YOZÖ MATSUSHIMA
AKIHIKO MORIMOTO

Sur certains espaces fibrés holomorphes sur une variété de Stein

Bulletin de la S. M. F., tome 88 (1960), p. 137-155
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1960__88__137_0>

Bull. Soc. math. France,
88, 1960, p. 137 à 155.

SUR CERTAINS ESPACES FIBRÉS HOLOMORPHES SUR UNE VARIÉTÉ DE STEIN;

PAR

Yozô MATSUSHIMA et Akihiko MORIMOTO
(Nagoya).

Introduction.

Dans un Mémoire fondamental sur les variétés de Stein, J. P. Serre [9] a posé le problème suivant : Un espace fibré holomorphe dont la base et la fibre sont des variétés de Stein, est-il toujours une variété de Stein ?

Le but de ce travail est de donner une réponse affirmative à ce problème dans le cas où le groupe structural est connexe. Dans la première partie de ce travail, nous étudierons d'abord le cas d'un espace fibré principal sans supposer que le groupe structural soit connexe. Nous prouverons qu'un espace fibré principal holomorphe dont la base et la variété du groupe structural sont des variétés de Stein est une variété de Stein (théorème 4). Ce théorème est déjà connu dans les deux cas particuliers suivants :

1° Le groupe structural est isomorphe à un sous-groupe fermé du groupe linéaire complexe (Serre [9]);
2° Le groupe structural est discret (Stein [10]).

Pour traiter le cas général, on a besoin de trouver une condition en termes de groupes de Lie pour que la variété d'un groupe de Lie complexe soit une variété de Stein. Cette condition sera donnée dans le théorème 1. Dans la démonstration du théorème 1, on utilisera essentiellement le résultat de Serre cité ci-dessus. Utilisant le théorème 1, nous pouvons éclaircir la structure algébrique d'un groupe de Lie complexe et connexe dont la variété sous-jacente est une variété de Stein. Nous trouverons que la variété d'un groupe de Lie complexe et connexe est une variété de Stein si et seulement si le centre connexe de ce groupe est isomorphe au groupe $C^n \times C^{*m}$ pour certains entiers n, $m \geq 0$ (théorème 2). Comme application du théorème 1, nous verrons que, si un groupe de Lie complexe opère effectivement et holomorphiquement sur une variété de Stein, la variété de ce groupe est nécessairement une variété de Stein (théorème 3). Le théorème 4 sera démontré en utilisant ces résultats sur les groupes de Lie ainsi que les résultats de Serre [9] et de Stein [10] cités plus haut. Dans la deuxième partie de ce travail, nous étudierons un espace fibré holomorphe E dont la base B et la fibre F sont des variétés de Stein et dont le groupe structural G est connexe.

Notre but est de prouver que la variété E est une variété de Stein (théorème 6). Utilisant les résultats obtenus dans la première partie ainsi qu'un résultat récent de Grauert [4], nous verrons d'abord que le groupe structural de l'espace fibré principal associé à E se réduit holomorphiquement à un sous-groupe $\tilde{K}$ de G qui est le « complexifié » d'un sous-groupe compact maximal K de G. Si l'on désigne par P l'espace fibré principal holomorphe de groupe structural $\tilde{K}$ ainsi obtenu, E est associé à P et la variété E est le quotient de $P \times F$ par la relation d'équivalence

$$(x, \xi) \sim (x.a, a^{-1}.\xi) \qquad (x \in P, \xi \in F, a \in \tilde{K}).$$

$P \times F$ se munit d'une structure d'espace fibré principal holomorphe de base E et de groupe structural $\tilde{K}$. La variété P est une variété de Stein d'après le théorème 4 et, par suite, $P \times F$ l'est aussi. Notre problème se ramène ainsi à la démonstration de la proposition suivante : Soit P un espace fibré principal holomorphe de base B et de groupe structural G. Si P est une variété de Stein et si G est le « complexifié » d'un sous-groupe compact maximal, la base B est une variété de Stein (théorème 5). Cette proposition sera démontrée en fabriquant, d'une certaine manière, des fonctions holomorphes dans la base B à partir des fonctions holomorphes dans P et en utilisant un théorème de H. Cartan et le théorème d'approximation d'Oka-Weil. Pour utiliser le théorème d'Oka-Weil, le résultat suivant sera essentiel : Dans un groupe de Lie complexe et connexe G dont la variété sous-jacente est une variété de Stein, l'enveloppe $\hat{K}$ d'un sous-groupe compact maximal K de G coïncide avec K (proposition 8).

Première partie.

1. — Soit G un groupe de Lie complexe et connexe, et soit K un sous-groupe compact maximal de G. Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie de G et de K respectivement. Nous dirons que G *satisfait à la condition* (P) *si l'on a* $\mathfrak{k} \cap \sqrt{-1}\,\mathfrak{k} = (0)$. Puisque les sous-groupes compacts maximaux de G sont conjugués entre eux [6], cette condition ne dépend pas du choix de K. $\mathfrak{k} \cap \sqrt{-1}\,\mathfrak{k}$ étant la plus grande sous-algèbre complexe contenue dans $\mathfrak{k}$, on voit que la condition (P) est équivalente à la condition que G *n'a pas de*

sous-groupe complexe et connexe de dimension positive contenu dans un sous-groupe compact de G.

THÉORÈME 1. — *Soit G un groupe de Lie complexe et connexe. Pour que la variété de G soit une variété de Stein, il faut et il suffit que G satisfasse à la condition (P).*

Avant d'entrer dans la démonstration du théorème 1, nous ferons quelques remarques sur la condition (P) qui seront utilisées plus loin.

A. — Il résulte immédiatement de la définition de la condition (P) que tout sous-groupe complexe et connexe (pas nécessairement fermé) d'un groupe satisfaisant à la condition (P) satisfait à la même condition. D'autre part, le groupe linéaire complexe $GL(n, C)$ satisfait à la condition (P). En effet, le groupe unitaire $U(n)$ étant un sous-groupe compact maximal de $GL(n, C)$, soit $\mathfrak{u}(n)$ l'algèbre de Lie de $U(n)$. Les valeurs propres d'une matrice dans $\mathfrak{u}(n)$ sont toutes imaginaires pures et, par suite, les valeurs propres d'une matrice dans $\sqrt{-1}\,\mathfrak{u}(n)$ sont toutes réelles. De plus, les matrices dans $\mathfrak{u}(n)$ sont semi-simples. Il en résulte immédiatement que $\mathfrak{u}(n) \cap \sqrt{-1}\,\mathfrak{u}(n) = (0)$ et donc que le groupe $GL(n, C)$ satisfait à la condition (P). Il résulte de ce que nous avons montré que tout sous-groupe complexe et connexe de $GL(n, C)$ satisfait à la condition (P).

B. — Soient G et G' des groupes de Lie complexes et connexes. Supposons qu'il existe un homomorphisme holomorphe de G dans G' qui soit un isomorphisme local. Si G' satisfait à la condition (P), il en est de même de G. Il résulte de là et de **A** que tout groupe complexe et connexe admettant une représentation linéaire holomorphe localement fidèle satisfait à la condition (P). En particulier, tout groupe complexe et connexe à centre discret vérifie la condition (P), car la représentation adjointe d'un tel groupe est localement fidèle.

