ soit à dérivée covariante nulle, il faut et il suffit que $\rho = 0$. Pour que ξ soit dans I, il faut et il suffit que sa partie harmonique soit nulle.

6. Introduction d'une forme sesquilinéaire. — Soit $\xi^{(1)}$, et $\xi^{(2)}$ deux éléments arbitraires de L_a avec

$$\left\{\begin{aligned} \xi^{(1)}_{(1,0)} &= d'\rho^{(1)} + h^{(1)}_{(1,0)}, \\ \xi^{(2)}_{(1,0)} &= d'\rho^{(2)} + h^{(2)}_{(1,0)}. \end{aligned}\right. \tag{6.1}$$

Au couple $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$ associons le nombre complexe :

$$\xi^{(1)}.\xi^{(2)} = \int_{V_{2n}} \rho^{(1)}\bar{\rho}^{(2)}(\star 1). \tag{6.2}$$

On notera que :

$$M\xi^{(1)}.\xi^{(2)} = -\xi^{(1)}.M\xi^{(2)} = i\xi^{(1)}.\xi^{(2)}.$$

Si $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} \in \hat{L}_a$, la forme sesquilinéaire (6.2) définit sur $\hat{L}_a$ un produit scalaire : si $\xi^{(1)}.\xi^{(1)} = 0$, on a : $\rho^{(1)} = 0$ et $\xi^{(1)} \in C \cap L_a$ donc : $\xi^{(1)} = 0$. Un calcul local du crochet $[\xi^{(1)}, \xi^{(2)}]$ des t. i. correspondant à $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} \in L_a$ donne :

$$[\xi^{(1)}, \xi^{(2)}]_{(1,0)} = d'\sigma,$$

avec

$$\sigma = i\Lambda\{(d\rho^{(1)} + h^{(1)}_{(1,0)}) \wedge (d\rho^{(2)} + h^{(2)}_{(1,0)})\} \tag{6.3}$$

qui satisfait à la condition de normalisation.

Théorème. — *La forme sesquilinéaire* (6.2) *est invariante par le plus grand groupe connexe d'isométries* [4].

Soit η une isométrie infinitésimale, $\zeta = M\eta$ la M-isométrie correspondante; ζ est fermée et $\zeta = d\varphi + h$, où φ est un scalaire réel et h une 1-forme harmonique réelle. D'après (6.3) :

$$[\zeta, \xi^{(1)}].\zeta^{(2)} = i\int_{V_{2n}} \Lambda\{(d\varphi + h_{(1,0)}) \wedge (d\rho^{(1)} + h^{(1)}_{(1,0)})\,\bar{\rho}^{(2)}(\star 1)\},$$

soit, compte tenu des propriétés des 1-formes horlomorphes,

$$[\zeta, \xi^{(1)}].\xi^{(2)} = i \int_{V_{2n}} \Lambda(\zeta \wedge d\rho^{(1)})\,\bar{\rho}^{(2)}(\star 1)$$

et après intégration par parties :

$$[\zeta, \xi^{(1)}].\xi^{(2)} = -i \int_{V_{2n}} \Lambda(\zeta \wedge d\bar{\rho}^{(2)})\,\rho^{(1)}(\star 1),$$

ainsi :

$$[\zeta, \xi^{(1)}].\xi^{(2)} - \xi^{(1)}.\,[\zeta, \xi^{(2)}] = 0$$

et pour η :

$$[\eta, \xi^{(1)}].\xi^{(2)} + \xi^{(1)}.\,[\eta, \xi^{(2)}] = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

7. Étude de la sous-algèbre complexe engendrée par une algèbre d'isométries.

a. Désignons par L_1 une algèbre d'isométries infinitésimales de V_{2n} et considérons le sous-espace de L_a :

$$L_2 = L_1 + ML_1$$

L_2 admet manifestement une structure de sous-algèbre complexe de l'algèbre complexe L_a.

Soit $\hat{P}$ un sous-espace complexe de $\hat{L}_a$ invariant par la représentation adjointe de L_2 opérant dans $\hat{L}_a$. L'orthocomplément $\hat{Q}$ de $\hat{P}$ dans $\hat{L}_a$ au sens du produit scalaire (6.2) est aussi un sous-espace complexe de $\hat{L}_a$ invariant par cette représentation. En utilisant la décomposition $L_a = \hat{L}_a + C$, on voit que tout sous-espace complexe de L_a invariant par la représentation adjointe de L_2 dans L_a admet un supplémentaire complexe également invariant.

THÉORÈME. — *Toute sous-algèbre complexe L_2 de L_a engendrée par une algèbre d'isométrie est réductive dans L_a.*

L_2 est bien entendu une algèbre réductive. Le théorème s'applique en particulier au cas où L_1 est l'algèbre de *toutes* les isométries infinitésimales. De ce théorème on déduit :

COROLLAIRE 1. — *L'algèbre L_a admet une décomposition en somme directe :*

$$L_a = I + K,$$

où K est un sous-espace complexe tel que $[L_2, K] = 0$.

