

BULLETIN DE LA S. M. F.

VALENTIN POÉNARU

Les décompositions de l'hypercube en produit topologique

Bulletin de la S. M. F., tome 88 (1960), p. 113-129

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1960__88__113_0

© Bulletin de la S. M. F., 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LES DÉCOMPOSITIONS DE L'HYPERCUBE EN PRODUIT TOPOLOGIQUE;

PAR

VALENTIN POÉNARU

(Bucarest).

Ce travail établit le théorème que voici :

Il existe une variété à bord, quadridimensionnelle V_4 , qui a les propriétés suivantes :

$$V_4 \neq I_4; \quad V_4 \times I_1 = I_5.$$

C'est-à-dire que V_4 n'est pas homéomorphe à I_4 , tandis que $V_4 \times I_1$ est homéomorphe à I_5 ; I_n désigne le cube à n dimensions, E_n l'espace euclidien à n dimensions. (Quand on aura à parler à la fois de plusieurs cubes on utilisera aussi les notations $\tilde{I}_n, I_n', I_n'', \tilde{I}_n', \tilde{I}_n'', \dots$).

Récemment, R. BING [1] a construit un ensemble B qui n'est pas une variété, tel que $B \times E_1 = E_4$. Dans notre théorème, il ne s'agit que de complexes finis (d'ailleurs tout dans ce travail devra être entendu au point de vue « semi-linéaire », c'est-à-dire que toute application sera supposée simpliciale, etc.).

Une conséquence de notre théorème est l'existence des décompositions en produit topologique de E_n , autres que $E_p \times E_{n-p}$, les deux facteurs étant tout de même des variétés.

Le problème général de la fibration de E_n par des fibres connexes a été étudié pour la première fois par J. LERAY (voir [3], [6]). C'est cette étude qui nous a suggéré le présent travail.

Je tiens à remercier mon collègue I. BERNSTEIN, de l'aide qu'il m'a apportée.

Je suis reconnaissant à M. R. H. BING, qui a lu les épreuves, pour son aide très efficace.

1. **Construction de V_4 .** — Soit un complexe A_3 défini de la manière suivante ⁽¹⁾ : on considère une boule ⁽²⁾ B_3 et une courbe Γ reliant deux points P, Q de sa frontière, et dont l'intérieur est contenu dans $\text{int } B_3$. C'est la courbe ponctuée de la figure 1.

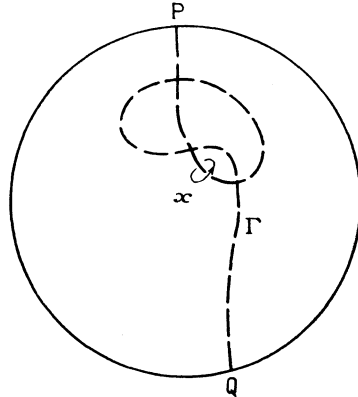
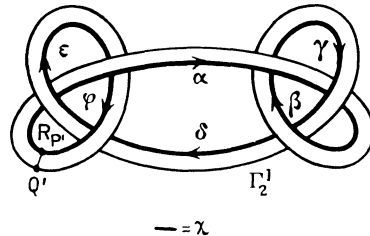


Fig. 1.

On enlève de B_3 un cylindre T_3 entourant Γ . Il reste une variété à bord, qui est par définition A_3 . Soit maintenant une boule B_4 et sur sa frontière S_3 , la « bande » (c'est-à-dire un complexe homéomorphe à $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$) Γ_2^1 de la figure 2. Expliquons cette figure : sur un cube $I_3 \subset S_3$ on considère



— = χ

Fig. 2.

la bande Γ_2^1 ayant les propriétés suivantes :

$I_3 = I_1 \times I_1'' \times I_1'''$; on considère une courbe simple fermée $\chi \subset I_3$. χ n'est jamais parallèle à I_1'' . La bande Γ_2^1 est engendrée par un segment parallèle à

(1) Nous ferons la convention suivante : l'indice droit, inférieur, désignera toujours la dimension. Par exemple, K_4 est un complexe à quatre dimensions.

(2) En général on désigne les boules par B_n , les sphères par S_n . Quand on aura à parler de plusieurs sphères à la fois, on utilisera aussi les notations $\tilde{S}_n, S'_n, s_n, \dots$ (de même pour les boules).

$I_1 \times I_1'' = I_2$, orthogonal à χ . On considère aussi un tube $T_3^1 \subset I_3$ ayant Γ_2^1 sur sa frontière, engendré par un segment parallèle à I_1'' ayant une extrémité sur Γ_2^1 . T_3^1 a donc une structure d'espace-produit $s_1 \times i_1'' \times i_1'$ que tous les homéomorphismes que nous allons construire vont respecter.

On suppose que

$$s_1 \times i_1'' \times o = \Gamma_2^1.$$

On a

$$\begin{aligned} T_3 &= B_2 \times I_1'', & B_3 &= A_3 \cup (B_2 \times I_1''), \\ A_3 \cap T_3 &= A_3 \cap (B_2 \times I_1'') = S_1 \times I_1''; \end{aligned}$$

désignons cette dernière bande par Γ_2^1 . Choisissons un homéomorphisme $\psi : \Gamma_2^1 \rightarrow \Gamma_2^2$ qui applique le segment $P'Q'$ de la figure 2 sur une génératrice de Γ_2^2 allant de P à Q et χ (fig. 2) sur une courbe orientée comme x (fig. 1). On suppose que ψ respecte les structures d'espaces-produit de Γ_2^1, Γ_2^2 :

$$\Gamma_2^1 = s_1 \times i_1'', \quad \Gamma_2^2 = S_1 \times I_1''.$$

Soit maintenant

$$A_3 \times I_1 \supset S_1 \times I_1'' \times I_1 = \Gamma_2^2 \times I_1 = T_3^2.$$

On suppose que

$$S_1 \times I_1'' \times o = \Gamma_2^2.$$

Soit un homéomorphisme ψ^* :

$$s_1 \rightarrow S_1, \quad i_1'' \rightarrow I_1'', \quad i_1' \rightarrow I_1$$

(donc $\psi^* : T_3^1 \rightarrow T_3^2$).