C. — Soit G un groupe de Lie complexe et connexe et soit L un sous-groupe complexe et connexe contenu dans un sous-groupe compact de G. Montrons que L est contenu dans le centre de G. En effet, soit φ la représentation adjointe de G. D'après **A**, l'image $\varphi(G)$ de G par φ satisfait à la condition (P) et, par suite, $\varphi(G)$ ne contient pas de sous-groupe complexe et connexe de dimension > 0 contenu dans un sous-groupe compact de $\varphi(G)$. Par conséquent, on a $\varphi(L) = 1$ et ceci signifie que L est contenu dans le centre de G. Il en résulte immédiatement qu'*un groupe de Lie complexe et connexe satisfait à la condition (P) si et seulement si son centre connexe vérifie la même condition.*

2. PROPOSITION 1. — *Tout groupe de Lie complexe semi-simple connexe est isomorphe à un sous-groupe fermé complexe du groupe linéaire complexe.*

Cette proposition est connue. Mais, pour être complet, nous donnons ici une démonstration. Soit G un groupe de Lie complexe semi-simple connexe. Désignons par $\mathrm{ad}\, G$ le groupe adjoint de G. Le groupe fondamental de $\mathrm{ad}\, G$ est fini, parce que la variété de $\mathrm{ad}\, G$ est produit de la variété d'un groupe semi-simple compact connexe par un espace euclidien (*cf.* [6]) et parce que, d'après le théorème de Weyl, le groupe fondamental d'un groupe semi-simple compact connexe est fini. Soit $\tilde{G}$ le revêtement universel de $\mathrm{ad}\, G$ et donc de G. Soit $\tilde{Z}$ le centre de $\tilde{G}$. Le groupe $\tilde{Z}$ est isomorphe au groupe fondamental de $\mathrm{ad}\, G$ et donc fini. Il en résulte que $\tilde{Z}$ est contenu dans chaque sous-groupe compact maximal de $\tilde{G}$, car, si $\tilde{L}$ est un sous-groupe compact maximal de $\tilde{G}$, le groupe $\tilde{Z}.\tilde{L}$ est aussi compact et, par suite, $\tilde{Z}.\tilde{L} = \tilde{L}$. Soit $G = \tilde{G}/Z$, où Z est un sous-groupe de $\tilde{Z}$. Soit K un sous-groupe compact maximal de G. Le groupe Z étant fini, il existe un sous-groupe compact maximal $\tilde{K}$ de $\tilde{G}$ tel que $K = \tilde{K}/Z$. Soit φ une représentation unitaire fidèle du groupe compact K dans le groupe linéaire complexe $GL(n, C)$ (*cf.* C. Chevalley [3]). Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie de G et de K respectivement. On a alors

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\,\mathfrak{k}, \qquad \mathfrak{k} \cap \sqrt{-1}\,\mathfrak{k} = (0).$$

Soit φ' la représentation linéaire de l'algèbre $\mathfrak{k}$ définie par φ. Pour tout élément $X = Y + \sqrt{-1}\, Z\, (Y, Z \in \mathfrak{k})$ de $\mathfrak{g}$, soit $\tilde{\varphi}'(X) = \varphi'(Y) + \sqrt{-1}\, \varphi'(Z)$. On vérifie facilement que $\tilde{\varphi}'$ est une représentation linéaire complexe fidèle de l'algèbre complexe $\mathfrak{g}$. $\tilde{\varphi}'$ définit une représentation linéaire holomorphe $\tilde{\varphi}$ du groupe simplement connexe $\tilde{G}$. Il résulte de la définition de $\tilde{\varphi}$ que si $g \in \tilde{K}$, on a $\tilde{\varphi}(g) = \varphi(\pi(g))$, π désignant la projection canonique de $\tilde{G}$ sur G. Puisque la représentation $\tilde{\varphi}$ est localement fidèle, le noyau Z' de $\tilde{\varphi}$ est un sous-groupe de $\tilde{Z}$ et, par suite, $\tilde{K} \supset Z'$. Montrons que $Z = Z'$. En effet, puisque $\tilde{\varphi}(g) = \varphi(\pi(g))$ pour tout $g \in \tilde{K}$, si $g \in Z$, on a

$$\tilde{\varphi}(g) = \varphi(\pi(g)) = \varphi(e) = 1$$

et, par suite, $g \in Z'$. Réciproquement, si $g \in Z'$, on a $1 = \tilde{\varphi}(g) = \varphi(\pi(g))$ et donc $\pi(g) = e$, car la représentation φ est fidèle. Par conséquent, on a $g \in Z$. On a donc $Z = Z'$. La représentation $\tilde{\varphi}$ de $\tilde{G}$ définit alors la représentation holomorphe fidèle ψ de $G = \tilde{G}/Z$. D'après un théorème de K. Yosida [11], tout sous-groupe semi-simple connexe de $GL(n, C)$ est fermé. L'image $\psi(G)$ de G est donc fermée dans $GL(n, C)$. La proposition 1 est ainsi démontrée.

Comme la variété d'un sous-groupe fermé complexe du groupe linéaire complexe est une variété de Stein [1], il résulte de la proposition 1 que *la variété d'un groupe de Lie complexe semi-simple connexe est une variété de Stein*

Proposition 2. — *Soit G un groupe de Lie complexe abélien connexe. Si G satisfait à la condition (P), G est isomorphe au groupe $C^n \times C^{*m}$ pour certains entiers n, $m \geqq 0$.*

Soit $G = A/D$, où A désigne un espace vectoriel complexe et où D désigne un sous-groupe discret de A. Soient $d_1, \ldots, d_m$ des générateurs libres de D; $d_1, \ldots, d_m$ sont linéairement indépendants sur les nombres réels. Soit B le sous-espace vectoriel réel de A engendré par $d_1, \ldots, d_m$. L'image de B dans G est le sous-groupe compact maximal de G et la condition (P) est équivalente à la condition que $B \cap \sqrt{-1}B = (0)$. Supposons que G satisfasse à la condition (P). Soit $V = B + \sqrt{-1}B$. Alors V est un sous-espace vectoriel complexe de A de dimension complexe m et les $d_1, \ldots, d_m$ constituent une base complexe de V. Soit W un sous-espace vectoriel complexe de A tel que $A = W + V$ (somme directe). On a alors

$$G = A/D \cong W \times (V/D), \qquad \text{et} \qquad V/D \cong C^{*m} \qquad \text{et} \qquad W \cong C^n,$$

n désignant la dimension complexe de W. La proposition 2 est donc démontrée.

Proposition 3. — *Soit G un groupe de Lie complexe abélien connexe. Si la variété de G est une variété de Stein, G satisfait à la condition (P).*

Nous utiliserons les notations introduites dans la démonstration de la proposition 2. Soit $G = A/D$. Soit $\mathcal{F}$ la famille des fonctions holomorphes f sur A telles que $f(z+d) = f(z)$ pour tout $z \in A$ et $d \in D$. La variété de G étant une variété de Stein, la famille $\mathcal{F}$ satisfait à la condition suivante (*cf.* [1]) :

($\bigstar$) Pour tout point $x \in A$, il existe r fonctions dans $\mathcal{F}$ qui induisent un système de coordonnées locales au point x (r désigne la dimension complexe de A).