COROLLAIRE 2. — *L'algèbre L_a admet la décomposition en somme directe,*

$$L_a = C(L_2) + [L_2, L_a],$$

où $C(L_2)$ est le centralisateur de L_2 dans L_a.

b. dans les éléments définis par (6.1) supposons $\xi^{(1)} \in C(L_2)$.
Si : $\zeta = d\varphi \in I \cap ML_1$

$$i\int_{V_{2n}} \Lambda\{(d\rho^{(1)} + h^{(1)}_{(1,0)}) \wedge d\varphi\}\,\rho^{(2)}(\star 1) = \\ = -i\int_{V_{2n}} \Lambda\{(d\rho^{(1)} + h^{(1)}_{(1,0)}) \wedge d\rho^{(2)}\}\,\varphi(\star 1) = 0.$$

On en déduit, compte tenu des propriétés des 1-formes holomorphes :

$$\int_{V_{2n}} \sigma\varphi(\star 1) = 0.$$

Ainsi,

THÉORÈME. — *Pour le produit scalaire défini sur L_a par* (6.2), $[L_a, C(L_2)]$ *est orthogonal à la sous-algèbre $\tilde{L}_2 = I \cap L_2$.*

II. Études de cas remarquables.

8. Cas où L_2 est un idéal de L_a.

a. Supposons que L_2 *soit un idéal de* L_a. D'après le théorème fondamental du § 7, *a*, L_2 admet une décomposition :

$$(8.1) \qquad L_2 = \tilde{L}_2 + R, \qquad R \cap I = 0, \qquad [L_2, R] = 0.$$

Le sous-espace défini par la somme directe $(I + R)$ étant stable par la représentation adjointe de L_2, il vient :

$$(8.2) \quad L_a = (I + R) + A, \qquad A \cap (I + R) = 0, \qquad [L_2, A] \subset A \cap I = 0].$$

Si B est l'orthocomplément de $\tilde{L}_2$ dans I au sens du produit scalaire envisagé, on a, L_2 étant un idéal :

$$(8.3) \qquad I = \tilde{L}_2 + B, \qquad B \cap L_2 = 0, \qquad [L_2, B] \subset B \cap L_2 = 0.$$

Si $P = A + B$, il résulte de (8.1), (8.2), (8.3)

$$L_a = L_2 + P, \qquad P \cap L_2 = 0.$$

Comme P est dans $C(L_2)$, on déduit du théorème d'orthogonalité du § 7, b

$$[L_a, P] \subset [L_a, C(L_2)] \subset B \subset P$$

et P est un idéal de L_a. Ainsi :

THÉORÈME. — *Si L_2 est un idéal de L_a, il existe un idéal complexe P supplémentaire de S_2 dans L_a.*

b. Supposons en particulier $L'_a \subset L_2$:

$$[L_a, P] \subset P \cap L_2 = 0$$

et P est abélien; L_a, somme directe de l'idéal réductif L_2 et de l'idéal abélien P est réductive.

Inversement, supposons L_a réductive. Son idéal dérivé L'_a est semi-simple. Si K est sous-groupe compact maximal du groupe connexe de transformations analytiques d'algèbre L'_a, on peut substituer à la métrique kählérienne initiale une métrique kählérienne invariante par K. L'_a étant semi-simple complexe, le sous-espace complexe de L'_a engendré par l'algèbre de K coïncide avec L'_a. Par suite, pour cette métrique, $L'_a \subset L_2$ (L_2 désignant ici, comme dans la suite, la sous-algèbre complexe engendrée par l'algèbre L_2 de *toutes* les isométries infinitésimales).

COROLLAIRE. — *Pour que K_a soit réductible, il faut et il suffit qu'il existe une métrique kählérienne telle que $L'_a \subset L_2$.*

9. — Cas où dR définit une transformation infinitésimale analytique.

a. Soit ψ la 2-forme de Chern de V_{2n}. J'appelle courbure intégrale de Ricci de V_{2n} la quantité :

$$K = (2\pi)^2 \langle \psi, \psi \rangle.$$

La structure complexe restant fixe, varions la métrique ou — ce qui est équivalent — la 2-forme F de façon que la classe fondamentale de cohomologie de F reste invariante. Si ∂ est l'opérateur variation :

$$\partial F = dM\alpha,$$

où α est une 1-forme astreinte seulement à $M\,d\alpha = 0$. Posons $\alpha = \beta + d\varphi$ (avec $\delta\beta = 0$). Un calcul aisé donne :

$$\partial K = \frac{1}{2} \langle \alpha, \Delta\, dR - Q\, dR \rangle = \frac{1}{2} \langle d\varphi, \Delta\, dR - Q\, dR \rangle. \tag{9.1}$$