Il est choisi de telle manière que

$$s_1 \times i_1'' \times o \rightarrow S_1 \times I_1'' \times o$$

coïncide avec ψ . On considère enfin l'espace-quotient

$$V_4 = [(A_3 \times I_1) \cup B_4] / (\psi^*),$$

où $p \in S_1 \times I_1'' \times I_1$ est identifié à $\psi^*(p) \in s_1 \times i_1'' \times i_1'$. C'est cette variété à bord V_4 que nous allons étudier.

2. Preuve que $V_4 \times I_1 = I_5$. -- Dans la frontière \tilde{S}_3 de \tilde{B}_4 on considère une bande $\Gamma_2^3 = \tilde{S}_1 \times \tilde{I}_1''$ (homéomorphe à Γ_2^2 et Γ_1^2) appartenant à une sphère \tilde{S}_2 contenue dans \tilde{S}_3 (cette inclusion étant une application topologique) ⁽³⁾

$$\Gamma_2^3 \subset \tilde{S}_2 \subset \tilde{S}_3.$$

En procédant avec Γ_2^3 exactement comme on a procédé avec Γ_2^1 on obtient

⁽³⁾ Bien entendu on suppose que \tilde{S}_2 est sous-complexe de \tilde{S}_3 , donc d'après un résultat classique, chaque composante de $\tilde{S}_3 - \tilde{S}_2$ est une cellule.

une autre variété bornée à quatre dimensions V'_4 . Il suffira de prouver que :

- 1° V'_4 est homéomorphe à I_4 ;
- 2° $V'_4 \times I_1$ est homéomorphe à $V'_4 \times I_1$.

3. Preuve que V'_4 est homéomorphe à I_4 . — Soit la paire

$$(T_3, \Gamma_2^2) = (B_2 \times I_1', S_1 \times I_1').$$

Soient S_2 la sphère à deux dimensions, frontière de B_3 , et sur S_2 , une zone Z_2 comprise entre deux cercles parallèles. (T_3, Γ_2^2) est évidemment homéomorphe à (B_3, Z_2) (*).

Nous énonçons sans démonstration le lemme suivant :

LEMME a. — Soit sur S_3 frontière de B_4 une bande Z'_2 (homéomorphe à $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$) appartenant à une sphère à deux dimensions S'_2 contenue dans S_3 :

$$(\star) \quad Z'_2 \subset S'_2 \subset S_3$$

(l'inclusion de S'_2 dans S_3 étant une application topologique). Alors la paire (B_4, Z'_2) est homéomorphe (5) à la paire $(B_3 \times I_1, Z_2 \times 0)$.

[On observe que (B_4, S'_2) et $(B_3 \times I_1, S_2 \times 0)$ sont homéomorphes, il s'agit de la sphère S_2 frontière de B_3].

Nous avons dit que pour construire V'_4 on procède avec Γ_2^3 exactement comme on a procédé avec Γ_2^1 . Tout d'abord on considère un homéomorphisme $\varphi(\Gamma_2^3) = \Gamma_2^1$ analogue (6) à ψ .

Sans perdre la généralité on peut supposer qu'il y a un cube

$$\tilde{I}_3 = \tilde{I}_1 \times \tilde{I}_1 \times \tilde{I}_1 \subset \tilde{S}_3, \quad \tilde{I}_3 \supset \Gamma_2^3.$$

Bien plus, on peut considérer que Γ_2^3 est une couronne circulaire contenue dans un plan parallèle à $\tilde{I}_1 \times \tilde{I}_1$. En prenant un segment variable, parallèle à \tilde{I}_1 , ayant une extrémité sur Γ_2^3 , on obtient un tube T_3^3 , muni d'une façon naturelle de la structure d'espace-produit : $\tilde{s}_1 \times \tilde{I}_1 \times \tilde{I}_1$ ($\tilde{s}_1 \times \tilde{I}_1 \times 0 = \Gamma_2^3$).

On considère un homéomorphisme : $\varphi^*(\varphi^* : T_3^3 \rightarrow T_3^2)$

$$\tilde{s}_1 \rightarrow S_1, \quad \tilde{I}_1 \rightarrow I_1', \quad \tilde{I}_1 \rightarrow I_1'$$

(4) Nous entendons, comme d'habitude, par un homéomorphisme des paires (X, Y) , (X', Y') , une paire d'homéomorphismes : $h : X \leftrightarrow X'$, $h_1 : Y \leftrightarrow Y'$ qui commutent avec les inclusions $Y \subset X$, $Y' \subset X'$.

(5) La notation $(B_3 \times I_1, Z_2 \times 0)$ a un sens bien clair car il s'agit en fait de

$$(B_3 \times [0, 1], Z_2 \times 0).$$

(6) Donc φ respecte aussi les structures d'espaces-produit.

choisi de telle manière que

$$\tilde{s}_1 \times \tilde{t}_1 \times o \rightarrow S_1 \times I_1' \times o$$

coïncide avec φ . On considère l'espace-quotient

$$V_4 = [(A_3 \times I_1) \cup \tilde{B}_4] / (\varphi^*),$$

où $p \in S_1 \times I_1' \times I_1$ est identifié à $\varphi^*(p) \in \tilde{s}_1 \times \tilde{t}_1 \times \tilde{t}_1$.

Le lemme *a* affirme l'existence d'un homéomorphisme

$$\Phi : (B_4, \Gamma_2^3) \rightarrow (T_3 \times I_1, \Gamma_2^2 \times o)$$

(on peut supposer que la restriction de Φ à Γ_2^3 est φ). De l'existence de Φ on déduit aisément l'existence d'un homéomorphisme Φ_1 :

$$\Phi_1 : (B_4, T_3^3) \rightarrow (T_3 \times I_1, \Gamma_2^2 \times I_1)$$

(Φ_1 est facile à construire à partir de Φ , vu que $\Gamma_2^3 = s_1 \times \tilde{t}_1^3 \times o$, $T_3^3 = s_1 \times \tilde{t}_1^3 \times \tilde{t}_1^3$ (¹)).