D'autre part, la restriction à B d'une fonction dans $\mathcal{F}$ est bornée, car l'image de B dans G est compacte. En particulier, la restriction à $B \cap \sqrt{-1}B$ d'une fonction dans $\mathcal{F}$ est bornée. $B \cap \sqrt{-1}B$ étant un sous-espace vectoriel complexe de A, cette restriction est une fonction holomorphe sur $B \cap \sqrt{-1}B$. Il en résulte que la restriction à $B \cap \sqrt{-1}B$ d'une fonction dans $\mathcal{F}$ est constante. Il résulte de là et de la condition ($\bigstar$) de $\mathcal{F}$ que $B \cap \sqrt{-1}B = (0)$ et ceci montre que le groupe G satisfait à la condition (P). La proposition 3 est ainsi démontrée.

Il résulte des propositions 2 et 3 la proposition suivante :

Proposition 4. — *Soit G un groupe de Lie complexe abélien connexe. La variété de G est une variété de Stein si et seulement si $G \cong C^n \times C^{*m}$ pour certains entiers n, $m \geqq 0$.*

La proposition suivante est due à J.-P. SERRE [9] :

PROPOSITION 5 (SERRE). — *Un espace fibré principal holomorphe dont la base est une variété de Stein et dont le groupe structural est isomorphe à un sous-groupe fermé complexe du groupe linéaire complexe est une variété de Stein.*

3. — Soit G un groupe de Lie connexe et soit A un sous-groupe fermé, invariant et connexe de G. D'après un résultat d'IWASAWA ([6], p. 531), il existe un sous-groupe compact maximal K de G tel que l'image de K dans G/A et le groupe $K \cap A$ soient les sous-groupes compacts maximaux de G/A et de A respectivement. Alors, en utilisant le fait que les groupes compacts maximaux de G sont conjugués entre eux et le fait que A est invariant dans G, on voit que, pour tout sous-groupe compact maximal L de G, l'image de L dans G/A et le groupe $L \cap A$ sont les sous-groupes compacts maximaux de G/A et de A respectivement.

PROPOSITION 6. — *Soit G un groupe de Lie complexe et connexe satisfaisant à la condition (P) et soit K un sous-groupe compact maximal de G. Soit A un sous-groupe fermé, invariant, complexe et connexe de G. Soient $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{a}$ les algèbres de Lie de G, de K et de A respectivement. Alors une condition nécessaire et suffisante pour que le groupe quotient G/A satisfasse à la condition (P) est qu'on ait l'égalité suivante :*

$$(1) \qquad (\mathfrak{k} + \sqrt{-1}\,\mathfrak{k}) \cap \mathfrak{a} = (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{a}) + \sqrt{-1}\,(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{a}).$$

Soit π la projection canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. Alors $\pi(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}'$ est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe compact maximal de G/A. Supposons d'abord qu'on ait l'égalité (1). On va montrer que $\mathfrak{k}' \cap \sqrt{-1}\,\mathfrak{k}' = (0)$. Soit $Z' \in \mathfrak{k}' \cap \sqrt{-1}\,\mathfrak{k}'$. Il existe alors des éléments X, $Y \in \mathfrak{k}$ tels que

$$Z' = \pi(X) = \pi(\sqrt{-1}\,Y).$$

Soit $W = X - \sqrt{-1}\,Y$. Alors $\pi(W) = 0$ et, par suite $W \in (\mathfrak{k} + \sqrt{-1}\,\mathfrak{k}) \cap \mathfrak{a}$. Puisqu'on a l'égalité (1) et puisque la somme $\mathfrak{k} + \sqrt{-1}\,\mathfrak{k}$ est directe, on a X, $Y \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{a}$. Alors $\pi(X) = \pi(Y) = 0$ et, par suite, $Z' = \pi(X) = 0$. On a donc $\mathfrak{k}' \cap \sqrt{-1}\,\mathfrak{k}' = (0)$. Soit, réciproquement, $\mathfrak{k}' \cap \sqrt{-1}\,\mathfrak{k}' = (0)$. Soit

$$Z \in (\mathfrak{k} + \sqrt{-1}\,\mathfrak{k}) \cap \mathfrak{a} \qquad \text{et soit} \qquad Z = X + \sqrt{-1}\,Y,\ X,\ Y \in \mathfrak{k}.$$

Alors $\pi(Z) = \pi(X) + \sqrt{-1}\,\pi(Y) = 0$ et, par suite, $\pi(X) = -\sqrt{-1}\,\pi(Y)$ appartient à $\mathfrak{k}' \cap \sqrt{-1}\,\mathfrak{k}'$. Puisque $\mathfrak{k}' \cap \sqrt{-1}\,\mathfrak{k}' = (0)$, on a $\pi(X) = \pi(Y) = 0$ et, par suite X, $Y \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{a}$. On a donc l'égalité (1).

PROPOSITION 7. — *Soit G un groupe de Lie complexe et connexe satisfaisant à la condition (P). Si G n'est pas simple, il existe un sous-groupe* *fermé, invariant, complexe et connexe A de G de dimension positive et différent de G satisfaisant aux conditions suivantes :*

a. Le groupe quotient G/A satisfait à la condition (P);

b. A est isomorphe à un sous-groupe fermé complexe du groupe linéaire complexe.

Si G est abélien, il existe un tel sous-groupe A d'après la proposition 2. Si G est semi-simple, il existe un sous-groupe fermé, invariant, complexe et connexe A de G qui est semi-simple et qui est différent de G et de (e) (*cf.* la proposition 1). D'après la proposition 1, le groupe A satisfait aux conditions a et b. Supposons donc, dans tout ce qui suit, que G ne soit ni abélien ni semi-simple. Soit R le radical de G (R est, par définition, le plus grand sous-groupe invariant, résoluble et connexe de G). R est fermé et complexe. Nous allons chercher un sous-groupe fermé, complexe et connexe A de R qui est invariant dans G et qui satisfait aux conditions a et b. Pour montrer que G/A satisfait à la condition a, il suffit de montrer que R/A satisfait à la condition (P), parce qu'on sait que G/A satisfait à la condition (P) si et seulement si le centre connexe de G/A satisfait à la même condition, et parce que le groupe R/A étant le radical de G/A, R/A contient le centre connexe de G/A. Remarquons ici que, si A est abélien, la condition b est toujours satisfaite, car, comme A est un sous-groupe de G, A satisfait à la condition (P) et, par suite, d'après la proposition 2, A est isomorphe au groupe $C^n \times C^{*m}$. Soit Z le centre de R et soit Z_0 la composante connexe de Z. Alors Z_0 est un sous-groupe fermé, invariant, complexe et connexe de G. Puisque R/Z est isomorphe au groupe adjoint de R, d'après 1, **A**, R/Z satisfait à la condition (P). D'autre part, l'application canonique de R/Z_0 sur R/Z étant un isomorphisme local, d'après **1**, **B**, R/Z_0 satisfait à la condition (P). Par conséquent, la condition a est vérifiée pour $A = Z_0$. Z_0 étant abélien, Z_0 est isomorphe à un sous-groupe fermé complexe du groupe linéaire complexe. Donc, si la dimension complexe de Z_0 est positive, Z_0 est un sous-groupe cherché. Supposons donc dans tout ce qui suit, que $Z_0 = (e)$. Soit N le radical nilpotent de G (N est, par définition, le plus grand sous-groupe invariant, nilpotent et connexe de G). N est fermé et complexe et $N \subset R$. Soit L un sous-groupe compact maximal de N. On va montrer que L est contenu dans le centre de N. Soit φ la représentation adjointe de N. Alors les valeurs propres des matrices de $\varphi(N)$ sont toutes égales à 1. D'autre part, L étant compact, les matrices de $\varphi(L)$ sont unitaires. Il en résulte immédiatement que $\varphi(L) = 1$ et ceci entraîne que L est contenu dans le centre de N. Puisque les sous-groupes compacts maximaux de N sont conjugués entre eux dans N et puisque L est contenu dans le centre de N, tout sous-groupe compact maximal de N coïncide avec L. Il en résulte que L est un sous-groupe invariant de G, car, pour tout $g \in G$, gLg^{-1} est un sous-groupe compact maximal de $gNg^{-1} = N$ et, par suite, $gLg^{-1} = L$. Supposons d'abord que la dimension de L soit positive. Soit C_0 le centre connexe de N. On a alors $L \subset C_0$. Soient $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{c}$ les algèbres de Lie de L et C_0 respectivement et soit $\mathfrak{a} = \mathfrak{l} + \sqrt{-1}\,\mathfrak{l}$ (remarquons que cette somme est directe). Alors $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{c}$ et $\mathfrak{a}$ est un idéal complexe de l'algèbre de Lie de G. Soit A le sous-groupe de G correspondant à l'algèbre $\mathfrak{a}$. Alors A est complexe et invariant dans G. On va montrer que A est fermé. C_0 étant fermé, il suffit de montrer que A est fermé dans C_0. D'après la proposition 2, il existe un isomorphe α de $C^n \times C^{*m}$ sur C_0. Soit M le sous-groupe compact maximal de $C^n \times C^{*m}$ et soit $\mathfrak{m}$ l'algèbre de Lie de M. Alors $\mathfrak{m} + \sqrt{-1}\,\mathfrak{m}$ est l'algèbre de Lie de C^{*m} et l'on a $\alpha'(\mathfrak{m}) = \mathfrak{l}$, où α' désigne l'isomorphisme de l'algèbre de Lie de $C^n \times C^{*m}$ sur $\mathfrak{c}$ défini par α. Alors $\alpha'(\mathfrak{m} + \sqrt{-1}\,\mathfrak{m}) = \mathfrak{a}$ et, par suite, $\alpha(C^{*m}) = A$. Donc A est fermé dans C_0. On va montrer maintenant que R/A satisfait à la condition (P). Soit K un sous-groupe compact maximal de R et soit $\mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie de K. Alors $K \cap A = L$ et, par suite, $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{l}$. Donc