On en déduit que, *pour que dR définisse une t. i. analytique, il faut et il suffit que K soit stationnaire par rapport aux variations envisagées* [3].

b. D'après (3.5), pour que ξ définisse une t. i. analytique, il faut et il suffit que :

$$(9.2) \qquad \langle \Delta\xi_{(1,0)} - Q\xi_{(1,0)}, \xi_{(1,0)} \rangle = 0;$$

cela posé, supposons que dR définisse une t. i, analytique qui est alors une M-isométrie; R étant invariant par isométrie, $M\,dR$ est dans le centre de L_1. Si $h_{(1,0)}$ est une 1-forme holomorphe :

$$\delta' Q h_{(1,0)} = -2\nabla^\alpha(R_{\alpha\beta^\star} h^{\beta^\star}) = -2h^{\beta^\star}\nabla^\alpha R_{\alpha\beta^\star} = -h^{\beta^\star}\partial_{\beta^\star} R = \text{Cte} = 0.$$

Par suite, si $\xi_{(1,0)} = d'\rho + h_{(1,0)}$ définit un élément de L_a :

$$\langle \Delta d'\rho - Q d'\rho, d'\rho \rangle = \langle Q h_{(1,0)}, d'\rho \rangle = \langle \delta' Q h_{(1,0)}, \rho \rangle = 0.$$

$d'\rho$, donc $h_{(1,0)}$ définissent des t. i. analytiques et $h_{(1,0)}$ est à dérivée covariante nulle.

Théorème. — *Si $M\,dR$ définit une t. i. analytique (qui appartient nécessairement au centre de L_1), on a $L_a = I + C$.*

Pour toutes les métriques kählériennes jouissant de la propriété, la dimen sion de C est la même.

10. Cas où $R =$ Cte. — Le résultat précédent est en particulier valable si $R =$ Cte. De plus, si $\xi \in L_a$ admet la décomposition :

$$\xi = \eta + \zeta \qquad (\zeta = d\varphi)$$

on a $dM\eta = 0$, et

$$\delta Q\eta = -2\nabla_i(R^{ij}\eta_j) = -R^{ij}(\nabla_i\eta_j + \nabla_j\eta_i) = -2R^{\alpha\beta^\star}(\nabla_\alpha\eta_{\beta^\star} + \nabla_{\beta^\star}\eta_\alpha) = 0.$$

Par suite $\Delta\zeta - Q\zeta = -(\Delta\eta - Q\eta)$ est cofermée et

$$\langle \Delta\zeta - Q\zeta, \zeta \rangle = 0.$$

Ainsi φ est une M-isométrie, η une isométrie et $L_a = L_2$.

Théorème. — *Sur une variété kählérienne compacte pour laquelle $R =$ Cte, l'algèbre L_a coïncide avec sa sous-algèbre complexe engendrée par l'algèbre de toutes les isométries infinitésimales et, par suite, est réductive. De plus $L_a = I + C$.*

On a $\dim L_a = 2 \dim L_1 - \dim C$. Par suite, pour toutes les métriques kählériennes jouissant de la propriété $R =$ Cte, la dimension du groupe d'isométries est la même. On a $\dim L_a \leq 2(n^2 + 2n)$ et cette valeur n'est atteinte que par l'espace projectif complexe.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLANCHARD (André). — *Sur les variétés analytiques complexes* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 73, 1956, p. 157-202; *Thèse* Sc. math., Paris, 1956).

[2] BOCHNER (S.) and MONTGOMERY (D.). — *Groups of differentiable and real or complex analytic transformations* (*Annals Math.*, t. 46, 1945, p. 685-694).

[3] CALABI (Eugenio). — *The space on Kähler metrics* (*Proc. intern. Congr. Math.*, 1954, Amsterdam). — Amsterdam, North-Holland Publishing, 1954, vol. 2, p. 206-207).

[4] LICHNEROWICZ (André). — *Sur les transformations analytiques des variétés kählériennes compactes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 244, 1957, p. 3011-3014); *Transformations analytiques d'une variété kählérienne et holonomie* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 245, 1957, p. 953-956); *Transformations analytiques et isométries d'une variété kählérienne compacte* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 247, 1958, p. 855-857).

[5] LICHNEROWICZ (André). — *Colloque de Géométrie différentielle globale* (1958, Bruxelles, Gauthier-Villars, Paris, p. 11-26).

[6] MATSUSHIMA (Yozô). — *Sur la structure du groupe d'homéomorphismes analytiques d'une certaine variété kählérienne* (*Nagoya math. J.*, t. 11, 1957, p. 145-150).

[7] MONTGOMERY (Deane). — *Simply connected homogeneous spaces* (*Proc. Amer. math. Soc.*, t. 1, 1950, p. 467-469).

André LICHNEROWICZ,
Prof. Collège de France,
6, avenue Paul-Appell,
Paris, 14e.