Il en résulte que $V_4 = (A_3 \times I_1) \cup (T_3 \times I_1)$, où $p \times t$, $t \in [o, 1]$, $p \in \Gamma_2^2$ considéré comme partie de A_3 et $p \times t$, $p \in \Gamma_2^2$ considéré partie de T_3 sont identifiés. C'est dire que

$$V_4 = (A_3 \cup T_3) \times I_1 = B_3 \times I_1 = I_4.$$

4. Preuve que $V_4 \times I_1$ est homéomorphe à $V_4' \times I_1$. — Cette preuve est un peu moins aisée. Choisissons un homéomorphisme $\tilde{\Psi} : \Gamma_2^1 \rightarrow \Gamma_2^3$, respectant les structures d'espaces-produit, tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_2^1 & \xrightarrow{\tilde{\Psi}} & \Gamma_2^3 \\ \downarrow \psi & \searrow \varphi & \downarrow \varphi \\ & & \Gamma_2^2 \end{array}$$

(on peut aisément construire $\tilde{\Psi}$). $\tilde{\Psi}$ peut être prolongé à un autre homéomorphisme $\tilde{\Psi}^* : T_3^1 \rightarrow T_3^3$, respectant toujours les structures d'espaces-produit, tel que le diagramme suivant soit aussi commutatif :

$$(\alpha) \quad \begin{array}{ccc} T_3^1 & \xrightarrow{\tilde{\Psi}^*} & T_3^3 \\ \downarrow \psi^* & \searrow \varphi^* & \downarrow \varphi^* \\ & & \Gamma_2^2 \times I_1 = T_3^2 \end{array}$$

(¹) D'ailleurs on peut observer aisément ceci : Soit $S_2 \subset S_3 = \text{Fr } B_4$. Attachons à chaque $p \in S_2$ un petit segment $t(p) \subset S_3$, $t(p) \cap t(p') = \emptyset$, $t(p) \cap S_2 = p$, $t(p)$ variant d'une façon continue avec p [par exemple, $t(p)$ un petit segment normal à S_2 dans S_3 , d'un même côté de S_2] alors si $S_2' = \text{Fr } B_3$:

$$(B_3' \times I_1, S_2' \times I_1) \text{ est homéomorphe à } (B_4, \cup t(p)).$$

$V'_4 \times I_1 = I_5$ n'est autre que

$$((A_3 \times I_1) \times I_1) \cup (\tilde{B}_4 \times I_1) / (\emptyset),$$

où (q, t) , $q \in \Gamma_2^3 \times I_1$, $t \in I_1$ et $((\varphi^*)^{-1}(q), t)$ pour chaque q , et t sont identifiés.

De même $V_4 \times I_1$ est

$$((A_3 \times I'_1) \times I_1) \cup (B_4 \times I_1) / (\emptyset)$$

où (q, t) , $q \in \Gamma_2^3 \times I_1$, $t \in I_1$ et $((\psi_*)^{-1}(q), t)$ pour chaque q , t sont identifiés.

Nous allons prouver qu'il existe un homéomorphisme

$$\Psi : (B_4 \times I_1, T_3^1 \times I_1) \rightarrow (\tilde{B}_4 \times I_1, T_3^3 \times I_1)$$

tel que pour $P \in T_3^1$,

$$\Psi(P, t) = (\tilde{\Psi}^*(P), t).$$

Ceci et la commutativité du diagramme (α) implique

$$V_4 \times I_1 = V'_4 \times I_1 = I_5.$$

Tout revient donc à construire Ψ . On observe immédiatement que (*) :

$$T_3^1 \times I_1 \subset \text{Fr}(B_4 \times I_1) = S_4;$$

de même $T_3^3 \times I_1 \subset \tilde{S}_4 = \text{Fr}(\tilde{B}_4 \times I_1)$. Pour construire Ψ il suffit donc d'avoir un homéomorphisme

$$\Psi_1 : (S_4, T_3^1 \times I_1) \rightarrow (\tilde{S}_4, T_3^3 \times I_1)$$

tel que

$$\Psi_1(P, t) = (\tilde{\Psi}^*(P), t)$$

pour $P \in T_3^1$, $t \in [0, 1]$. Car, Ψ_1 une fois construit, l'existence de Ψ en découle par un prolongement immédiat. Le procédé de la construction de Ψ_1 est analogue au procédé habituel d'effacement de nœuds dans l'espace à quatre dimensions. Le « nœud » que constitue χ sera transformé en une courbe « sans nœuds ». Cela explique notre choix des dimensions.

5. Construction de Ψ_1 . — Nous allons donner tout d'abord une définition : Soient deux paires : (S_3, f') , (S_3, f'') où f', f'' , sont deux sous-complexes de S_3 homéomorphes à $S_1 \times B_2$ (donc deux tubes). Comme on le verra par la suite on ne suppose pas en général que les deux paires considérées soient homéomorphes.

(*) $B_4 \times I_1 = B_5$ (à un homéomorphisme près), sa frontière est bien S_4 .

DÉFINITION 1. — On dira qu'on passe de la paire (S_3, f') à la paire (S_3, f'') par une « opération- γ » si :

1° Il existe dans S_3 un sous-ensemble homéomorphe à $I_3 : \tilde{I}_3$, tel que si nous y introduisons un système de coordonnées rectangulaires : $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 4$, $0 \leq z \leq 4$, $\tilde{I}_3 \cap f'$ est la réunion des deux ensembles suivants :

$$A = \{ 0 \leq x \leq 4; \quad 2 - h \leq y \leq 2 + h; \quad 3 - h \leq z \leq 3 + h \},$$

$$B = \{ 2 - h \leq x \leq 2 + h, \quad 0 \leq y \leq 4; \quad 1 - h \leq z \leq 1 + h \}.$$

Bien entendu h est supposé assez petit pour que $A \cap B = \emptyset$.

2° On choisit une fois pour toutes une fonction $\chi(x, y)$ définie sur $[0, 4] \times [0, 4]$ telle que

- $\chi(2, 2) = 2$;
- $\chi(0, y) = \chi(4, y) = \chi(x, 0) = \chi(x, 4) = 1$;
- Sur chaque segment reliant $(2, 2)$ à la frontière de $[0, 4] \times [0, 4]$, $\chi(x, y)$ est linéaire.