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{l} + \sqrt{-1}\,\mathfrak{l} = (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{a}) + \sqrt{-1}\,(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{a}).$$

Par suite, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\,\mathfrak{k}$ et donc $(\mathfrak{k} + \sqrt{-1}\,\mathfrak{k}) \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$. Par conséquent, la condition (1) de la proposition 6 est vérifiée et R/A satisfait à la condition (P). Le groupe A étant abélien, A satisfait aux conditions requises.

Supposons maintenant que $L = (e)$. Alors N est simplement connexe. Soit $R = R_0$ et soit $R_1 = [R_0, R_0]$, le groupe dérivé de R. Définissons par récurrence

$$R_2 = [R_1, R_1], \qquad \ldots, \qquad R_i = [R_{i-1}, R_{i-1}].$$

Alors $R_1 \supset R_2 \supset \ldots$ et puisque R est résoluble, il existe un entier positif k tel que $R_k \neq (e)$ et $R_{k+1} = (e)$. D'après le théorème d'Engel, on a $R_1 \subset N$. N étant simplement connexe et nilpotent, tout sous-groupe de Lie connexe de N est fermé et simplement connexe (*voir* CHEVALLEY [2]). En particulier, R_k est fermé et simplement connexe. R_k étant abélien, R_k est isomorphe à un sous-groupe fermé du groupe linéaire complexe. Il est clair que R_k est un sous-groupe invariant de G. Nous allons montrer que le groupe quotient R/R_k satisfait à la condition (P). Soit K un sous-groupe compact maximal de R. R étant résoluble, K est abélien. Soient $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie de R et de K respectivement. Alors l'algèbre dérivée $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$ est l'algèbre de R_1. Montrons que $(\mathfrak{k} + \sqrt{-1}\,\mathfrak{k}) \cap [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] = (0)$. En effet, soit ψ' la représentation adjointe de $\mathfrak{r}$. Utilisant le théorème de Lie, on voit facilement que les matrices dans $\psi'([\mathfrak{r}, \mathfrak{r}])$ sont toutes nilpotentes. D'autre part, K étant compact abélien, les matrices dans $\psi'(\mathfrak{k} + \sqrt{-1}\,\mathfrak{k})$ sont toutes semi-simples. Il en résulte immédiatement que

$$\psi'((\mathfrak{k} + \sqrt{-1}\,\mathfrak{k}) \cap [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]) = (0),$$

ce qui entraîne que $(\mathfrak{k} + \sqrt{-1}\,\mathfrak{k}) \cap [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}]$ est contenu dans le centre de $\mathfrak{r}$.

Puisqu'on a supposé que le centre connexe de R se réduise à l'unité, on a

$$(\mathfrak{k}+\sqrt{-1}\,\mathfrak{k})\cap[\mathfrak{r},\mathfrak{r}]=(0).$$

Soit $\mathfrak{r}_k$ l'algèbre de R_k. Alors $\mathfrak{r}_k\subset[\mathfrak{r},\mathfrak{r}]$ et, par suite,

$$(\mathfrak{k}+\sqrt{-1}\,\mathfrak{k})\cap\mathfrak{r}_k=(0).$$

La condition (1) de la proposition 6 est alors trivialement vérifiée pour $\mathfrak{a}=\mathfrak{r}_k$ et, par suite, R/R_k satisfait à la condition (P). Le groupe R_k satisfait alors aux conditions requises. La proposition 7 est ainsi démontrée.

Exemple. — Soit G le groupe des matrices diagonales de degré 2 à coefficients complexes. G est isomorphe à $C^{\star}\times C^{\star}$. Soit A le sous-groupe de G des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix}\exp z & 0\\ 0 & \exp\sqrt{-1}\,z\end{pmatrix},$$

z parcourt les nombres complexes. On voit facilement que A est fermé dans G et isomorphe à C^1. On va montrer que G/A est un tore complexe. En effet, G est un espace fibré principal de base G/A et de groupe structural A. Le groupe A étant isomorphe à C^1, cette fibration est topologiquement triviale. Il en résulte immédiatement que le groupe fondamental de G/A est isomorphe à celui de G. Par conséquent, le groupe fondamental de G/A est un groupe abélien libre à deux générateurs. La dimension complexe de G/A étant égale à 1, ceci entraîne que G/A est un tore complexe. Le groupe quotient G/A ne satisfait donc pas à la condition (P).

4. Démonstration du théorème 1. — Soit G un groupe de Lie complexe et connexe. Supposons que G satisfasse à la condition (P) et nous allons montrer que la variété de G est une variété de Stein. Nous raisonnons par récurrence sur la dimension complexe de G. Si la dimension complexe de G est égale à 1, G est abélien et, d'après la proposition 2, G est une variété de Stein. Supposons donc qu'on ait déjà démontré que la variété d'un groupe de Lie complexe et connexe satifaisant à la condition (P) de dimension complexe plus petite que n est une variété de Stein. Soit G un groupe de Lie complexe et connexe de dimension complexe n satisfaisant à la condition (P). D'après les propositions 1 et 2, si G est semi-simple ou abélien, la variété de G est une variété de Stein. On peut donc supposer que G ne soit ni semi-simple ni abélien. Soit A un sous-groupe de G satisfaisant aux conditions de la proposition 7. La dimension complexe G/A étant plus petite que n, d'après l'hypothèse de récurrence, la variété de G/A est une variété de Stein. D'autre part, G est un espace fibré principal holomorphe de base G/A et de groupe A. D'après la proposition 5, la variété de G est une variété de Stein. Nous avons donc démontré que la variété d'un groupe de Lie complexe et connexe satisfaisant à la condition (P) est une variété de Stein.