3° On choisit un N positif assez grand, tel que pour $x, y \in [2 - h, 2 + h]$, on a

$$4 \left[\left(\frac{3 + h}{4} \right)^{\chi(x, y)^N} \right] < 1 - h.$$

4° On considère le sous-complexe A' de \tilde{I}_3 défini par

$$A' = \left\{ \left(x, y, 4 \left[\left(\frac{z}{4} \right)^{\chi(x, y)^N} \right] \right); (x, y, z) \in A \right\}.$$

(Il est évident que $A' \cap \text{Fr} \tilde{I}_3 = A \cap \text{Fr} \tilde{I}_3$).

5° La paire $(S_3; (f' - A) \cup A')$ est homéomorphe à (S_3, f'') . [Il n'y a pas d'ambiguïté, car, pourvu que N soit suffisamment grand, la paire $(S_3; (f' - A) \cup A')$, comme on s'en convainc aisément, ne dépend pas — à un homéomorphisme près — du choix de N].

Avant d'aller plus loin nous allons introduire la notation suivante : à toute opération- γ est associé un homéomorphisme canonique

$$\tau : f' \rightarrow (f' - A) \cup A' = f''$$

défini par

$$\tau(P) = P \quad \text{si } P \in f' - A,$$

$$\tau(P) = \left(x, y, 4 \left[\left(\frac{z}{4} \right)^{\chi(x, y)^N} \right] \right)$$

si $P \in A$ et a comme coordonnées (dans \tilde{I}_3) : x, y, z .

Si l'on applique à la paire (S_3, f') successivement plusieurs opérations- γ ,

on passe de la paire (S_3, f') à la paire $(S_3, f^{(n)})$. Ceci définit un homéomorphisme canonique $\tau : f' \rightarrow f^{(n)}$ composition des homéomorphismes canoniques des opérations- γ successives.

Maintenant nous allons donner quelques lemmes :

LEMME a. — On peut passer de (S_3, T_3^1) à (S_3, T_3^3) par une suite de deux opérations- γ , et l'homéomorphisme canonique respectif coïncide avec $\tilde{\Psi}^*$ (donc respecte les deux structures d'espace-produit de T_3^1, T_3^3).

Nous ne démontrerons pas ce lemme qui résulte de considérations géométriques simples dans l'espace à trois dimensions : il suffit de regarder la figure 3.

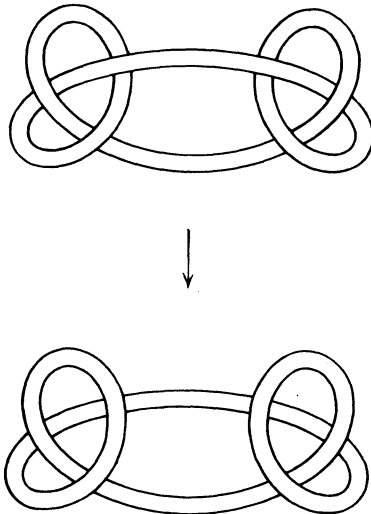


Fig. 3.

Donnons une nouvelle définition :

DEFINITION 2. — Soit $S_3 \subset S_4$, l'immersion étant faite de la manière habituelle (donc chaque composante de $S_4 - S_3$ est une cellule).

Choisissons une fois pour toutes pour chaque $p \in S_3$ un segment $\nu(p) \subset S_4$, orthogonal à S_3 , variant d'une façon continue avec p , tel que $\nu(p) \cap S_3 = p$, $\nu(p) \cap \nu(q) = \emptyset$. Si $A \subset S_3$ est un ensemble quelconque alors, par définition :

$$\Sigma(A) = \bigcup_{p \in A} \nu(p),$$

$\Sigma(A)$ a donc d'une façon naturelle une structure d'espace-produit; il est canoniquement homéomorphe à $A \times I_1$.

LEMME b. — Les paires $(S_4, T_3^1 \times I_1)$, $(\tilde{S}_4, T_3^3 \times I_1)$ sont respectivement homéomorphes à $(S_4, \Sigma(T_3^1))$, $(\tilde{S}_4, \Sigma(T_3^3))$. L'homéomorphisme

$$T_3^1 \times I_1 \rightarrow \Sigma(T_3^1)$$

induit par $(S_4, T_3^1 \times I_1) \rightarrow (S_4, \Sigma(T_3^1))$ coïncide avec l'homéomorphisme canonique $T_3^1 \times I_1 \rightarrow \Sigma(T_3^1)$. (De même pour T_2^3 , etc.)

La démonstration est immédiate [on doit seulement remarquer que si $S_3 = \text{Fr } B_4$, $S_4 = \text{Fr}(B_4 \times I_1)$ alors l'immersion naturelle $S_3 \times 0 \subset S_4$ est telle que chaque composante de $S_4 - S_3 \times 0$ est une cellule].

LEMME c. — Soient deux paires (S_3, f') , (S_3, f'') . Supposons qu'il existe une opération γ passant de la première à la seconde, τ étant l'homéomorphisme canonique associé. Alors il existe un homéomorphisme

$$\hat{h} : (S_4, \Sigma(f')) \rightarrow (S_4, \Sigma(f''))$$

tel que la restriction de \hat{h} à $\Sigma(f')$ soit compatible avec les structures d'espaces-produit de $\Sigma(f')$ et $\Sigma(f'')$. [C'est-à-dire qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Sigma(f') & \xrightarrow{1} & f' \times I_1 \\ \downarrow 4 & & \downarrow 2 \\ \Sigma(f'') & \xrightarrow{3} & f'' \times I_1 \end{array}$$

où 1, 3 sont des homéomorphismes canoniques entre $\Sigma(f')$, $\Sigma(f'')$ et $f' \times I_1$, $f'' \times I_1$, 2 est le produit de l'homéomorphisme τ (définition 1) avec l'homéomorphisme identique de I_1 et 4 est la restriction de \hat{h} à $\Sigma(f')$].

PREUVE. — On peut considérer dans S_4 un ensemble E homéomorphe à $I_3 \times E_1$, muni d'un système de coordonnées « rectangulaires » x, y, z, t :

$$0 \leq x \leq 4, \quad 0 \leq y \leq 4, \quad 0 \leq z \leq 4, \quad -\infty < t < \infty$$

tel que

1° $E \cap S_3 = \tilde{I}_3$ (voir définition 1); de plus $\{(x, y, z, 0)\} = \tilde{I}_3$ et le point de $E(x, y, z, 0)$ coïncide avec le point (x, y, z) de \tilde{I}_3 .

2° $\Sigma(\tilde{I}_3) = \{(0 \leq x \leq 4); (0 \leq y \leq 4); (0 \leq z \leq 4); (0 \leq t \leq 1)\}$ et le segment $\nu(p)$, où $p \in \tilde{I}_3$ a comme coordonnées x_0, y_0, z_0 est l'ensemble

$$\{x_0, y_0, z_0, t \in [0, 1]\}.$$

On peut réaliser l'homéomorphisme cherché \hat{h} , comme composition de plusieurs homéomorphismes que nous allons décrire explicitement :

1° L'homéomorphisme h_1 défini par

$$(x, y, z, t) \rightarrow (x, y, z, t + k \cdot \chi_1(x, y, z)),$$

où $\chi_1(x, y, z)$ est une fonction définie sur E_3 telle que :

$$\begin{aligned} & \chi_1(x, y, z) \text{ est } 0 \text{ en dehors du parallépipède;} \\ \bar{A} = & \{ (0 \leq x \leq 4) ; (2 - 2h \leq y \leq 2 + 2h) ; (3 - 2h \leq z \leq 3 + 2h) \} ; \\ & \chi_1(x, y, z) \geq 0 ; \end{aligned}$$

Sur A (voir déf. 1) $\chi_1(x, y, z) = \frac{x(4-x)}{4}$. [On observe bien que $A \subset \bar{A} \subset \tilde{I}_3$. On suppose dès le commencement h assez petit pour que $\bar{A} \cap B = \emptyset$.]

k est un nombre positif, assez grand pour que

$$k \cdot \chi_1(x, y, z) > 2$$

dès que

$$2 - h \leq x \leq 2 + h ; \quad 2 - h \leq y \leq 2 + h ; \quad 3 - h \leq z \leq 3 + h.$$

2° L'homéomorphisme h_2 :

$$(x, y, z, t) \rightarrow \left(x, y, 4 \left[\left(\frac{z}{4} \right)^{\chi_{(x,y)} N_x(t)} \right], t \right),$$

où $N_x(t)$ est une fonction continue définie par

$$\begin{aligned} N_x(t) = N_0 \quad (N_0 \text{ suffisamment grand, voir définition 1, 3}^\circ) \quad & \text{si } t \geq 2 ; \\ N_x(t) = 0 \quad & \text{si } t \leq 1 ; \quad \text{pour } 0 \leq t \leq 1, \quad N_x(t) \end{aligned}$$

est définie par linéarité.

3° L'homéomorphisme h_3 :

$$(x, y, z, t) \rightarrow (x, y, z, t - \chi_2(x, y, z))$$

où $\chi_2(x, y, z)$ est définie de la manière suivante : on considère tout d'abord l'application continue

$$\begin{aligned} \mu : [0, 4]^3 & \rightarrow [0, 4]^3 \\ \mu : (x, y, z) & \rightarrow \left(x, y, 4 \left(\frac{z}{4} \right)^{\chi_{(x,y)} N_x(k \cdot \chi_1(x, y, z))} \right). \end{aligned}$$

Cette application n'est pas un homéomorphisme, mais sa restriction à A , $\mu|_A$, vu les propriétés de χ_1 , est bien un homéomorphisme. $\chi_2(x, y, z)$ est une fonction continue ≥ 0 , définie sur $[0, 4]^3$, nulle en dehors d'un petit voisinage de $\mu(A)$. Si $(x, y, z) \in \mu(A)$, on considère le point univoquement déterminé $(x_1, y_1, z_1) \in A$, tel que

$$\mu(x_1, y_1, z_1) = (x, y, z)$$

et on pose :

$$\chi_2(x, y, z) = k \cdot \chi_1(x, y, z).$$

L'homéomorphisme \hat{h} est par définition :

$$\hat{h} = h_3 \circ h_2 \circ h_1.$$

REMARQUE. — Par l'homéomorphisme considéré (x, y, z, o) , où $(x, y, z) \in A$, n'a pas comme image précisément $\left(x, y, 4 \left[\left(\frac{z}{4} \right)^{\chi(x, y)^{N_x}} \right] \right)$ mais

$$\left(x, y, 4 \left[\left(\frac{z}{4} \right)^{\chi(x, y)^{N_x(k \cdot \chi_1(x, y, z))}} \right] \right).$$

Mais vu les propriétés de χ, χ_1 , etc., $(\tilde{I}_3, A' \cup B)$ et

$$\left(\tilde{I}_3, \left\{ x, y, 4 \left[\left(\frac{z}{4} \right)^{\chi(x, y)^{N_x(k \cdot \chi_1(x, y, z))}} \right] \right\} \cup B \right) \quad \text{où } (x, y, z) \in A$$

sont évidemment homéomorphes.

On voit aisément que les lemmes a, b, c permettent de construire Ψ_1 .

6. Preuve que $V_4 \neq I_4$. — Il suffira de prouver que $\Pi_1(\text{Fr } V_4)$ n'est pas banal.

Déterminons d'abord $\Pi_1(S_3 - T_3^1)$. En prenant le système de générateurs $\alpha, \beta, \gamma, \delta = \alpha, \varphi, \varepsilon$ de la figure 2 et en utilisant un procédé classique (voir [2] ou [4], chap. III, § 3, p. 44) on obtient les relations entre ces générateurs

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha^{-1} \varepsilon \varphi \varepsilon^{-1} = 1, \\ \varphi^{-1} \alpha \varepsilon \alpha^{-1} = 1, \\ \varepsilon^{-1} \varphi \alpha \varphi^{-1} = 1, \\ \gamma^{-1} \alpha^{-1} \beta \alpha = 1, \\ \beta^{-1} \gamma^{-1} \alpha \gamma = 1, \\ \alpha^{-1} \beta^{-1} \gamma \beta = 1. \end{cases}$$

Ce procédé donne en effet $\Pi_1(S_3 - C)$ où C est un nœud, par les opérations suivantes : on oriente C ; on choisit un point $\omega \in S_3 - C$ et l'on projette C sur un plan, c'est-à-dire que l'image de $p \in C$ sera le point d'intersection du rayon ωp avec le plan considéré. En prenant quelques précautions très simples, la projection a des points au plus doubles. Si les directions des rayons $\omega p, \omega q$ coïncident, et si ωp est plus long que ωq , on « coupe la projection de C au point qui correspond à p ».