Nous allons maintenant montrer que tout groupe de Lie complexe et connexe dont la variété sous-jacente est une variété de Stein satisfait à la condition (P). Soit G un groupe de Lie complexe et connexe. Supposons que la variété de G soit une variété de Stein. Soit Z le centre de G et soit Z_0 la composante connexe de l'unité de Z. Comme Z_0 est un sous-groupe fermé complexe de G, la variété de Z_0 est une variété de Stein, car une sous-variété fermée complexe d'une variété de Stein est une variété de Stein (*cf.* [1]). Z_0 étant abélien, le groupe Z_0 satisfait alors à la condition (P) (proposition 3) et, par suite, d'après 1, **C**, G satisfait à la même condition. Le théorème 1 est ainsi démontré.

5. Il résulte du théorème 1, de la proposition 4 et de 1, **C** le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *La variété d'un groupe de Lie complexe et connexe est une variété de Stein si et seulement si le centre connexe de ce groupe est isomorphe au groupe* $C^n \times C^{*m}$ *pour certains entiers* n, $m \geqq 0$.

Pour démontrer le théorème 3, on utilisera le lemme suivant dont la démonstration est facile :

LEMME. — *Si une fonction holomorphe sur la variété d'un groupe de Lie complexe abélien connexe est bornée, c'est une constante.*

THÉORÈME 3. — *Si un groupe de Lie complexe opère holomorphiquement et effectivement sur une variété de Stein, la variété de ce groupe est une variété de Stein.*

Soit G un groupe de Lie complexe opérant holomorphiquement et effectivement sur une variété de Stein V. Soit G_0 la composante connexe de l'unité de G. Comme on voit facilement que la variété de G est une variété de Stein si et seulement si la variété de G_0 est une variété de Stein, on peut supposer que G est connexe. Soit Z_0 le centre connexe de G. D'après le théorème 2 et la proposition 4, il suffit de montrer que la variété de Z_0 est une variété de Stein. Soit L un sous-groupe complexe et connexe de Z_0 contenu dans un sous-groupe compact K de Z_0. Soit $x \in V$. L'orbite $L.x$ de x par les opérations des éléments de L est une sous-variété complexe et connexe de V contenue dans le sous-ensemble compact $K.x$ de V. Soit j l'application identique de $L.x$ dans V et soit f une fonction holomorphe sur V. Alors la fonction holomorphe $f \circ j$ sur $L.x$ est bornée, car $L.x$ est contenue dans le sous-ensemble compact $K.x$ de V. D'autre part, la variété $L.x$ est holomorphiquement homéomorphe à la variété d'un groupe quotient du groupe abélien complexe et connexe L. Il résulte alors du lemme que toute fonction holomorphe bornée sur $L.x$ est constante. Par conséquent, pour toute fonction holomorphe f sur V, la fonction $f \circ j$ est constante. D'autre part, V étant une variété de Stein, pour tout $y \in L.x$, il existe n fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sur V qui induisent un système de coordonnées locales au point y (n désigne la dimension complexe de V). Alors une partie des fonctions $f_1 \circ j, \ldots, f_n \circ j$ constitue un système de coordonnées locales de la variété $L.x$ au point y. Puisque les fonctions $f_1 \circ j, \ldots, f_n \circ j$ sont constantes, la dimension complexe de $L.x$ doit être égale à zéro et, par suite, $L.x = x$, car $L.x$ est connexe. On a donc démontré que, pour tout $x \in V$, on a $L.x = x$. Puisqu'on a supposé que G opère effectivement sur V, ceci entraîne que $L = (e)$ (e désigne l'unité de G) et, par suite, le groupe Z_0 satisfait à la condition (P). La variété de Z_0 est alors une variété de Stein. Le théorème 3 est donc démontré.

Remarque. — Dans la démonstration du théorème 3, on n'a utilisé que la propriété suivante de la variété de Stein V : Pour tout $y \in V$, il existe n fonctions holomorphes dans V qui induisent un système de coordonnées locales au point y. Également on démontre le théorème 3 en utilisant seulement la propriété suivante de V : Pour $x, y \in V$, $x \neq y$, il existe une fonction holomorphe f dans V telle que $f(x) \neq f(y)$. En appliquant ces remarques dans le cas $V = G$ (G opère à gauche) on voit que chacune des conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que la variété d'un groups de Lie complexe G soit une variété de Stein :

1° Pour tout $y \in G$, il existe m fonctions holomorphes dans G qui induisent un sytème de coordonnées locales au point y (m désigne la dimension complexe de G);

2° Si $x, y \in G$, $x \neq y$, il existe une fonction holomorphe f dans G telle que $f(x) \neq f(y)$.

6. Théorème 4. — *Un espace fibré principal holomorphe dont la base et la variété du groupe structural sont des variétés de Stein est une variété de Stein.*

Soit $P(G, B)$ un espace fibré principal holomorphe dont la base B et la variété du groupe structural G sont des variétés de Stein. Nous allons montrer d'abord qu'on peut supposer G connexe. Supposons donc que le théorème soit démontré pour G connexe. Soit G_0 la composante connexe de l'unité de G. La variété de G_0 est une variété de Stein, parce que G_0 est fermé dans G. Soit P/G_0 l'espace quotient de P par la relation d'équivalence $x \sim x.g (g \in G_0)$. Alors P/G_0 est un espace fibré principal holomorphe de base B dont le groupe structural est le groupe discret G/G_0. D'après un résultat de Stein [10], P/G_0 est une variété de Stein. D'autre part, P se munit d'une structure d'un espace fibré principal holomorphe de base P/G_0 et de groupe G_0. Puisqu'on a supposé que le théorème 3 est démontré dans le cas où le groupe structural est connexe, P est une variété de Stein. On suppose donc, dans tout ce qui suit, que le groupe structural est connexe. Nous allons démontrer le théorème 3 par récurrence sur la dimension complexe de G. Si la dimension complexe de G est égale à 1, G est abélien et le théorème 3 résulte des propositions 4 et 5. Supposons donc que le théorème 3 soit démontré dans le cas où la dimension complexe du groupe structural est plus petite que n. Soit $P(G, B)$ un espace fibré principal holomorphe dont la base B et la variété de G sont des variétés de Stein et dont la dimension complexe de G est égale à n. Si G est semi-simple ou abélien, il résulte des propositions 1, 4 et 5 que P est une variété de Stein. On peut donc supposer que G ne soit ni semi-simple ni abélien. Soit A un sous-groupe de G satisfaisant aux conditions de la proposition 7. Il résulte du théorème 1 que la variété du groupe G/A est une variété de Stein. Soit P/A l'espace quotient de P par la relation d'équivalence $x \sim x.g (g \in A)$. P/A est un espace fibré principal holomorphe de base B et de groupe G/A. D'après l'hypothèse de récurrence, P/A est une variété de Stein. D'autre part, P se munit d'une structure d'un espace fibré principal holomorphe de base P/A et de groupe A. La variété du groupe A étant une variété de Stein, d'après l'hypothèse de récurrence, P est une variété de Stein. Le théorème 4 est ainsi démontré

Deuxième partie.