La projection deviendra donc une suite d'arcs orientés disjoints $R_1, R_2, \dots, R_n (R_{n+1} = R_1)$ et, en chaque point double, un certain segment $R_{\lambda(i)}$ sépare R_i de R_{i+1} . Bien entendu les R_i sont numérotés « dans leur ordre naturel ».

Soit σ_i l'arc de C dont la projection est R_i .

Les générateurs de $\Pi_1(S_3 - C)$ s'obtiennent de la manière suivante : on

prend un petit cercle γ_i autour de chaque σ_i . On oriente chaque γ_i de telle manière que « en tournant une vis dans le sens indiqué par γ_i elle se meut dans le sens de σ_i ». Soit ℓ_i un segment allant de ω à γ_i . Les classes d'homotopie des chemins $\ell_i \gamma_i \ell_i^{-1}$ (dans ce travail nous adoptons constamment la convention suivante : le chemin $C_1 C_2$ est le chemin qui commence par C_1 et finit par C_2) sont les générateurs de $\Pi_1(S_3 - C)$. On désigne le générateur correspondant à $\ell_i \gamma_i \ell_i^{-1}$ toujours par R_i (c'est un abus de langage qui ne donne lieu à aucune confusion). Les relations s'obtiennent de la manière suivante : pour chaque point double on écrit

$$R_{i+1}^{-1} R_{\lambda(i)}^{\varepsilon_i} R_i R_{\lambda(i)}^{-\varepsilon_i} = 1,$$

où $\varepsilon_i = +1$ (-1) si $R_{\lambda(i)}$ peut être amené dans la position de $R_i R_{i+1}$ par une rotation d'angle inférieur à 180° dans le sens trigonométrique inverse (direct).

Revenons à $\Pi_1(S_3 - T_3^1)$; posons

$$\alpha\gamma = \gamma\beta = \beta\alpha = \sigma, \quad \varphi\alpha = \varepsilon\varphi = \alpha\varepsilon = \tau;$$

On voit que $\Pi_1(S_3 - T_3^1)$ a pour générateurs α, σ, τ , liés par les relations

$$(2) \quad \sigma^2 = \alpha\sigma\alpha; \quad \tau^2 = \alpha\tau\alpha.$$

Quant au groupe $\Pi_1(\text{Fr}(S_3 - T_3^1))$ il est somme directe (on prend comme origine le point R , *fig. 2*) du groupe qu'engendrent φ et la courbe χ représentée par un trait épais dans la figure 2.

Il est facile à voir que (on utilise la description des « générateurs » α, β, \dots donnée plus haut)

$$\chi = \varepsilon^{-1} \gamma \alpha \beta \varphi^{-1} \alpha^{-1} = \tau^{-1} \sigma^3 \tau^{-2}.$$

Étudions maintenant $\text{Fr}(A_3 \times I_1)$; c'est

$$(A_3 \times 0) \cup (A_3 \times [0, 1]) \cup (A_3 \times 1),$$

où $(\text{Fr} A_3) \times 0$ du premier terme et $(\text{Fr} A_3) \times 0$ du second terme [de même $(\text{Fr} A_3) \times 1$ du second terme et $(\text{Fr} A_3) \times 1$ du troisième terme] sont identifiés point par point.

L'ensemble $(A_3 \times 0) \cup [(\text{Fr} A_3) \times I_1]$ est homéomorphe à A_3 . Il peut être représenté dans S_3 de la manière suivante. On y considère tout d'abord $A_3 \times 0$ (c'est-à-dire A_3) avec son immersion naturelle dans S_3 (*fig. 1*). Ensuite on considère un petit vecteur normal à $(\text{Fr} A_3) \times 0$ variant d'une façon continue, orienté vers l'extérieur de $(\text{Fr} A_3) \times 0$. L'extrémité de ce vecteur, décrit une surface homéomorphe à $\text{Fr} A_3$, $(\text{Fr} A_3) \times 1$. La portion de S_3 comprise entre ces deux surfaces est homéomorphe à $(\text{Fr} A_3) \times I_1$. Donc $(A_3 \times 0) \cup [(\text{Fr} A_3) \times I_1]$ est une boule \overline{B}_3 à laquelle on a enlevé un cylindre \overline{T}_3 (et est donc homéomorphe à A_3).

De même que nous avons utilisé la décomposition

$$\text{Fr } A_3 = \Gamma_2^2 \cup (\text{Fr } A_3 - \Gamma_2^2),$$

nous utilisons la décomposition analogue

$$\text{Fr} \{ (A_3 \times 0) \cup [(\text{Fr } A_3) \times I_1'] \} = (\Gamma_2^2 \times 1) \cup ((\text{Fr } A_3 - \Gamma_2^2) \times 1).$$

Quant à $A_3 \times 1$ il ⁽⁹⁾ peut être réalisé de la manière suivante : On prend $O \in \overline{B}_3 - \overline{T}_3$. On fait une inversion \mathcal{J} de pôle O . L'image de

$$\overline{B}_3 - \overline{T}_3 = (A_3 \times 0) \cup [(\text{Fr } A_3) \times I_1'],$$

c'est-à-dire que $\mathcal{J}(\overline{B}_3 - \overline{T}_3)$ est homéomorphe à $A_3 \times 1$. De plus $\mathcal{J}(p \times 1)$, où $p \in \text{Fr } A_3$, et $p \times 1 \in \text{Fr}[(A_3 \times 0) \cup [(\text{Fr } A_3) \times I_1']]$, est $p \times 1 \in \text{Fr}(A_3 \times 1)$. Les deux ensembles $(\text{Fr } A_3 - \Gamma_2^2) \times 1$, partie de $\text{Fr}[(A_3 \times 0) \cup [(\text{Fr } A_3) \times I_1']]$, et $(\text{Fr } A_3 - \Gamma_2^2) \times 1$, partie de $\text{Fr}(A_3 \times 1)$, sont ainsi identifiés point par point.