1. Nous prouverons ici quelques lemmes et propositions qui seront utilisés plus loin.

LEMME 1. — *Soient $(z_1, \ldots, z_n)$ les coordonnées de C^n et soit U un voisinage de l'origine de C. Il existe alors un nombre $\varepsilon > 0$ satisfaisant à la condition suivante : si $f_1, \ldots, f_n$ sont n fonctions holomorphes dans U telles que $|f_i(z) - z_i| < \varepsilon$ pour tout $z = (z_1, \ldots, z_n) \in U$ et $i = 1, 2, \ldots, n$, les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ constituent un système de coordonnées locales à l'origine.*

En effet, on peut supposer que l'ouvert U contienne un polydisque fermé Δ : $|z_i| \leq a_i (i = 1, \ldots, n)$. On a alors

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right]_{z=0} - \delta_{ij} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\zeta_1| = a_1} \cdots \int_{|\zeta_n| = a_n} \frac{f_i(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) - \zeta_i}{\zeta_1 \ldots \zeta_j^2 \ldots \zeta_n} d\zeta_1 \ldots d\zeta_n.$$

Il en résulte que la valeur absolue $\left| \left[\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right]_{z=0} - \delta_{ij} \right|$ devient aussi petite qu'on veut, si l'on prend ε suffisamment petit. Alors le jacobien $\frac{\partial (f_1, \ldots, f_n)}{\partial (z_1, \ldots, z_n)}$ n'est pas nul à l'origine et le lemme 1 est démontré.

Soit V une variété complexe. Nous désignerons, dans tout ce qui suit, par $H(V)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur V. Pour tout sous-ensemble X de V *l'enveloppe* $\hat{X}$ de X est l'ensemble des points $y \in V$ tels que

$$|f(y)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)|$$

pour toute $f \in H(V)$.

LEMME 2. — *Soit G un groupe de Lie complexe et soit K un sous-groupe de G. Alors l'enveloppe $\hat{K}$ de K est aussi un sous-groupe de G.*

Pour toute $f \in H(G)$ et pour tous x, $y \in G$, posons

$$\hat{f}(x) = f(x^{-1}), \qquad f_y(x) = f(x.y), \qquad f'_y(x) = f(y.x).$$

Il est clair que $\hat{f}$, f_y, $f'_y \in H(G)$ quel que soit $y \in G$. Soit $x \in \hat{K}$. On a alors

$$|f(x.y)| = |f_y(x)| \leq \sup_{z \in K} |f_y(z)| = \sup_{z \in K} |f(z.y)| = \sup_{z \in K.y} |f(z)|$$

pour tout $y \in G$. En particulier, on obtient l'inégalité suivante :

$$(1) \qquad |f(x.y)| \leq \sup_{z \in K} |f(z)| \qquad \text{pour} \quad x \in \hat{K} \quad \text{et} \quad y \in K.$$

De même en utilisant f'_x au lieu de f_y, on voit que

$$(2) \qquad |f(x.y)| \leq \sup_{z \in xK} |f(z)| \qquad \text{pour} \quad x, y \in \hat{K}.$$

D'après (1) on a pour tout $z \in xK\,(x \in \hat{K})$, l'inégalité suivante :

$$|f(z)| \leq \sup_{z' \in K} |f(z')|.$$

Par conséquent on obtient, en vertu de (2),

$$|f(x.y)| \leq \sup_{z' \in K} |f(z')|$$

pour tous x, $y \in \hat{K}$ et toute $f \in H(G)$. Donc, si x, $y \in \hat{K}$, on a $x.y \in \hat{K}$. D'autre part, pour tout $x \in \hat{K}$, on a

$$|f(x^{-1})| = |\hat{f}(x)| \leq \sup_{z \in K} |\hat{f}(z)| = \sup_{z \in K} |f(z^{-1})| = \sup_{z \in K} |f(z)|.$$

Il en résulte que $x^{-1} \in \hat{K}$. L'ensemble $\hat{K}$ est ainsi un sous-groupe de G.

PROPOSITION 8. — *Soit G un groupe de Lie complexe et connexe dont la variété sous-jacente est une variété de Stein. Alors pour tout sous-groupe compact maximal K de G, on a $\hat{K} = K$.*

En effet, d'après le lemme 2, $\hat{K}$ est un sous-groupe de G. D'autre part, d'après la définition même de la variété de Stein, $\hat{K}$ est compact et $\hat{K} \supset K$. K étant un sous-groupe compact maximal de G, ceci entraîne $\hat{K} = K$.

Dans le paragraphe suivant nous utiliserons les résultats suivants concernant des variétés de Stein.

A. — *Soit V une variété de Stein et soit W une sous-variété complexe fermée de V. Alors pour toute fonction $f \in H(W)$, il existe une fonction*

$g \in H(V)$ *telle que* f *soit la restriction de* g *à* W (théorème de H. Cartan, *cf.* Exposé XX [8]).

B. — *Soit* V *une variété de Stein et soit* X *un sous-ensemble compact de* V *tel que* $\hat{X} = X$. *Alors pour tout ouvert* U *contenant* X, *il existe un ouvert* U_0 *tel que* $U \supset U_0 \supset X$ *qui satisfait à la condition suivante : Pour tout nombre positif* ε *et pour toute fonction holomorphe* f *dans* U, *il existe une fonction* $g \in H(V)$ *telle que* $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ *pour tout* $x \in U_0$ (*Théorème d'approximation d'Oka-Weil, cf.* [8], [7]).

Esquissons la démonstration de **B.** D'après le lemme de l'exposé IX [8], on peut trouver un système de fonctions $(f_1, \ldots, f_s)$ $[f_i \in H(V)]$ et un ouvert U_1 tels que $U \supset U_1 \supset X$ et $|f_i| < 1$ sur U_1 et que l'application F de U_1 dans le polydisque ouvert Δ : $|z_i| < 1$ $(i = 1, \ldots, s)$ de C^s définie par $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_s(x))$ soit une application holomorphe biunivoque propre et de rang maximal de U_1 dans Δ, ce qui entraîne que U_1 est une variété d'Oka-Weil au sens de [8]. Alors on peut appliquer le théorème d'approximation d'Oka-Weil pour la variété U_1 et l'on voit donc qu'il existe un ouvert U_0 possédant des propriétés requises.

3. Lemme 2. — *Soit* $P(B, G)$ *un espace fibré principal holomorphe de base* B *et de groupe structural* G. *Supposons que* G *soit connexe. Soit* K *un sous-groupe compact maximal de* G. *Pour un point* $x_0 \in P$, *posons*

$$K_0 = x_0 . K = \{x_0 . g \mid g \in K\}.$$

Si la variété P *est une variété de Stein, alors* K_0 *coïncide avec son enveloppe* $\hat{K}_0$.

Remarquons d'abord que la variété de G est une variété de Stein, car la variété de G est isomorphe à une fibre de P qui est une sous-variété complexe fermée de P. Soit $z_0 = \pi(x_0)$, π étant la projection de P sur B. Montrons que $\hat{K}_0 \subset \pi^{-1}(z_0)$. En effet, soit x_1 un point de P tel que $\pi(x_1) = z_1 \neq z_0$. Soit $W = \pi^{-1}(z_0) \cup \pi^{-1}(z_1)$. Soit f la fonction sur W telle que $f \equiv 0$ sur $\pi^{-1}(z_0)$ et $f \equiv 1$ sur $\pi^{-1}(z_1)$. Alors f étant une fonction dans $H(W)$, d'après 1, **A**, nous trouverons une fonction $g \in H(P)$ telle que f soit la restriction de g. Puisque

$$g(x_1) = 1 > 0 = \sup_{x \in \pi^{-1}(z_0)} |g(x)| \geqq \sup_{x \in K_0} |g(x)|,$$

on voit que $x_1 \notin \hat{K}_0$. On a donc $\hat{K}_0 \subset \pi^{-1}(z_0)$. Utilisant 1, **A**, on voit alors que $\hat{K}_0$ est égal à l'enveloppe de K_0 *dans la variété* $\pi^{-1}(z_0)$. Or, puisque la variété $\pi^{-1}(z_0)$ est isomorphe à la variété de G par la correspondance $g \to x_0 . g$, on voit que $\hat{K}_0 = K_0$ d'après la proposition 8. Le lemme 3 est ainsi établi.

3. Soit G un groupe de Lie complexe et connexe et soit K un sous-groupe compact maximal de G. Nous dirons que G est le *complexifié* de K, si la condition suivante est satisfaite : Pour tout point $g \in K$, il existe un voisinage ouvert U de g et un système de coordonnées locales $z_1, \ldots, z_n$ de G dans U tels que l'ensemble $U \cap K$ soit égal à l'ensemble des points $x \in U$ tels que les coordonnées $z_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ soient toutes réelles. Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie de G et de K respectivement. Alors pour que G soit le complexifié de K, il faut et il suffit que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\,\mathfrak{k}, \qquad \mathfrak{k} \cap \sqrt{-1}\,\mathfrak{k} = (0).$$

Par suite, si un groupe de Lie complexe et connexe G est le complexifié d'un sous-groupe compact maximal de G, la variété de G est une variété de Stein (*cf.* théorème 1) ([1]).

Remarque 1. — La condition suivante est nécessaire et suffisante pour que G soit le complexifié d'un sous-groupe compact maximal : G est réductif et le centre connexe de G est isomorphe au groupe C^{*m} pour un certain entier $m \geq 0$. En particulier, tout groupe semi-simple complexe et connexe est le complexifié d'un sous-groupe compact maximal.

Théorème 5. — *Soit $P(B, G)$ un espace fibré principal holomorphe dont la variété P est une variété de Stein et dont le groupe structural G est connexe et le complexifié d'un sous-groupe compact maximal K de G. Alors la base B est aussi une variété de Stein.*

Soit dg la mesure de Haar sur le groupe compact K dont la mesure totale est égale à 1. Soit θ l'application holomorphe de $P \times G$ dans P définie par $\theta(x, a) = x.a$ $(x \in P,\ a \in G)$. Soit $f \in H(P)$. Considérons la fonction $\tilde{f}$ définie par

$$\tilde{f}(x) = \int_K f(\theta(x, g))\, dg = \int_K f(x.g)\, dg.$$

Alors il est clair que $\tilde{f} \in H(P)$ et que $\tilde{f}(x.g) = \tilde{f}(x)$ pour tout $g \in K$. Montrons que $\tilde{f}(x.a) = \tilde{f}(x)$ pour tout $x \in P$ et tout $a \in G$. Fixons le point $x \in P$. Soit g la fonction holomorphe sur G définie par $g(a) = \tilde{f}(x.a)$. Alors g est constante sur K. G étant le complexifié de K, il en résulte que g est constante sur G tout entier. Par conséquent, $\tilde{f}(x.a) = \tilde{f}(x)$ pour tout $a \in G$. La fonction $\tilde{f}$ induit alors une fonction holomorphe f^* sur la base B telle que $\tilde{f}(x) = f^*(\pi(x))$ pour tout $x \in P$. Réciproquement, si $\tilde{f}$ est de la forme

([1]) D'une manière analogue on peut définir la notion de complexification sans supposer que K soit maximal. Mais par exemple, un tore complexe de dimension complexe n d'un certain type est le complexifié d'un sous-groupe compact de dimension réelle n, et un tore complexe n'est pas une variété de Stein.

$\tilde{f} = f^* \circ \pi$, on a $\tilde{f}(x.a) = \tilde{f}(x)$ pour tout $x \in P$ et tout $a \in G$ et, par suite,

$$\tilde{f}(x) = \int_K \tilde{f}(x.g)\, dg.$$

Par conséquent, l'application $f \to f^*$ est une application de $H(P)$ *sur* $H(B)$ et l'on a

$$f^*(\pi(x)) = \int_K f(x.g)\, dg$$

pour tout $x \in P$.

Pour prouver que B est une variété de Stein, il faut vérifier les trois conditions suivantes :

a. Si $z^1 \in B$, $z^2 \in B$ et $z^1 \neq z^2$, il existe une fonction $h \in H(B)$ telle que $h(z^1) \neq h(z^2)$.

b. Pour toute suite infinie S de points de B, sans point adhérent dans B, il existe une fonction dans $H(B)$ non bornée sur S.

c. Pour tout $z^0 \in B$, il existe n fonctions dans $H(B)$ qui induisent un système de coordonnées locales au point z^0 (n désigne la dimension complexe de B).

Démonstration de *a*. — Soient z^1, $z^2 \in B$ et $z^1 \neq z^2$. Utilisant 1, **A**, on peut trouver une fonction $f \in H(P)$ telle que $f \equiv 0$ sur $\pi^{-1}(z^1)$ et $f \equiv 1$ sur $\pi^{-1}(z^2)$. Alors $f^*(z^1) = 0$ et $f^*(z^2) = 1$ et la condition a est vérifiée.

Démonstration de *b*. — Soit $S = \{z^1, z^2, \dots\}$ une suite infinie de points de B sans point adhérent dans B. Alors $W = \bigcup_{k=1}^{\infty} \pi^{-1}(z^k)$ est une sous-variété complexe fermée de P. Utilisant 1, **A**, on peut trouver une fonction $f \in H(P)$ telle que $f \equiv k$ sur $\pi^{-1}(z^k)$ $(k = 1, 2, \dots)$. Alors $f^*(z^k) = k$ $(k = 1, 2, \dots)$ et la condition b est vérifiée.

Démonstration de *c*. — Soit x^0 un point de P tel que $\pi(x^0) = z^0$. Soit $\{z_1, z_2 \dots, z_n\}$ un système de coordonnées locales au point z^0 dans un voisinage ouvert U de z^0. Posons

$$K_0 = x^0.K = \{x^0.g,\ g \in K\}.$$

Puisque $\pi^{-1}(U) \supset K_0$ et que $\hat{K}_0 = K_0$ (lemme 3), il existe, d'après 1, **B**, un ouvert V_0 tel que $\pi^{-1}(U) \supset V_0 \supset K_0$ qui satisfait à la condition suivante : Pour tout nombre positif ε et pour toute fonction $f \in H(\pi^{-1}(U))$, il existe une fonction $g \in H(P)$ telle que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in V_0$. Or, il est facile de trouver un voisinage ouvert V_1 de x^0 tel que $V_0 \supset V_1.K \supset K_0$, en désignant $V_1.K = \{x.g,\ x \in V_1,\ g \in K\}$. Prenons un nombre $\varepsilon > 0$.