C'est-à-dire que $\mathcal{J}(p \times 1) = p \times 1$ où le premier $p \times 1$ est un point de

$$(\text{Fr } A_3 - \Gamma_2^2) \times 1 \subset \text{Fr}[(A_3 \times 0) \cup [(\text{Fr } A_3) \times I_1']]$$

et le second $p \times 1$, un point de

$$(\text{Fr } A_3 - \Gamma_2^2) \times 1 \subset \text{Fr}(A_3 \times 1).$$

Tout cela est représenté dans la figure 4.

$\Gamma_2^2 \times 1$, partie de $\text{Fr}[(A_3 \times 0) \cup [(\text{Fr } A_3) \times I_1']]$, est la surface latérale du cylindre \overline{T}_3 et est désigné par $(\Gamma_2^2 \times 1)'$ dans la figure 4. De même $\Gamma_2^2 \times 1$, partie de $\text{Fr}(A_3 \times 1)$, est la surface latérale de $\mathcal{J}(\overline{T}_3)$. Elle est désignée dans la figure par $(\Gamma_2^2 \times 1)''$.

$(\Gamma_2^2 \times 1)' \cap (\Gamma_2^2 \times 1)''$ est constituée par les deux cercles $\langle P \rangle, \langle Q \rangle$ de la figure 4; $\langle P \rangle \cup \langle Q \rangle$ est identifié à

$$(\Gamma_2^2 \times 1) \cap [(\text{Fr } A_3 - \Gamma_2^2) \times 1].$$

L'ensemble représenté dans la figure 4 est

$$[(A_3 \times 0) \cup [(\text{Fr } A_3) \times I_1']] \cup \mathcal{J}((A_3 \times 0) \cup [(\text{Fr } A_3) \times I_1']).$$

On voit aisément qu'il est homéomorphe à $S_3 - T_3^1$. On le désignera par X_3 . $\text{Fr}(A_3 \times I_1')$ est un espace-quotient de X_3 . En effet, X_3 est

$$(A_3 \times 0) \cup (A_3 \times [0, 1]) \cup (A_3 \times 1),$$

(9) Sa frontière est

$$(\Gamma_2^2 \times 1) \cup [(\text{Fr } A_3 - \Gamma_2^2) \times 1].$$

où toutes les identifications pour obtenir $\text{Fr}(A_3 \times I'_1)$ ont été faites, sauf celles de

$$\Gamma_2^2 \times 1, \text{ partie de } (\text{Fr} A_3) \times [0, 1]$$

avec

$$\Gamma_2^2 \times 1, \text{ partie de } A_3 \times 1.$$

On déduit donc $\text{Fr}(A_3 \times I'_1)$ de X_3 en identifiant $p \times 1 \in (\Gamma_2^2 \times 1)'$ avec $\mathcal{J}(p \times 1) \in (\Gamma_2^2 \times 1)''$. D'une manière explicite cela revient à faire l'opération

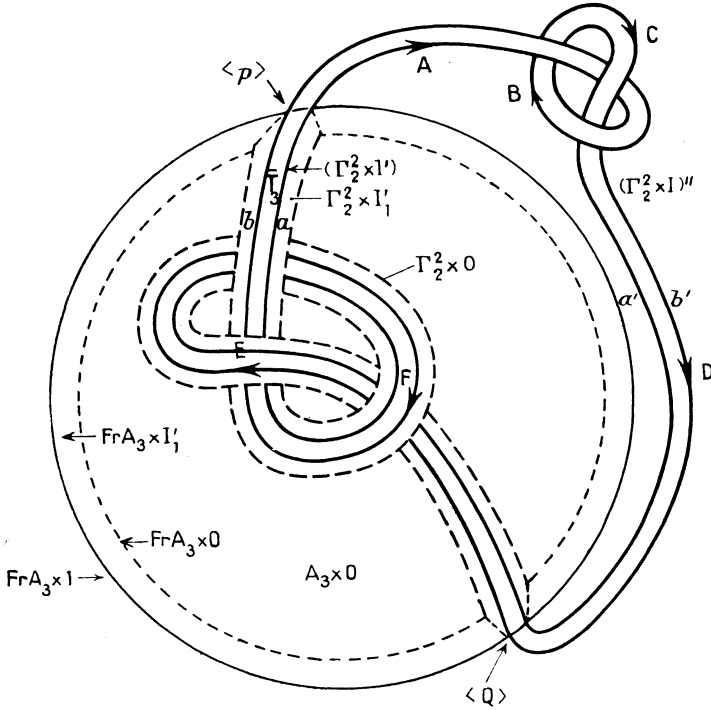


Fig. 4.

suivante : on considère les génératrices a, b de $(\Gamma_2^2 \times 1)'$ et les génératrices a', b' de $(\Gamma_2^2 \times 1)''$ (fig. 4). On construit un homéomorphisme φ' :

$$(\Gamma_2^2 \times 1)' \rightarrow (\Gamma_2^2 \times 1)''$$

tel que

pour tout $q \in \langle P \rangle \cup \langle Q \rangle$,

$$\begin{aligned} \varphi'(q) &= q; \\ \varphi'(a) &= a', \quad \varphi'(b) = b'. \end{aligned}$$

Enfin, on identifie p et $\varphi'(p)$.

On voit maintenant sans peine que

$$\text{Fr}(A_3 \times I'_1) - \Gamma_2^2 \times I'_1 \quad (\Gamma_2^2 \times I'_1) \subset (\text{Fr} A_3) \times I'_1$$

est homéomorphe à X_3 , donc à $S_3 - T_3^1$. Donc $\Pi_1(\text{Fr}(A_3 \times I'_1) - \Gamma_2^2 \times I'_1)$ est engendré par A, B, C, D, E, F qui satisfont des relations tout à fait analogues à celles que satisfont $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$ [on peut introduire $S = AC, T = FA$ et obtenir les analogues de (2), n° 6].

D'une manière analogue $\Pi_1\{\text{Fr}(\text{Fr}(A_1 \times I'_1) - \Gamma_2^2 \times I'_1)\}$ est engendré par F et

$$H = E^{-1}CABF^{-1}A^{-1},$$

$\text{Fr} V_4$ est

$$((\text{Fr} A_1 \times I'_1) - \Gamma_2^2 \times I'_1) \cup (S_3 - T_2^1),$$

où les frontières de ces deux variétés à bord sont identifiées point par point (ces deux frontières sont d'ailleurs homéomorphes). On voit aisément que par un choix convenable des origines des groupes fondamentaux, cette identification peut être réalisée de telle manière que

$$(3) \quad \begin{cases} H = \varphi, \\ \chi = F. \end{cases}$$

(Ceci résulte de la manière dont $\Gamma_2^2 \times I'_1$ et T_3^1 sont identifiés.)

Donc le groupe fondamental de $\text{Fr} V_4$ est engendré par $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$ [satisfaisant (1)] par A, B, C, D, E, F [satisfaisant les analogues de (1)], l'ensemble de ces générateurs vérifiant en outre (3).

[Pour arriver à ce résultat on a appliqué le paragraphe 52, page 179, de [5] qui donne le procédé suivant pour obtenir $\Pi_1(X \cup Y)$ à partir de $\Pi_1(X), \Pi_1(Y)$ et $\Pi_1(X \cap Y)$: on écrit les relations qui lient les générateurs de $\Pi_1(X)$ et de $\Pi_1(Y)$ et en outre les relations qui identifient les générateurs de $\Pi_1(X \cap Y)$ à des éléments de $\Pi_1(X)$ et de $\Pi_1(Y)$].

7. Propriétés de $\Pi_1(\text{Fr} V_4)$. — En définitive $\Pi_1(\text{Fr} V_4)$ est un groupe engendré par $\sigma, \alpha, \tau, S, A, T$, que lient les relations

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \alpha\sigma\alpha, \\ \tau^2 &= \alpha\tau\alpha, \\ S^2 &= ASA, \\ T^2 &= ATA, \\ \tau\alpha^{-1} &= T^{-1}S^3T^{-2}, \\ TA^{-1} &= \tau^{-1}\sigma^3\tau^{-2} \end{aligned}$$

Éliminons α et A (qui peuvent être calculés en fonction de σ, T, τ, S vu les deux dernières relations). Imposons les relations supplémentaires $S = \sigma, \tau = T$: on trouve comme image homéomorphe de ce groupe $\Pi_1(\text{Fr} V_4)$ le

groupe à deux générateurs S et T , liés par les relations

$$\begin{aligned} S^2 &= T^2 S^{-3} T^2 S T^2 S^{-3} T^2, \\ 1 &= S^{-3} T^5 S^{-3} T^2. \end{aligned}$$

En posant $S^3 = T^7 = 1$ la seconde relation est satisfaite, et la première devient $(ST^3)^2 = 1$. Donc, $\Pi_1(\text{Fr } V_4)$ a comme image homomorphe le groupe à deux générateurs, S et T , liés par les relations

$$S^3 = T^7 = 1, \quad (ST^3)^2 = 1.$$

Ce dernier peut être représenté par des permutations : il suffit de prendre

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 3 & 1 & 7 & 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \\ S &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 1 & 4 & 3 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par suite $\Pi_1(\text{Fr } V_4)$ n'est pas banal, donc V_4 n'est pas homéomorphe à I_4 . Il s'ensuit que la variété $\text{int } V_4$ n'est pas E_4 . Car, si l'on compactifie $\text{int } V_4$ en lui adjoignant un point à l'infini, $\Pi_1(\text{Fr } V_4)$ sera le groupement fondamental en ce point ⁽¹⁰⁾ (voir [5], § 32, p. 121).

8. Corollaires. — Notre théorème a les corollaires immédiats que voici :

a. Il existe une variété $\hat{V}_4 \neq E_4$ et telle que $\hat{V}_4 \times E_1 = E_5$.

b. Il existe une variété à bord contractible V_4 telle que :

1° $\Pi_1(\text{Fr } V_4) \neq 0$.

2° En considérant un homéomorphisme $\psi(V_4) = V_4^*$, l'espace-quotient $(V_4 \cup V_4^*)/(\psi)$, où $p \in \text{Fr } V_4$ est identifié à $\psi(p) \in \text{Fr } V_4^*$, est la sphère à quatre dimensions.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] BING (R. H.). — *The cartesian product of a certain nonmanifold and a line is E^4* (*Bull. Amer. math. Soc.*, t. 64, 1958, p. 82-84).
 [2] FOX (R. H.) and ARTIN (E.). — *Some wild cells and spheres in three-dimensional space* (*Ann. Math.*, t. 49, 1948, p. 979-990).
 [3] LERAY (Jean). — *L'homologie d'un espace fibré dont la fibre est connexe* (*J. Math. pures et appl.*, 9^e série, t. 29, 1950, p. 169-213).

⁽¹⁰⁾ En fait dans [5], on définit seulement l'homologie en un point, mais en utilisant le théorème principal qui y est énoncé, on peut tout aussi bien définir un groupe fondamental local.

- [4] REIDEMEISTER (K.). — *Knothentheorie*, Berlin, Springer, 1932 (*Ergebnisse der Mathematik*, 1, Bd 1).
- [5] SEIFERT (H.) und THRELFALL (W.). — *Lehrbuch der Topologie*, Leipzig, B. G. Teubner, 1934.
- [6] SERRE (Jean-Pierre). — *La suite spectrale des espaces fibrés, Applications (Séminaire H. Cartan, t. 3, 1950-1951, n° 10)*.

(Manuscrit reçu le 11 juin 1959.)

Valentin POÉNARU,
Institutul de Matematică,
Str. Mihail Eminescu, 47,
Bucuresti, 3 (Roumanie).