Considérons maintenant les fonctions $f_i = z_i \circ \pi \in H(\pi^{-1}(U))$ $(i = 1, \ldots, n)$. Il existe alors des fonctions $g_i \in H(P)$ telles que

$$|f_i(x) - g_i(x)| < \varepsilon \qquad \text{pour tout} \quad x \in V_0.$$

On obtient alors, pour tout $x \in V_1$,

$$|\tilde{f}_i(x) - \tilde{g}_i(x)| = \left| \int_K (f_i(x.g) - g_i(x.g))\, dg \right|$$
$$\leq \int_K |f_i(x.g) - g_i(x.g)|\, dg < \int_K \varepsilon\, dg = \varepsilon.$$

Donc on a l'inégalité suivante :

$$|f_i^*(y) - g_i^*(y)| < \varepsilon \quad \text{pour tout } y \in \pi(V_1).$$

D'autre part, il est clair que $f_i^*(y) = z_i(y)$ pour $y \in \pi(V_1)$. Par conséquent, on obtient $|z_i(y) - h_i(y)| < \varepsilon$ pour tout $y \in \pi(V_1)$ en posant $h_i = g_i^*$. D'après le lemme 1, on voit que $\{h_1, \ldots, h_n\}$ est un système de coordonnées locales au point z^0 en prenant ε suffisamment petit. La condition c est donc vérifiée et en même temps le théorème 5 est démontré.

Remarque 2. — On se demande si l'on peut se débarrasser de l'hypothèse faite sur G dans le théorème 5. Mais il existe un contre-exemple (l'exemple dans I.3) pour cela, même si P est un groupe de Lie abélien et G est un sous-groupe fermé de P qui est isomorphe à C, B étant l'espace quotient P/G.

4. Dans ce paragraphe nous démontrons le théorème suivant qui est le but essentiel de ce travail :

Théorème 6. — *Soit $E(B, F, G)$ un espace fibré holomorphe de base B, de fibre F et de groupe structural G. Si les variétés B et F sont des variétés de Stein et si le groupe G est connexe, la variété E est aussi une variété de Stein.*

Nous pouvons supposer que G opère effectivement sur F. La variété de G est alors une variété de Stein (théorème 3). Soit K un sous-groupe compact maximal de G. Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie de G et de K respectivement. On a alors $\mathfrak{k} \cap \sqrt{-1}\,\mathfrak{k} = 0$ (théorème 1). Soit $\tilde{\mathfrak{k}} = \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\,\mathfrak{k}$. $\tilde{\mathfrak{k}}$ est une sous-algèbre complexe de $\mathfrak{g}$. Soit $\tilde{K}$ le sous-groupe de G correspondant à $\tilde{\mathfrak{k}}$. Alors K est un sous-groupe compact maximal de $\tilde{K}$ et $\tilde{K}$ est le complexifié de K. Nous allons montrer que le groupe structural de $E(B, F, G)$ se réduit holomorphiquement au sous-groupe $\tilde{K}$ de G. Désignons par $C_d(B, L)$ [resp. $C_a(B, L)$] l'ensemble des classes d'équivalence d'espaces fibrés différentiables (resp. holomorphes) de base B et de groupe structural L. Alors on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} C_d(B, K) & \xrightarrow{j_1} & C_d(B, \tilde{K}) & \xrightarrow{j_2} & C_d(B, G) \\ & & \mu_1 \uparrow & & \uparrow \mu_2 \\ & & C_a(B, \tilde{K}) & \xrightarrow[j_3]{} & C_a(B, G), \end{array}$$

où les applications j_1, j_2 et j_3 sont les applications induites par les injections des groupes correspondants. D'après un résultat récent de GRAUERT [4], [5], μ_1 et μ_2 sont des applications bijectives. Or, on sait que l'application $j_2 \circ j_1$ est surjective et donc que j_2 l'est aussi. Par conséquent, l'application j_3 est aussi surjective, ce qui dit que le groupe structural G se réduit holomorphiquement au sous-groupe $\tilde{K}$. Soit $P(B, \tilde{K})$ l'espace fibré principal holomorphe de groupe structural $\tilde{K}$ associé à E. Puisque la base B et la variété du groupe structural $\tilde{K}$ sont des variétés de Stein, la variété P est aussi une variété de Stein (théorème 4). La variété E est le quotient de $P \times F$ par la relation d'équivalence

$$(x, \xi) \sim (x.g, g^{-1}.\xi) \qquad (x \in P, \xi \in F, g \in \tilde{K}).$$

On vérifie facilement que $P \times F$ se munit d'une structure d'un espace fibré principal holomorphe de base E et de groupe structural $\tilde{K}$ dont les opérations sur $P \times F$ des éléments de $\tilde{K}$ sont comme suit :

$$(x, \xi).g = (x.g, g^{-1}.\xi) \qquad (x \in P, \xi \in F, g \in \tilde{K}).$$

Puisque P et F sont des variétés de Stein, $P \times F$ l'est aussi. Donc on peut appliquer le théorème 5 et l'on voit finalement que E est une variété de Stein. Le théorème 6 est ainsi démontré.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] CARTAN (Henri). — Variétés analytiques complexes et cohomologie, *Colloque sur les fonctions de plusieurs variables* [1953, Bruxelles], p. 41-45. — Liège, G. Thone; Masson, 1953 (Centre belge de Recherches mathématiques).

[2] CHEVALLEY (Claude). — On the topological structure of solvable groups, *Annals of Math.*, Series 2, t. 42, 1941, p. 669-675.

[3] CHEVALLEY (Claude). — *Theory of groups*, vol. 1. — Princeton, Princeton University Press, 1946 (Princeton mathematical Series, 8).

[4] GRAUERT (Hans). — Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen, *Math. Annalen*, t. 135, 1958, p. 263-273.

[5] GRAUERT (Hans). — Analytic fibre bundles over holomorphically complete spaces, *Seminars on analytic functions*, vol. 1. — Princeton, Institute for advanced Study, 1959.

[6] IWASAWA (Kenkichi). — On some types of topological groups, *Annals of Math.*, Series 2, t. 50, 1949, p. 507-558.

[7] OKA (Kiyoshi). — Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, IX : Domaines finis sans point critique intérieur, *Jap. J. of Math.*, t. 23, 1953, p. 97-155.

[8] *Séminaire Henri Cartan*, t. 4, 1951-1952 : Théorie des fonctions de plusieurs variables. — Paris, École Normale Supérieure (multigraphié).

[9] SERRE (Jean-Pierre). — Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein, *Colloque sur les fonctions de plusieurs variables* (1953, Bruxelles), p. 57-68. — Liège, G. Thone; Paris, Masson, 1953 (Centre belge de Recherches mathématiques).

[10] STEIN (Karl). — Ueberlagerungen holomorph-vollständiger komplexer Räume, *Archiv der Math.*, t. 7, 1956, p. 354-361.

[11] YOSIDA (K.) — A theorem concerning the second fundamental theorem of Lie, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, t. 13, 1937, p. 301-304.

(Manuscrit reçu le 2 janvier 1960)

Y. MATSUSHIMA et A. MORIMOTO, Department of Mathematics, Faculty of Science, Nagoya University, Chigusa-ku, Nagoya (Japon).